# Devoir surveillé n°1

## Continuité – Composition – Dérivation – Graphes

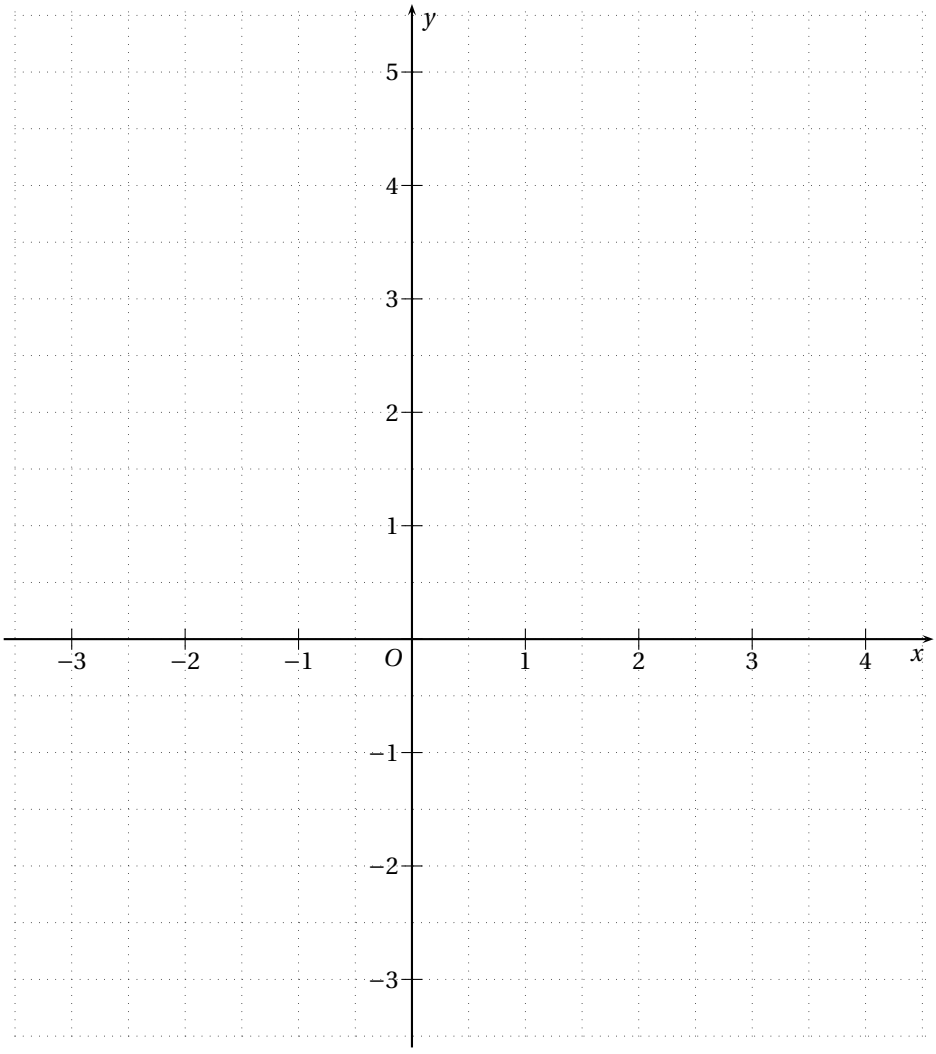
**EXERCICE 1.1** (3 points)**.**
*Pour **tous** les élèves.*
Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=2x^2+x+1$. Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=f\big(g(x)\big)$.

1. Déterminer les valeurs exactes de $h(-3)$, $h(-1)$, $h(0)$ et $h(1)$.
2. Déterminer l'expression de $h(x)$ en fonction de $x$.
3. On pose $\ell(x)=g\big(f(x)\big)$. Sur $\mathbb{R}^+$, a-t-on $\ell=h$ ? *On justifiera.*

**EXERCICE 1.2** (3 points)**.**
*Pour **tous** les élèves.*
La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases} x^2-2x-2 & \text{si } x<1 \\ mx+2 & \text{si } x\geqslant 1 \end{cases}$ On appelle $\mathscr{C}_m$ sa représentation graphique.

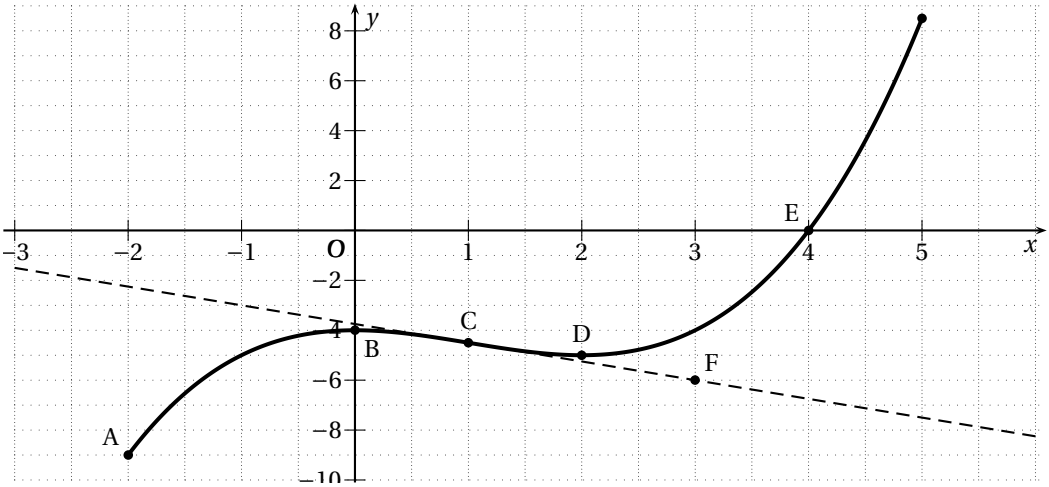
1. Dans le repère de la figure 1.1 de la présente page tracer en bleu $\mathscr{C}_1$ et en vert $\mathscr{C}_{-2}$ *(c'est-à-dire les représentations de $f$ pour $m=1$ et $m=-2$).*
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction $f$ est continue.
3. Déterminer $m$ pour que $f$ soit continue sur $\mathbb{R}$. Tracer alors sa représentation en rouge.

FIGURE 1.1 – Repère de l'exercice 1.2



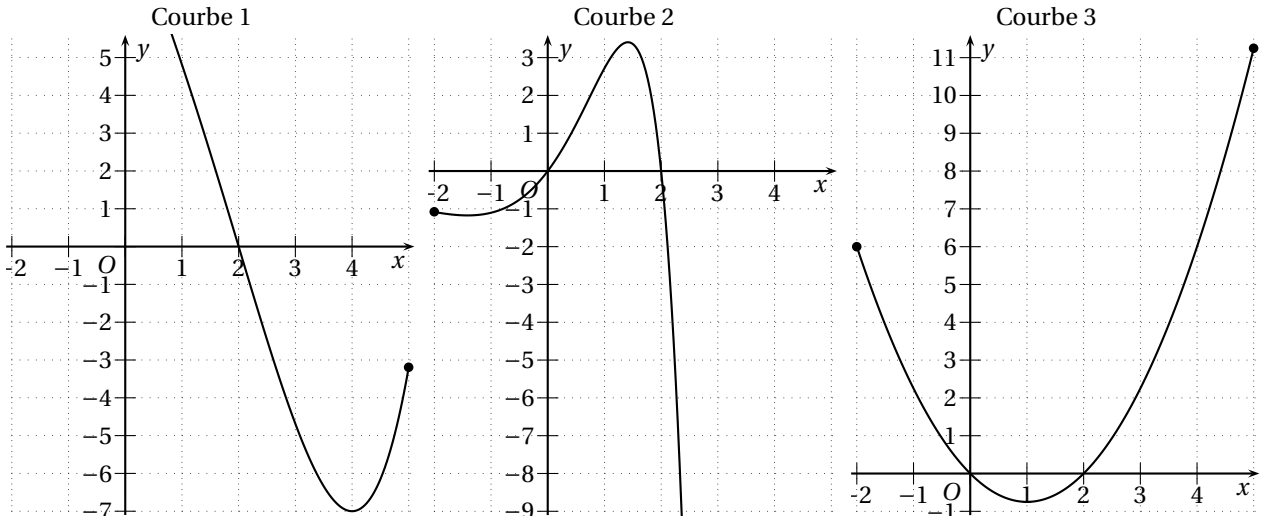
**EXERCICE 1.3** (5 points)**.**
*Pour les élèves **ne suivant pas** l'enseignement de spécialité.*
Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-2;5]$, croissante sur chacun des intervalles $[-2;0]$ et $[2;5]$ et décroissante sur l'intervalle $[0;2]$. On note $f'$ sa fonction dérivée sur l'intervalle $[-2;5]$.
La courbe $\Gamma$ représentative de la fonction $f$ est tracée sur la figure 1.2 de la présente page dans le plan muni d'un repère orthogonal. Elle passe par les points A$(-2;-9)$, B$(0;-4)$, C$(1;-4{,}5)$, D$(2;-5)$ et E$(4\ ;\ 0)$.
En chacun des points B et D la tangente à la courbe $\Gamma$ est parallèle à l'axe des abscisses.
On note F le point de coordonnées $(3;-6)$. La droite (CF) est la tangente à la courbe $\Gamma$ au point C.

FIGURE 1.2 – Repère de l'exercice 1.3 (non spécialistes)



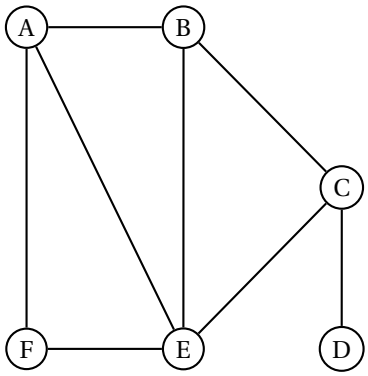

1. À l'aide des informations précédentes et de la figure, préciser sans justifier :
   (a) les valeurs de $f(0)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
   (b) le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel $x$ de l'intervalle $[-2;5]$.
   (c) le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel $x$ de l'intervalle $[-2;5]$.
2. Parmi les trois représentations graphiques 1.3 de la présente page, une représente la fonction dérivée $f'$ de $f$ et une autre représente une fonction $h$ telle que $h' = f$ sur $[-2;5]$.
   Déterminer la courbe associée à la fonction $f'$ et celle qui est associée à la fonction $h$.
   *Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix*

FIGURE 1.3 – Les trois courbes possibles de l'exercice 1.3 (non spécialistes)



**EXERCICE 1.3** (5 points)**.**
*Pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité.*
Les questions sont indépendantes.

1. La figure ci-contre propose un graphe.
   (a) Citer deux sommets non adjacents (*justifier brièvement*).
   (b) Ce graphe est-il connexe (*justifier brièvement*) ?
   (c) Ce graphe contient-il un sous-graphe d'ordre 3 qui soit complet ? Et d'ordre 4 ? *Si oui le(les) citer.*
   (d) Ce graphe contient-il un sous-graphe stable d'ordre 3 ? *Si oui le citer.*
   (e) Déterminer graphiquement la distance entre chacun des sommets (*on pourra faire un tableau*).
   (f) Déterminer le diamètre de ce graphe.




2. Est-il possible que dans un groupe de six personnes (*on justifiera chaque réponse*) :
   (a) quatre d'entre elles aient 4 amis, une d'entre elles 2 amis et la dernière 6 amis ?
   (b) trois d'entre elles aient 5 amis, deux d'entre elles 3 amis et la dernière 2 amis ?
   (c) deux d'entre elles aient 3 amis, deux d'entre elles 2 amis et les deux dernières 1 ami ?

**EXERCICE 1.4** (9 points)**.**
*Pour **tous** les élèves.*
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$$

On appelle $f'$ sa fonction dérivée et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. (a) Montrer que, pour tout $x \neq 3$, $f'(x) = \frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de $x$.
   (c) Dresser le tableau des variations de $f$ en indiquant les extremums locaux.
2. Déterminer, s'il y en a, les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
3. Déterminer, s'il y en a :
   (a) les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses ;
   (b) une équation de $T_0$, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
4. Dans le repère de la figure 1.4 de la présente page où une partie de la courbe $\mathscr{C}$ a déjà été tracée :
   (a) placer les points de $\mathscr{C}$ correspondant aux extremums locaux ;
   (b) placer les éventuelles intersections de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées ;
   (c) tracer les tangentes de la question 3 ;
   (d) compléter le tracé de la courbe $\mathscr{C}$.

FIGURE 1.4 – Figure de l'exercice 1.4

