Chapitre 2

Rappels et compléments sur les suites

Sommaire

Une grande partie des sections de ce chapitre sont des rappels de Première. Dans ce cas les exemples seront limités et les preuves des propriétés ne seront pas rappelées.

2.1 Définition, vocabulaire et notations

Définition 2.1. Une suite numérique u est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une fonction qui à tout entier naturel n associe un reel, noté $u(n)$ ou, plus généralement, u_n.

Définition 2.2 (explicite)**.** Soit f une fonction définie au moins sur $\mathbb{R}^+$. Une suite (u_n), telle que $u_n = f(n)$ est dite définie de manière *explicite*.

Définition 2.3 (par récurrence)**.** Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$.
Une suite (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ est dite définie *par récurrence*.

Remarque. Une suite peut aussi être définie par la donnée de u_0 et u_1 et une relation de récurrence du type $u_{n+2} = f(u_{n+1}\,; u_n)$ où f est une fonction de deux variables.

EXERCICE 2.1.
Dans chacun des cas suivants, déterminer les termes jusqu'au rang $n = 5$.

1. (u_n) telle que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1}{n+1} + n$
2. (v_n) telle que $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \frac{2}{v_n} + 1$
3. (w_n) telle que $w_0 = 0$, $w_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $w_{n+2} = -2(w_{n+1})^2 + w_n$

2.2 Représentation graphique d'une suite

2.2.1 Cas général

Définition 2.4. Dans un repère $\left(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la représentation graphique d'une suite (u_n) est l'ensemble des points M_n de coordonnées $(n\,; u_n)$.

Exercice.
Construire les représentations graphiques de (u_n) et (v_n) définies à l'exercice 2.1.

2.2.2 Cas d'une suite définie par récurrence

Dans le cas d'une suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$, une autre représentation graphique possible s'obtient en procédant de la façon suivante :

1. On trace la représentation graphique $\mathscr{C}$ de f et la première bissectrice d'équation $y = x$.
2. On place le premier terme u_0 sur l'axe des abscisses.
3. On utilise $\mathscr{C}$ pour construire $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées.
4. On reporte u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la première bissectrice.
5. On utilise $\mathscr{C}$ pour construire $u_2 = f(u_1)$ sur l'axe des ordonnées.
6. etc.

On obtient alors la *répresentation en chemin* de la suite.

Exercice.
Construire la représentation en chemin de (v_n) définie à l'exercice 2.1.

2.3 Monotonie d'une suite

Définition 2.5. Une suite est dite :
- *croissante* si, pour tout n, $u_{n+1} \geqslant u_n$;
- *décroissante* si, pour tout n, $u_{n+1} \leqslant u_n$;
- *stationnaire* si, pour tout n, $u_{n+1} = u_n$.

Si la suite ne change pas de sens de variation, on dit qu'elle est *monotone*.

Remarque. On obtient les définitions de *strictement* croissante, décroissante ou monotone en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

Remarques. Pour étudier la monotonie d'une suite :
- On peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$. Cette méthode est très générale et « fonctionne » souvent.
- Dans le cas d'une suite *à termes strictement positifs*, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1. Cette méthode est plus adaptée aux suites dont le terme général est une puissance ou un produit.
- Dans le cas d'une suite définie par une formule explicite, on peut étudier les variations de la fonction associée sur $[0\,; +\infty[$.

Exercice.
Étudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n) définies dans l'exercice 2.1.

2.4 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 2.6. Une suite (u_n) est dite :
- *majorée* par un réel M si, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$;
- *minorée* par un réel m si, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$;
- *bornée* par m et M si elle est minorée par m et majorée par M.

Exercice.
On a vu dans l'exemple précédent que la suite (u_n) définie dans l'exemple 2.1 était croissante. En déduire que la suite est minorée et donner le *plus grand* minorant possible.

Propriété 2.1. *Soit (u_n) une suite.*
- *Si (u_n) est croissante alors (u_n) est minorée par u_0 (et par tout réel inférieur à u_0).*
- *Si (u_n) est décroissante alors (u_n) est majorée par u_0 (et par tout réel supérieur à u_0).*

La preuve de cette propriété triviale est laissée en exercice au lecteur.

2.5 Suites convergentes

Définition 2.7. Une suite (u_n) est dite :
- *convergente* si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ où l est un réel ;
- *divergente* sinon.

Propriété 2.2. *Soit (u_n) une suite définie de manière explicite par $u_n = f(n)$ où f est une fonction admettant une limite en l'infini. Alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

On l'admettra.

EXERCICE.
Étudier la convergence de la suite (u_n) définie dans l'exemple 2.1.

2.6 Quelques suites particulières

2.6.1 Suites arithmétiques

Définition et premières propriétés

Définition 2.8. On appelle *suite arithmétique* toute suite (u_n) telle que

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = u_n + r \text{ où } r \in \mathbb{R}$$

r est appelé *la raison* de la suite arithmétique.

Remarque. Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de montrer que, pour tout n, la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante. Cette constante sera alors la raison de la suite.

Propriété 2.3. *Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et raison r. Alors, pour tout entier naturel n et tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$, on a : $u_n = u_p + (n-p)r$.*
Et en particulier, avec $p = 0$:

$$u_n = u_0 + nr$$

Remarque. Cette propriété est importante car elle transforme une suite arithmétique, définie par récurrence ($u_{n+1} = f(u_n)$), en une suite définie explicitement ($u_n = f(n)$).
La démonstration de cette propriété sera faite plus tard dans l'année.

Somme de termes consécutifs

Pour obtenir ce résultat, nous avons besoin de la petite propriété suivante (on appelle ça un *lemme* : une propriété qui sert à la démonstration d'une autre)

Lemme 2.4. *Soit $S_n = 1+2+\ldots+n$ la somme des n premiers entiers. Alors $S_n = 1+2+\ldots+n = \dfrac{(1+n)n}{2}$*

Preuve. Écrivons S de deux manières :

$$\begin{array}{rcccccccccc} S_n & = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & n-1 & + & n \\ \text{et } S_n & = & n & + & n-1 & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\ \text{donc } 2S_n & = & n+1 & + & n+1 & + & \ldots & + & n+1 & + & n+1 \end{array}$$

Donc $2S_n = n(n+1) \Leftrightarrow S_n = \dfrac{(1+n)n}{2}$ ◊

Démontrons alors que :

Propriété 2.5. *Soit (u_n) une suite arithmétique et n et p deux entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$. Alors :*

$$\sum_{i=p}^{n} u_i = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \frac{(u_p + u_n)(n-p+1)}{2}$$

En particulier, en posant $p = 0$, on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$$

Preuve. Commençons par le second point.
Pour tout i on a $u_i = u_0 + ir$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} u_i &= u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n & &= u_0 + (u_0 + r) + \ldots + (u_0 + (n-1)r) + (u_0 + nr) \\
&= (n+1)u_0 + r(1 + \ldots + n) & &= (n+1)u_0 + r\left(\frac{(1+n)n}{2}\right) \text{ d'après le lemme} \\
&= \frac{2(n+1)u_0 + r(1+n)n}{2} & &= \frac{(n+1)(2u_0 + nr)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(u_0 + u_0 + nr)}{2} & &= \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2} \text{ car } u_0 + nr = u_n
\end{aligned}$$

Passons au premier point.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=p}^{n} u_i &= u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n & &= u_p + (u_p + r) + \ldots + (u_p + (n-p)r) \\
&= (n-p+1)u_p + r(1 + \ldots + (n-p)) & &= \ldots \\
&= \frac{(n-p+1)(u_p + u_p + (n-p)r)}{2} & &= \frac{(u_p + u_n)(n-p+1)}{2}
\end{aligned}$$

◊

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs *d'une suite arithmétique est :*

$$S = \frac{(1^{er} \textit{ terme} + \textit{dernier}) \times (\textit{nb de termes})}{2}$$

2.6.2 Suites géométriques

Définition et premières propriétés

Définition 2.9. On appelle *suite géométrique* toute suite (u_n) telle que

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = q \times u_n$ où $q \in \mathbb{R}$

q est appelé *la raison* de la suite géométrique.

Remarques.
1. Si $q = 0$, tous les termes de la suite, hormis peut-être u_0 sont nuls.
   Si $u_0 = 0$, tous les termes de la suite sont nuls.
   En dehors de ces deux cas triviaux, inintéressants, tous les termes de la suite sont différents de zéro.
2. Pour démontrer qu'une suite est géométrique (en dehors des deux cas triviaux), il suffit de montrer que, pour tout n, le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. Cette constante sera alors la raison de la suite.

Exemples 2.1.
- La suite définie par : pour tout $n \geq 1$, $u_n = 2^n$ est géométrique.
  En effet $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \Leftrightarrow u_{n+1} = 2u_n$ (de raison 2).
- La suite définie par : pour tout n, $u_n = n^2$ n'est pas arithmétique.
  En effet $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \neq$ constante.
  On peut le voir encore plus facilement sur les premiers termes :
  $\frac{u_2}{u_1} = 4 \neq \frac{u_3}{u_2} = \frac{9}{4}$

Propriété 2.6. *Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et raison q. Alors, pour tout entier naturel n et tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$, on a : $u_n = q^{n-p}u_p$*
Et en particulier, avec $p = 0$:

$$u_n = q^n u_0$$

Remarque. Cette propriété est importante car elle transforme une suite géométrique, définie par récurrence ($u_{n+1} = f(u_n)$), en une suite définie explicitement ($u_n = f(n)$).

La démonstration de cette propriété sera faite plus tard dans l'année.

Somme de termes consécutifs

Pour obtenir ce résultat, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.7. *Soit $q \neq 1$ et $S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$. Alors $S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.*

Preuve. Remarquons que $q \times S = q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1}$.
Donc $S - qS = 1 - q^{n+1} \Leftrightarrow S(1-q) = 1 - q^{n+1}$ donc, pour $q \neq 1$, $S = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$. ♢

Démontrons alors que :

Propriété 2.8. *Soit* (u_n) *une suite géométrique de raison* $q \neq 1$ *et* n *et* p *deux entiers naturels tels que* $0 \leq p \leq n$. *Alors :*

$$\sum_{i=p}^{n} u_i = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

En particulier, en posant $p = 0$*, on obtient :*

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Preuve. On ne démontrera que le second point.
Pour tout i on a $u_i = q^i u_0$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} u_i &= u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n &&= u_0 + qu_0 + q^2 u_0 + \ldots + q^n u_0 \\ &= u_0(1 + q + \ldots + q^n) &&= u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\end{aligned}$$ ♢

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs *d'une suite géométrique est :*

$$S = 1^{er} \text{ terme} \frac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q}$$

2.7 Exercices

EXERCICE 2.2 (Suites arithmétiques)**.**
L'objet de cet exercice est d'étudier quelques propriétés supplémentaires des suites arithmétiques.
Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r

1. **Étude de la monotonie d'une suite arithmétique**
   (a) Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
   (b) En déduire dans quels cas on a, pour tout entier naturel n :
   - $u_{n+1} \leqslant u_n$
   - $u_{n+1} \geqslant u_n$
   - $u_{n+1} = u_n$

   (c) En déduire dans quels cas une suite arithmétique est croissante, décroissante ou stationnaire.
2. **Étude de la convergence d'une suite arithmétique**
   On vient de voir qu'une suite arithmétique peut être définie de façon explicite par $u_n = f(n)$.
   (a) Expliciter f.
   (b) Étudier la limite de f en $+\infty$.
   (c) En déduire la convergence d'une suite arithmétique.
3. Soit $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.
   Étudier la convergence de la suite (S_n).

EXERCICE 2.3 (Suites géométriques)**.**
L'objet de cet exercice est d'étudier quelques propriétés supplémentaires des suites arithmétiques.
Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 > 0$ et de raison q

1. **Étude de la monotonie d'une suite géométrique**
   (a) Montrer que si $q < 0$ alors la suite n'est pas monotone.
   (b) Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ selon les valeurs de q lorsque $q \geqslant 0$.
   (c) En déduire dans quels cas on a, pour tout entier naturel n :

- $u_{n+1} \leqslant u_n$
- $u_{n+1} \geqslant u_n$
- $u_{n+1} = u_n$

(d) En déduire dans quels cas une suite géométrique est croissante, décroissante ou stationnaire.

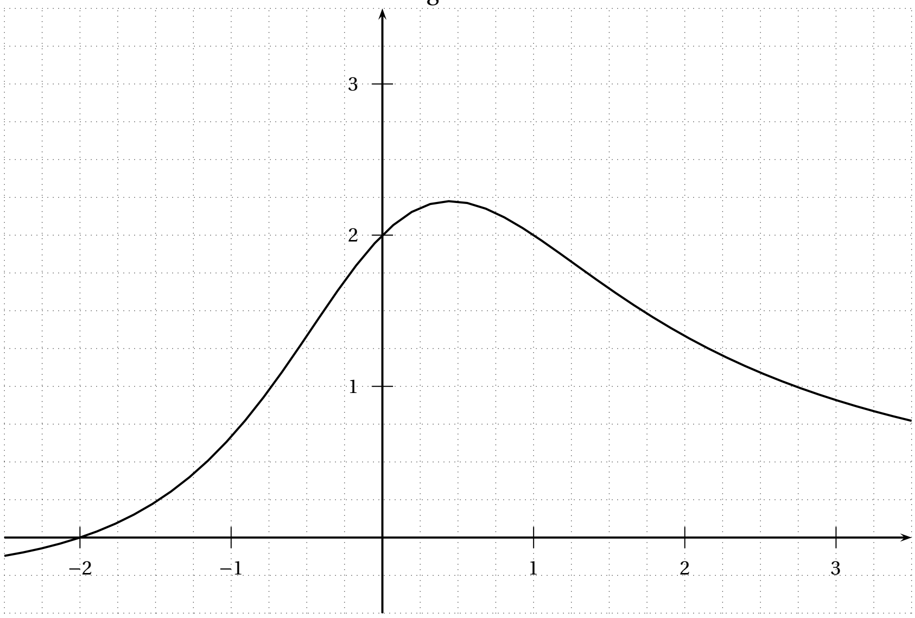
2. **Étude de la convergence d'une suite géométrique**
   On admettra la propriété suivante :

   PROPRIÉTÉ 2.9. *Soit q un réel.*
   - *Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$*
   - *Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$*

   En déduire la convergence d'une suite géométrique quand $u_0 > 0$.
3. Soit $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.
   Étudier la convergence de la suite (S_n).

EXERCICE 2.4.
On a tracé dans le repère de la figure 2.1 de la présente page la courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{2x+4}{2+x^2}$.
Construire la représentation graphique en chemin de la suite (u_n) définie par (u_n) : $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+4}{2+u_n^2} \end{cases}$

FIGURE 2.1 – Figure de l'exercice 2.4



EXERCICE 2.5.
On a tracé dans le repère de la figure 2.2 page suivante la courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$.
Construire la représentation graphique en chemin de la suite (u_n) définie par (u_n) : $\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 + 1 \end{cases}$

EXERCICE 2.6.
On a tracé dans le repère de la figure 2.3 page ci-contre la courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$.
Construire la représentation graphique en chemin de la suite (u_n) définie par (u_n) : $\begin{cases} u_0 = -1,5 \\ u_{n+1} = \frac{u_n+3}{u_n+1} \end{cases}$

EXERCICE 2.7.
(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{5n+1}{n+1}$.

1. Montrer que cette suite est bornée par 0 et 5.
2. Étudier la monotonie de cette suite.
3. Étudier la convergence de cette suite.

EXERCICE 2.8.
(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = 2^{-n} + \frac{2}{\sqrt{n}} - 1$.
Étudier la convergence de cette suite.

FIGURE 2.2 – Figure de l'exercice 2.5

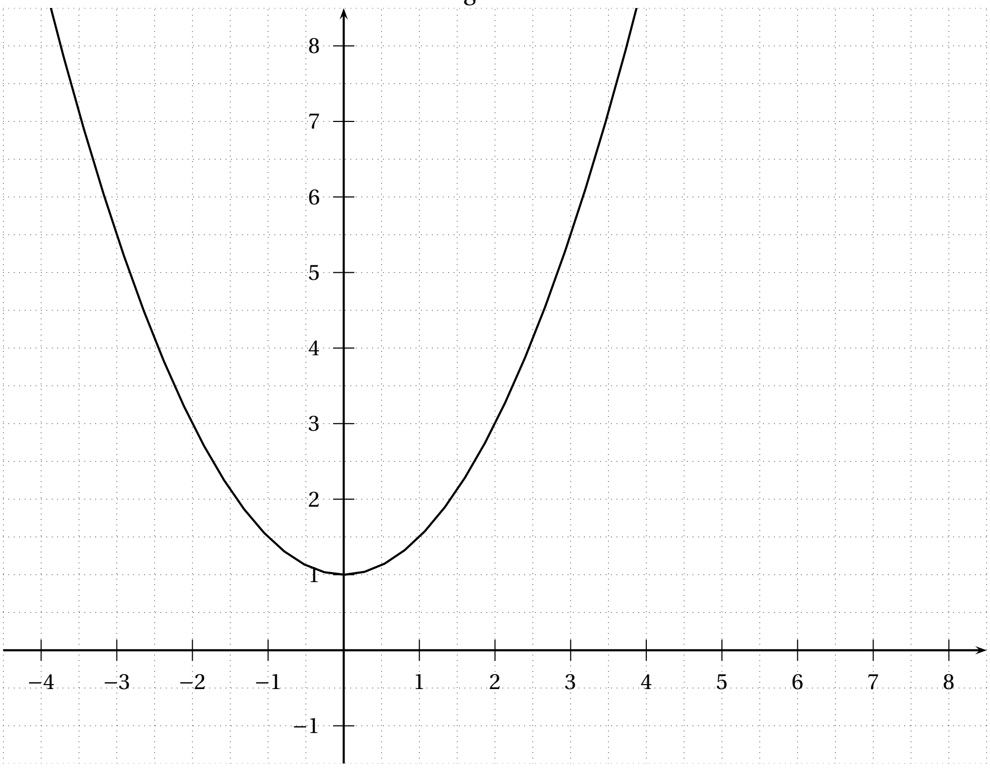
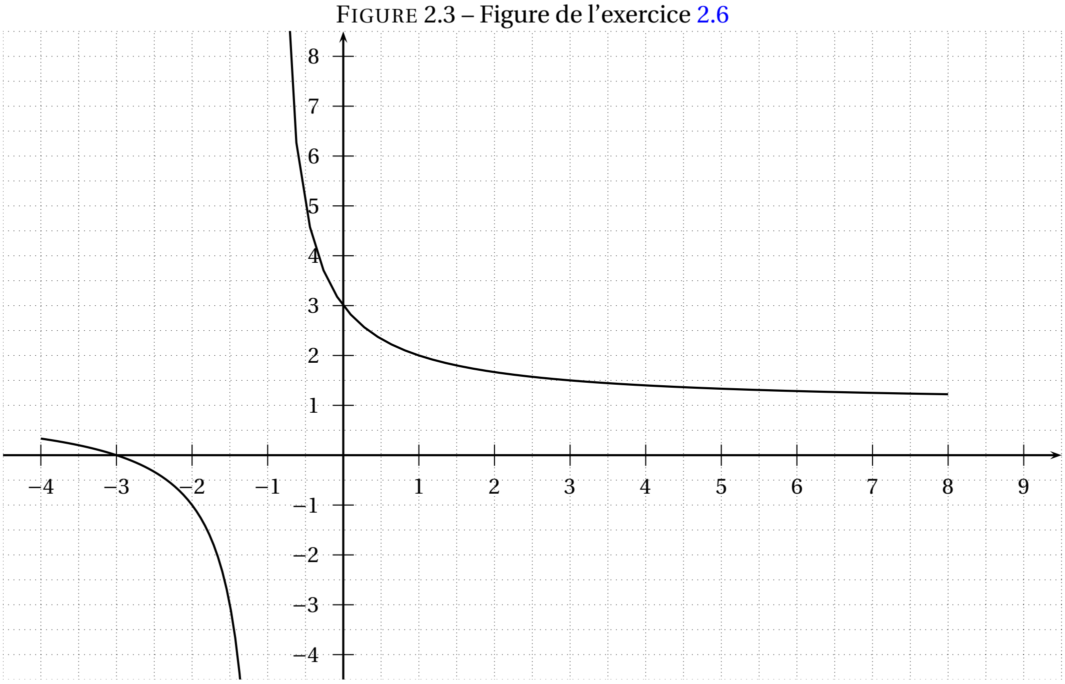


FIGURE 2.3 – Figure de l'exercice 2.6



EXERCICE 2.9.
(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 + 3n - 1$.

1. Étudier la monotonie de cette suite.
2. Étudier la convergence de cette suite.
3. Déterminer si la suite est minorée ou majorée.

EXERCICE 2.10.
(u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{2n+1}{3n+2}$.

1. Montrer que cette suite est bornée.
2. Étudier la monotonie de cette suite.
3. Étudier la convergence de cette suite.