Fiche B

Expressions algébriques

B.1 Rappels

Définition. Développer c'est transformer un produit en une somme. Factoriser c'est transformer une somme en un produit.

Propriété. *Au collège, on a obtenu les factorisations et développements suivants :*

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} ka+kb & = & \ldots\ldots\ldots\ldots & (a+b)^2 & = & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a+b)(c+d) & = & \ldots\ldots\ldots\ldots & (a-b)^2 & = & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & & & a^2-b^2 & = & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

B.2 Technique

EXERCICE B.1.
Parmi les formules rappelées dans la propriété ci-dessus, lesquelles sont des formules de développement, lesquelles sont des formules de factorisation ?

EXERCICE B.2.
Développer puis réduire les expressions suivantes :

- $A = (x^2+4)(2x-3)$
- $B = x+2(x-5)+8(3-2x)$
- $C = (5-2x)(x-4)$
- $D = (x-4)^2+(3x+1)^2$
- $E = (x-1)^2-(2x+5)^2$
- $F = x(x+1)(x-3)$
- $G = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
- $H = (a+b)^3$
- $I = (a-b)^3$
- $J = -(x-7)$
- $K = -(2x+3)^2$
- $L = (x-2)^2$
- $M = (x+1)^2-x^2$

EXERCICE B.3.
Factoriser au maximum les expressions suivantes :

- $A = x(x-1)+2x(x-3)$
- $B = (x-1)^2+4(x-1)(x+5)$
- $C = x^2-(3x+1)^2$
- $D = x(x-4)-5(4-x)$
- $E = 4x^2+20x+25$
- $F = x(x-1)-(2x+5)x$
- $G = (x+5)^2-(2x+7)^2$
- $H = (5x+1)(-3x+4)+x(10x+2)$
- $I = x^3-12x^2$
- $J = x^2-4+(x-2)(2x+1)$
- $K = 2x-3+(3-2x)^2$
- $L = (2a+1)^2-(a+6)^2$
- $M = (2x-3)(1-x)-3(x-1)(x+2)$
- $N = (x-1)^2+2(x^2-1)$
- $O = x^4+4x^3+4x^2$
- $P = 4x^5-x^3$
- $Q = x^7-x^5$
- $R = x(x+2)^2-4x(x-1)^2$
- $S = (2a-b)(b-a)-(2b-a)(b-2a)$
- $T = a^4-b^4$

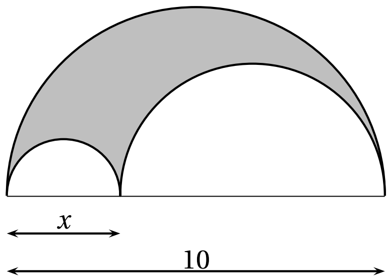
B.3 Problèmes

PROBLÈME B.1.
Montrer que le somme du produit de trois entiers consécutifs $n-1$, n et $n+1$ et de l'entier n est le cube d'un entier.

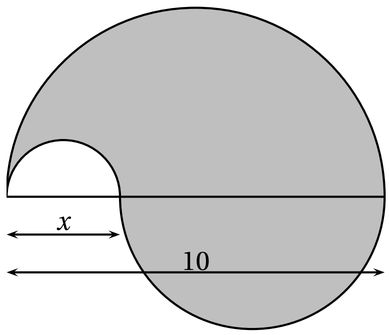
PROBLÈME B.2.
Choisir un nombre entier, élever le nombre suivant et le nombre précédent cet entier au carré, puis faire la différence de ces deux carrés : on obtient un multiple du nombre choisi. Pourquoi ?

PROBLÈME B.3.
Choisir quatre nombres entiers consécutifs, puis faire le produit du plus petit et du plus grand, puis faire le produit des deux nombres. Que remarque-t-on ? Est-ce toujours vrai ? Le démontrer.

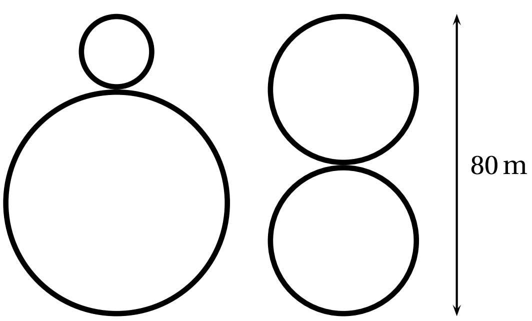
PROBLÈME B.4.
Soit x un nombre strictement compris entre 0 et 10. Calculer le périmètre de la figure grisée en fonction du nombre x. Que constate-t-on ?



PROBLÈME B.5.
Soit x un nombre strictement compris entre 0 et 10. Calculer l'aire de la surface grisée en fonction de x.

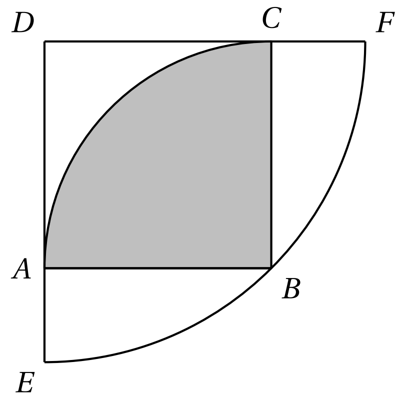


PROBLÈME B.6.
Oscar et Alix doivent tracer sur la plage un circuit de karting. Ils souhaitent construire un circuit en forme de 8 et disposent de 80 mètres de plage. Sur la figure ci-dessous sont tracés leurs modèles respectifs, composés chacun de deux cercles tangeants ; dans le premier modèle le petit cercle est d'un rayon quelconque (compris entre 0 et 80 m) tandis que dans le second modèle les deux cercles ont même rayon. De ces deux circuits, lequel est le plus long ?



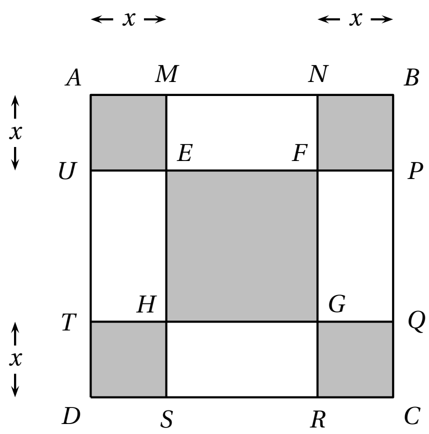
PROBLÈME B.7.
$ABCD$ est un carré. Pour construire E et F, on a tracé un quart de cercle de centre D passant par B. On a également tracé un quart de cercle de centre B passant par A.

1. Montrer que l'aire de la surface blanche intérieure au secteur DEF est égale à l'aire de la surface grisée.
2. L'aire de la surface grisée est-elle plus grande ou plus petite que les trois quarts de l'aire du carré $ABCD$?



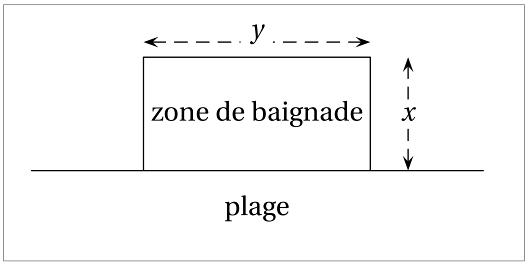
B.4 Problèmes dits *de synthèse*

PROBLÈME B.8.
Sur les côtés d'un carré $ABCD$ de côté 4, on place les points M, N, P, Q, R, S, T et U comme indiqué sur le dessin, où $0 \leqslant x \leqslant 2$. On note $\mathscr{A}(x)$ l'aire du domaine grisé.



1. Montrer par un raisonnement géométrique que $\mathscr{A}(x)$ peut s'écrire sous l'une des formes suivantes : $\mathscr{A}(x) = 4x^2 + (4-2x)^2$ ou $\mathscr{A}(x) = 16 - 4x(4-2x)$.
2. Montrer que l'on a aussi : $\mathscr{A}(x) = 8x^2 - 16x + 16$.
3. En utilisant la forme la plus adaptée, calculer $\mathscr{A}(2)$ puis $\mathscr{A}(\sqrt{3})$.
4. (a) Montrer que : $\mathscr{A}(x) = 8(x-1)^2 + 8$.
   (b) En déduire que l'aire $\mathscr{A}(x)$ est minimale pour $x = 1$.
5. (a) Montrer que : $\mathscr{A}(x) = (2x-1)(4x-6) + 10$.
   (b) En utilisant l'expression précédente de $\mathscr{A}(x)$, déterminer les valeurs de x telles que l'aire $\mathscr{A}(x)$ soit égale à 10.

PROBLÈME B.9.
Les maîtres nageurs d'une plage disposent d'un cordon flottant d'une longueur de 400 m avec lequel ils délimitent la zone de baignade surveillée, de forme rectangulaire.
Le problème est de déterminer les dimensions de ce rectangle pour que l'aire de baignade soit maximale.
On appelle x la largeur du rectangle et y sa longueur.



1. Expression de l'aire de la zone de baignade .
   (a) Calculer l'aide de la zone de baignade lorsque $x = 50$ m et lorsque $x = 100$ m.
   (b) Quelles sont les valeurs posibles pour x ?
   (c) Sachant que la longueur du cordon est de 400 m, exprimer y en fonction de x.
   (d) Exprimer, en fonction de x, l'aire $\mathscr{A}(x)$ de la zone de baignade. Sur quel intervalle cette fonction est-elle définie ?
2. Recherche graphique de l'aire maximale.
   (a) Représenter dans un repère aux unités bien choisies la courbe de $\mathscr{A}$.
   (b) Pour quelle(s) valeur(s) de x, l'aire semble-t-elle maximale ?
3. Recherche par le calcul de l'aire maximale.
   (a) Démontrer que pour tout $x \in [0; 400]$, $\mathscr{A}(x)$ peut s'écrire sous la forme :
   $$\mathscr{A}(x) = 20000 - 2(x-100)^2$$
   (b) Peut-on obtenir une aire de 22 000 m^2 ? Justifier.
   (c) Quelle est l'aire maximale qu'on peut obtenir ? Quelles sont alors les dimensions du rectangle ?