Chapitre 1

Généralités sur les fonctions : Rappels et compléments

Sommaire

1.1 Généralités **2**
1.1.1 Fonctions affines 2
1.1.2 Autres fonctions usuelles 3
1.1.3 Fonction trinôme 3
1.1.4 La continuité (approche graphique) 5
1.1.5 Composition de fonctions 6
1.2 Dérivation **7**
1.2.1 Lectures graphiques 7
1.2.2 Fonctions dérivées des fonctions usuelles 7
1.2.3 Opérations algébriques et dérivation 9
1.2.4 Fonctions rationnelles 9
1.2.5 Dérivée et composition 10
1.3 Limites **11**
1.3.1 Lectures graphiques 11
1.3.2 Limites des fonctions usuelles 11
1.3.3 Opérations sur les limites 12
1.3.4 Détermination de limites 12
1.3.5 Fonctions polynômes et fonctions rationnelles 12
1.3.6 Inégalités et limites 13
1.3.7 Limites de fonctions composées 13
1.4 Bilan et compléments **15**
1.4.1 Fonction continue 15
1.4.2 Inégalités et limites 16
1.4.3 Fonctions composées 16
1.5 Exercices **17**

1.1 Généralités

1.1.1 Fonctions affines

EXERCICE 1.1.

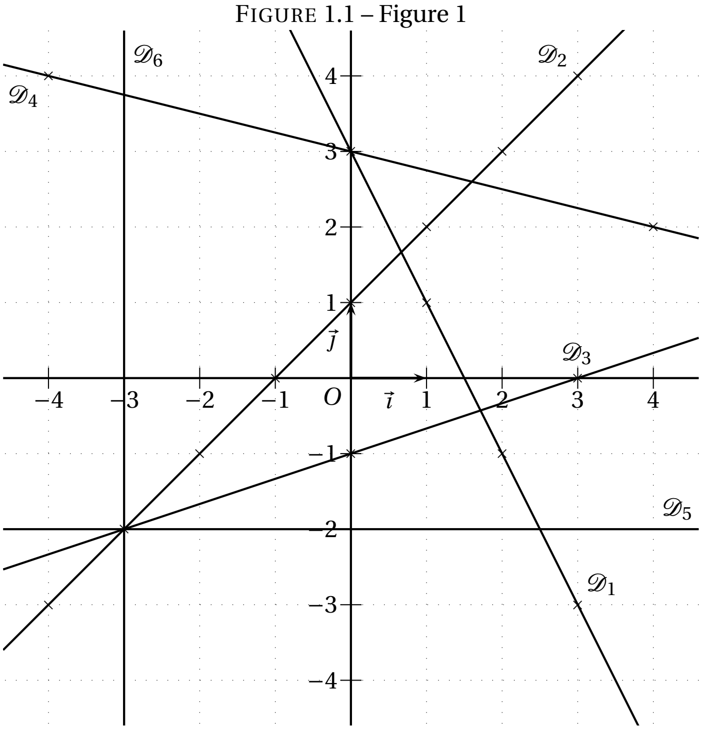
1. Dans un même repère, tracer les représentations graphiques des fonctions suivantes (définies sur $\mathbb{R}$) :
   - $f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 5$;
   - $f_2(x) = 4x - 2$;
   - $f_3(x) = -3$;
   - $f_4(x) = \frac{3}{4}x - 4$.
2. Dans un autre repère, tracer les représentations graphiques des fonctions suivantes (définies sur $\mathbb{R}$) :
   - $g_1(x) = -5x + 10$;
   - $g_2(x) = \frac{3x-1}{6}$;
   - $g_3(x) = 6x - 14$;
   - $g_4(x) = \frac{-2x+1}{4}$.
3. Dans un autre repère, tracer les droites suivantes :
   - $\mathscr{D}_1$ passant par $H(3;1)$ et de coefficient directeur -1 ;
   - $\mathscr{D}_2$ passant par $I(-3;2)$ et de coefficient directeur $-\frac{1}{4}$;
   - $\mathscr{D}_3$ passant par $K(1;0)$ et de coefficient directeur 3 ;
   - $\mathscr{D}_4$ passant par $L(0;2)$ et de coefficient directeur $\frac{4}{3}$;
   - $\mathscr{D}_5$ passant par $M(-2;2)$ et de coefficient directeur 0 ;

EXERCICE 1.2.
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de la droite (PQ) :

- $P(1;2)$ et $Q(3;-1)$;
- $P(0;-1)$ et $Q(2;3)$;
- $P(1;3)$ et $Q(1;4)$;
- $P(4;4)$ et $Q(-1;2)$;
- $P(-2;2)$ et $Q(3;2)$;

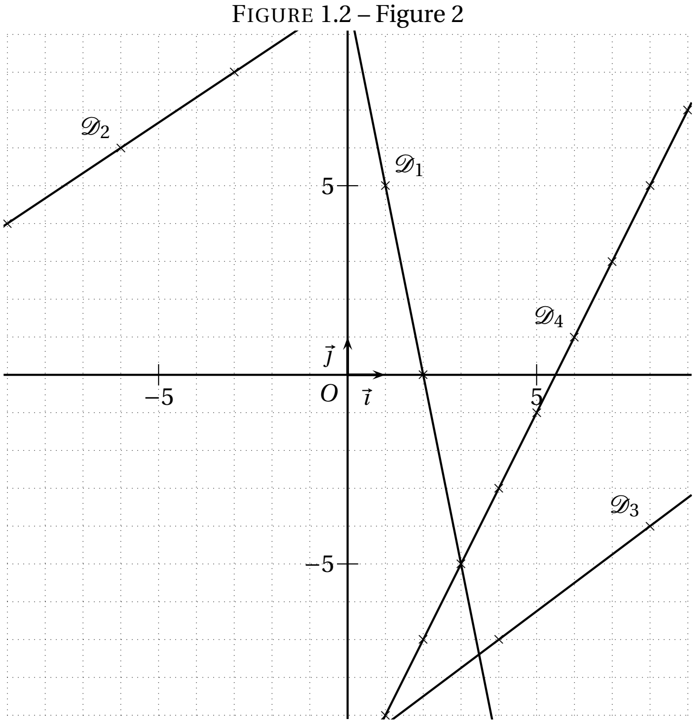
EXERCICE 1.3.
Déterminer graphiquement les équations réduites des droites représentées sur la figure 1.1 de la présente page.

FIGURE 1.1 – Figure 1



Même question pour les droites représentées sur la figure 1.2 page suivante.

FIGURE 1.2 – Figure 2



1.1.2 Autres fonctions usuelles

EXERCICE 1.4.
Compléter le tableau 1.4, page suivante, sur le modèle de la deuxième ligne.

1.1.3 Fonction trinôme

EXERCICE 1.5.
Une entreprise produit de la farine de blé.
On note q le nombre de tonnes de farine fabriquée avec $0 < q < 80$.
On appelle $C(q)$ le coût total de fabrication, $R(q)$ la recette obtenue par la vente et $B(q)$ le bénéfice obtenu par la vente de q tonnes de farine.

1. Sachant que chaque tonne est vendue 120 €, exprimer $R(q)$ en fonction de q.
2. Sachant que $C(q) = 2q^2 + 10q + 900$:
   (a) tracer la courbe représentant le bénéfice ; quelle est sa nature ?
   (b) déterminer graphiquement puis par le calcul la quantité de farine à produire pour que la production soit rentable ;
   (c) déterminer graphiquement puis par le calcul la production correspondant au bénéfice maximal et le montant de ce bénéfice.

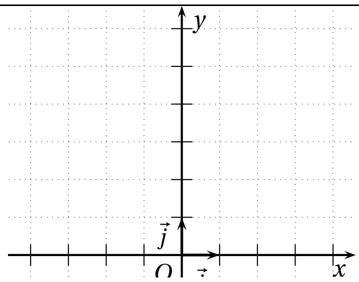
EXERCICE 1.6.
Le gérant d'une salle de cinéma de 300 places constate que le nombre x de spectateurs à une séance est une fonction affine du prix p du billet. Plus précisement on a : $x = 300 - 12p$.

1. Sachant que les charges fixes pour chaque séance s'élèvent à 1848 €, montrer que le bénéfice $b(p)$ de chaque séance est égal à $b(p) = -12p^2 + 300p - 1848$.
2. En déduire graphiquement puis par le calcul pour quelles valeurs de p le séance est rentable.
3. Déterminer graphiquement puis par le calcul le prix du billet pour que le bénéfice soit maximum. Quel est alors le nombre de spectateurs et le bénéfice réalisé ?

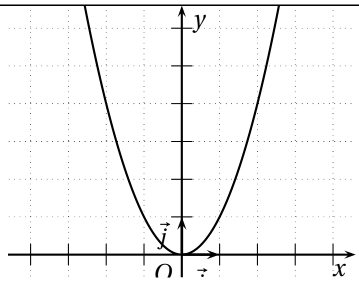
TABLE 1.1 – Fonctions de référence - Tableau de l'activité 1.1.2

<table>
<tr><th>Fonction
Définie sur</th><th>Variations</th><th>Allure de la courbe représentative</th></tr>
<tr><td>Affine

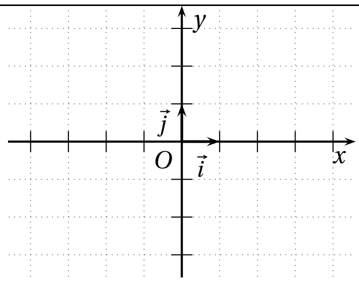
$f(x) = \dots\dots\dots$

$D_f = \dots\dots\dots$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Carré

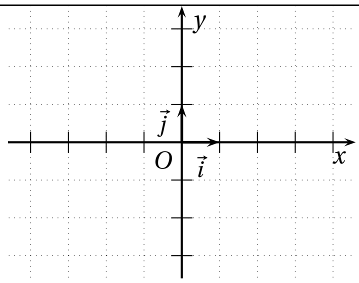
$f(x) = x^2$

$D_f = \mathbb{R}$</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x) = x^2$</td><td>↘</td><td>0</td><td>↗</td></tr></table></td><td>
Parabole</td></tr>
<tr><td>Cube

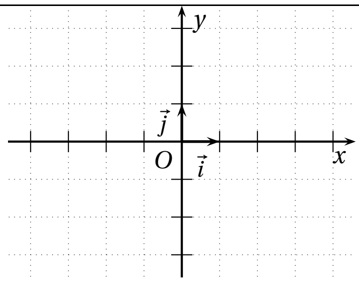
$f(x) = \dots\dots\dots$

$D_f = \dots\dots\dots$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Inverse

$f(x) = \dots\dots\dots$

$D_f = \dots\dots\dots$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Racine carrée

$f(x) = \dots\dots\dots$

$D_f = \dots\dots\dots$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

1.1.4 La continuité (approche graphique)

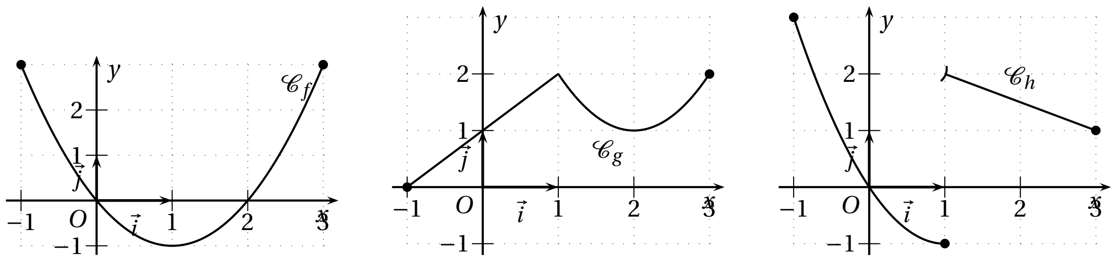
EXERCICE 1.7.
Voici quatre fonctions définies sur $\mathbb{R}$:

- $f(x) = x^2$;
- $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$;
- $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leqslant 2 \\ 4 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$.
- $l(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 2 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$;

Représenter graphiquement ces fonctions et commenter les courbes obtenues.

EXERCICE 1.8.
Les fonctions f, g et h représentées sur la figure 1.3 de la présente page par leurs courbes respectives $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$, sont définies sur $[-1; 3]$.

FIGURE 1.3 – Trois courbes



1. Lesquelles de ces fonctions sont continues sur $[-1; 3]$?
2. Si la fonction n'est pas continue sur $[-1; 3]$, donner les intervalles sur lesquels elle est continue.

EXERCICE 1.9.
La fonction *partie entière* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel x, associe l'entier relatif n tel que $n \leqslant x < n+1$. On note E cette fonction.

1. Compléter le tableau ci-dessous :

x	-1	$-0,75$	$-0,5$	$-0,25$	$-0,01$	0	$0,25$	$0,5$	$0,75$	$0,99$	1	$1,25$	$1,5$	$1,75$	$1,99$	2	$2,25$
$E(x)$																	

2. Représenter graphiquement E.

EXERCICE 1.10.
f est la fonction définie sur $[-2; 5]$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [-2; 1[\\ x+p & \text{si } x \in [1; 5] \end{cases}$

1. Tracer la représentation graphique de f pour :
   - $p = 2$;
   - $p = 1$;
   - $p = -2$.
2. f est-elle continue sur $[-2; 1[$? Sur $[1; 5]$?
3. Comment choisir p pour que f soit continue sur $[-2; 5]$? Tracer alors la courbe représentative de f.

EXERCICE 1.11.
f est la fonction définie sur $[-2; 3]$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + 3 & \text{si } x \in [-2; 2] \\ 2x+1 & \text{si } x \in]2; 3] \end{cases}$

1. Tracer la représentation graphique de f pour :
   - $b = 1$;
   - $b = -2$.
2. Comment choisir b pour que f soit continue sur $[-2; 3]$? Tracer alors la courbe représentative de f.

EXERCICE 1.12.
f est la fonction définie sur $[-3; 2]$ par : $f(x) = \begin{cases} ax^2 + x + 2 & \text{si } x \in [-3; -1[\\ x+1 & \text{si } x \in [-1; 2] \end{cases}$

1. Tracer la représentation graphique de f pour :
   - $a = 1$;
   - $a = 0$;
   - $a = -2$.
2. Comment choisir a pour que f soit continue sur $[-3; 2]$? Tracer alors la courbe représentative de f.

1.1.5 Composition de fonctions

EXERCICE 1.13.
Une entreprise raffine de la matière première puis vend le produit raffiné.
La fonction f qui donne le nombre de tonnes de produit raffiné en fonction du nombre de tonnes x de matière première est $f(x) = -\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2}$ pour $0 \leqslant x \leqslant 4$.
La fonction g qui donne le bénéfice de la vente (en milliers d'€) de X tonnes de produit raffiné est $g(X) = -2X^2 + 7X - 5$.

1. Que représente la fonction $h(x) = g(f(x))$?
2. Déterminer h pour $x = 0$, $x = 1$, $x = 3$.
3. Déterminer l'expression de h en fonction de x.

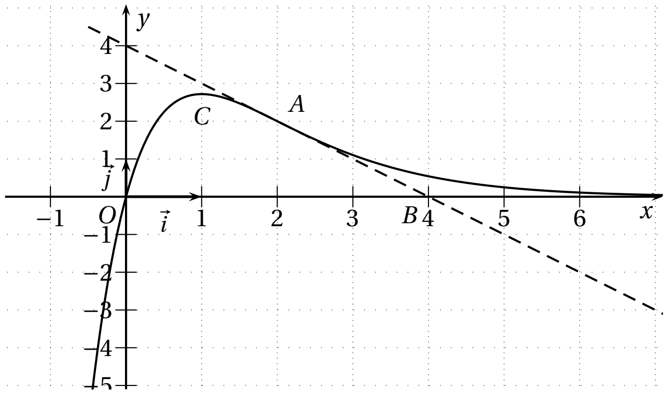
EXERCICE 1.14.
Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = x + 2$ et soit h la fonction définie par $h(x) = f\left(g(x)\right)$.

1. Déterminer, s'ils existent, $h(0)$, $h(1)$, $h(2)$ et $h(5)$.
2. Déterminer l'expression de $h(x)$ en fonction de x.
3. Déterminer l'expression de $l(x) = g\left(f(x)\right)$. A-t-on $l = h$?
4. Mêmes questions avec f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$.
5. Mêmes questions avec f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x - 1$.

1.2 Dérivation

1.2.1 Lectures graphiques

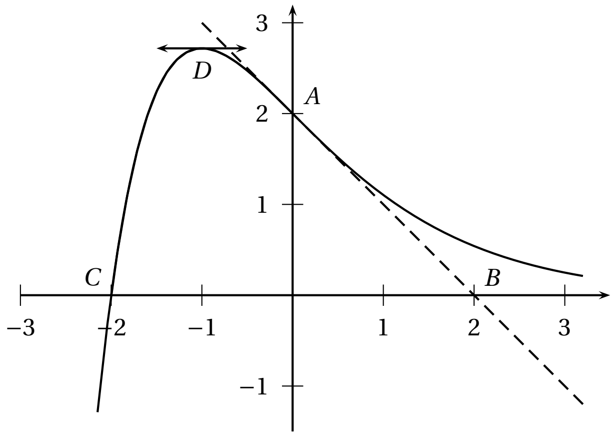
EXERCICE 1.15.
On a représenté ci-contre, dans un repère orthogonal, la courbe représentative Γ d'une fonction g définie et dérivable sur ℝ.
La courbe Γ passe par les points $O(0; 0)$ et $A(2; 2)$. La droite (AB) est la tangente en A à la courbe Γ. La tangente à Γ au point C d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Déterminer graphiquement les valeurs de $g(0)$, $g(2)$, $g'(1)$ et $g'(2)$.
2. Une des représentations graphiques page suivante, figure 1.4, représente la fonction dérivée g' de g. Déterminer laquelle.
3. Une des représentations graphiques page suivante, figure 1.4, représente une fonction h telle que $h' = g$ sur ℝ. Déterminer laquelle.

Vous justifierez vos choix à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques.

EXERCICE 1.16.
On a représenté ci-contre la courbe représentative Γ, dans un repère orthonornal, d'une fonction f définie sur ℝ. La courbe Γ passe par les points $A(0 ; 2)$ et $C(-2 ; 0)$ et la droite (AB) est la tangente en A à Γ. La tangente à Γ en son point D d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. Avec la précision permise par le graphique, résoudre les inéquations suivantes :
   - $f(x) > 1$;
   - $f(x) \geqslant 3$;
   - $f(x) \leqslant 2$;
   - $f(x) < 4$.
3. Parmi les trois représentations graphiques 1.5 page suivante, une représente la fonction dérivée f' de f et une autre représente une fonction h telle que $h' = f$ sur ℝ. Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction h.
   Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix

1.2.2 Fonctions dérivées des fonctions usuelles

EXERCICE 1.17.
Compléter le tableau 1.2 de la présente page.

TABLE 1.2 – Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	définie sur	Fonction dérivée f'	définie sur
$f(x) = k$ (constante)	ℝ	$f'(x) =$	
$f(x) = mx + p$	ℝ	$f'(x) =$	
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	ℝ	$f'(x) =$	
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) =$	
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$	$f'(x) =$	

FIGURE 1.4 – Courbes de l'exercice 1.15

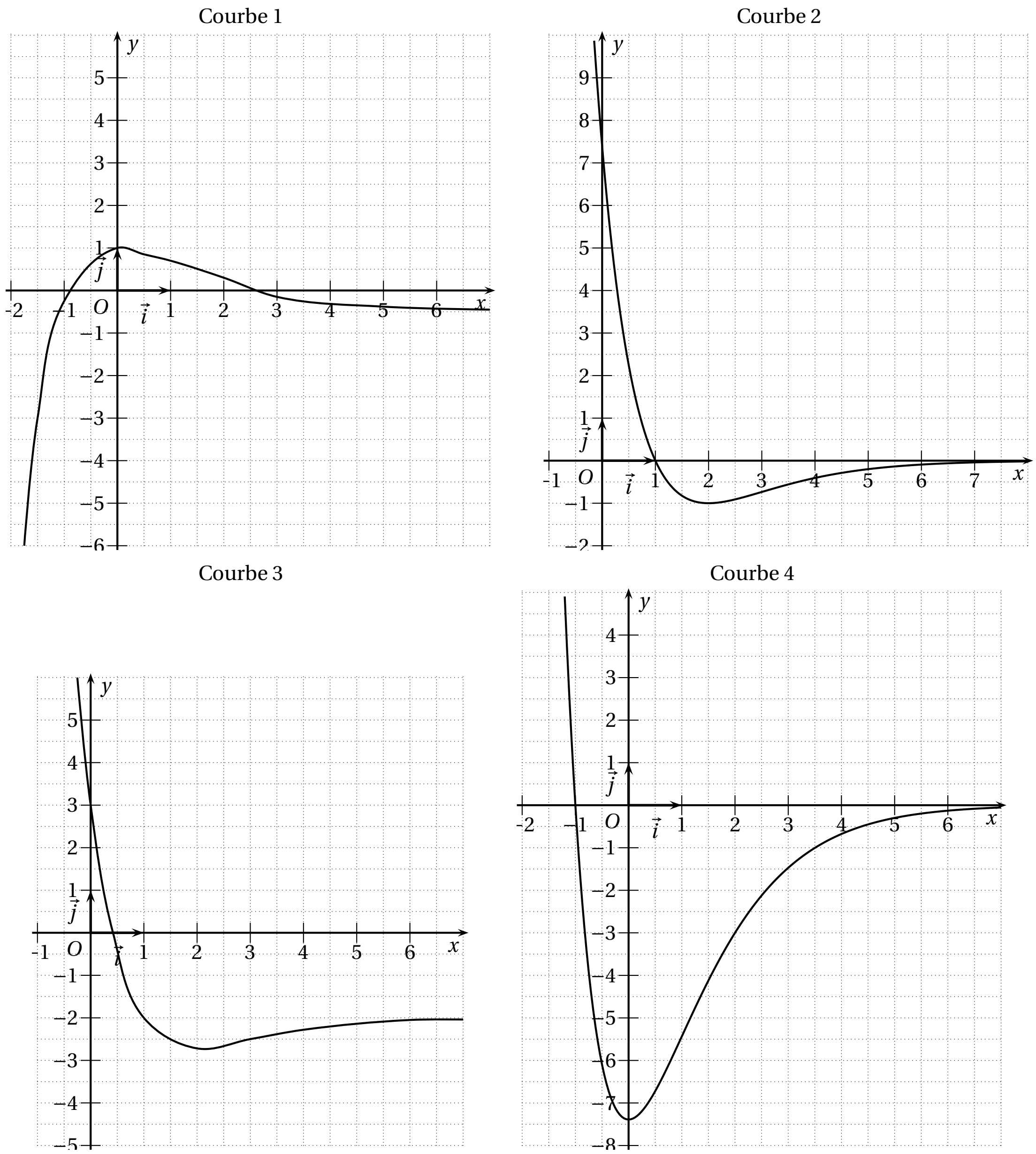
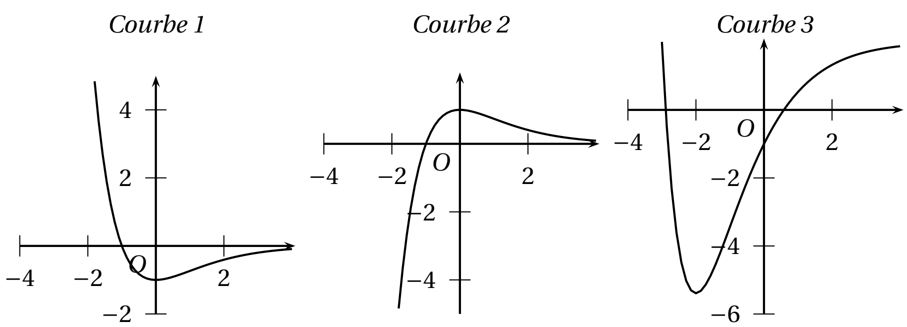


FIGURE 1.5 – Courbes de l'exercice 1.16



1.2.3 Opérations algébriques et dérivation

EXERCICE 1.18.
Soient u et v définies et dérivables sur un même intervalle I. Compléter le tableau 1.3 de la présente page.

TABLE 1.3 – Opérations sur les fonctions dérivées

Fonction	Fonction dérivée
ku avec $k \in \mathbb{R}$	
$u+v$	
$u \times v$	
$\frac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	

1.2.4 Fonctions rationnelles

EXERCICE 1.19.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-3x+6}{x-1}$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Étudier le sens de variation de f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.
4. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
5. Peut-on trouver des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$?
6. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente a pour coefficient directeur -3.

EXERCICE 1.20.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+x+4}{x-3}$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de f et dresser le tableau des variations de f.
3. Déterminer, s'il y en a, les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
4. Déterminer, s'il y en a :
   (a) les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
   (b) une équation de T_0, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   (c) les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente a pour coefficient directeur -1.
   (d) les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$.
5. (a) Dans un repère orthogonal placer les points et représenter les tangentes rencontrés dans les questions précédentes. (*unités graphiques 1 cm = 1 unité sur l'axe des abscisses et 1 cm = 2 unités sur l'axe des ordonnées*)
   (b) Tracer $\mathscr{C}$ dans le même repère.

EXERCICE 1.21.
f est la fontion définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-11x+28}{x-3}$
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ et on note f' la fonction dérivée de f.
   (a) Justifer que $f'(x) = \dfrac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
   (c) Établir le tableau de variation de la fonction f (on indiquera les extremums locaux de f).
   (d) Soit A le point de la courbe $\mathscr{C}$ dont l'abscisse est 4 et T la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$. Déterminer une équation de la droite T.
2. Dans un repère :
   (a) placer les points correspondant aux extremums locaux de f et A ;
   (b) tracer T et les tangentes horizontales à la courbe $\mathscr{C}$;
   (c) tracer $\mathscr{C}$.

1.2.5 Dérivée et composition

EXERCICE 1.22.
On donne dans le tableau ci-dessous pour plusieurs fonctions f données, la dérivée de $f(x)$ et la dérivée de $f(g(x))$ où g est une fonction définie, dérivable et telle que la composée de f et de g est aussi définie et dérivable.

$f(x)$	$f'(x)$	$(f(g(x))'$
$mx+p$	m	$m\times g'(x)$
x^n	nx^{n-1}	$n(g(x))^{n-1}\times g'(x)$
$\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$\dfrac{-n}{(g(x))^{n+1}}\times g'(x)$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{g(x)}}\times g'(x)$

1. Conjecturer la formule générale qui donne la dérivée de la fonction $f(g(x))$.
2. Appliquer cette formule pour $f(x)=x^5$ et :
   - $g(x)=2x-4$;
   - $g(x)=x^2+3x-4$.
3. Appliquer la formule pour déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes, où u est une fonction dérivable et strictement positive, à l'aide de la formule générale obtenue en 1 :
   - u^n ;
   - $\frac{1}{u}$;
   - $\sqrt{u}$.
4. Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes à l'aide des formules obtenues en 3 :
   - $f(x)=(3x^2+2x+7)^5$;
   - $g(x)=\frac{1}{x^3+2x+1}$;
   - $h(x)=\sqrt{x^2+x+4}$;
   - $l(x)=\sqrt{(x+1)^5}$.

EXERCICE 1.23.
On pose $h(x)=f(g(x))$ pour tout réel x.

1. Recopier et compléter les inégalités suivantes dans chacun des cas suivants :
   (a) en supposant que f et g sont croissantes sur $\mathbb{R}$;
   (b) en supposant que f et g sont décroissantes sur $\mathbb{R}$;
   (c) en supposant que l'une est croissante et l'autre décroissante sur $\mathbb{R}$.

   Soients a et b tels que $a<b$
   alors $g(a)\ldots\ldots g(b)$ car $g\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   et $f(g(a))\ldots\ldots f(g(b))$ car $f\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
   finalement $h(a)\ldots\ldots h(b)$
   La fonction h est donc ………………. sur $\mathbb{R}$

   Conjecturer alors le sens de variation de la fonction h en fonction des sens de variations de f et de g.
2. Soient f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par, respectivement, $f(x)=x^3$, $g(x)=2x+1$ et $h(x)=-x+2$ et l la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=\frac{1}{x}$.
   En utilisant la propriété obtenue en 1, déterminer le sens de variation des fonctions suivantes :
   - $x\longmapsto f(g(x))$;
   - $x\longmapsto g(f(x))$;
   - $x\longmapsto f(h(x))$;
   - $x\longmapsto g(h(x))$;
   - $x\longmapsto h(g(x))$;
   - $x\longmapsto h(l(x))$.

1.3 Limites

1.3.1 Lectures graphiques

EXERCICE 1.24.
On donne, sur les figures 1.6 et 1.7 de la présente page, les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ de trois fonctions f, g et h.
Pour chacune des trois fonctions :

1. déterminer D, son ensemble de définition ;
2. conjecturer les limites de la fonction aux bornes de cet ensemble de définition ;
3. indiquer les asymptotes à chacune des courbes.

FIGURE 1.6 – Lectures graphiques : premier cas

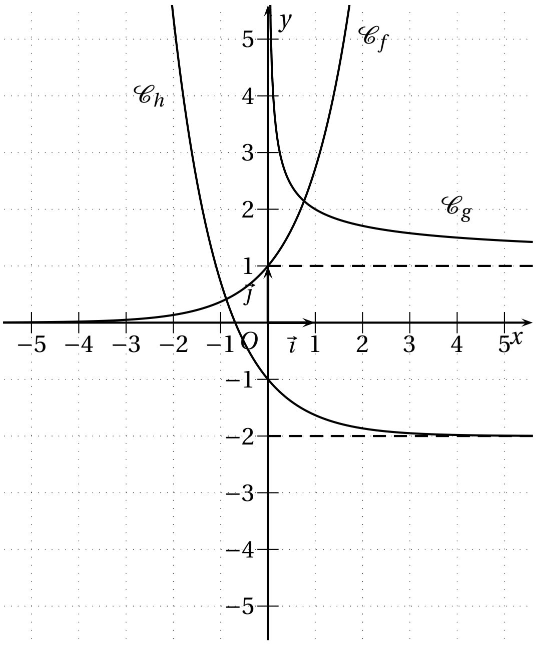
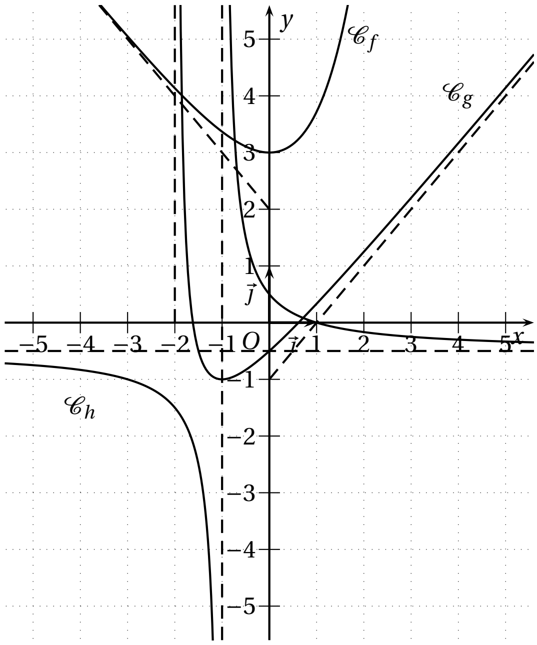


FIGURE 1.7 – Lectures graphiques : second cas (la courbe $\mathscr{C}_h$ est en deux parties)



1.3.2 Limites des fonctions usuelles

EXERCICE 1.25.
Compléter le tableau 1.4 de la présente page.

TABLE 1.4 – Tableau du 1.25

f	D_f	Limites
$f(x) = mx+p$	$\mathbb{R}$	Si $m>0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p) = \ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p) = \ldots\ldots$ Si $m<0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p) = \ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p) = \ldots\ldots$ Si $m=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p) = \ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p) = \ldots\ldots$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \ldots\ldots$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = \ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = \ldots\ldots$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \ldots\ldots$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = \ldots\ldots$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = \ldots\ldots$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \dfrac{1}{x} = \ldots\ldots$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\lim\limits_{x\to0} \sqrt{x} = \ldots\ldots$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = \ldots\ldots$

1.3.3 Opérations sur les limites

EXERCICE 1.26.
Compléter les tableaux 1.5, 1.6, 1.7 et 1.8 de la présente page en indiquant dans chaque case, lorsqu'on peut conclure, respectivement, les valeurs de $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[f(x)+g(x)\right]$, de $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[f(x)\times g(x)\right]$, de $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$ et de $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$ (l et l' sont des réels).

TABLE 1.5 – Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l			
$+\infty$			
$-\infty$			

TABLE 1.6 – Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$l'\neq 0$	$l'=0$	$\pm\infty$
$l\neq 0$			
$l=0$			
$\pm\infty$			

TABLE 1.7 – Limite de l'inverse

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$l\neq 0$	$l=0^+$	$l=0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{1}{f(x)}$					

TABLE 1.8 – Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$l'\neq 0$	$l'=0$	$\pm\infty$
$l\neq 0$			
$l=0$			
$\pm\infty$			

1.3.4 Détermination de limites

EXERCICE 1.27.
Déterminer les limites suivantes et indiquer les asymptotes que l'on peut en déduire :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{2}x^3\right)$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x\sqrt{x}\right)$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\dfrac{-6}{x^2}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+2x+3\right)$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3\sqrt{x}+x^2\right)$
7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-5}{x}+x^2\right)$
8. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\dfrac{1}{x}+3x^2-2\right)$
9. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\left(\dfrac{3}{x-2}+5x+7\right)$
10. $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}\left(\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{2}\right)$

1.3.5 Fonctions polynômes et fonctions rationnelles

EXERCICE 1.28.
Déterminer les limites des fonctions polynômes suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+x\right)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+x\right)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4-2x^3+5x+4\right)$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4-2x^3+5x+4\right)$

EXERCICE 1.29.
Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{-x+1}{x+3}$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
2. Étudier les limites aux bornes de son ensemble de définition.
   En déduire les éventuelles asymptotes de $\mathscr{C}$.
3. Étudier les variations de f.
4. Dresser le tableau des variations de f en y faisant apparaître les limites aux bornes.

EXERCICE 1.30.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2+9x+2}{x^2+1}$.
On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que : $f(x) = ax+b+\dfrac{cx}{x^2+1}$
2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x+2$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.
4. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.

EXERCICE 1.31.
Soit f la fonction qui a x associe $f(x) = \dfrac{1-2x}{-x^2+2x+3}$.

1. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe représentative de f.

1.3.6 Inégalités et limites

EXERCICE 1.32.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{9x^2+1}-2x$.

1. Montrer que $\sqrt{9x^2+1} \geqslant 3x$.
2. En déduire que $f(x) \geqslant x$.
3. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

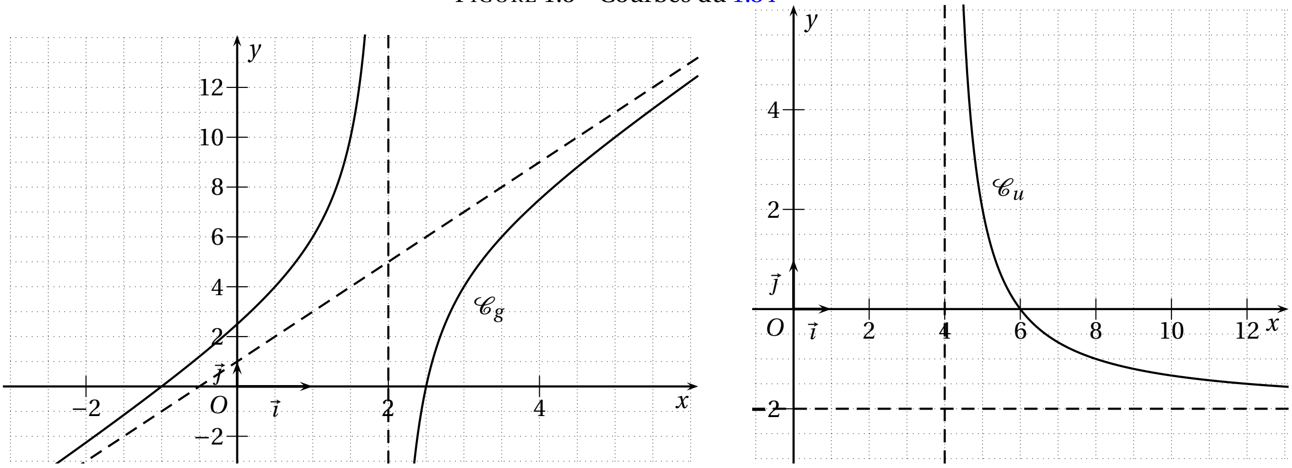
EXERCICE 1.33.
On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant 1$.
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

1.3.7 Limites de fonctions composées

EXERCICE 1.34 (Lectures graphiques)**.**
Les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_u$ de la figure 1.8 page suivante représentent respectivement la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ et une fonction u définie sur $]4\,;+\infty[$.
On considère la fonction composée $f = u\circ g$ définie sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;2\right[\cup]3\,;+\infty[$.

1. Déterminer graphiquement $f(1)$, $f(3,5)$ et $f(5)$
2. Déterminer graphiquement $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} u(X)$. Que peut-on en déduire pour $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$?
3. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} g(x)$. Que peut-on en déduire pour $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x)$?
4. Déterminer $a = \lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} g(x)$ et $\lim\limits_{X\to a} u(X)$. Que peut-on en déduire pour $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x)$?
5. Déterminer de la même manière la dernière limite aux bornes de son ensemble de définition de f.

FIGURE 1.8 – Courbes du 1.34



EXERCICE 1.35 (Calculs)**.**
On considère les fonctions f et g respectivement définies sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.
On pose $h(x) = g\big(f(x)\big)$ pour $x \in]-\infty\,; -1[\cup]-1\,; 1[\cup]1\,; +\infty[$.

1. Compléter :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{x\to\ldots\ldots} g(x) = \ldots\ldots\end{array}\right\} \text{donc, par} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ldots\ldots$$

2. Compléter :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = \ldots\ldots \\ \lim\limits_{x\to\ldots\ldots} g(x) = \ldots\ldots\end{array}\right\} \text{donc, par} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} h(x) = \ldots\ldots$$

3. En procédant de la même manière, déterminer les autres limites de h aux bornes de son ensemble de définition.

EXERCICE 1.36 (Calculs)**.**
On considère les fonctions f et g respectivement définies sur $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$.
On pose $h(x) = g\big(f(x)\big)$ pour $x \in \mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\,; 0\}$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1} g(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.
2. (a) Étudier le signe de $f(x) + 1$ selon les valeurs de x.
   (b) En déduire les solutions des inéquations :
   - $f(x) > -1$;
   - $f(x) < -1$.

   (c) i. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\x<-\frac{1}{2}}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2}\\x>-\frac{1}{2}}} f(x)$.
   ii. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} g(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} g(x)$.
   iii. En déduire $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} h(x)$.
3. Déterminer l'expression de h et retrouver les limites de h en $+\infty$ et $-\dfrac{1}{2}$

1.4 Bilan et compléments

1.4.1 Fonction continue

En terminale ES on ne vous demandera pas de démontrer qu'une fonction est continue et l'appréhension graphique de la notion est suffisante. Ainsi une fonction est dite continue si sa courbe représentative ne présente aucun saut, aucun trou, aucune asymptote verticale. Cependant la continuité est définie précisément en mathématiques de la façon suivante :

Définition (non exigible)**.** Une fonction f est dite continue en un réel a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Remarques. Cette définition implique que :
- il est nécessaire que $f(x)$ soit définie en a pour être éventuellement continue ;
- il faut en plus que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = f(a)$ pour qu'elle y soit continue.

Définition (non exigible)**.** Une fonction f est dite continue sur un intervalle I si, pour tout réel $a \in I$, f est continue en a.

Propriété 1.1. *Les fonctions affines, carrée, cube, racine, polynômes sont continues sur* $\mathbb{R}$.
Les fonctions inverses et rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition, c'est-à-dire en tout point où leur dénominateur ne s'annule pas.

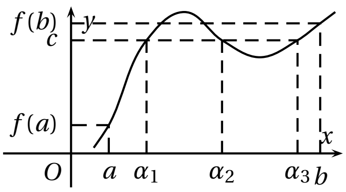
On l'admettra.

Valeurs intermédiaires

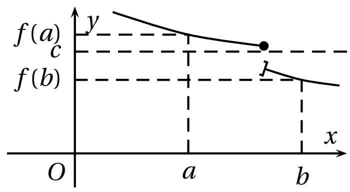
Propriété 1.2 (des valeurs intermédiaires)**.** *Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ alors, pour tout réel c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = c$ admet au moins une solution $\alpha \in [a\,;\,b]$.*

On l'admettra.

Exemples 1.1.



f est continue sur l'intervalle $[a\,;\,b]$. L'équation $f(x) = c$ a au moins une solution ; elle peut en avoir plusieurs.

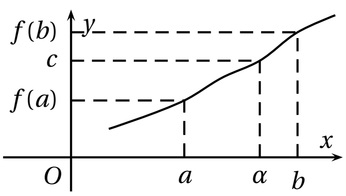


f n'est pas continue sur l'intervalle $[a\,;\,b]$. L'équation $f(x) = c$ peut ne pas avoir de solution.

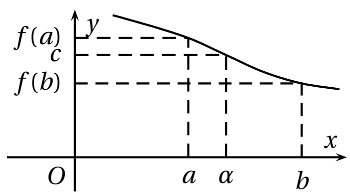
Théorème 1.3 (des valeurs intermédiaires)**.** *Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,;\,b]$ alors, pour tout réel c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = c$ admet une unique solution $\alpha \in [a\,;\,b]$.*

On l'admettra.

Exemples 1.2.



f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a\,;\,b]$. L'équation $f(x) = c$ admet une unique solution.



f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a\,;\,b]$. L'équation $f(x) = c$ admet une unique solution.

Tableau de variation

Par convention, les flèches obliques d'un tableau de variation signifie que sur l'intervalle considéré la fonction est continue et strictement croissante. On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires (voir l'exercice 1.39 page 18).

1.4.2 Inégalités et limites

Propriété 1.4. *Soient f, u et v trois fonctions définies sur un intervalle I et soient α et β pouvant être des réels ou $\pm\infty$.*
- *Si $f(x) \geqslant u(x)$ pour tout $x \in I$ et que $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = +\infty$.*
- *Si $f(x) \leqslant v(x)$ pour tout $x \in I$ et que $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$.*
- *Si $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$ pour tout $x \in I$ et que $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} v(x) = \beta$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$.*

On l'admettra.

Remarque. La dernière propriété est parfois appelée « le théorème des gendarmes ».

1.4.3 Fonctions composées

Définition 1.1. Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g telles que pour tout $x \in D_f$, $f(x) \in D_g$.
On appelle fonction composée de f et de g la fonction h définie pour tout $x \in D_f$ par $h(x) = g\big(f(x)\big)$.
On notera parfois $h = g \circ f$.

Propriété 1.5. *Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g telles que pour tout $x \in D_f$, $f(x) \in D_g$.
Si f et g sont dérivables alors la fonction $h = g \circ f$ est dérivable et $h'(x) = g'\big(f(x)\big) \times f'(x)$.*

On l'admettra.

Exemples 1.3. On démontre facilement les formules suivantes (qui sont plus faciles à appliquer que celle de la propriété) :
- $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
- $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
- $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Propriété 1.6. *Soient f et g deux fonctions définies sur D_f et D_g telles que, pour tout $x \in D_f$, $f(x) \in D_g$.
Soit $h = f \circ g$. On a :*
- *si f et g ont le même sens de variation, alors h est croissante ;*
- *si f et g ont des sens de variation différents, alors h est décroissante.*

Preuve. Cette propriété a été démontrée au paragraphe 1.2.5 page 10. ♢

Propriété 1.7. *Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g telles que pour tout $x \in D_f$, $f(x) \in D_g$.
Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ et $\lim\limits_{X\to\beta} g(X) = \gamma$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} g\big(f(x)\big) = \gamma$ où α, β et γ peuvent être des réels ou $\pm\infty$.*

On l'admettra.

1.5 Exercices

EXERCICE 1.37.
Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par, respectivement, $f(x) = -\frac{x^4}{4} + x^3 - 3x^2 + x + 2$ et $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

1. Étudier les variations de la fonction g.
2. (a) Calculer $g(0)$ et $g(1)$.
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0\,;1]$.
   (c) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
   (d) Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
3. (a) Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   (b) Étudier les variations de f.

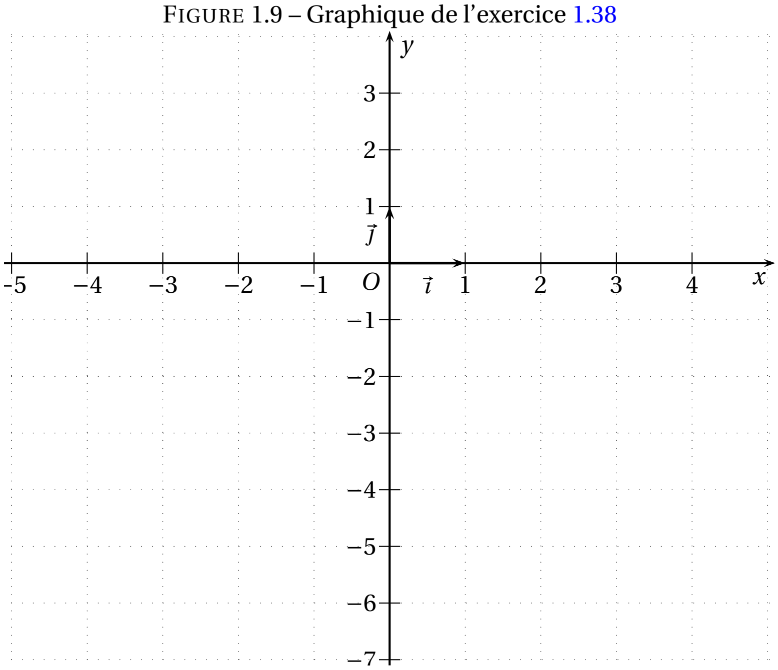
EXERCICE 1.38.
Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x + 24$.

1. Étudier la fonction g (limites aux bornes et variations).
2. Montrer qu'il existe un réel α unique tel que $g(x) = 0$, puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B. Étude de la fonction f.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-x^3 - 8x^2 + 4}{2x^2 + 2}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{-2x \times g(x)}{\left(2x^2+2\right)^2}$.
3. Donner le tableau des variations de la fonction f.
4. Montrer que la droite Δ d'équation $y = -\frac{x}{2} - 4$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et Δ.
5. Donner les équations des tangentes $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ respectviement aux points d'abscisses 1 et -1.
6. Représenter dans le repère de la figure 1.9 de la présente page les droites Δ, $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ puis $\mathscr{C}_f$.

FIGURE 1.9 – Graphique de l'exercice 1.38



EXERCICE 1.39 (Tableau de variations)**.**
Pour chaque question, une seule des trois réponses est exacte
Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-5;+\infty[$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

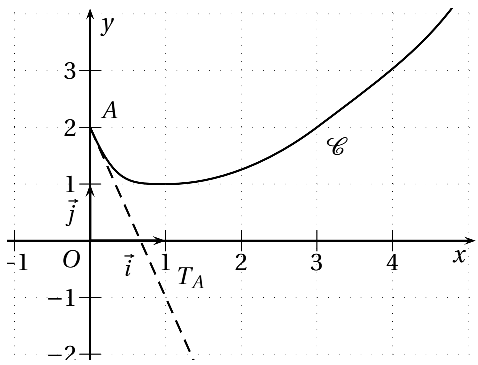
x	-5		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	-5	↗	4	↘	$-4,5$

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. Sur l'intervalle $]-5;+\infty[$, l'équation $f(x)=-2$
   - admet une seule solution
   - admet deux solutions
   - admet quatre solutions.
2. On sait que $f'(2)=0$. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est :
   - $y=4$
   - $y=4(x-2)$
   - $x=4$.
3. On sait que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point de coordonnées $(1;2)$ est $y=3x-1$.
   On a :
   - $f(2)=1$
   - $f'(1)=-1$
   - $f'(1)=3$.
4. Sur l'intervalle $[-1;0]$, la fonction g définie par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$
   - est croissante
   - est décroissante
   - n'est pas monotone.

EXERCICE 1.40 (Fonctions composées, sujet d'annales)**.**
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure 1.10 de la présente page représente une fonction f définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ dans le repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. On note f' la fonction dérivée de f.
La droite T_A est la tangente au point A d'abscisse 0. La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1.
Enfin, la fonction f est croissante sur $[1;+\infty[$ et sa limite en $+\infty$ est $+\infty$.

FIGURE 1.10 – Courbe de l'activité 1.40

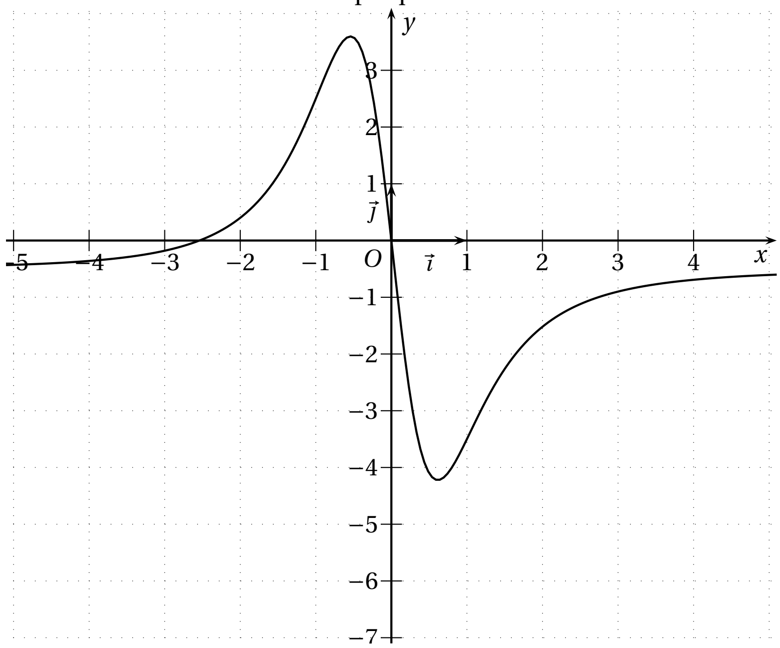


1. À partir des informations portées sur le graphique et complétées par les précisions précédentes, répondre aux questions suivantes.
   (a) Déterminer, sans justifier, $f(0)$, $f'(0)$, $f(1)$ et $f'(1)$.
   (b) Donner le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$, complété par la limite en $+\infty$.
2. On considère la fonction g inverse de la fonction f, c'est-à-dire $g=\frac{1}{f}$. On note g', la fonction dérivée de g.
   (a) Déterminer $g(0)$, $g(1)$, $g(3)$.
   (b) Quel est le sens de variation de la fonction g sur $[0;+\infty[$? Justifier la réponse donnée.
   (c) Déterminer les valeurs $g'(0)$, $g'(1)$.
   (d) Déterminer la limite de g en $+\infty$.
3. On souhaite traduire graphiquement les informations obtenues pour la fonction g.
   Tracer une courbe qui satisfait aux résultats obtenus à la question 2, dans un repère orthonormal (unité : 2 cm) sur une feuille de papier millimétré ; le tracé des tangentes aux points d'abscisses 0 et 1 devra apparaître sur la figure.

EXERCICE 1.41.
La courbe de la figure 1.11 de la présente page est la représentation graphique d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Par lecture graphique :
   (a) Déterminer le signe de $u(x)$ selon les valeurs de x.
   (b) Déterminer le signe de $u'(x)$ selon les valeurs de x.
2. On pose $f = u^2$.
   (a) Déterminer une expression de f'.
   (b) En déduire le signe de f' puis les variations de f.

FIGURE 1.11 – Graphique de l'exercice 1.41



EXERCICE 1.42 (D'après Liban 2005)**.**
Le tableau d'informations ci-dessous fournit des informations sur une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
Signe de $u(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $u'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

1. Établir un tableau des variations de la fonction u.
2. On considère maintenant les fonctions f, g et h définies par $f(x) = \frac{1}{u(x)}$, $g(x) = (u(x))^2$ et $h(x) = (u(x))^3$ où u désigne la fonction de la question précédente.
   (a) Une des deux affirmations suivantes est fausse, laquelle ? Justifier en précisant le bon ensemble de définition :
   Affirmation 1 : « La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ » ;
   Affirmation 2 : « La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ ».
   (b) Pour chacune de ces trois fonctions :
      i. Déterminer une expression de leur fonction dérivée.
      ii. En déduire le signe de leur fonction dérivée et les variations de la fonction.
   (c) Déterminer, en justifiant avec soin, $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x)$.
   (d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = 0$.

3. Voici d'autres informations relatives à la fonction u et à sa dérivée u'.

x	-2	0	$\frac{1}{2}$	2	3
$u(x)$	4	-2	$-\frac{9}{4}$	0	4
$u'(x)$	-5	1	0	3	5

Terminer chacune des trois phrases 3a, 3b et 3c par la réponse qui vous semble exacte, parmi celles proposées en justifiant votre choix.

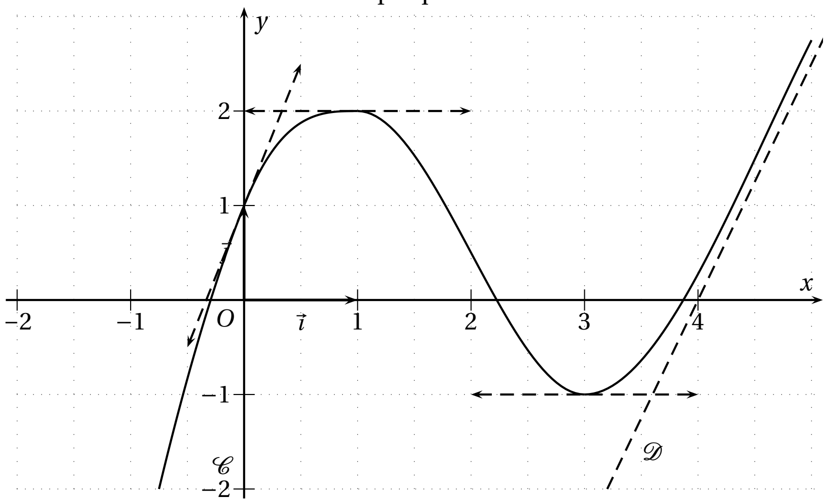
(a) Le nombre $f'(-2)$:
- n'existe pas
- vaut -20
- vaut $-\frac{16}{5}$
- vaut $-\frac{5}{16}$
- vaut $\frac{5}{16}$

(b) La tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 2 est parallèle :
- à l'axe des abscisses
- à la droite d'équation $y = x$
- à la droite d'équation $y = 3x$

(c) Le nombre dérivé de la fonction h en 0 :
- n'existe pas
- vaut 0
- vaut -12
- vaut 1
- vaut 12

EXERCICE 1.43 (D'après Liban 2006)**.**
La courbe $\mathscr{C}$ donnée sur la figure 1.12 de la présente page est la représentation graphique, dans un repère orthonormal, d'une fonction f définie et dérivable sur $]-1\,;+\infty[$. On sait que la fonction f est croissante sur $]-1\,;1]$ et sur $[3\,;+\infty[$ et que la droite $\mathscr{D}$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

FIGURE 1.12 – Graphique de l'exercice 1.43



I. Étude graphique de la fonction f

Chaque question comporte trois affirmations, une seule des trois est exacte. Indiquer laquelle.

1. Une asymptote à $\mathscr{C}$ est la droite d'équation :
   - $y = -1$
   - $x = 1$
   - $x = -1$
2. La droite $\mathscr{D}$ a pour équation :
   - $y = \frac{5}{2}x - 10$
   - $y = \frac{5}{2}x - 9$
   - $y = 3x - 10$
3. Le nombre dérivé de f en 0 est :
   - 1
   - 3
   - -3
4. Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $]-1\,;+\infty[$ est :
   - 2
   - 1
   - 3

II. Étude d'une fonction g

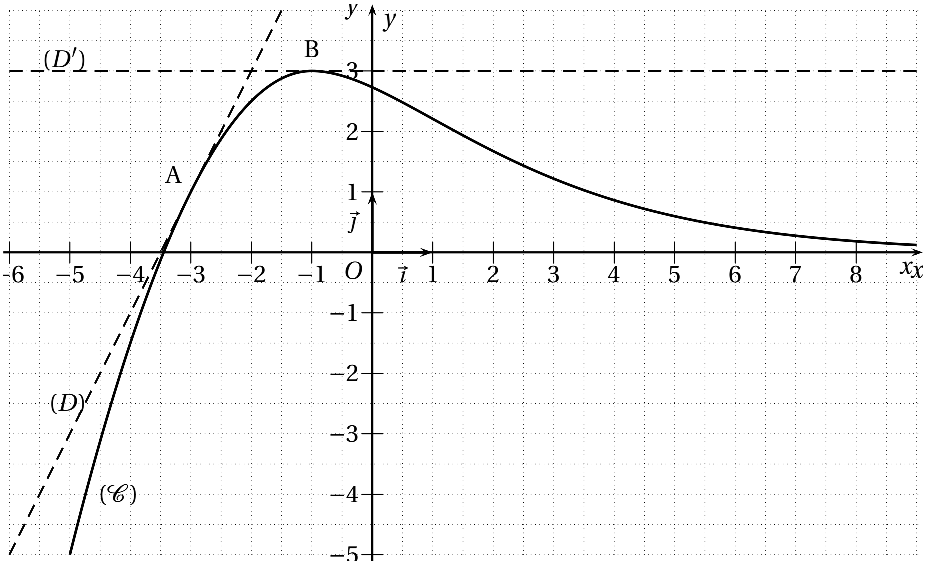
On note g la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $g(x)=\left(f(x)\right)^2$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, puis $\lim\limits_{x\to-1} g(x)$.
2. Déterminer $g'(1)$ et $g'(0)$.
3. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, l'ensemble des solutions sur $]-1\,;\,+\infty[$ de l'inéquation $g(x)\leqslant 1$.

EXERCICE 1.44 (D'après Nouvelle Calédonie mars 2007)**.**
Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne son tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

La courbe $(\mathscr{C})$ donnée ci-après représente la fonction f dans un repère orthonormal du plan. Cette courbe passe par les points A$(-3\ 1)$ et B$(-1\,;3)$ et son intersection avec l'axe des abscisses a pour abscisse α. Les droites (D) et (D') sont les tangentes à la courbe respectivement en A et en B.



1. Déterminer graphiquement $f'(-3)$ et $f'(-1)$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\left(f(x)\right)^3$.
   On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Justifier que f et g ont les mêmes variations.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ (on justifiera les résultats).
   (c) Calculer $g'(-3)$.
3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]\alpha\,;\,+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.
   On admet que h est dérivable sur l'intervalle $]\alpha\,;\,+\infty[$.
   (a) Déterminer les limites de h aux bornes de son ensemble de définition (on justifiera le résultat).
   (b) Calculer $h'(-3)$.