BACCALAURÉAT GÉNÉRAL
Métropole 2011

EXERCICE 1 (5 points).

1. (a) 2012 correspond au rang $x = 12$. On a alors $y = -2,89 \times 12 + 102,59 = 67,91$.
L'indice de fréquence peut être estimé à 67,91 avec cet ajustement.
(b) Calculons t, le taux d'évolution : $t = \frac{V_A - V_D}{V_D} \times 100 = \frac{67,91-84}{84} \times 100 \approx -19,15$.
Soit une baisse de 19,15 % entre 2007 et 2012.

2. (a)

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
z_i	4,608	4,594	4,517	4,494	4,473	4,447	4,431	4,381	4,331

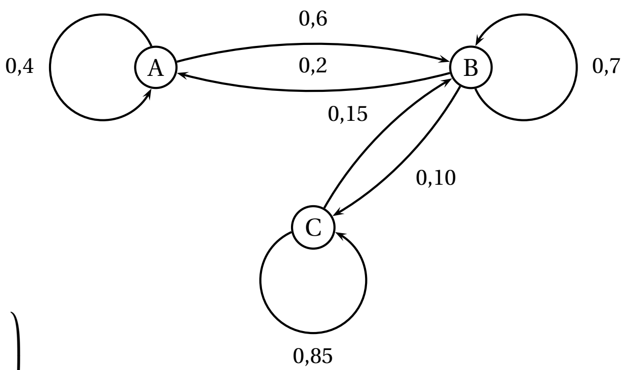
(b) D'après la calculatrice $a \approx -0,0328$ et $b \approx 4,6389$ donc $z = -0,0328x + 4,6389$.
(c) $z = \ln y$ et $z = -0,0328x + 4,6389$ donc $\ln y = -0,0328x + 4,6389 \Leftrightarrow y = \mathrm{e}^{-0,0328x+4,6389} = \mathrm{e}^{-0,0328x} \times \mathrm{e}^{4,6389} \approx 103,4\mathrm{e}^{-0,0328x}$ car $\mathrm{e}^{4,6389} \approx 103,4$.

3. On a vu qu'avec le premier ajustement la baisse n'est que de 19,15 % donc l'objectif de 25 % ne serait pas atteint.
Cherchons quelle serait la baisse avec le second ajustement :
   - Pour $x = 12$, $y = 103,4\mathrm{e}^{-0,0328\times 12} \approx 69,76$.
   - On a alors $t = \frac{69,76-84}{84} \times 100 \approx -16,95$ soit une baisse de seulement 16,95 %. Là encore l'objectif ne serait pas atteint avec cet ajustement.

   Remarque. Une autre façon de répondre à cette question peut être : l'objectif étant une baisse de 25 %, on cherche à voir si la fréquence $84 \times \left(1 - \frac{25}{100}\right) = 63$ sera atteinte. On a vu que ce n'était pas le cas avec le premier ajustement. Avec le second, la fréquence atteinte sera $y = 103,4\mathrm{e}^{-0,0328\times 12} \approx 69,76$, ce ne sera donc pas non plus le cas.

EXERCICE 2 (Spécialistes – 5 points).

1. Voir la figure.

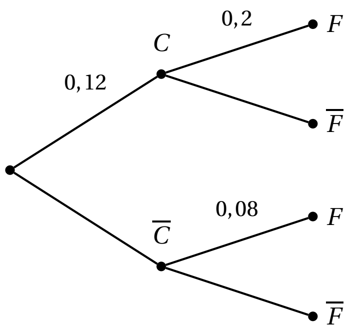


2. $M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0 & 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$

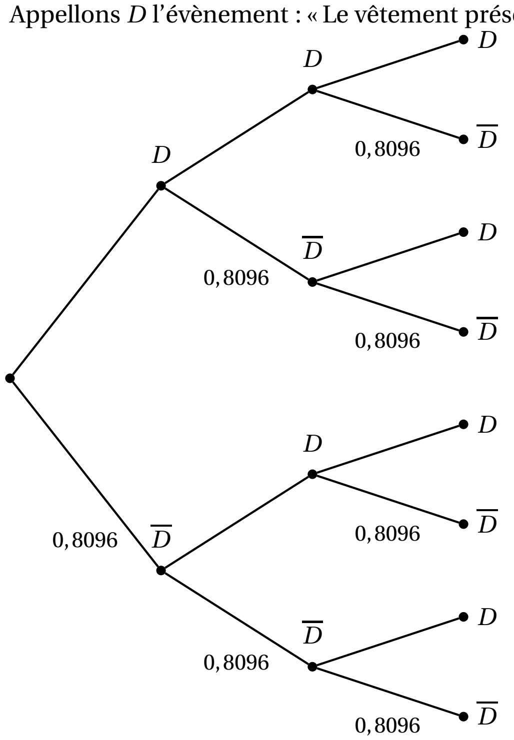
3.
   - Soit P l'état stable. Par définition P est tel que $P = P \times M$.
À l'aide de la calculatrice, on constate que $Q \times M \neq Q$, que $T \times M \neq T$ mais que $R \times M = R$. Donc R est l'état stable.
   - On sait que le système va tendre vers l'état stable donc au bout d'un certain temps, il y aura $\frac{1}{6}$ d'adhérents pour le niveau A, $\frac{1}{2}$ pour le niveau B et $\frac{1}{3}$ pour le niveau C. Donc le président de l'association a raison $\left(\frac{1}{2} = 50\,\%\right)$.

   Remarque. Une autre façon de répondre à cette question peut être : on constate à la calculatrice, par exemple en calculant $P_0 \times M^{100}$ que l'état du système converge vers R qui est donc l'état stable. Donc le président a raison.

EXERCICE 2 (Non spécialistes – 5 points).

1. 

2. (a) $p(C \cap F) = p(C) \times p_C(F) = 0,12 \times 0,2 = 0,024$
   (b) $p(F) = p(C \cap F) + p(C \cap \overline{F}) = 0,024 + 0,88 \times 0,08 = 0,024 + 0,0704 = 0,0944$ (formule de probabilités totales).
   (c) $p(C) \times p(F) = 0,12 \times 0,0944 \neq p(C \cap F)$ donc les évènements ne sont pas indépendants.
3. $p(\overline{C} \cap \overline{F}) = p(\overline{C}) \times p_{\overline{C}}(\overline{F}) = 0,88 \times 0,92 = 0,8096 \neq 0,92$ donc l'affirmation du directeur n'est pas correcte.
   Remarque. Une autre façon de répondre à cette question est : il y a déjà 12 % des vêtements qui ont un défaut de forme, il ne peut donc y avoir 92 % de vêtements sans défaut.
4. Appellons D l'évènement : « Le vêtement présente un défaut ». On a alors l'arbre suivant :



   La probabilité cherchée est $p\left(\overline{D} \cap \overline{D} \cap \overline{D}\right) = 0,8096^3 \approx 0,531$.

EXERCICE 3 (4 points).

1. $f = e^u$ donc $f' = u'e^u$ donc $f'(x) = -2e^{-2x+1}$. Soit la **réponse c**.
2. Le tableau de variations permet de voir immédiatement que $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions (l'une d'elles est entre 2 et 8 et l'autre est 12). Soit la **réponse b**.
3. $h'(1) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3}{2} = 1,5$. Soit la **réponse b**.
4.

x	0		1		$\approx 2,6$		$+\infty$
On sait que $H'(x) = h(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
On en déduit que H	‖	↘		↗		↘	

Ce ne peut donc être que la première courbe. Soit la **réponse a**.

EXERCICE 4 (6 points)**.**

Remarque. Les logiciels de calcul formel ne sont pas, sauf erreur de ma part, explicitement au programme. Si vous avez été perturbé par cet exercice, c'est tout à fait normal...

1. (a)
   - La commande correspondant à la réponse 3 est « résoudre(B(x)=0,x) » ce qui signifie qu'on demande au logiciel de résoudre l'équation $B(x) = 0$ et la réponse du logiciel est $\exp(-1)$. On a donc $B(x) = 0 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-1}$. Graphiquement cela correspond au point d'intersection de la courbe de B avec l'axe des abscisses qui était donc à marquer sur la figure.
   - La commande correspondant à la réponse 4 est « résoudre(B(x)>0,x) » ce qui signifie qu'on demande au logiciel de résoudre l'inéquation $B(x) > 0$ et la réponse du logiciel est $x > \exp(-1)$. On a donc $B(x) = 0 \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{-1}$. Graphiquement cela correspond à la partie de la courbe de B au-dessus de l'axe des abscisses qui était donc à marquer sur la figure (ou bien on pouvait marquer les abscisses supérieures à e^{-1} sur l'axe des abscisses).
   - La commande correspondant à la réponse 5 est « maximum(B(x),[0,1 ; 10]) » ce qui signifie qu'on demande au logiciel de trouver le maximum de $B(x)$ sur l'intervalle $[0,1;\,10]$ et la réponse du logiciel est 10. Graphiquement cela correspond au sommet de la courbe de B qui était donc à marquer sur la figure (ou bien on pouvait marquer l'ordonnée du sommet).

   (b) Il faut résoudre l'équation $B(x) = 0$.
   $B(x) = 0 \Leftrightarrow 10 \times \frac{1+\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0$ (car $x \neq 0$) $\Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-1}$.

2. (a) Dérivons F :

   $$F = 5uv \text{ donc } F' = 5(u'v + uv') \text{ avec } \begin{cases} u(x) = \ln x \\ u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \ln x + 2 = \ln(x) + 2 \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

   Donc $F'(x) = 5\left(\frac{1}{x} \times (\ln x + 2) + \ln x \times \frac{1}{x}\right) = 5\frac{2\ln x + 2}{x} = 5 \times 2 \times \frac{\ln x + 1}{x} = 10 \times \frac{1+\ln x}{x} = B(x)$.
   Donc F est bien une primitive de B sur $[0,1;\,10]$.

   (b) $\displaystyle\int_{0,5}^{1,5} B(x)\,\mathrm{d}x = F(1,5) - F(0,5) = 5\ln(1,5)\,(\ln(1,5) + 2) - 5\ln(0,5)\,(\ln(0,5) + 2) \approx 9,406$.

3. On sait, d'après la réponse 2 du logiciel, que $B'(x) = \frac{10}{x^2} + \frac{10\times(1+\ln(x))\times(-1)}{x^2} = \frac{10-10-10\ln(x)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$ qui est du signe de $-\ln x$.
   Or $-\ln x > 0 \Leftrightarrow 0 > \ln x \Leftrightarrow 1 > x$.
   On obtient alors les variations de B :

x	0,1		1		10
$B'(x)$		+	0	−	
B		↗		↘	

   Le bénéfice est donc maximum pour $x = 1$ soit 1 centaine d'objets.

   Remarque. Une autre façon de répondre à cette question peut être : d'après le logiciel, le bénéfice maximum est 10, or $B(1) = 10$, donc le bénéfice maximum est atteint (au moins) pour $x = 1$, soit 1 centaine d'objets.