Mathématiques en Seconde

David ROBERT

2010–2011

Sommaire

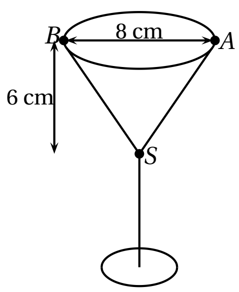
Chapitre 1

Généralités sur les fonctions

Sommaire

1.1 Activité

1.1.1 Un problème



Un verre à pied a une forme conique dont la base est un disque de 8 cm de diamètre et de hauteur 6 cm. Il repose sur une table parfaitement horizontale. On désire le remplir de façon à ce qu'il contienne la moitié de son volume maximal. On recherche donc jusqu'à quelle hauteur il faut verser du liquide pour qu'il soit rempli à moitié.

1.1.2 Travail préparatoire

On appelle h la hauteur à laquelle est versée le liquide.

1. Entre quelles valeurs peut varier h ?
2. Quel est le volume maximal que peut contenir le verre ?
3. Si on verse du liquide jusqu'à mi hauteur (3 cm) dans le verre, aura-t-on la moitié du volume maximal du verre ?
4. Calculer le rayon puis l'aire de la base puis le volume du liquide dans le verre lorsque $h = 2$ cm, lorsque $h = 3$ cm et lorsque $h = 4$ cm.
5. Déterminer le rayon puis l'aire de la base puis le volume du liquide dans le verre en fonction de h (quelles formules de calcul permettent d'obtenir le rayon, l'aire de la base et le volume du liquide dans le verre, lorsque l'on connaît h ?).

1.1.3 Utilisation du tableur comme calculateur

1. Créer la feuille de calcul suivante :

	A	B	C	D	E
1		Volume du liquide			
2					
3	hauteur	rayon	aire de la base	VOLUME	
4					
5					
6					

2. Créer dans les cellules B4, C4, D4, et E4 les formules donnant, en fonction de la hauteur h, respectivement le rayon, l'aire de la base du cône et le volume du liquide dans le verre. *Indication : π s'obtient en entrant PI().*
3. Contrôler les résultats de la question 4 du travail préparatoire en entrant successivement les valeurs 2, puis 3 et enfin 4 dans la cellule A4 qui correspond à la hauteur.
4. Parmi les valeurs entières de h, déterminer de même celle pour laquelle le volume du liquide est le plus proche de la moitié du volume du verre.

1.1.4 Création d'un tableau

1. (a) Sélectionner le tableau créé précédemment, puis le recopier (avec les menus Edition, Copier) sur une autre feuille de calcul du tableur.
   (b) Entrer la valeur 0 dans la cellule A4, puis la formule =A4+1 dans la cellule A5. Recopier cette formule vers le bas de façon à obtenir les valeurs demandées de la hauteur.
   (c) Sélectionner alors les cellules B4 à D4 et, de même que précédemment, les recopier vers le bas.
2. On désire plus de précision.
   (a) Entrer la valeur 0 dans la cellule A4, puis la formule =A4+0,5 dans la cellule A5. Recopier cette formule vers le bas de façon à ce que les valeurs de la hauteur aillent de 0 à 6.
   (b) Sélectionner alors les cellules B4 à D4 et, de même que précédemment, les recopier vers le bas.

A l'aide des résultats obtenus, compléter le tableau suivant :

hauteur	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
VOLUME													

1.1.5 Représentation graphique du volume en fonction de h

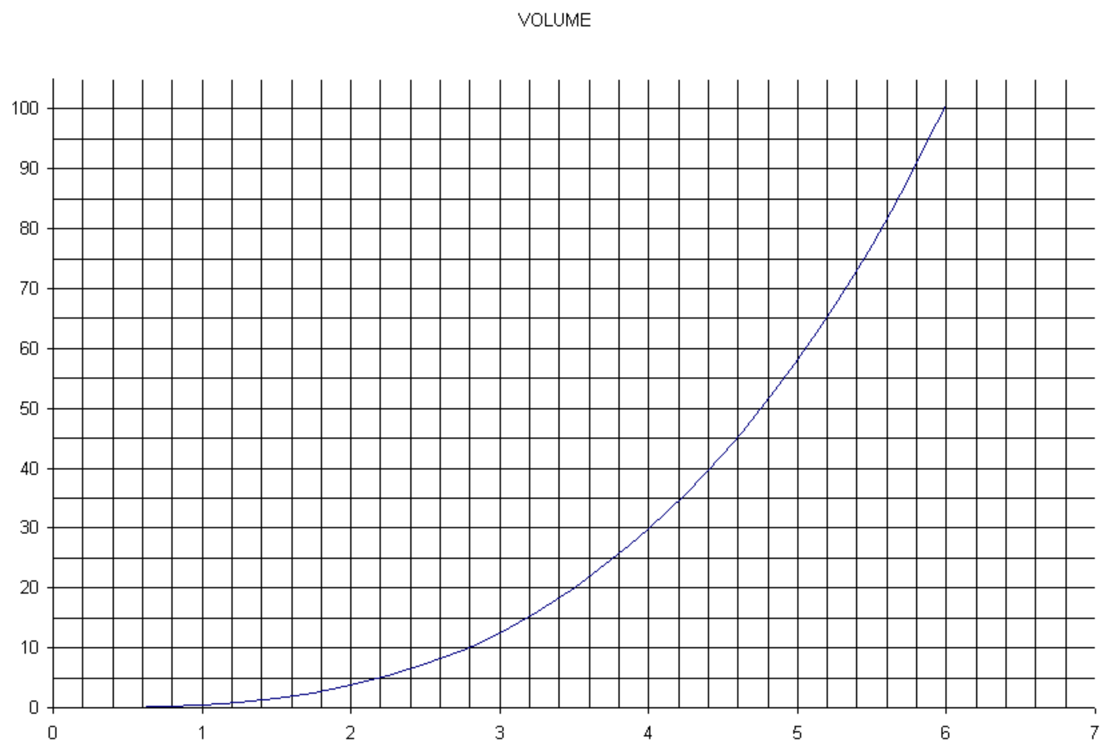
1. Sélectionner dans le tableau la colonne "hauteur" et la colonne "VOLUME" avec leurs titres. *Indication : pour sélectionner deux colonnes (ou plus généralement des plages de cellules) non voisines, procéder ainsi : sélectionner la première puis, en maintenant appuyée la touche* Ctrl *sélectionner la seconde.*
2. Cliquer sur l'icône . Essayer les différents types de représentations (un aperçu est proposé), puis en choisir un et se laisser guider par les indications de l'assistant graphique.
3. À l'aide du graphique obtenu, donner une valeur arrondie au millimètre de la hauteur pour laquelle le volume est égal à la moitié de celui du verre, ainsi qu'une valeur approchée de ce volume.

1.1.6 Exploitation de la courbe représentative

Vous trouverez en annexe la courbe obtenue avec le tableur en module qui donne le volume du liquide dans le verre en fonction de la hauteur de liquide dans le verre.
On note $V(h)$ le volume en fonction de la hauteur h. Ainsi $V(3) = 12,566\text{cm}^3$ car pour une hauteur de 3 cm, on peut lire graphiquement que le volume est de 12,566 cm^3.

1. Pour quelle valeurs de h, peut-on déterminer $V(h)$?
2. Quel est le volume pour une hauteur de 5 cm ?
   Compléter $V(5) = \ldots\ldots$
   On dit que :
   - 5 a pour image …… par la fonction V ;
     …… est l'image de 5 par la fonction V ;
   - …… a pour antécédent 5 par la fonction V ;
     5 est un antécédent de …… par la fonction V.
3. Quel est le volume pour une hauteur de 2,5 cm ?
   Compléter $V(2,5) = \ldots\ldots$
   On dit que :
   - 2,5 a pour image …… par la fonction V ;
   - 2,5 est un antécédent de …… par la fonction V.
4. Pour quelle hauteur le volume est-il de 70 cm^3 ? 50 cm^3 ?
   Compléter :
   - 70 a pour antécédent(s) …… par la fonction V ;
   - 50 a pour antécédent(s) …… par la fonction V.
5. (a) Déterminer l'image de 1, de 2, de 4 et de 6 par la fonction V.
   (b) Déterminer les antécédents de 0, de 25, de 60 et de 80 par la fonction V.
   (c) Peut-on déterminer l'image de 13 par la fonction V ? Pourquoi ?
   (d) Peut-on déterminer les antécédents de 120 par la fonction V ? Pourquoi ?
   (e) Résoudre par lecture graphique :
   - l'équation $V(h) = 75$.
     Que signifie la réponse à cette question ?
   - l'inéquation $V(h) > 50$.

1.1.7 Annexe

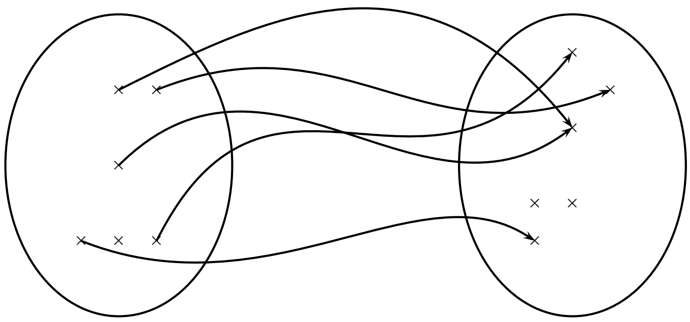


1.2 Notion de fonction

1.2.1 Notion de fonction

Définition 1.1. Une fonction est un procédé qui, à un élément x d'un ensemble de départ, associe un élément y d'un ensemble d'arrivée.
Les fonctions sont désignées par des lettres, en général f, g, h, etc.
On notera $f : x \mapsto y$ ou $f(x) = y$ qui se lit « f est la fonction qui à x associe y »..
On dit que y est *l'image* de x.
On dit que x est *un antécédent* de y.

On peut illustrer ce procédé par un diagramme « en patates ».



Ensemble de départ *Ensemble d'arrivée*

Remarque. Si l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée sont des parties de $\mathbb{R}$, la fonction est dite *fonction numérique*. Ce sera le cas de la plupart des fonctions que nous étudierons en Seconde.

Remarque. x sera parfois appelé *la variable* et y sera parfois appelé *la grandeur* qui est fonction de x.

Exemple 1.1.
- À chaque élève de la classe on associe la couleur de ses cheveux. L'ensemble de départ est l'ensemble des élèves de la classe, l'ensemble d'arrivée est l'ensemble des couleurs de cheveux possibles. Cette fonction n'est pas numérique car ni l'ensemble de départ, ni l'ensemble d'arrivée ne sont des parties de $\mathbb{R}$.
- À chaque élève de la classe on associe le nombre de ses frères et soeurs. L'ensemble de départ est l'ensemble des élèves de la classe, l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{N}$. Cette fonction n'est pas numérique car les élèves de la classe ne sont pas des nombres et donc l'ensemble de départ n'est pas une partie de $\mathbb{R}$.
- Pour un élève donné, on associe la taille qu'il mesurait à chaque moment de sa vie. L'ensemble de départ est l'ensemble des âges, c'est-à-dire un intervalle allant de 0 à l'âge actuel de l'élève, l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$. La fonction est numérique car l'ensemble de départ et d'arrivée sont des parties de $\mathbb{R}$.

EXERCICE.
On définit f et g, deux fonctions :
- f est la fonction qui à un nombre réel x associe le nombre obtenu en procédant de la manière suivante : on ajoute 4 au nombre, on élève le résultat obtenu au carré, on retranche 16, on divise par le nombre de départ et on retranche 6.
- $g : x \mapsto x^2 - 4$.

1. Donner l'expression correspondant à f puis simplifier cette expression.
2. Quel réel n'a pas d'image par f ?
3. Quelle est l'image de 3 par g ?
4. Quelle est l'image de -1 par g ?
5. Quels sont les antécédents éventuels de 12 par g ?
6. Quels sont les antécédents éventuels de -5 par g ?

Un élément de l'ensemble de départ a *au plus* une image : certains éléments n'ont pas d'image (un élève chauve, un nombre pour lequel on ne peut pas faire le calcul) et ceux qui en ont n'en ont qu'une.
Un élément de l'ensemble d'arrivée peut avoir aucun (aucun élève n'a de cheveux blonds, aucun nombre de l'ensemble de départ ne donne -5 par la fonction), un ou plusieurs antécédents. Déterminer tous les antécédents de k, élément de l'ensemble d'arrivée, c'est trouver tous les éléments x de l'ensemble de départ tels que $f(x) = k$.

1.2.2 Ensemble de définition

L'ensemble de départ peut être imposé par la définition de la fonction, c'est-à-dire le contexte dans lequel on définit la fonction.
Lorsqu'il s'agit d'une fonction définie par une formule de calcul, c'est-à-dire une expression algébrique, l'ensemble de définition de la fonction est l'ensemble des réels pour lesquels la formule est calculable.

Définition 1.2. L'ensemble des réels x possédant une image par une fonction numérique f est appelé *l'ensemble de définition de la fonction* f. On le note souvent D_f.

Exemple 1.2. Définition dans un contexte.

1. Soit $ABCD$ un rectangle dont un des côtés est fixe et mesure 6 cm et l'autre est variable et mesure x cm.
   On définit la fonction f de la façon suivante : à chaque x possible, on associe $f(x)$, l'aire du rectangle $ABCD$.
   Ainsi l'ensemble de définition de f est l'ensemble des valeurs possibles pour la longueur x du second côté. Étant une longueur, on a nécessairement $x \geqslant 0$, donc $D_f = [0; +\infty[$.
2. La fonction qui à chaque élève de la classe associe de son nombre de frères et soeurs est définie pour chaque élève de la classe. L'ensemble de définition est donc l'ensemble des élèves de la classe.

Exemple 1.3. Définition par une expression algébrique.
En Seconde, la plupart des fonctions numériques définies par une expression algébrique seront définies sur $\mathbb{R}$ sauf dans les cas suivants :
- un quotient n'est défini que lorsque son dénominateur est différent de 0 (on ne divise pas par 0) ;
- on ne peut prendre la racine carrée d'une quantité que si elle est positive.

1. La fonction f définie par $f(x) = x^2 + 2x + 3$ est définie sur $\mathbb{R}$ car elle ne comporte ni quotient, ni racine carrée. $D_f = \mathbb{R}$
2. La fonction g définie par $g(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ n'est pas définie quand $x-1 = 0$, c'est-à-dire quand $x = 1$. $D_g =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.
3. La fonction h définie par $h(x) = \sqrt{x+2}$ est définie pour $x+2 \geqslant 0$, c'est-à-dire quand $x \geqslant -2$. $D_h = [-2; +\infty[$.

1.2.3 Tableau de valeurs

On peut associer à une fonction un tableau de valeurs. Il comporte deux lignes : la première regroupe des antécédents et la seconde leurs images respectives par cette fonction.
Un tableau de valeurs peut aussi définir une fonction.

Exemple 1.4. Fonction donnant un tableau de valeurs.
À la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 3x - 1$ on peut associer, par exemple, le tableau de valeurs suivant :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-1	-3	-3	-1	3	9	17

Exemple 1.5. Tableau de valeurs définissant une fonction.
Le tableau suivant donne le nombre de titulaires du R.M.I. tous les deux ans :

Année	1989	1991	1993	1995	1997	1999	2001	2003	2005
Nombre de titulaires du R.M.I.	396 160	567 556	774 803	925 286	1 045 303	1 120 251	1 051 725	1 120 844	1 266 400

On peut définir la fonction f qui à chaque année associe le nombre de titulaires du R.M.I.
Ainsi $f(1989) = 396160$, $f(1991) = 567556$, etc.

1.2.4 Représentation graphique

On peut associer à une fonction une représentation graphique et l'on peut définir une fonction à partir d'une représentation graphique.

Définition 1.3 (Représentation graphique)**.** Dans un plan muni d'un repère, la *représentation graphique* de la fonction f est l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y)$ du plan tels que :
- L'abscisse x de M décrit l'ensemble de définition D_f ;
- L'ordonnée y est l'image de x par f. $y = f(x)$.

On note souvent $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f. On dit que $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$.
Si la courbe est d'un seul « tenant » on parle de *courbe représentative* de la fonction f.

Remarque. L'équation permet de déterminer si un point $A(x_A; y_A)$ appartient ou pas à cette courbe. En effet, un point appartient à la courbe si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de la courbe. On a alors :

$$A \in \mathscr{C}_f \Leftrightarrow y_A = f(x_A)$$

Dans la pratique, pour les fonctions numériques définies par une expression algébrique, pour esquisser une représentation graphique, on remplit souvent un tableau de valeurs de la manière suivante :

1. on détermine les valeurs $f(x)$ pour les valeurs entières de x ;
2. on place les points $\left(x; f(x)\right)$ ainsi obtenus dans un repère ;
3. on regarde si la courbe est « régulière » :
   - si oui, on la trace en extrapolant à partir des points obtenus ;
   - si non, on complète le tableau de valeurs pour d'autres valeurs de x (éventuellement non entières) et on recommence au point 2.
     Il est parfois utile de compléter le tableau lorsqu'il semble que la courbe admet un sommet pour préciser son tracé aux alentours de ce sommet.

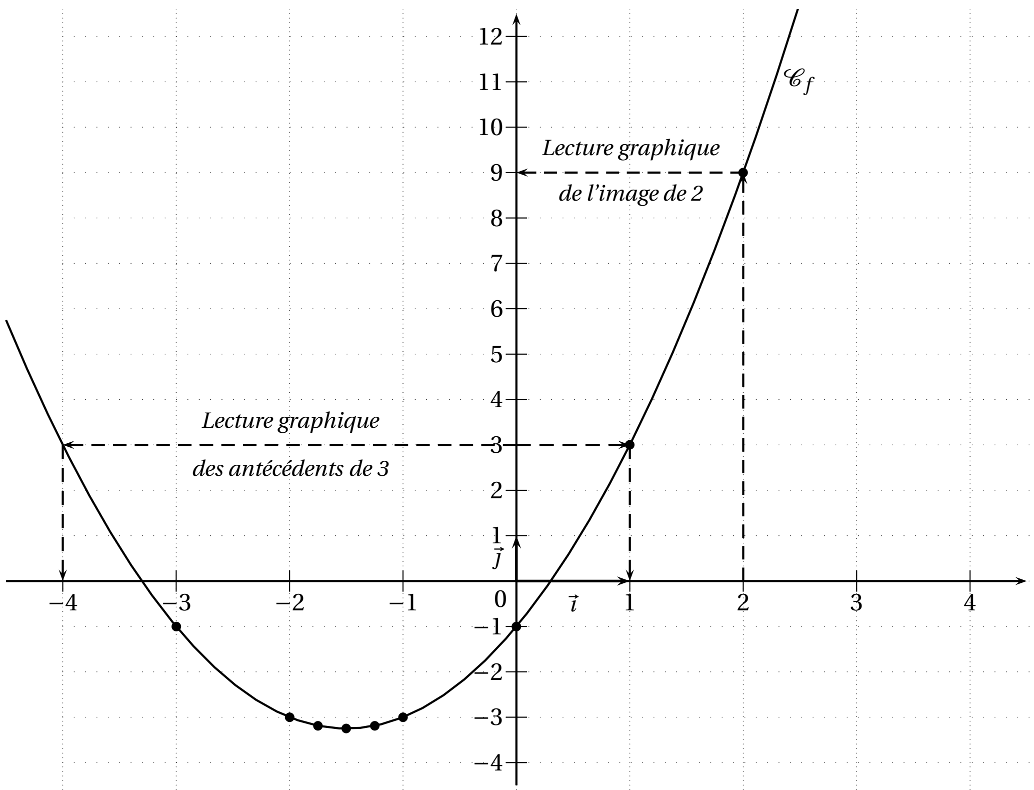
Exemple 1.6. Reprenons la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 3x - 1$ et le tableau de valeurs déjà obtenu :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-1	-3	-3	-1	3	9	17

On place les points $\left(x; f(x)\right)$ correspondants dans un repère, notés ici •
On obtient une courbe qui semble régulière mais on complète le tableau avec des valeurs de x entre -2 et -1 pour préciser l'allure de la courbe là où elle semble avoir un sommet :

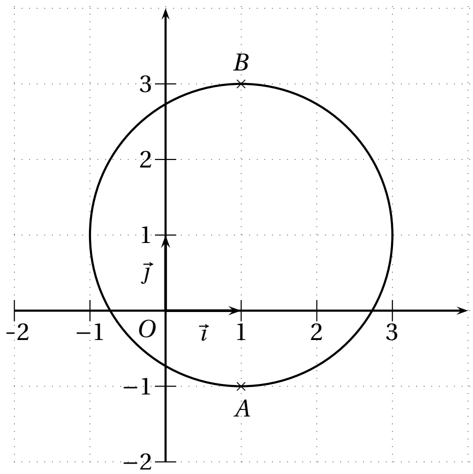
x	-2	$-1,75$	$-1,5$	$-1,25$	-1
$f(x)$	-3	$-3,1875$	$-3,25$	$-3,1875$	-3

On place les nouveaux points.
La courbe semblant suffisamment détaillée, on la trace.



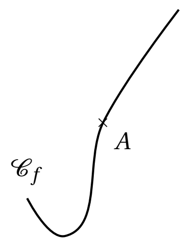
Remarque. Il est important d'avoir suffisamment de valeurs avant de faire le tracé. Un tableur ou une calculatrice peuvent être alors utiles.

Remarque. Une courbe ne représente pas toujours une fonction. Il faut que chaque élément de l'ensemble de départ ait une seule image. Si la courbe est telle qu'un ou plusieurs points ont la même abscisse, cela signifie qu'un élément de l'ensemble de départ a plusieurs images, ce n'est donc pas la représentation d'une fonction.
Sur le schéma ci-dessous, par exemple, la courbe a plusieurs points ayant la même abscisse, comme $A(1, -1)$ et $B(1,3)$. Ce n'est donc pas la courbe représentative d'une fonction car alors 1 aurait plusieurs images.

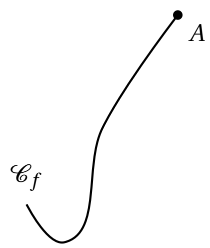


1.2.5 Quelques conventions graphiques

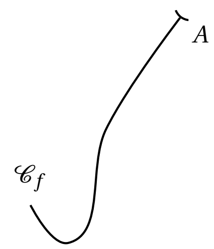
Lorsqu'un point A sur la courbe est connu avec précision, il est noté par une croix.



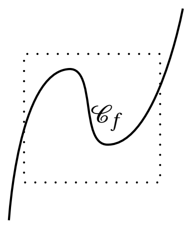
Lorsqu'un point A est l'extrémité de la courbe, il est noté par un gros point.



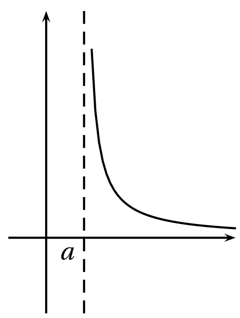
Lorsqu'un point A à l'extrémité de la courbe n'appartient pas à la courbe, il est noté par une « encoche ».



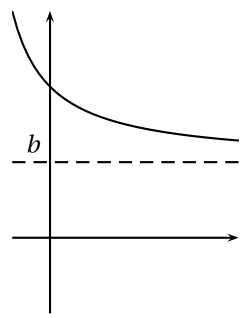
Une courbe est donnée dans une fenêtre ; s'il n'y a pas d'extrémités, la courbe garde la même allure quand on la prolonge.



Une droite verticale en pointillés signifie que si l'on prolonge la courbe, elle ne coupe pas cette droite. Sur l'exemple ci-dessous, a n'appartient pas à D_f.



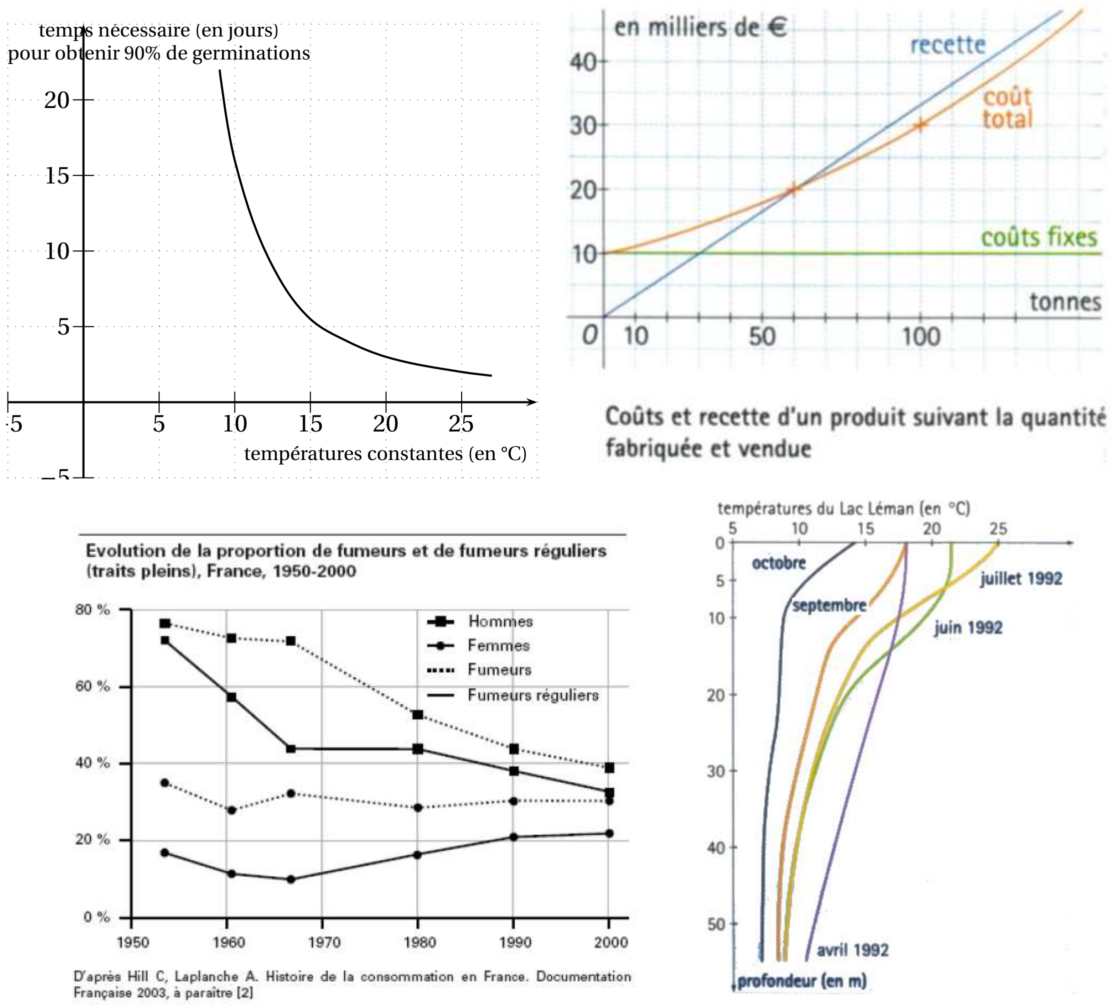
Une droite horizontale en pointillés signifie que si l'on prolonge la courbe, elle ne coupe pas cette droite.



1.2.6 Exercices

EXERCICE 1.1 (Variable, grandeur)**.**
Dans chacune des situations de la figure 1.1 de la présente page, indiquer quelle est la variable et quelle est la grandeur qui en dépend.

FIGURE 1.1 – Figure de l'exercice 1.1

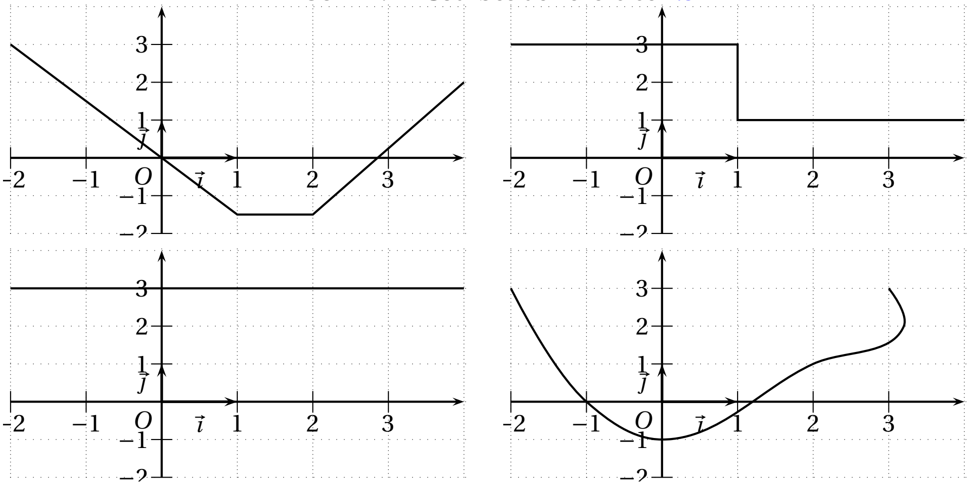


EXERCICE 1.2.
Vrai ou faux ? *Corriger la phrase lorsqu'elle est fausse.*

1. $f(-2) = 0$ signifie que l'image de 0 est -2
2. $f(0) = 3$ signifie que la courbe de f passe par le point $(0;3)$
3. $f(1) = 2$ signifie que l'antécédent de 1 est 2
4. L'image de 2 par f est -3 s'écrit $f(2) = -3$
5. Dire que $(5;1)$ est un point de la courbe de f s'écrit $5 = f(1)$
6. Par la fonction g, -5 est l'image de 3 s'écrit $g(-5) = 3$
7. 2 a pour image 0 par f signifie que la courbe de f traverse l'axe des abscisses en 2
8. $f(4) = 0$ signifie que la courbe de f traverse l'axe des abscisses au point $(4;0)$
9. 3 a pour image 5, signifie que 3 est l'image de 5
10. 4 a pour antécédent 5 signifie que 5 est l'image de 4

EXERCICE 1.3.
Vrai ou faux ? *Justifier la réponse lorsque c'est faux.*
Les courbes de la figure 1.2 de la présente page représentent des fonctions de la variable x.

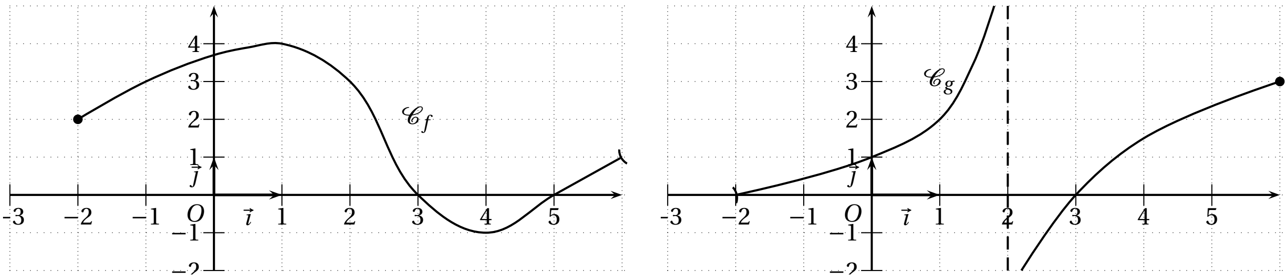
FIGURE 1.2 – Courbes de l'exercice 1.3



EXERCICE 1.4.
Vrai ou faux ? *Corriger la phrase lorsqu'elle est fausse.*
Les fonctions f et g sont représentées sur la figure 1.3 de la présente page.

1. La fonction f est définie entre -2 et 6 inclus
2. Les images par la fonction f sont comprises entre -1 et 4 inclus
3. La fonction g est définie entre -2 exclu et 6 inclus
4. Les images par la fonction g sont comprises entre 0 exclu et 3 inclus

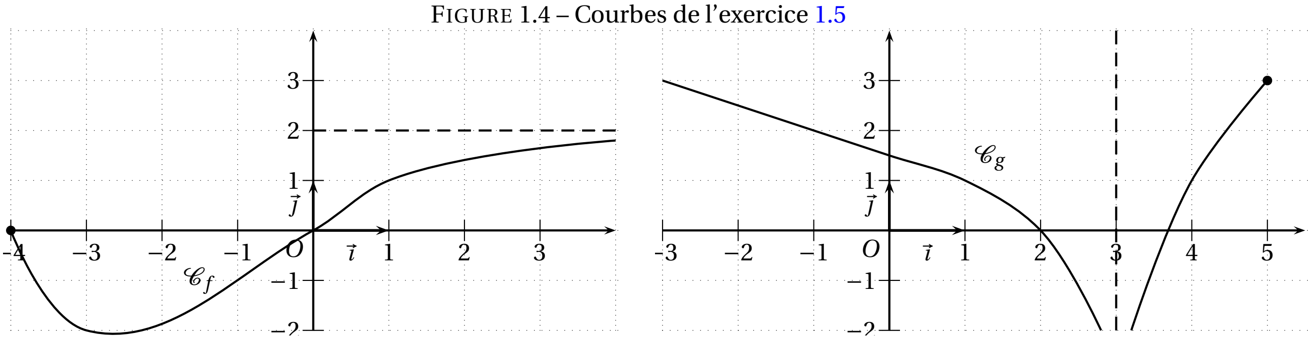
FIGURE 1.3 – Courbes de l'exercice 1.4



EXERCICE 1.5.
Vrai ou faux ? *Corriger la proposition lorsqu'elle est fausse.*

- D'après la représentation graphique de la figure 1.4 de la présente page $D_f = [-4;2]$
- D'après la représentation graphique de la figure 1.4 de la présente page $D_g =]-\infty;3[\cup]3;5]$

FIGURE 1.4 – Courbes de l'exercice 1.5



EXERCICE 1.6 (Avec la calculatrice)**.**
La fonction f est définie sur $[-1,5;2]$ par : $f(x) = 2x^3 - 1,5x^2 - 3x$

1. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2
$f(x)$								

2. Tracer la courbe représentative de f.

EXERCICE 1.7 (Avec la calculatrice)**.**
La fonction f est définie sur $[-3;3]$ par : $f(x) = x^2 - 3x + 1$.
Après avoir dressé un tableau de valeurs de la fonction, tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

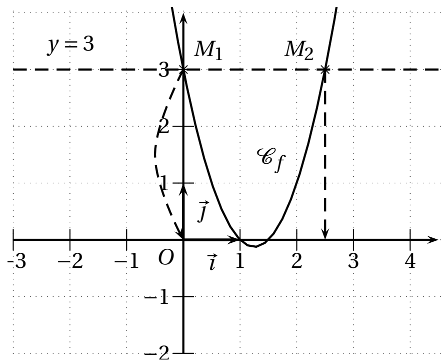
EXERCICE 1.8.
Tracer une représentation graphique possible d'une fonction f sachant que :
- $D_f = [-2;2]$;
- $f(1) = 3$;
- 0 admet deux antécédents ;
- $-1 \leqslant f(x) \leqslant 4$.

1.3 Résolutions graphiques d'équations et d'inéquations

1.3.1 Résolution d'équations de la forme $f(x) = k$

On a vu que déterminer tous les antécédents éventuels d'un élément k de l'ensemble d'arrivée revenait à chercher tous les x de l'ensemble de départ tels que $f(x) = k$.
Une telle recherche peut se faire graphiquement à partir de la représentation graphique de la fonction f.
On regarde alors s'il y a des points de la courbe qui ont pour ordonnée k car l'ordonnée d'un point de la courbe vaut $f(x)$. S'il y en a, les antécédents de k sont les abscisses de ces points car l'abscisse d'un point de la courbe vaut x. Ces abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = k$. Une telle résolution ne donne pas toujours les valeurs exactes, la lecture graphique étant parfois approximative.

Exemple 1.7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$. On recherche les solutions de l'équation $f(x) = 3$
On commence par tracer soigneusement la courbe représentative de f et on obtient :



On cherche les points de la courbe ayant pour ordonnée 3. Pour cela on peut tracer la droite d'équation $y = 3$ et chercher les points d'intersection de cette droite avec la courbe de f.
On obtient ici deux points $M_1(0;3)$ et $M_2\left(\frac{5}{2};3\right)$. Les solutions sont leurs abscisses : 0 et $\frac{5}{2}$.
On écrit : « Les solutions de l'équation $f(x) = 3$ sont 0 et $\frac{5}{2}$ car les points de la courbe de f d'ordonnée 3 ont pour abscisses 0 et $\frac{5}{2}$ ».

1.3.2 Résolution d'inéquations de la forme $f(x) \leqslant k$

Ces inéquations peuvent se résoudre graphiquement. On procède de la façon suivante :
- on trace soigneusement $\mathscr{C}_f$ dan un repère (orthogonal) ;
- on trace la droite d'équation $y = k$;
- on recherche les points de la courbe situés *sous* la droite ;
- l'ensemble des solutions est constitué des abscisses de ces points.

Exemple 1.8. Sur l'exemple précédent, si l'on doit résoudre $f(x) \leqslant 3$, après avoir tracé $y = 3$ on constate que les points de la courbe situés sous cette droite ont leurs abscisses comprises entre 0 et $\frac{5}{2}$.
Donc $f(x) \leqslant 3 \Leftrightarrow x \in \left[0;\frac{5}{2}\right]$. Ou bien $S = \left[0;\frac{5}{2}\right]$.

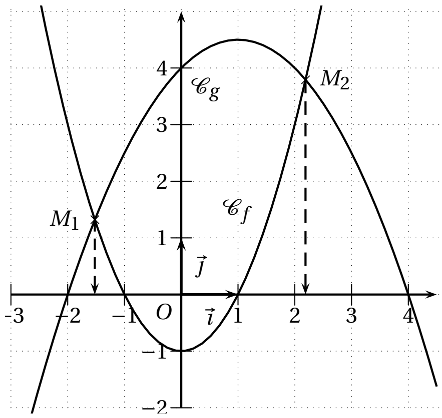
Remarque. • On résoud de la même manière les équations du type $f(x) \geqslant k$.
On retient alors les abscisses des points situés *au-dessus* de la droite d'équation $y = k$.
Dans l'exemple $f(x) \geqslant 3 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty;0\right] \cup \left[\frac{5}{2};+\infty\right[$.

- De même pour les inéquations strictes : $f(x) > k$ ou $f(x) < k$. On excluera alors les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite.
Dans l'exemple $f(x) < 3 \Leftrightarrow x \in \left]0;\frac{5}{2}\right[$.

1.3.3 Résolution d'équation de la forme $f(x) = g(x)$

Cela revient à chercher les éléments de l'ensemble de départ qui ont la même image par f et par g.
Une telle recherche peut se faire graphiquement. On recherche alors les points des deux courbes représentatives ayant même abscisse et même ordonnée, c'est-à-dire les points d'intersection des deux courbes. Une telle résolution ne donne pas toujours les valeurs exactes, la lecture graphique tant parfois approximative.

Exemple 1.9. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par, respectivement, $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = -0,5x^2 + x + 4$. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
On commence par tracer soigneusement les deux courbes représentatives et on obtient :



On cherche les points d'intersection des deux courbes, ici M_1 et M_2, et les solutions de l'équation sont leurs abscisses dont les valeurs approximatives sont $-1,5$ et $2,2$.
Les solutions sont donc $x \approx -1,5$ et $x \approx 2,2$.

1.3.4 Résolutions d'inéquations de la forme $f(x) \leqslant g(x)$

Là encore ces inéquations peuvent se résoudre graphiquement. On procède de la façon suivante :
- on trace soigneusement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un repère (orthogonal) ;
- l'ensemble des solutions est constitué des abscisses des points où la courbe de f est située *sous* celle de g.

Exemple 1.10. Sur l'exemple précédent, si l'on doit résoudre $f(x) \leqslant g(x)$, on constate que les points de la courbe de f situés sous celle de g ont leurs abscisses comprises entre environ $-1,5$ et 2,2.
Donc $f(x) \leqslant g(x) \Leftrightarrow x \in [-1,5;2,2]$. Ou bien $S = [-1,5;2,2]$.

Remarque. • On résoud de la même manière les équations du type $f(x) \geqslant g(x)$.
On retient alors les abscisses des points de la courbe de f situés *au-dessus* de celle de g.
Dans l'exemple $f(x) \geqslant g(x) \Leftrightarrow x \in]-\infty;-1,5] \cup [2,2;+\infty[$.

- De même pour les inéquations strictes : $f(x) > g(x)$ ou $f(x) < g(x)$. On excluera alors les abscisses des points d'intersection des deux courbes.
Dans l'exemple $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x \in]-1,5;2,2[$.

1.3.5 Exercices

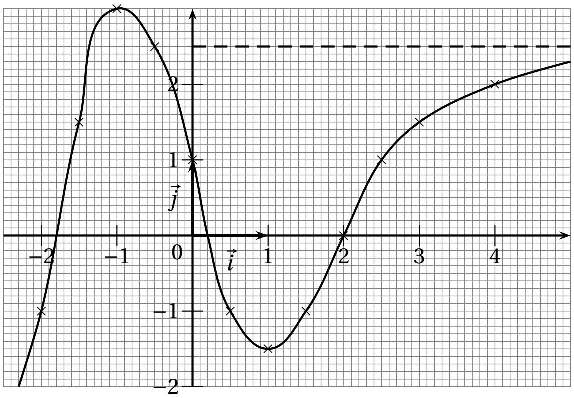
Exercice 1.9.
La fonction f est définie sur $[-3;3]$ par : $f(x) = x^2 - 3x + 1$.
$\mathscr{C}_f$, courbe représentative de f a déjà été obtenue dans l'exercice 1.7.

1. À l'aide de la représentation graphique $\mathscr{C}_f$, avec la précision permise par le graphique, répondre aux question suivantes :

(a) Quelle est l'image de 2 ?
(b) Quelle est l'image de 3 ?
(c) Quelle est l'image de 4 ?
(d) Quels sont les antécédents de 1 ?
(e) Quels sont les antécédents de 2 ?
(f) Quels sont les antécédents de -2 ?

2. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :
   (a) $f(x) = 3$;
   (b) $f(x) = -1,5$;
   (c) $f(x) \geqslant -1$;
   (d) $f(x) < 4$;
   (e) $f(x) > -3$;
   (f) $f(x) < -2$.

EXERCICE 1.10.
Une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est donnée par sa courbe représentative $\mathscr{C}$:

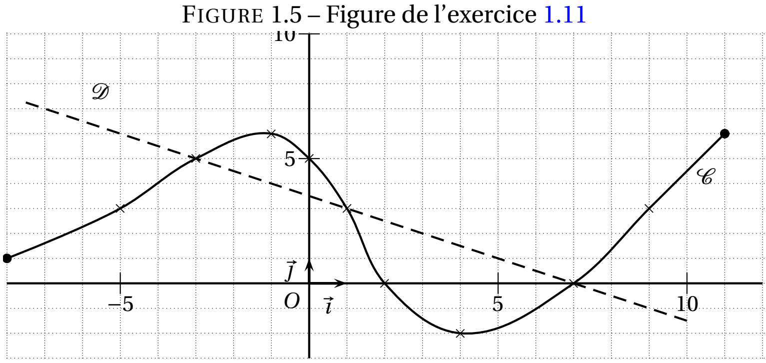


Avec la précision permise par le graphique, résoudre :

1. Les équations suivantes :
   (a) $f(x) = 1$;
   (b) $f(x) = 0$;
   (c) $f(x) = -1$;
   (d) $f(x) = 2$.
2. Les inéquations suivantes :
   (a) $f(x) \geqslant 1$;
   (b) $f(x) \geqslant 0$;
   (c) $f(x) < -1$;
   (d) $f(x) > 2$.

EXERCICE 1.11.
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure 1.5 de la présente page représente une fonction f et la droite $\mathscr{D}$ représente une fonction g.

FIGURE 1.5 – Figure de l'exercice 1.11



1. Résoudre graphiquement les équations :
   (a) $f(x) = 3$;
   (b) $f(x) = -2$;
   (c) $f(x) = 0$;
   (d) $f(x) = 6$.
2. Résoudre graphiquement les inéquations :
   (a) $f(x) \leqslant 0$;
   (b) $f(x) \geqslant 3$;
   (c) $f(x) > 5$.
3. Résoudre graphiquement :
   (a) $f(x) = g(x)$;
   (b) $f(x) < g(x)$.
4. Donner le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

EXERCICE 1.12.
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$ et $g(x) = 3x - 2$.

1. Tracer soigneusement les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de f et g sur l'intervalle $[-2;2]$.
2. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 1$.
3. Déterminer graphiquement les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

EXERCICE 1.13 (Avec la calculatrice)**.**
Les fonctions f et g sont définies sur $[-2;2]$ par : $f(x) = x^3$ et $g(x) = 1 - x$.

1. Tracer sur une calculatrice graphique les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de f et de g.
2. En déduire le nombre de solutions de l'équation $x^3 + x - 1 = 0$.

1.4 Variations, extremums

1.4.1 Sens de variation

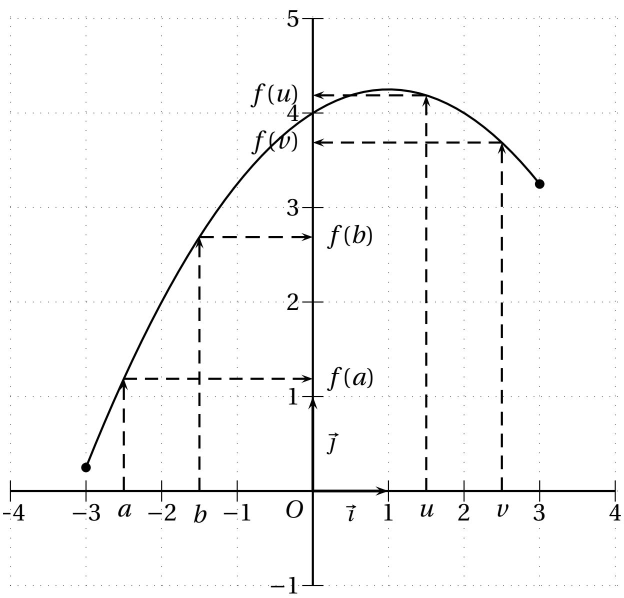
Il s'agit de traduire mathématiquement qu'une fonction « augmente » ou « diminue ».

Exemple 1.11. Reprenons un exemple déjà vu : Le tableau suivant donne le nombre de titulaires du R.M.I. tous les deux ans :

Année	1989	1991	1993	1995	1997	1999	2001	2003	2005
Nombre de titulaires du R.M.I.	396 160	567 556	774 803	925 286	1 045 303	1 120 251	1 051 725	1 120 844	1 266 400

La fonction f est celle qui à chaque année associe le nombre de titulaires du R.M.I.
Ainsi $f(1989) = 396160$, $f(1991) = 567556$, etc.
On s'aperçoit facilement que le nombre de titulaires n'a fait qu'augmenter jusqu'à 1999, a diminué de 1999 à 2001 puis est reparti à la hausse de 2001 à 2005.

Exemple 1.12. Lorsqu'une fonction est définie graphiquement, on peut faire le même type de constatations. Soit, par exemple, la fonction définie sur $[-3;3]$ par la courbe représentative ci-contre.



On constate que lorsque $x \in [-3;1]$ la courbe de f ne fait que monter et que lorsque $x \in [1;3]$ elle ne fait que descendre.

Plus précisément :

- si l'on prend deux nombres quelconques a et b dans $[-3;1]$ avec $a < b$, alors leurs images seront dans le même ordre : $f(a) < f(b)$;
- si l'on prend deux nombres quelconques u et v dans $[1;3]$ avec $u < v$, alors leurs images seront dans l'ordre inverse : $f(u) > f(v)$;

C'est la définition mathématique de la croissance ou de la décroissance d'une fonction f.

Définition 1.4. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est
- *croissante* sur I si, pour tous réels a et b de I, on a :
  Si $a < b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$.
- *décroissante* sur I si, pour tous réels a et b de I, on a :
  Si $a < b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$.
- *monotone* si elle n'est que croissante sur I ou si elle n'est que décroissante sur I.
- *constante* sur I si, pour tous réels a et b de I, on a : $f(a) = f(b)$.

Remarque. • Ces notions ne sont valables que sur **un intervalle** et pas sur une réunion d'intervalles disjoints.
- Antécédents et images étant rangés dans le même ordre, on dit qu'une fonction croissante *conserve* l'ordre.
- Antécédents et images étant rangés dans l'ordre inverse, on dit qu'une fonction décroissante *inverse* l'ordre.
- On obtient les définitions d'une fonction *strictement* croissante ou *strictement* décroissante en remplaçant les inégalités par des inégalités strictes. Ainsi on dit que f est strictement croissante sur I si pour tous réels a et b de I on a :
  Si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$
- Une fonction est strictement monotone sur I si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I

1.4.2 Tableau de variations

Étudier les variations d'une fonction f c'est étudier sur quel(s) intervalle(s) elle est croissante, décroissante et constante.
Ces résultats peuvent se résumer dans un tableau de variation, qui est une forme stylisée de courbe représentative où l'on indique uniquement si la courbe monte, descend ou est stable. Dans la première ligne on indique les valeurs importantes de x et dans la seconde les variations de f.

Exemple 1.13. Dans l'exemple précédent on obtient

x	-3		1		3
f	$\approx 0,25$	↗	$\approx 4,25$	↘	$\approx 2,25$

Exemple 1.14. Le tableau ci-contre indique que la fonction f est croissante lorsque $x \in [-2;-1]$, décroissante lorsque $x \in [-1;1]$ et constante lorsque $x \in [1;2]$.
Il indique aussi que $f(-2) = -1$, $f(-1) = 3$ et $f(x) = -2$ pour tout $x \in [1;2]$.

x	-2		-1		1		2
f	-1	↗	3	↘	-2	→	-2

1.4.3 Extremums

Les extremums, s'ils existent, sont les valeurs maximale et minimale qui sont **atteintes** par la fonction f sur un intervalle donné. Plus précisément :

Définition 1.5. Soit une fonction f définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On dit que
- f admet un *maximum*, atteint en x_0 si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leqslant f(x_0)$;
- f admet un *minimum*, atteint en x_0 si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Les maximum et minimum sont appelés les *extremums*.

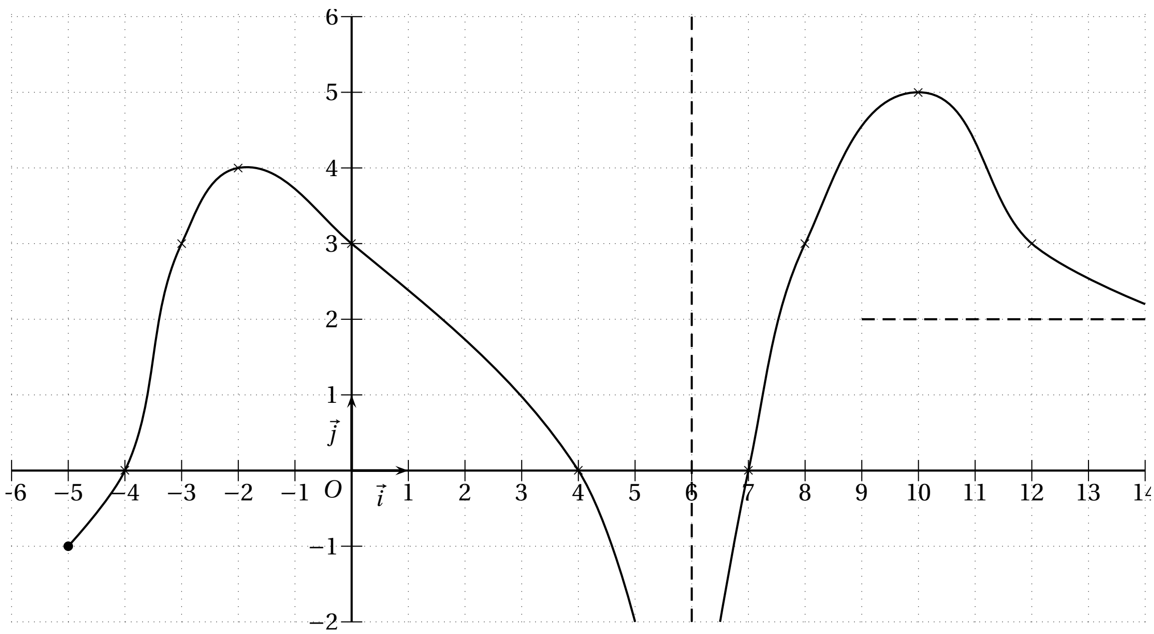
Remarque. Un extremum doit être atteint par une valeur x_0.

Exemple 1.15. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ n'admet pas -1 comme minimum.
En effet, si on a bien $f(x) \geqslant -1$ sur $\mathbb{R}$, il n'existe pas de x_0 tel que $f(x_0) = -1$.
Par contre 1 est bien le minimum de f sur $\mathbb{R}$ car
- $f(x) \geqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ **ET**
- $f(0) = 1$

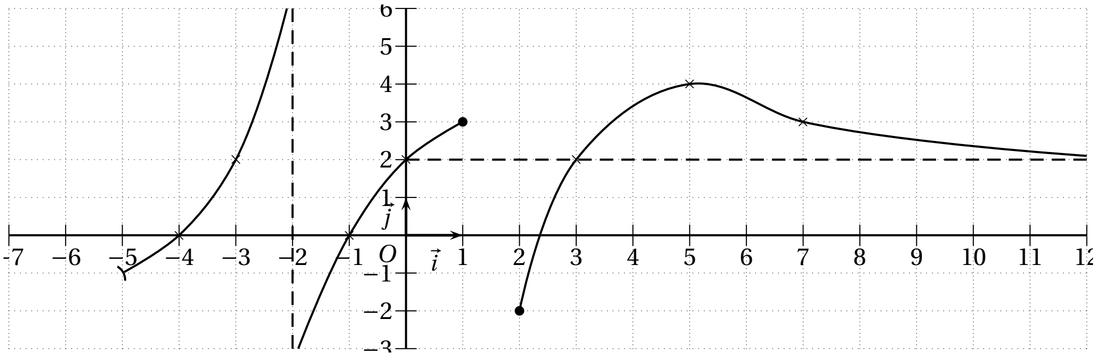
On dira donc : le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est 1 et il est atteint pour $x_0 = 0$.

1.4.4 Exercices

EXERCICE 1.14.
On considère la fonction f représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous (en deux parties).
Indiquer son ensemble de définition et dresser son tableau de variations.



EXERCICE 1.15.
Soit la fonction f représentée ci-dessous ; sa courbe représentative est en trois parties.
Dresser le tableau de variations de f.



EXERCICE 1.16.
Tracer une courbe représentative d'une fonction f sachant que :

- 1 a pour antécédents, par la fonction f, -2 et 1,5 ;
- $f(x) = 0$ a pour solutions $x = 2$ ou $x = 4$;
- $f(-1) = 2$;
- -1 est l'image de 3 ;
- $D_f = [-2;4]$;
- le maximum de f est 3 ;
- le tableau des variations de f est le suivant :

x			0		3	
f	1	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

EXERCICE 1.17.
On donne le tableau des variations d'une fonction f :

x	-5		-3		0		1		8
f	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-2

1. S'il est possible de répondre, compléter par « < », « > » ou « = ». Sinon mettre une croix.

$f(-1)$	……	$f(-2)$
$f(-3)$	……	$f(1)$
$f(-1)$	……	1
$f(-2)$	……	$f(0,5)$
$f(-2)$	……	$f(1,5)$
$f(4)$	……	$f(2)$
4	……	$f(-4)$

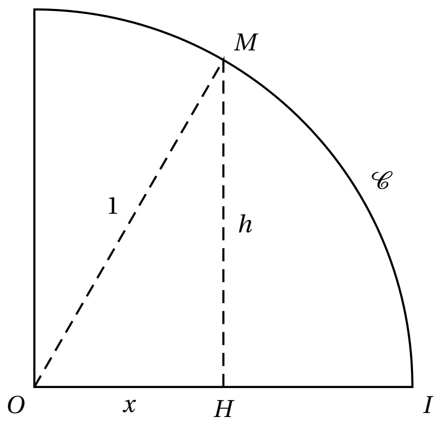
2. Résoudre, lorsque c'est possible, les inégalités suivantes :
   (a) $f(x) \geqslant 0$;
   (b) $f(x) = 1$;
   (c) $f(x) < -1$;
   (d) $f(x) < 0$.
3. Dire, si c'est possible, quel est le maximum de la fonction et quel est son minimum.

EXERCICE 1.18 (Avec une calculatrice)**.**
On considère la fonction f définie par : $f(x) = 2x\sqrt{4-x^2}$.
À l'aide d'une calculatrice graphique :

1. conjecturer l'ensemble de définition de f ;
2. conjecturer quels sont les extremums de f sur son ensemble de définition ;
3. dresser le tableau des variations de f.

1.5 Problèmes

PROBLÈME 1.1.
On considère un quart de cercle $\mathscr{C}$ de rayon $OI = 1$.
M est un point quelconque de ce quart de cercle. H est le pied de la hauteur issue de M dans le triangle IMO.
Le problème consiste à déterminer où placer M pour avoir l'aire du triangle OHM maximale.
On note x la longueur OH et h la longueur HM. On a donc $0 \leqslant x \leqslant 1$.

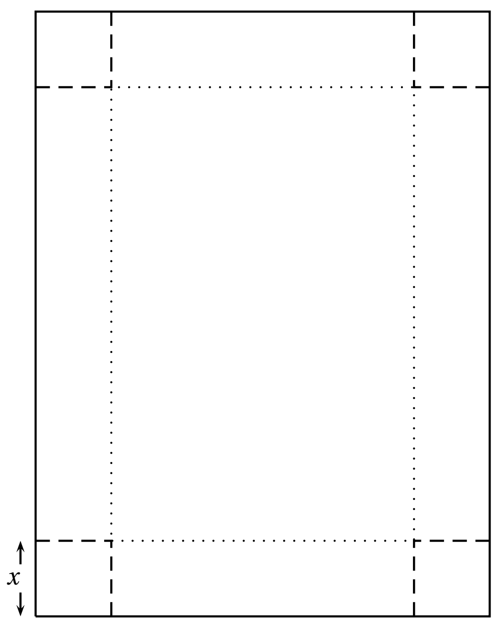


1. Exprimer la longueur h en fonction de x.
2. Soit f la fonction qui à x associe l'aire du triangle OMH.
   Démontrer que :
   $$f(x) = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$$
3. Compléter le tableau ci-dessous.
4. Tracer la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère (unités graphiques : en abscisse 10 cm pour une unité ; en ordonnée 20 cm pour une unité).
5. Déterminer graphiquement le maximum de f. Interpréter cette valeur.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	1
$f(x)$												

On arrondira les valeurs de $f(x)$ à 10^{-2} près.

PROBLÈME 1.2.
On dispose d'une feuille cartonnée de dimensions 24×32 avec laquelle on veut fabriquer une boîte sans couvercle. Pour cela, on découpe à chaque coin de la feuille un carré de côté x. On obtient le patron de la boîte (qu'on plie suivant les pointillés pour obtenir la boite).
Le problème est de déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x le volume de la boite est maximal.



1. Entre quelles valeurs peut varier x ?
2. Calculer les dimensions de la boîte (longueur, largeur, hauteur), puis son volume lorsque $x = 2$ cm, lorsque $x = 5$ cm et lorsque $x = 12$ cm.
3. Déterminer les dimensions de la boîte puis l'expression $V(x)$ du volume de la boite en fonction de x
4. Représenter graphiquement dans un repère aux unités bien choisies la courbe de $V(x)$.
5. Déterminer graphiquement pour quelle(s) valeur(s) de x le volume est maximal.

Devoir surveillé n°1

Généralités sur les fonctions

Toute valeur approchée obtenue par lecture graphique sera donnée au dixième

EXERCICE 1.1 (5 points).
Pour chacune des affirmations suivantes dites si elle est vraie ou fausse et :
- si elle est vraie, dire la même chose d'une autre manière ;
- si elle est fausse, la corriger.

1. $f(0) = 3$ signifie que l'image de 0 par f est 3 VRAI - FAUX

   ....

2. $f(2) = -1$ signifie que l'antécédant de 2 par f est -1 VRAI - FAUX

   ....

3. La courbe de f passe par le point $A(-1;4)$ signifie que $f(4) = -1$ VRAI - FAUX

   ....

4. L'image de 5 par f est 1 signifie que la courbe de f passe par le point de coordonnées $(5;1)$ VRAI - FAUX

   ....

5. L'antécédant de 4 par f est 3 signifie que $f(3) = 4$ VRAI - FAUX

   ....

EXERCICE 1.2 (3 points).
Exercice à faire entièrement à la calculatrice, il n'est demandé aucune explication.
Soit les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-4;3]$ par : $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = -2x^2 + 2x + 3$.
Compléter :

L'ensemble S des solutions de $g(x) \geqslant 0$ est : $S = \ldots\ldots\ldots\ldots$
L'ensemble S des solutions de $f(x) = g(x)$ est : $S = \ldots\ldots\ldots\ldots$
L'ensemble S des solutions de $f(x) < g(x)$ est : $S = \ldots\ldots\ldots\ldots$

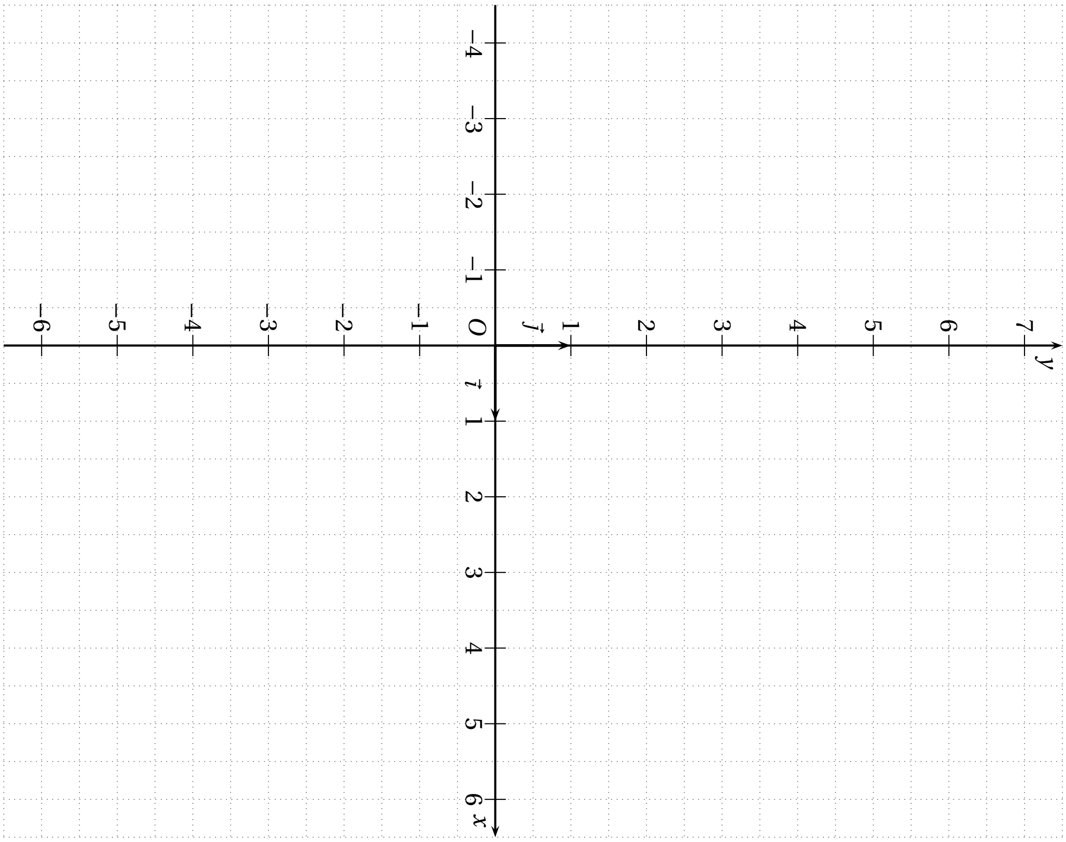
EXERCICE 1.3 (6 points).
La fonction f est définie sur $[-3;3]$ par : $f(x) = x^2 + x - 4$.

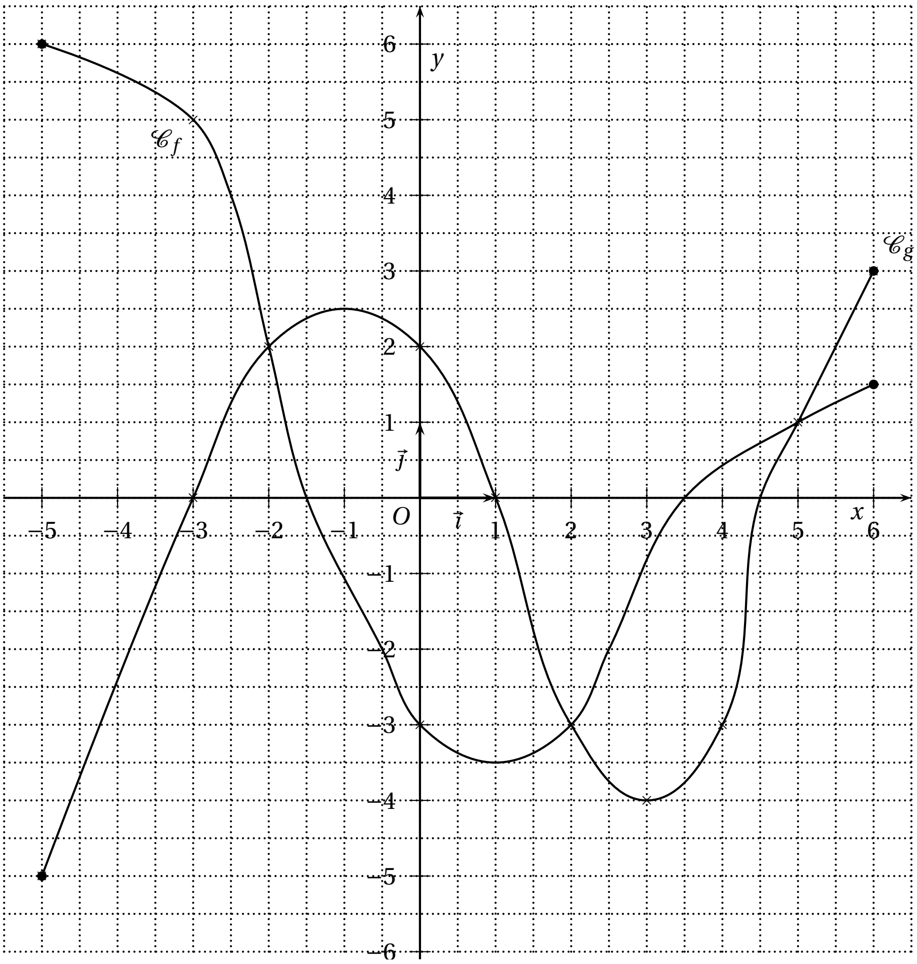
1. (a) Calculer les valeurs exactes de $f(2)$ et de $f\left(1+\sqrt{2}\right)$.
   (b) Résoudre l'équation $f(x) = -4$.
   En déduire les antécédants de -4 par la fonction f.
2. (a) Dresser un tableau de valeurs pour tous les antécédants entiers de -3 à 3.
   (b) Dans le repère fourni en annexe page suivante, tracer la courbe représentative de f.
3. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x - 5$.
   (a) Tracer la courbe représentative de g dans le même repère que celle de f.
   (b) Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$
4. Question bonus : Résoudre par le calcul $f(x) = g(x)$.

EXERCICE 1.4 (6 points).
On donne en annexe les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g.

1. Recopier sur votre copie et compléter :
   (a) l'image de 1 par la fonction f est ... ;
   (b) les antécédants de -2 par la fonction f sont ... ;
2. Résoudre graphiquement les équations :
   (a) $f(x) = -3$;
   (b) $f(x) = 4$;
3. Résoudre graphiquement les inéquations :
   (a) $f(x) \leqslant 0$;
   (b) $f(x) \geqslant -2$;
   (c) $f(x) < -5$.
4. Résoudre graphiquement :
   (a) $f(x) = g(x)$;
   (b) $f(x) < g(x)$.
5. (a) Donner le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
   (b) Dresser le tableau des variations de $g(x)$.

Annexes





Chapitre 2

Géométrie dans l'espace

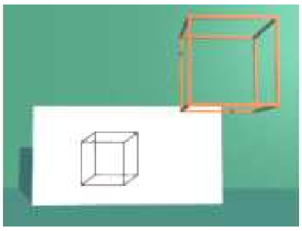
Sommaire

2.1 Perspective cavalière

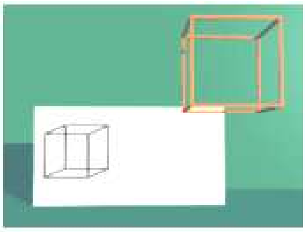
2.1.1 Principe

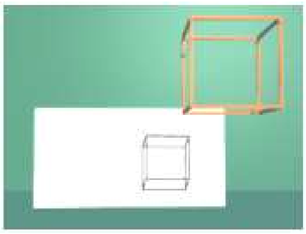
Dans ce chapitre, nous allons travailler sur des objets en trois dimensions qui seront représentés, la plupart du temps, sur des feuilles de papier qui, elles, n'ont que deux dimensions.
Cette représentation s'appelle la *perspective cavalière*.
Ses principes sont les suivants :

- Vous faites face à un écran. Le soleil éclaire la scène (il est dans votre dos). Un cube est placé devant l'écran et il projette son ombre sur cet écran.
  Il est placé de telle façon que deux de ses faces sont parallèles à l'écran et deux autres horizontales. [1]
  Si les rayons du soleil ne sont pas perpendiculaires à l'écran, l'ombre du cube sur l'écran est une représentation en perspective cavalière du cube. [2]

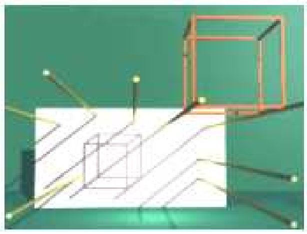


- On parle d'**une** représentation en perspective cavalière, car la forme de l'ombre dépend de la direction des rayons du soleil.





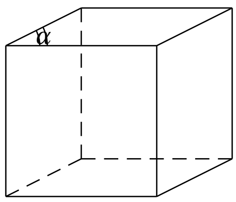
- On appelle *fuyante* une droite perpendiculaire à l'écran.
  Les ombres de toutes les fuyantes sont parallèles et leur direction commune dépend de celle des rayons du soleil.



2.1.2 Construction et propriétés

Construction

- L'angle α des fuyantes (droites perpendiculaires au plan de projection) vaut habituellement 30°, 45° ou 60°.
- Toutes les dimensions qui sont dans des plans parallèles au plan de projection sont représentées en vraie grandeur.
- Les dimensions qui sont portées par les fuyantes sont multipliées par un coefficient de réduction, en général compris entre 0,5 et 0,8.



Propriétés

- Des droites parallèles sont représentées sur le dessin par des droites parallèles.
  Attention : Deux droites parallèles sur le dessin ne le sont pas toujours dans la réalité.
- De la même manière, des droites sécantes sont représentées sur le dessin par des droites sécantes, **mais** deux droites sécantes sur le dessin ne le sont pas toujours dans la réalité.
- Les rapports de longueur sur une droite sont conservés sur le dessin. Par exemple, le milieu d'un segment est représenté sur le dessin par le milieu du segment obtenu.

1. Il arrivera parfois que le cube soit représenté sans faces parallèles à l'écran.
2. Si les rayons sont perpendiculaires à l'écran, on parle de perspective orthogonale. Dans toute la suite, on exclura ce cas.

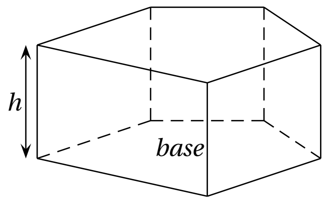
2.2 Solides usuels et volumes

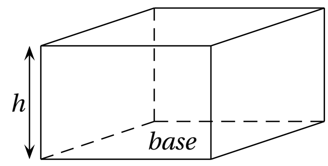
2.2.1 Famille des primes droits

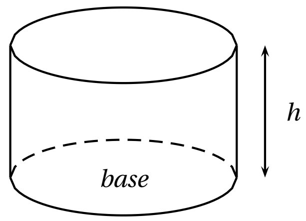
Prisme droit
Toutes les faces sont des rectangles sauf (éventuellement) les deux bases.

Pavé
Prisme droit dont les bases sont des rectangles.

Cylindre
Peut être considéré comme un prisme droit dont les bases sont des disques.







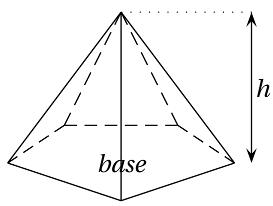
Propriété 2.1. *Le volume de ces solides est donné par la formule suivante : Volume = Aire de la base × hauteur*

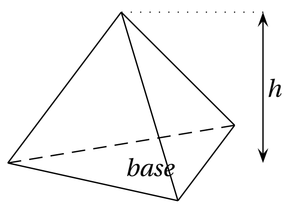
2.2.2 Famille des pyramides

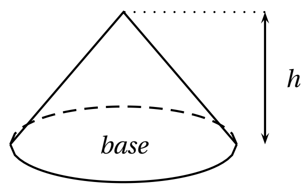
Pyramide
Constituée d'une base de forme quelconque et d'un sommet. Des arêtes joignent ce sommet à chacun des sommets de la base.

Tétraèdre
Pyramide dont la base est un triangle.

Cône de révolution
Peut être considéré comme une pyramide dont la base est un disque.



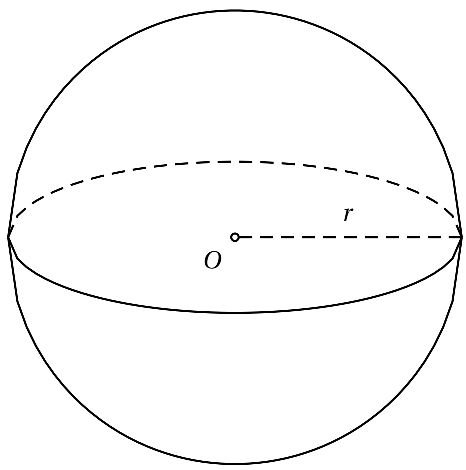




Propriété 2.2. *Le volume de ces solides est donné par la formule suivante : Volume =* $\frac{1}{3}$*Aire de la base × hauteur*

On peut ainsi mettre trois fois le volume d'un cône de révolution dans un cylindre de révolution ayant même base et même hauteur, ou trois fois le volume d'un tétraèdre dans un prisme droit ayant même base et même hauteur.

2.2.3 Sphère



Propriété 2.3. *Le volume d'une sphère de rayon r est donné par la formule : Volume =* $\frac{4}{3}\pi r^3$.
L'aire de la surface d'une sphère de rayon r est donnée par la formule : Aire = $4\pi r^2$.

2.3 Positions relatives de droites et de plans

2.3.1 Règles d'incidence

Règle 2.1. *Par deux points distincts de l'espace A et B, il passe une unique droite, notée* (AB).

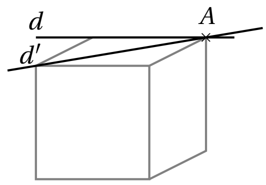
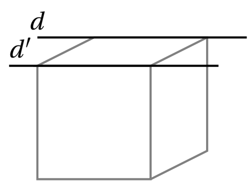
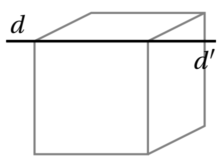
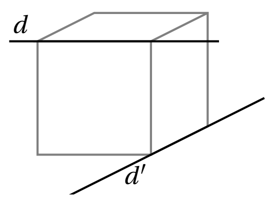
Règle 2.2. *Par trois points non alignés de l'espace A, B et C, il passe un unique plan, noté* (ABC).

Règle 2.3. *Si deux points distincts A et B de l'espace appartiennent à un plan* $\mathscr{P}$*, alors la droite* (AB) *est contenue dans le plan* $\mathscr{P}$*, c'est-à-dire que tout point M appartenant à la droite* (AB) *appartient aussi au plan* $\mathscr{P}$.

Règle 2.4. *Dans chaque plan de l'espace, on peut appliquer tous les théorèmes de géométrie plane* (PYTHAGORE, THALÈS, *etc.).*

2.3.2 Positions relatives de deux droites

Règle 2.5. *Deux droites de l'espace sont soit coplanaires, soit non coplanaires.*

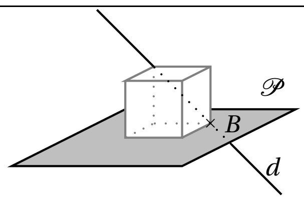
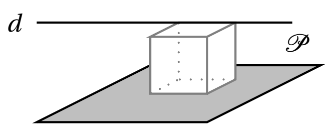
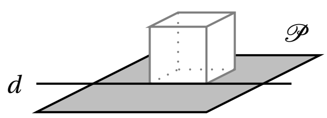
Coplanaires (dans un même plan)			**Non coplanaires**
d et d' sécantes	d et d' parallèles		
			
d et d' ont un point d'intersection A. $d \cap d' = \{A\}$	d et d' sont strictement parallèles. $d \cap d' = \varnothing$	d et d' sont confondues $d \cap d' = d = d'$	Aucun plan ne contient à la fois d et d'. $d \cap d' = \varnothing$

Remarques.

- Contrairement au plan, deux droites de l'espace n'ayant pas de point en commun ne sont pas forcément parallèles.
- Des droites strictement parallèles sont des droites **coplanaires et qui n'ont aucun point en commun**.
- On peut définir un plan de plusieurs manières :
  - par la donnée de trois points ;
  - par la donné de deux droites sécantes ;
  - par la donnée de deux droites strictement parallèles ;
  - par la donnée d'une droite et d'un point n'appartenant par à cette droite.

2.3.3 Positions relatives d'une droite et d'un plan

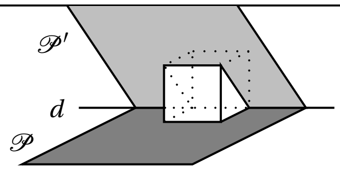
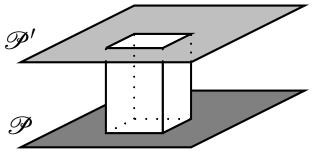
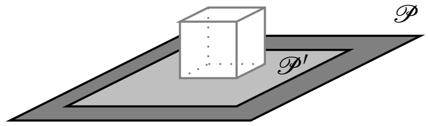
Règle 2.6. *Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.*

Sécants	**Parallèles**	
		
d et $\mathscr{P}$ ont un point d'intersection B. $d \cap \mathscr{P} = \{B\}$	d et $\mathscr{P}$ sont strictement parallèles. $d \cap \mathscr{P} = \varnothing$	d est contenue dans $\mathscr{P}$ $d \cap \mathscr{P} = d$

Remarque. Une droite d et un plan $\mathscr{P}$ sont parallèles s'ils ne sont pas sécants. On note alors $d \parallel \mathscr{P}$ ou $\mathscr{P} \parallel d$.

2.3.4 Positions relatives de deux plans

Règle 2.7. *Deux plans de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.*

Sécants	**Parallèles**	
		
$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ont une droite d'intersection d. $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = d$	$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont strictement parallèles. $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \varnothing$	$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont confondus $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \mathscr{P} = \mathscr{P}'$

Remarque. Deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles lorsqu'ils ne sont pas sécants. On note $\mathscr{P} \parallel \mathscr{P}'$.

Remarques.
- Pour démontrer que trois points sont alignés, il suffit de montrer que les trois points appartiennent à deux plans sécants : comme l'intersection de deux plans sécants est une droite, cela implique que les points sont tous les trois sur cette droite.
- Pour trouver la droite d'intersection de deux plans, il suffit de trouver deux points distincts qui appartiennent aux deux plans : la droite d'intersection est alors celle qui passe par ces deux points. Ces points sont en général des points d'intersection de droites sécantes, l'une contenu dans l'un des plans, l'autre dans l'autre plan.

2.4 Parallélisme dans l'espace

2.4.1 Parallélisme entre droites

Propriété 2.4. *Deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.*

$$\text{Si } d \parallel d' \text{ et } d' \parallel d'' \text{ alors } d \parallel d''$$

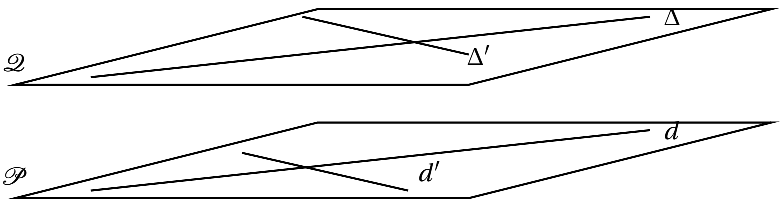
Propriété 2.5. *Si deux droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une, coupe l'autre.*

2.4.2 Parallélisme entre plans

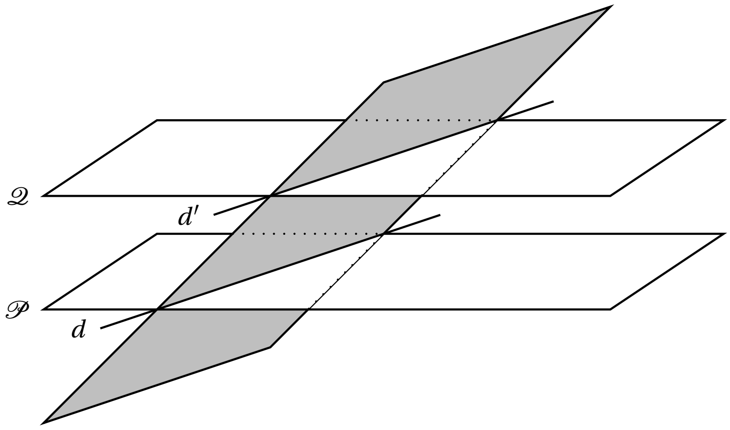
Propriété 2.6. *Deux plans parallèles à un même plan sont parallèles entre eux.*

$$\text{Si } \mathscr{P} \parallel \mathscr{P}' \text{ et } \mathscr{P}' \parallel \mathscr{P}'' \text{ alors } \mathscr{P} \parallel \mathscr{P}''$$

Propriété 2.7. *Si deux droites sécantes d et d' d'un plan $\mathscr{P}$ sont parallèles à deux droites sécantes Δ et Δ' d'un plan $\mathscr{Q}$, alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont parallèles.*



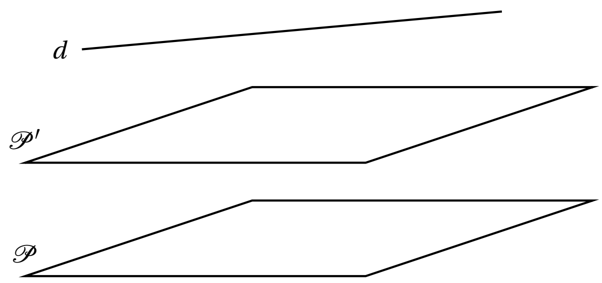
Propriété 2.8. *Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles, alors tout plan sécant à $\mathscr{P}$ est aussi sécant à $\mathscr{P}'$ et leurs droites d'intersection d et d' sont parallèles.*



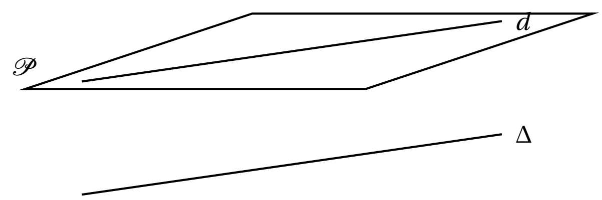
2.4.3 Parallélisme entre droite et plan

Propriété 2.9. *Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles et si une droite d est parallèle à $\mathscr{P}$, alors d est parallèle à $\mathscr{P}'$.*

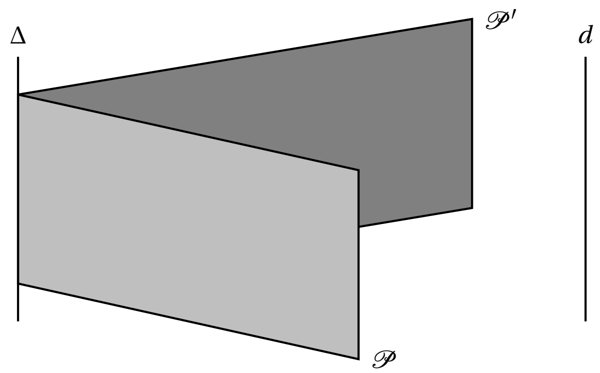
$$\text{Si } d \parallel \mathscr{P} \text{ et } \mathscr{P} \parallel \mathscr{P}' \text{ alors } d \parallel \mathscr{P}'$$



Propriété 2.10. *Si deux droites d et Δ sont parallèles, et si d est contenue dan un plan $\mathscr{P}$, alors Δ est parallèle à $\mathscr{P}$.*

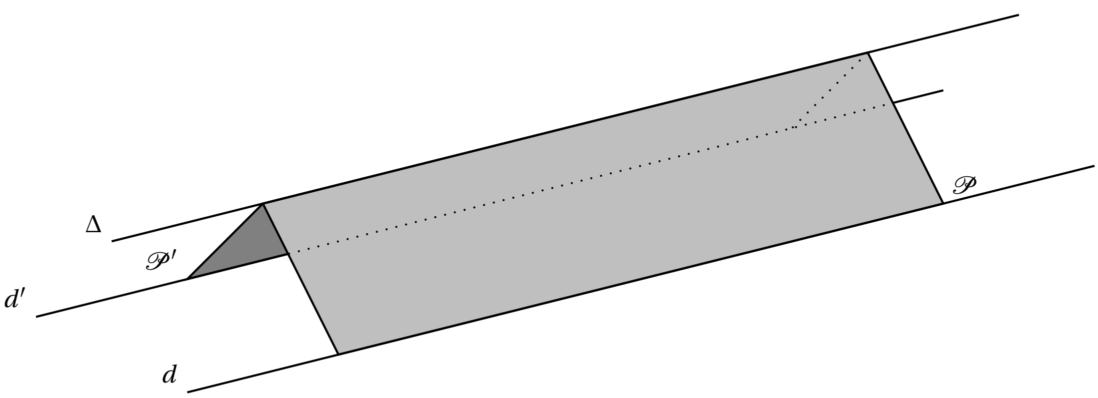


Propriété 2.11. *Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants selon une droite Δ et si d est une droite parallèle à $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ alors d et Δ sont parallèles.*



Théorème 2.12 (Théorème du toit)**.** *Si :*
- *d et d' sont parallèles ;*
- *$\mathscr{P}$ est un plan qui contient d et $\mathscr{P}'$ est un plan qui contient d' ;*
- *$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants selon une droite Δ*

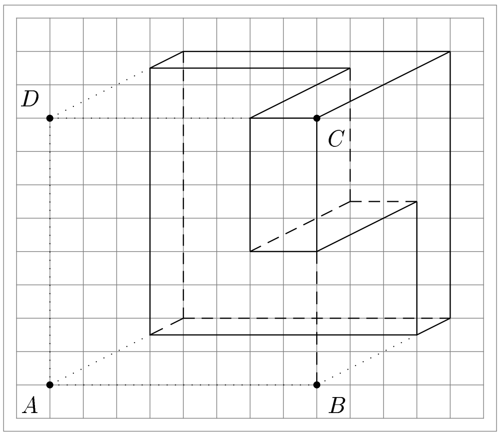
alors Δ est parallèle à d et à d'.

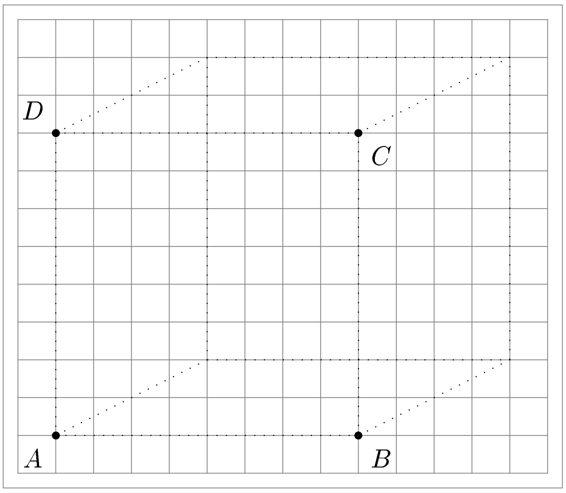


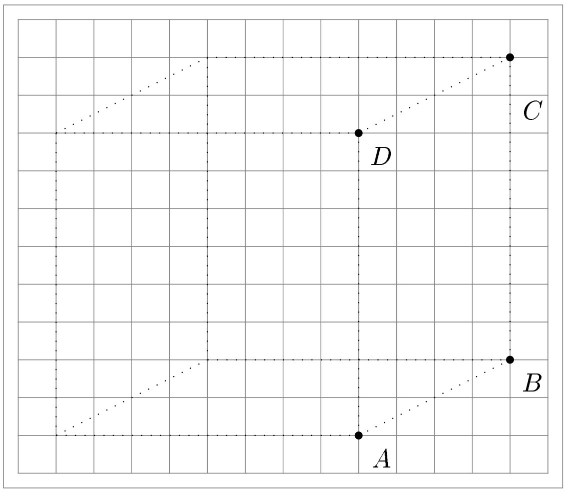
2.5 Exercices

2.5.1 Calculs dans l'espace

EXERCICE 2.1.
Une pièce métallique (en traits pleins) est découpée dans un cube. Construire, en perspective cavalière : la pièce restante du cube la face $ABCD$ restant devant ; la pièce restante du cube la face $ABCD$ étant à droite.







EXERCICE 2.2.
On considère un tétraèdre $ABCD$, dont les faces ABC, ABD et ACD sont des triangles rectangles en A. $AB = AD = 5$ cm et $AC = 12$ cm.

1. Dessiner ce tétraèdre en perspective cavalière, la face ABC étant frontale.
2. Quelle est la nature de CDB ? le représenter en vraie grandeur.
3. Quel est le volume de $ABCD$?

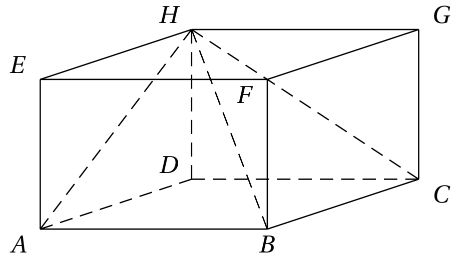
EXERCICE 2.3.
$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a.

1. Quelle est la nature du triangle AFC ? Justifier.
   Le représenter en vraie grandeur à la règle et au compas en prenant $a = 6$ cm.
2. Calculer la longueur d'une diagonale principale du cube.

EXERCICE 2.4.
On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté a. On nomme P le centre de la face $EFGH$ et Q le centre de la face $BCGF$. M désigne le milieu de $[PQ]$. On admettra que (EG) est perpendiculaire à (EA) et que (BG) est perpendiculaire à (AB).

1. Montrer que $PQ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ puis que $AP = AQ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.
2. Calculer une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{PAQ}$.
3. Donner, en fonction de a, la valeur exacte de l'aire du triangle APQ.

EXERCICE 2.5.
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle (un pavé) tel que $AB = 10$, $AE = 6$ et $BC = 8$.



1. Calculer les longueurs des segments $[HA]$, $[HF]$, $[HC]$ et $[HB]$.
2. Calculer le volume des pyramides $HABCD$ et $HBCGF$.
3. Réaliser un patron de ces deux pyramides.

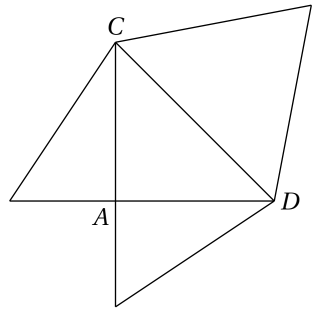
EXERCICE 2.6.
$ABCDEFGH$ est un cube. $AB = 5$ cm. Soit I le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABH.

1. Calculer AH, HB et AI.
2. Représenter en vraie grandeur le triangle AIC.
3. Démontrer que la mesure en degrés de $\widehat{AIC}$ est 120°.

EXERCICE 2.7.
$SABC$ est un tétraèdre régulier d'arête a. Calculer en fonction de a :

1. la hauteur SH (on admettra que H est l'intersection des hauteurs de ABC ;
2. l'aire du triangle ABC et l'aire totale du tétraèdre ;
3. le volume du tétraèdre.

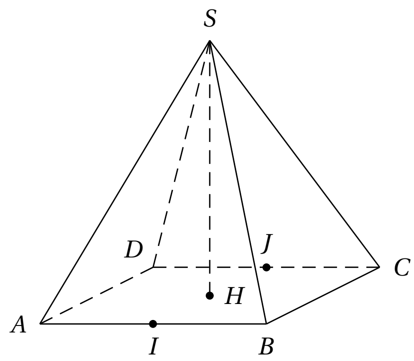
EXERCICE 2.8.
La figure ci-contre est un patron d'un solide $ABCD$. Le triangle ADC est rectangle en A et a pour dimensions :



- $AD = 3,5$ cm ;
- $AC = 4$ cm ;
- $AB = 3$ cm.

1. De quel type de solide s'agit-il ?
2. Le dessiner en perspective cavalière, en mettant la face ABC en vraie grandeur.

EXERCICE 2.9.
Soit $SABCD$ une pyramide régulière dont la base est le carré de côté $2a$ et dont les faces latérales sont des triangles isocèles d'angles au sommet de mesure 30°. On désigne respectivement par I, J et H les milieux de $[AB]$, $[CD]$ et le centre du carré $ABCD$.

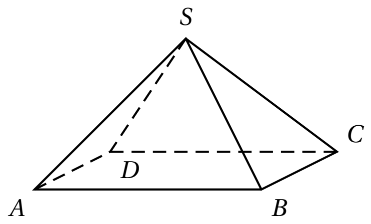


1. Déterminer, en fonction de a, la hauteur SH de cette pyramide.
2. Réaliser un patron de cette pyramide en prenant $a = 5$cm.

EXERCICE 2.10.
La grande pyramide de Kheops est à sa base un carré presque parfait de 5,3 hectares correctement orienté par rapport au Nord et dont les côtés Nord et Sud sont parallèles à 2,5 cm près. Sa hauteur, à l'origine, était de 146 mètres. En utilisant la hauteur et les renseignements fournis par le texte ci-dessus, desiner un patron de cette pyramide à l'échelle $1/2600^e$.
Calculer l'aire d'une des faces de la pyramide.
Comparer le résultat obtenu avec l'aire d'un carré de côté la hauteur de la pyramide.

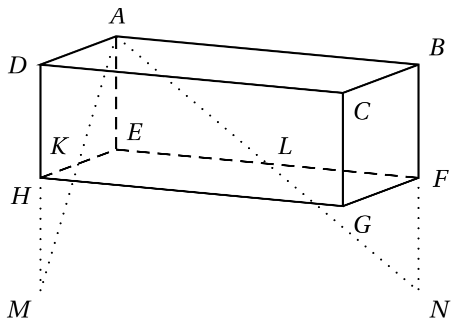
2.5.2 Démonstrations dans l'espace

EXERCICE 2.11.
$SABCD$ est une pyramide à base carrée. I est le milieu de $[AS]$ et L est le milieu de $[BS]$.
Démontrer que les droites (IL) et (CD) sont parallèles.

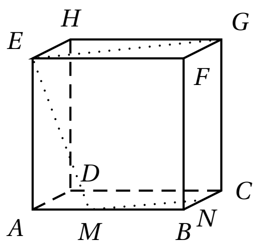


EXERCICE 2.12.
K et L sont les milieux des arêtes $[EH]$ et $[EF]$ du parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$. Les droites (AK) et (DH) se coupent en M. Les droites (AL) et (BF) se coupent en N.

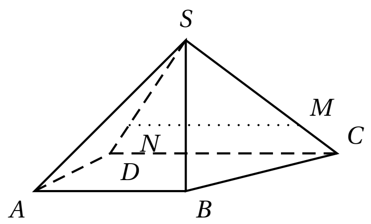
1. Démontrer que K est le milieu de $[AM]$.
2. Démontrer que les droites (KL) et (MN) sont parallèles.



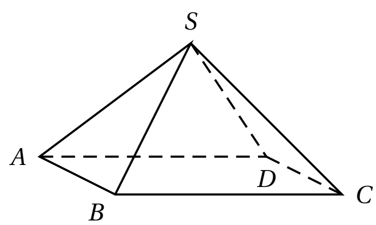
EXERCICE 2.13.
$ABCDEFGH$ est un cube. M est un point de l'arête $[AB]$. Le plan (GEM) coupe la droite (BC) en N.
Démontrer que les droites (MN) et (EG) sont parallèles.



EXERCICE 2.14.
$SABCD$ est une pyramide de sommet S à base trapézoïdale avec $(AB) \parallel (CD)$. M est un point de l'arête $[SC]$. Le plan (ABM) coupe la droite (SD) en N.
Démontrer que les droites (MN) et (DC) sont parallèles.

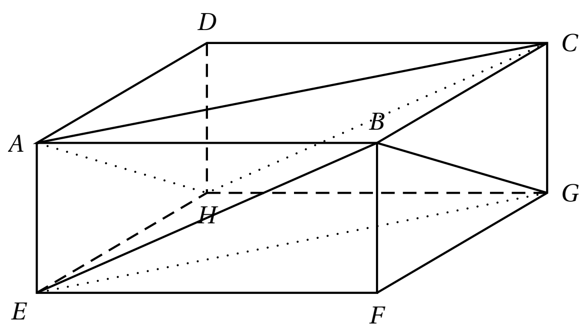


EXERCICE 2.15.
$SABCD$ est une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un parallélogramme.
Démontrer que les plans (SAB) et (SDC) secoupent selon la parallèle à (AB) passant par S.

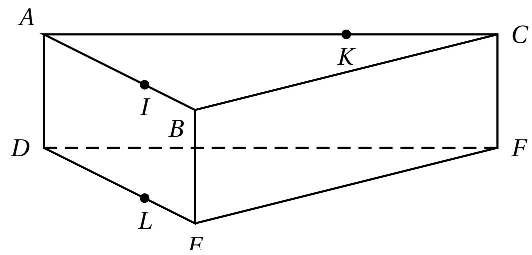


EXERCICE 2.16.
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle.

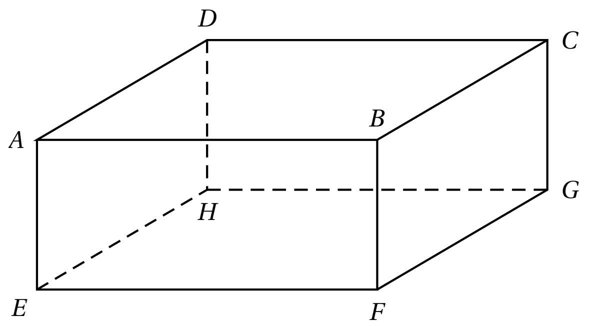
1. Le quadrilatère $BEHC$ est un rectangle. Que peut-on en déduire pour les droites (EB) et (HC) ?
2. De façon analogue, que peut-on dire des droites (AH) et (BG) ?
3. En déduire alors la position relative des plans (ACH) et (EBG) ?



EXERCICE 2.17.
$ABCDEF$ est un prisme droit à base triangulaire. I, L et K sont les points des arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[DE]$ tels que : $AI = \frac{2}{3}AB$; $AK = \frac{2}{3}AC$ et $EL = \frac{1}{3}ED$.
Démontrer que le plan (IKL) est parallèle au plan (BCF).



EXERCICE 2.18.
$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle.
Démontrer que la droite (AC) est parallèle au plan (EFH).

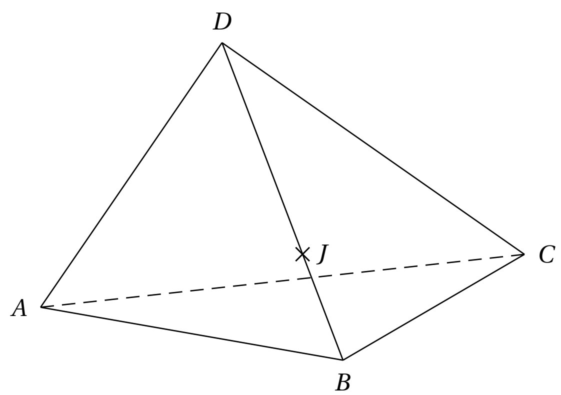


2.5.3 Sections

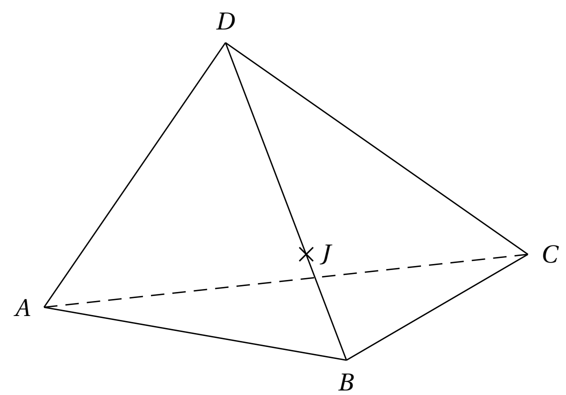
EXERCICE 2.19 (Sections planes d'un tétraèdre)**.**
Dans chacun des cas présentés sur la figure 2.1 de la présente page, placer les points I et K, puis, à l'aide des propriétés de géométrie dans l'espace vues en Seconde, construire sur le dessin en perspective la trace du plan (IJK) sur le tétraèdre $ABCD$. On donne : $J \in [BD]$ tel que $BJ = \frac{1}{3}BD$

FIGURE 2.1 – Sections de l'exercice 2.19

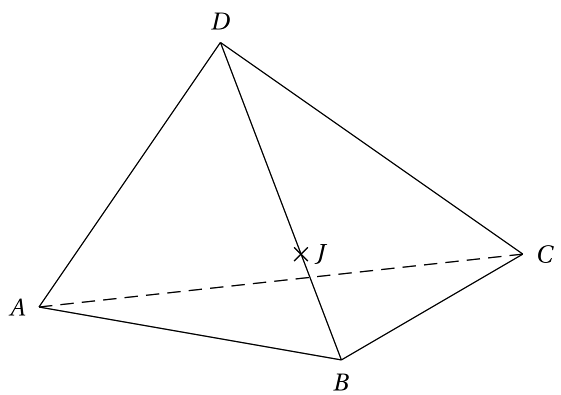
$I \in [DA]$ tel que $DI = \frac{1}{3}DA$ et $K \in [CD]$ tel que $CK = \frac{1}{3}CD$



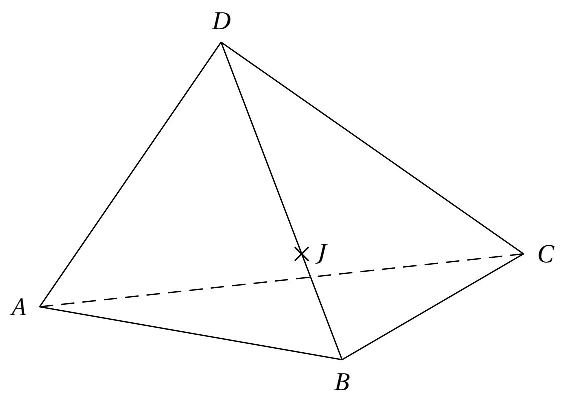
$I \in [DA]$ tel que $DI = \frac{1}{3}DA$ et $K \in [AC]$ tel que $AK = \frac{1}{3}AC$



$I \in [DA]$ tel que $DI = \frac{1}{3}DA$ et K centre de gravité de ABC

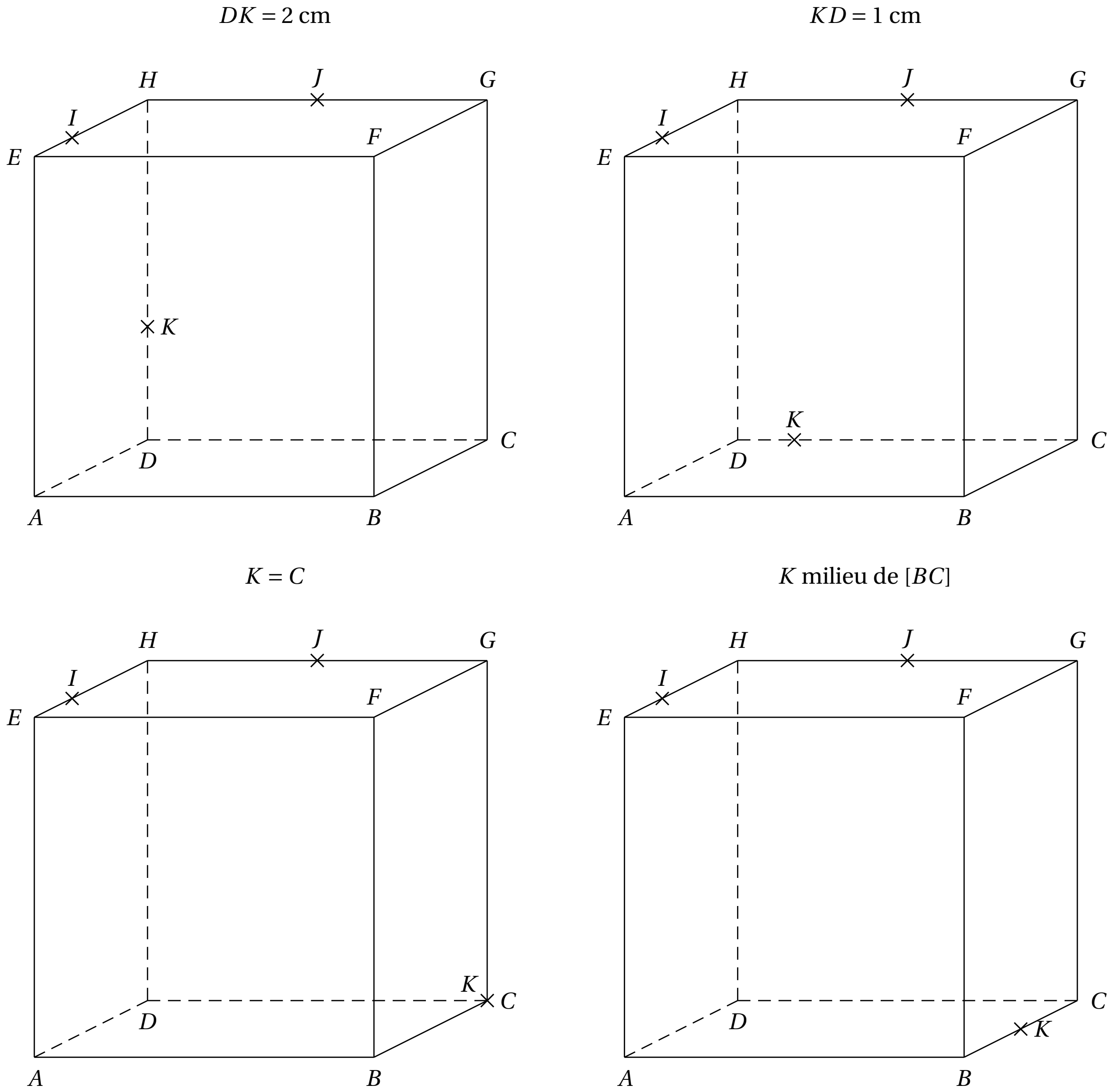


$I \in [AD]$ tel que $AI = \frac{1}{3}AD$ et $K \in [BC]$ tel que $BK = \frac{1}{3}BC$



EXERCICE 2.20 (Sections planes d'un cube)**.**
Dans chacun des cas présentés sur la figure 2.2 de la présente page, construire sur le dessin en perspective la trace du plan (IJK) sur le cube $ABCDEFGH$. On donne : $AB = 6$ cm ; $EI = 2$ cm ; J milieu de $[HG]$.

FIGURE 2.2 – Sections de l'exercice 2.20



2.5.4 Algorithmique

EXERCICE 2.21.
1. Écrire un algorithme prenant comme argument la longueur du côté d'un carré et renvoyant son aire.
2. Écrire un algorithme prenant comme argument la longueur du côté d'un carré et renvoyant son périmètre.
3. Écrire un algorithme prenant comme argument la longueur du côté d'un carré et renvoyant son aire et son périmètre.

EXERCICE 2.22.
1. Écrire un algorithme prenant comme argument la longueur du rayon d'un cercle et renvoyant son aire.
2. Écrire un algorithme prenant comme argument la longueur du rayon d'un cercle et renvoyant son périmètre.
3. Écrire un algorithme prenant comme argument la longueur du rayon d'un cercle et renvoyant son aire et son périmètre.
4. Refaire les trois questions précédentes en remplaçant *rayon* par *diamètre*.

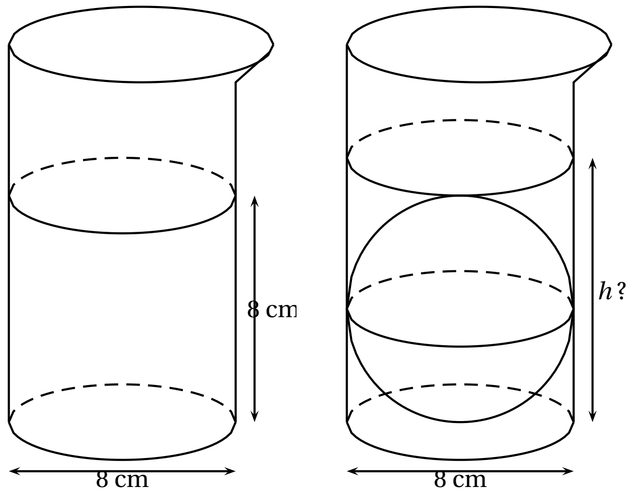
EXERCICE 2.23.
1. Écrire un algorithme prenant comme argument la longueur du rayon d'une sphère et renvoyant son volume.
2. Écrire un algorithme prenant comme argument la longueur du rayon d'une sphère et renvoyant l'aire de sa surface.
3. Écrire un algorithme prenant comme argument la longueur du rayon d'une sphère et renvoyant son volume et l'aire de sa surface.
4. Refaire les trois questions précédentes en remplaçant *rayon* par *diamètre*.

EXERCICE 2.24.
1. Écrire un algorithme prenant comme arguments les dimensions d'un rectangle et renvoyant son aire.
2. Écrire un algorithme prenant comme arguments les dimensions d'un rectangle et renvoyant son périmètre.
3. Écrire un algorithme prenant comme arguments les dimensions d'un rectangle et renvoyant son aire et son périmètre.

EXERCICE 2.25.
1. Écrire un algorithme prenant comme arguments la longueur du côté d'un carré, la longueur du rayon d'un cercle et renvoyant celui qui a la plus grande surface.
2. Écrire un algorithme prenant comme arguments la longueur du côté d'un carré, la longueur du rayon d'un cercle et renvoyant celui qui a le plus grand périmètre.
3. Écrire un algorithme prenant comme arguments la longueur du côté d'un carré, la longueur du rayon d'un cercle et renvoyant celui qui a la plus grande surface et le plus grand périmètre.

Devoir maison n°1

Calculs dans l'espace



EXERCICE.
1. Un bécher de 8 cm de diamètre est rempli d'eau sur une hauteur de 8 cm. On plonge une boule de 8 cm de diamètre dans ce bécher (voir schéma).
   À quelle hauteur se trouve alors le niveau d'eau ?
2. Un bécher de 8 cm de diamètre et de hauteur 12 cm est rempli d'eau sur une hauteur de a cm. On plonge une boule de 8 cm de diamètre dans ce bécher.
   Quelle peut être la plus grande valeur pour a pour que le bécher ne déborde pas ? (On négligera le bec verseur, en considérant que le bécher est un cylindre).
3. Une boule plongée dans un bécher est tout juste recouverte d'eau. Le diamètre de la boule et celui du bécher mesurent 8 cm.
   À quelle hauteur était le niveau de l'eau avant d'y plonger la boule ?
4. ARCHIMÈDE a travaillé en particulier sur le volume de la sphère et du cylindre et a demandé à ce que ces figures soient gravées sur sa tombe. D'après lui, « le rapport des volumes d'une sphère et d'un cylindre, si la sphère est tangeante au cylindre par la face latérale et les deux bases, est égale à $2/3$ ».
   Vérifier cette assertion.
5. Le patron d'un cylindre est constitué de deux disques (les bases) et d'un rectangle R qui donne la surface latérale. Déterminer, dans le cas de la sphère et du cylindre d'ARCHIMÈDE, en fonction de r, rayon de la sphère :
   (a) les dimensions du rectangle R puis la surface totale du cylindre ;
   (b) le rapport entre la surface de la sphère et la surface du cylindre.

Devoir surveillé n°2

Fonctions – Géométrie dans l'espace

EXERCICE 2.1 (5 points)**.**
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées. Une seule des réponses proposées est correcte.
On demande de cocher celle que vous pensez être correcte sachant qu'une réponse juste rapporte 1 point, une réponse fausse enlève 0,5 point et qu'une absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point.

On donne le tableau des variations de la fonction f définie sur $[-4;4]$:

x	-4		-1		0		2		4
f	1	↘	0	↗	2	↘	0	↘	-1

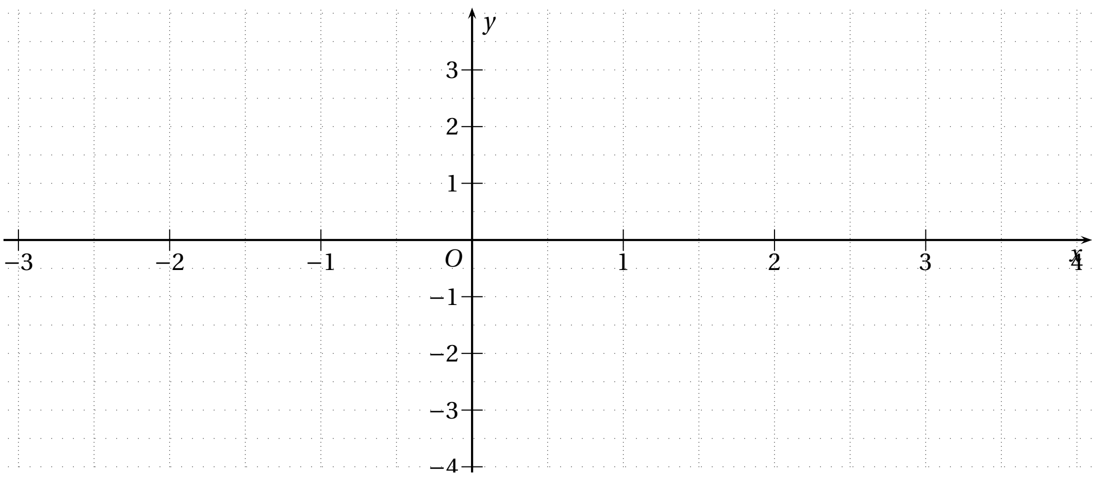
1. Comparons $f(-2)$ et $f(-3)$:
   ❐ $f(-2) > f(-3)$ ❐ $f(-2) < f(-3)$ ❐ $f(-2) = f(-3)$ ❐ On ne peut pas savoir
2. Comparons $f(-2)$ et $f(3)$:
   ❐ $f(-2) > f(3)$ ❐ $f(-2) < f(3)$ ❐ $f(-2) = f(3)$ ❐ On ne peut pas savoir
3. Comparons $f(-0,5)$ et $f(1)$:
   ❐ $f(-0,5) > f(1)$ ❐ $f(-0,5) < f(1)$ ❐ $f(-0,5) = f(1)$ ❐ On ne peut pas savoir
4. Comparons $f(3)$ et 1 :
   ❐ $f(3) > 1$ ❐ $f(3) < 1$ ❐ $f(3) = 1$ ❐ On ne peut pas savoir
5. Comparons $f(1)$ et 1 :
   ❐ $f(1) > 1$ ❐ $f(1) < 1$ ❐ $f(1) = 1$ ❐ On ne peut pas savoir

EXERCICE 2.2 (4 points)**.**
Tracer dans le repère de la figure 2.1 de la présente page la courbe représentative d'une fonction f vérifiant :

- $f(-2) = 1$;
- l'image de 0 par f est -1 ;
- l'équation $f(x) = 2$ admet deux solutions : $x = 1$ et $x = 2$;
- $f(x)$ a pour minimum -2 et pour maximum 3 ;
- le tableau des variations de f est :

x	-2		0		$1,5$		3
f		↘		↗		↘	

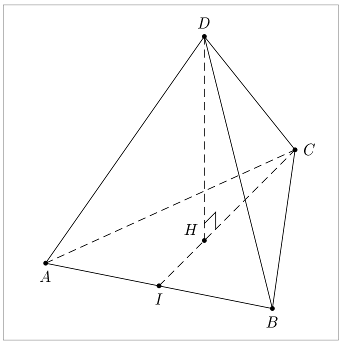
FIGURE 2.1 – Repère de l'exercice 2.2



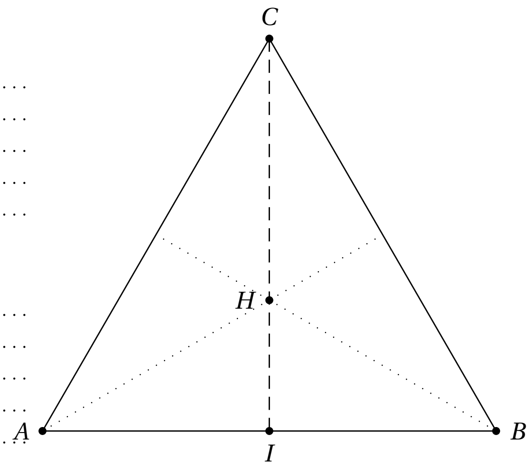
EXERCICE 2.3 (6 points)**.**
$DABC$ est un tétraèdre régulier d'arête 6 cm, c'est-à-dire que ***toutes ses arêtes mesurent*** 6 cm. I est le milieu de $[AB]$. H est le pied de la hauteur issue de D.
On admettra que :

- H est l'intersection des hauteurs du triangle ABC ;
- (DH) est perpendiculaire à chacune des hauteurs du triangle ABC.

On rappelle, à tout hasard, que l'intersection des médianes d'un triangle est au $\frac{2}{3}$ de chaque médiane en partant du sommet.



1. On donne, ci-contre, la face ABC en vraie grandeur.
   (a) Que peut-on dire de la droite (CI) pour le triangle ABC (justifier) ?
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....



   (b) En déduire $CI = \sqrt{27}$ puis que $CI = 3\sqrt{3}$.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (c) En déduire la valeur ***exacte*** de CH.
   ....
   ....
   ....

2. (a) Dessiner le triangle CDH en vraie grandeur.

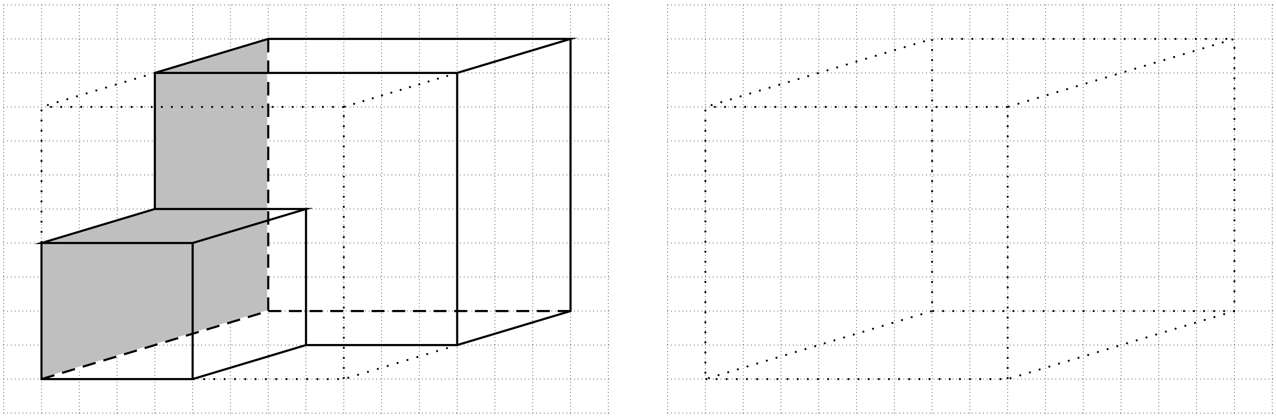
   (b) Montrer que $DH = 2\sqrt{6}$ cm.
   ....
   ....
   ....

3. Déterminer la valeur ***exacte*** du volume du tétraèdre puis une valeur approchée à 0,1 près.
   ....
   ....
   ....
   ....

Devoir surveillé n°3

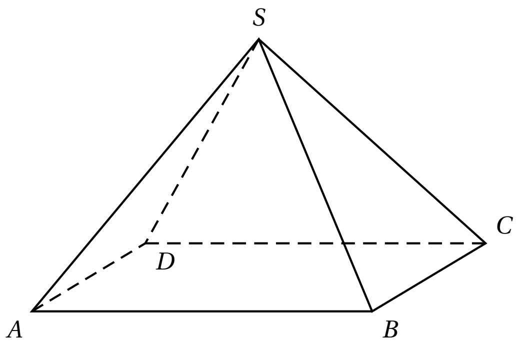
Géométrie dans l'espace

EXERCICE 3.1 (5 points)**.**
Une pièce métallique (en traits pleins) est découpée dans un cube.
Redessiner cette pièce en perspective cavalière de façon à ce que la face grisée soit frontale.

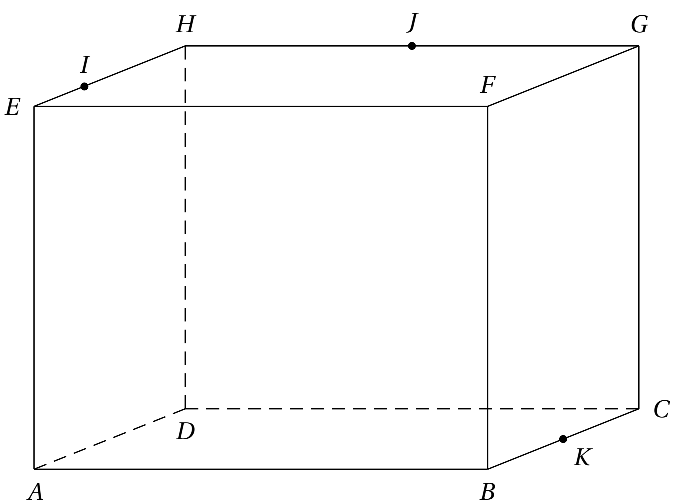


EXERCICE 3.2 (5 points)**.**
$SABCD$ est une pyramide à base carrée.
I est le point du segment $[SB]$ tel que $SI = \frac{2}{3}SB$.
J est le point du segment $[SC]$ tel que $SJ = \frac{2}{3}SC$.
Le plan (CDI) coupe la droite (SA) en K.

1. Construire les points I et J.
2. Démontrer que la droite (IJ) est parallèle à la droite (BC).
3. (a) Démontrer que la droite (IK) est parallèle à la droite (AB).
   (b) Construire alors K.
4. Que peut-on en déduire pour les plans (IJK) et (ABC) ?



EXERCICE 3.3 (5 points)**.**
Construire sur le dessin en perspective la trace du plan (IJK) sur le cube $ABCDEFGH$.
On ne demande aucune justification mais on laissera les traits de construction et on indiquera les éventuels parallélismes utilisés.



Chapitre 3

Expressions algébriques

Sommaire

3.1 Rappels

Définition 3.1. Développer c'est transformer un produit en une somme. Factoriser c'est transformer une somme en un produit.

Propriété 3.1. *Au collège, on a obtenu les factorisations et développements suivants :*

$$\begin{array}{rclrcl} ka+kb & = & \ldots\ldots\ldots\ldots & (a+b)^2 & = & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a+b)(c+d) & = & \ldots\ldots\ldots\ldots & (a-b)^2 & = & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & & & a^2-b^2 & = & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

3.2 Exercices et problèmes

3.2.1 Exercices

EXERCICE 3.1.
Indiquer pour chaque expression s'il s'agit d'une somme ou d'un produit :

- $A=(x-5)(x+8)$
- $B=x^2-\frac{1}{x}$
- $C=2x+(x-3)(2x+1)$
- $D=x(2+3x)$
- $E=(x+3)x+7$
- $F=(x-3)^2+1$
- $G=7(x-3)^2$
- $H=(3x+5)^4$
- $I=(x+3)(x+7)$
- $J=(x-3)^2-1$
- $K=x+\frac{1}{x}$
- $L=x^2-(3x-1)^2$
- $M=\frac{3x+4}{x-2}$
- $N=(x+3)(x-2)x+1$
- $O=(x+1)^2$
- $P=6ab$

EXERCICE 3.2.
Parmi les formules rappelées dans la propriété ci-dessus, lesquelles sont des formules de développement, lesquelles sont des formules de factorisation ?

EXERCICE 3.3.
Développer puis réduire les expressions suivantes :

- $A=(x^2+4)(2x-3)$
- $B=x+2(x-5)+8(3-2x)$
- $C=(5-2x)(x-4)$
- $D=(x-4)^2+(3x+1)^2$
- $E=(x-1)^2-(2x+5)^2$
- $F=x(x+1)(x-3)$
- $G=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
- $H=(a+b)^3$
- $I=(a-b)^3$
- $J=-(x-7)$
- $K=-(2x+3)^2$
- $L=(x-2)^2$
- $M=(x+1)^2-x^2$

EXERCICE 3.4.
Factoriser au maximum les expressions suivantes :

- $A = x(x-1) + 2x(x-3)$
- $B = (x-1)^2 + 4(x-1)(x+5)$
- $C = x^2 - (3x+1)^2$
- $D = x(x-4) - 5(4-x)$
- $E = 4x^2 + 20x + 25$
- $F = x(x-1) - (2x+5)x$
- $G = (x+5)^2 - (2x+7)^2$
- $H = (5x+1)(-3x+4) + x(10x+2)$
- $I = x^3 - 12x^2$
- $J = x^2 - 4 + (x-2)(2x+1)$
- $K = 2x - 3 + (3-2x)^2$
- $L = (2a+1)^2 - (a+6)^2$
- $M = (2x-3)(1-x) - 3(x-1)(x+2)$
- $N = (x-1)^2 + 2(x^2-1)$
- $O = x^4 + 4x^3 + 4x^2$
- $P = 4x^5 - x^3$
- $Q = x^7 - x^5$
- $R = x(x+2)^2 - 4x(x-1)^2$
- $S = (2a-b)(b-a) - (2b-a)(b-2a)$
- $T = a^4 - b^4$

3.2.2 Problèmes

PROBLÈME 3.1.
Montrer que le somme du produit de trois entiers consécutifs $n-1$, n et $n+1$ et de l'entier n est le cube d'un entier.

PROBLÈME 3.2.
Choisir un nombre entier, élever le nombre suivant et le nombre précédant cet entier au carré, puis faire la différence de ces deux carrés : on obtient un multiple du nombre choisi. Pourquoi ?

PROBLÈME 3.3.
Choisir quatre nombres entiers consécutifs, puis faire le produit du plus petit et du plus grand, puis faire le produit des deux nombres. Que remarque-t-on ? Est-ce toujours vrai ? Le démontrer.

PROBLÈME 3.4.
On donne : $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
Que vaut $a^4 + (ab+c)^2 + (ac-b)^2$?

PROBLÈME 3.5.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 + x + 3$.

1. Calculer les valeurs exactes des images par f de :
   - 0 ;
   - 1 ;
   - -2 ;
   - $\sqrt{2}$;
   - $1+\sqrt{3}$;
   - $2-\sqrt{5}$.
2. Déterminer le (ou les) antécédents(s) de 3 par f.

PROBLÈME 3.6.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$. Déterminer par le calcul les antécédents, par f, de 3.

PROBLÈME 3.7.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$. On cherche à résoudre, par le calcul, l'équation $f(x) = 9$.

1. Factoriser $f(x)$.
2. En déduire les antécédents éventuels, par f, de 9.

PROBLÈME 3.8.
Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par, respectivement, $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = -x^2 + 2$. Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = g(x)$.

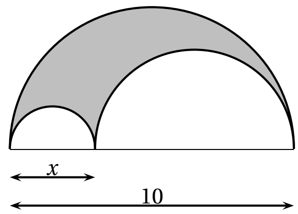
PROBLÈME 3.9.
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$ et $g(x) = 3x - 2$. On cherche à résoudre, par le calcul, l'équation $f(x) = g(x)$.

1. Développer $(x-1)^2(x+2)$.
2. En déduire les solutions de l'équation $x^3 - 3x + 2 = 0$.
3. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

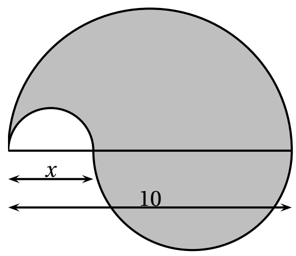
PROBLÈME 3.10.
On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = x(x-2)$. On cherche à trouver, par le calcul, le minimum de $f(x)$.

1. Démontrer que $f(x) = (x-1)^2 - 1$.
2. En déduire le minimum de $f(x)$.

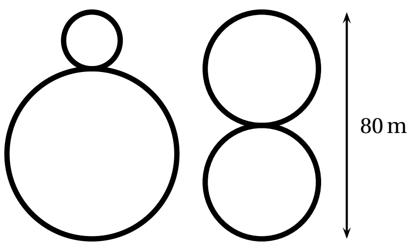
PROBLÈME 3.11.
Soit x un nombre strictement compris entre 0 et 10. Calculer le périmètre de la figure grisée en fonction du nombre x. Que constate-t-on ?



PROBLÈME 3.12.
Soit x un nombre strictement compris entre 0 et 10. Calculer l'aire de la surface grisée en fonction de x.

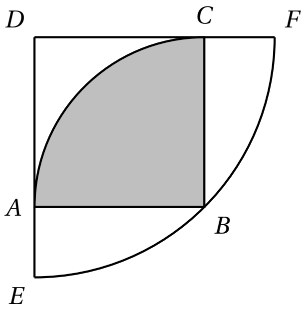


PROBLÈME 3.13.
Oscar et Alix doivent tracer sur la plage un circuit de karting. Ils souhaitent construire un circuit en forme de 8 et disposent de 80 mètres de plage. Sur la figure ci-dessous sont tracés leurs modèles respectifs, composés chacun de deux cercles tangeants. De ces deux circuits, lequel est le plus long ?

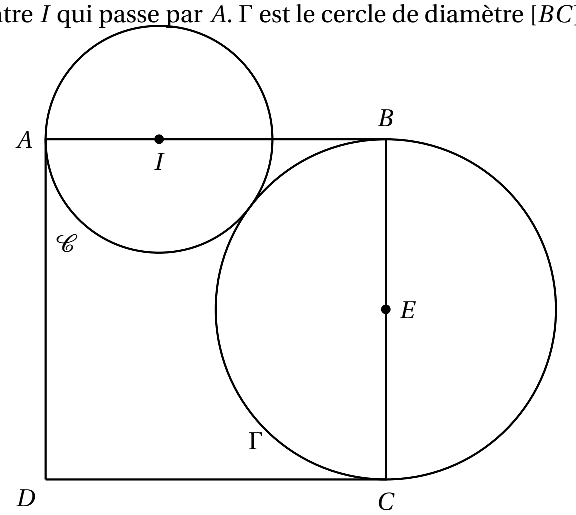


PROBLÈME 3.14.
$ABCD$ est un carré. Pour construire E et F, on a tracé un quart de cercle de centre D passant par B. On a également tracé un quart de cercle de centre B passant par A.

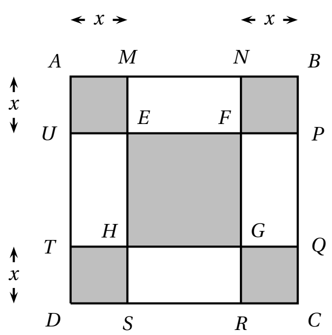
1. Montrer que l'aire de la surface blanche intérieure au secteur DEF est égale à l'aire de la surface verte.
2. L'aire de la surface verte est-elle plus grande ou plus petite que les trois quarts de l'aire du carré $ABCD$?



PROBLÈME 3.15.
$ABCD$ est un carré de côté 6 cm et E est le milieu du côté $[BC]$. I est un point quelconque du segment $[AB]$ distinct de A et de B. On note $AI = x$ (en cm). $\mathscr{C}$ est le cercle de centre I qui passe par A. Γ est le cercle de diamètre $[BC]$.

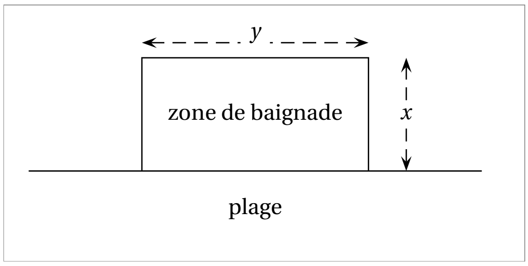


PROBLÈME 3.16.
Sur les côtés d'un carré $ABCD$ de côté 4, on place les points M, N, P, Q, R, S, T et U comme indiqué sur le dessin, où $0 \leqslant x \leqslant 2$. On note $\mathscr{A}(x)$ l'aire du domaine grisé.



1. Montrer par un raisonnement géométrique que $\mathscr{A}(x)$ peut s'écrire sous l'une des formes suivantes : $\mathscr{A}(x) = 4x^2 + (4-2x)^2$ ou $\mathscr{A}(x) = 16 - 4x(4-2x)$.
2. Montrer que l'on a aussi : $\mathscr{A}(x) = 8x^2 - 16x + 16$.
3. En utilisant la forme la plus adaptée, calculer $\mathscr{A}(2)$ puis $\mathscr{A}(\sqrt{3})$.
4. (a) Montrer que : $\mathscr{A}(x) = 8(x-1)^2 + 8$.
   (b) En déduire que l'aire $\mathscr{A}(x)$ est minimale pour $x = 1$.
5. (a) Montrer que : $\mathscr{A}(x) = (2x-1)(4x-6) + 10$.
   (b) En utilisant l'expression précédente de $\mathscr{A}(x)$, déterminer les valeurs de x telles que l'aire $\mathscr{A}(x)$ soit égale à 10.

PROBLÈME 3.17.
Les maîtres nageurs d'une plage disposent d'un cordon flottant d'une longueur de 400 m avec lequel ils délimitent la zone de baignade surveillée, de forme rectangulaire.
Le problème est de déterminer les dimensions de ce rectangle pour que l'aire de baignade soit maximale.
On appelle x la largeur du rectangle et y sa longueur.



1. Expression de l'aire de la zone de baignade .
   (a) Calculer l'aide de la zone de baignade lorsque $x = 50$ m et lorsque $x = 100$ m.
   (b) Quelles sont les valeurs posibles pour x ?
   (c) Sachant que la longueur du cordon est de 400 m, exprimer y en fonction de x.
   (d) Exprimer, en fonction de x, l'aire $\mathscr{A}(x)$ de la zone de baignade. Sur quel intervalle cette fonction est-elle définie ?
2. Recherche graphique de l'aire maximale.
   (a) Représenter dans un repère aux unités bien choisies la courbe de $\mathscr{A}$.
   (b) Pour quelle(s) valeur(s) de x, l'aire semble-t-elle maximale ?
3. Recherche par le calcul de l'aire maximale.
   (a) Démontrer que pour tout $x \in [0;400]$, $\mathscr{A}(x)$ peut s'écrire sous la forme :
   $$\mathscr{A}(x) = 20000 - 2(x-100)^2$$
   (b) Peut-on obtenir une aire de 22 000 m^2 ? Justifer.
   (c) Quelle est l'aire maximale qu'on peut obtenir ? Quelles sont alors les dimensions du rectangle ?

Devoir surveillé n°4

Expressions algébriques

EXERCICE 4.1 (3 points)**.**
Développer puis réduire les expressions suivantes :
- $A = (2x+1)^2$;
- $B = (2-x)^2$;
- $C = (2-3x)(x-1)$.

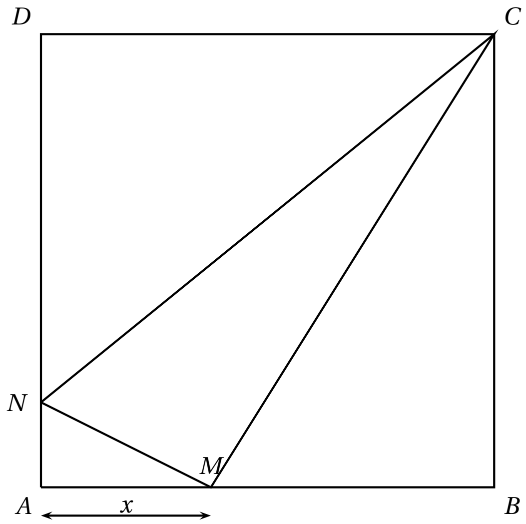
EXERCICE 4.2 (3 points)**.**
Factoriser le plus possible les expressions suivantes :
- $A = (x+1)^2 - (x+3)^2$;
- $B = (x-1)^2 + (x-1)(2x+1)$;
- $C = (x+1)(2x+3) + x^2 - 1$.

EXERCICE 4.3 (3 points)**.**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x + 5$.

1. Montrer que $f(x) = (x+1)^2 + 4$.
2. En déduire le minimum de $f(x)$ et préciser en quelle(s) valeur(s) ce minimum est atteint.

EXERCICE 4.4 (3 points)**.**
Écrire, en language d'algobox, un algorithme qui prend comme arguments les dimensions d'un rectangle et renvoyant son périmètre et son aire.

EXERCICE 4.5 (8 points)**.**
$ABCD$ est un carré de côté 8 cm. N est le point de $[AD]$ tel que $DN = 6,5$ cm. M est un point de $[AB]$ tel que $AM = x$.
L'objectif de l'exercice est de trouver s'il existe un (ou plusieurs) x tel que le triangle CMN soit rectangle en M.



1. (a) Montrer que $CN^2 = 106,25$.
   (b) Montrer que $MN^2 = x^2 + 2,25$.
   (c) Montrer que $MC^2 = (8-x)^2 + 64$.
   (d) En déduire que le triangle CMN est rectangle si et seulement si $2x^2 - 16x + 24 = 0$.
2. (a) Montrer que $2x^2 - 16x + 24 = 2(x-6)(x-2)$.
   (b) En déduire le (ou les) x tel que le triangle CMN soit rectangle en M.

Chapitre 4

Repérage

Sommaire

4.1 Repère d'une droite

Définition 4.1. Soit d une droite, O et I deux points distincts de cette droite, alors (O, I) est appelé *repère* de la droite d ;

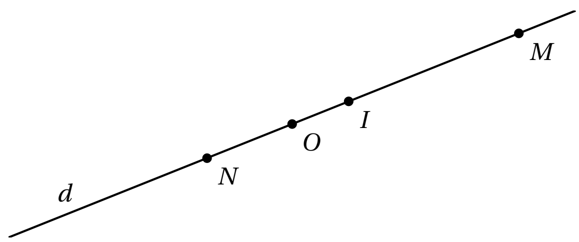
Remarque. O est appelé *origine* du repère et OI est appelé *unité* du repère.

Propriété 4.1. *Soit d une droite munie du repère (O, I), alors tout point M de la droite est associé à un unique nombre x défini par :*
- $x = \frac{OM}{OI}$ *si* $M \in [OI)$;
- $x = -\frac{OM}{OI}$ *sinon.*

x est appelé abscisse *de M.*

On l'admettra.

Exemple. Sur la droite d ci-dessous, les points O et I sont distincts donc (O, I) est un repère de d.
$M \in [OI)$ est tel que $OM = 4OI$ donc son abscisse est 4.
$N \notin [OI)$ est tel que $ON = 1,5OI$ donc son abscisse est $-1,5$.



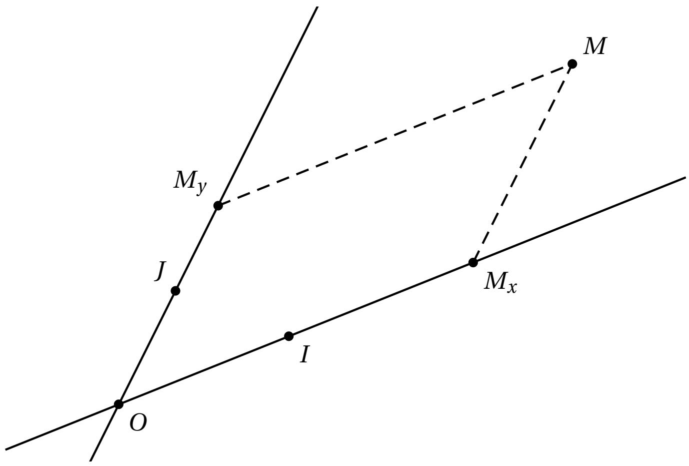
4.2 Repère d'un plan

4.2.1 Définitions

Définition 4.2. Soit P un plan, O, I et J trois points non alignés de ce plan, alors (O, I, J) est appelé *repère* du plan.

Remarque. O est appelée *origine* du repère et les droites (OI) et (OJ) sont appelées *axes* du repère.

Soit P un plan muni du repère (O, I, J), alors, pour tout point M du plan, il existe deux uniques points M_x et M_y tels que $M_x \in (OI)$, $M_y \in (OJ)$ et OM_xMM_y parallélogramme (on l'admettra).
On note x l'abscisse de M_x sur la droite (OI) munie du repère (O, I) et y l'abscisse de M_y sur la droite (OJ) munie du repère (O, J).



On a alors :

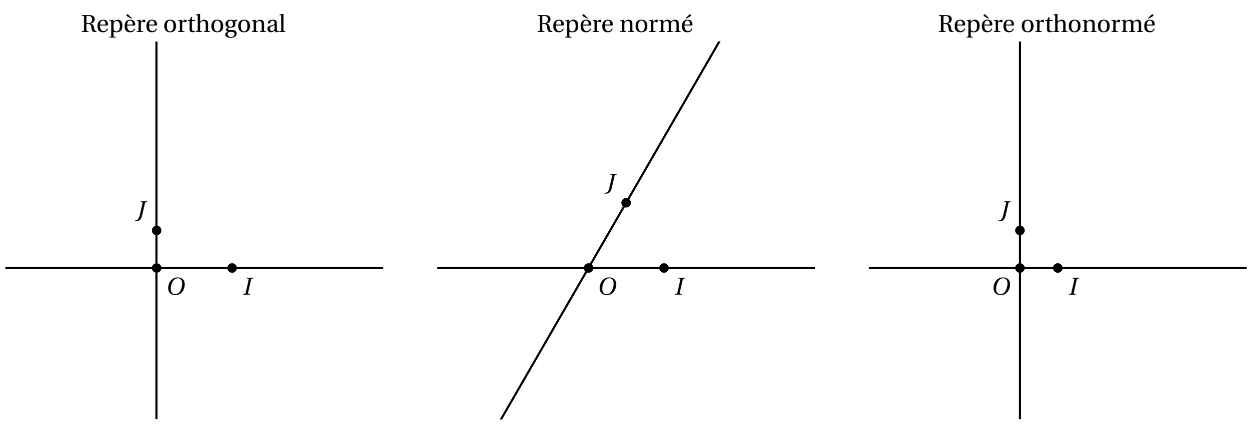
Propriété 4.2. *Soit P un plan muni d'un repère (O, I, J), alors tout point M de ce plan est associé à un unique couple $(x; y)$, défini ci-dessus, appelé coordonnées de M.*
x est appelé abscisse de M et y est appelé ordonnée de M.

On l'admettra.

Exemple. Sur le schéma ci-dessus, $x = 3,125$ et $y = 1,5$ donc les coordonnées de M sont $(3,125; 1,5)$.
L'abscisse de M est 3,125, l'ordonnée de M est 1,5.

4.2.2 Types de repères

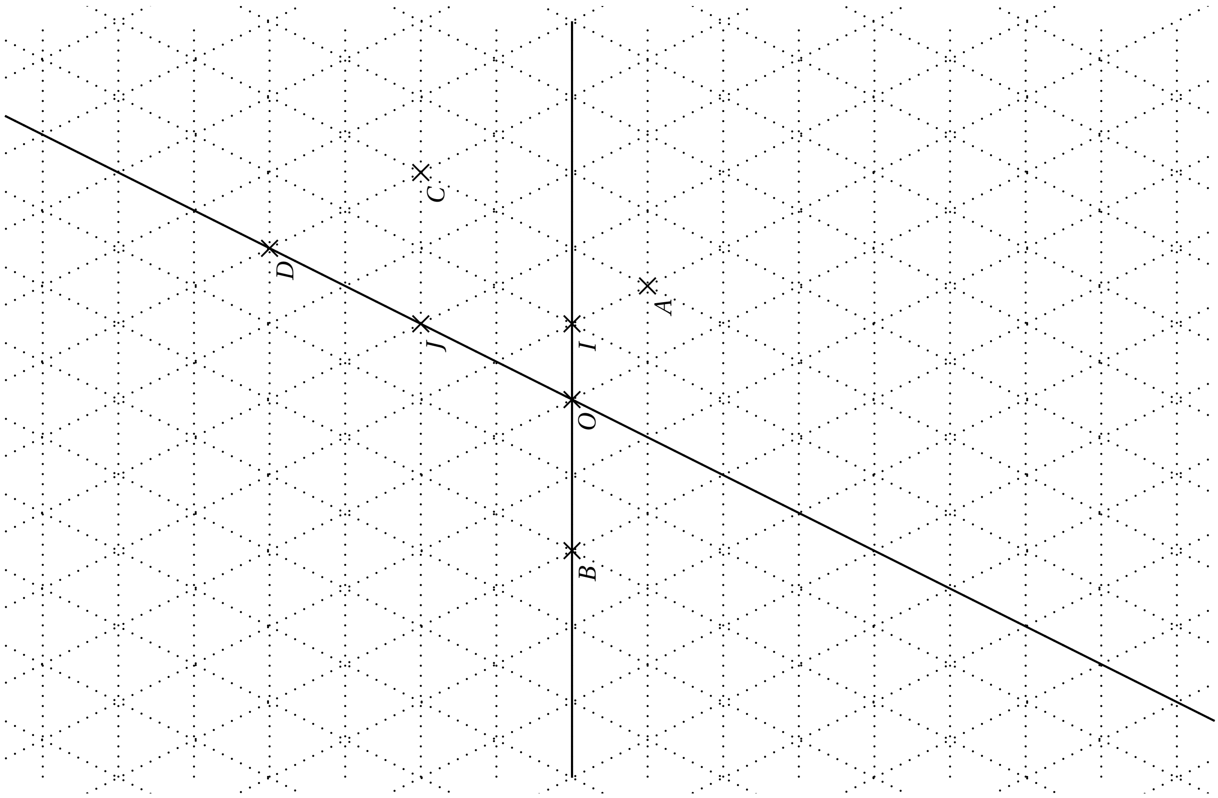
Définition 4.3. Soit P un plan muni d'un repère (O, I, J).
- Si le triangle OIJ est quelconque, le repère est dit *quelconque*.
- Si le triangle OIJ est rectangle en O, le repère est dit *orthogonal*.
- Si le triangle OIJ est isocèle en O, le repère est dit *normé*.
- Si le triangle OIJ est rectangle et isocèle en O, le repère est dit *orthonormé*.



4.2.3 Coordonnées du milieu d'un segment

ACTIVITÉ 4.1.
Sur le schéma ci-dessous :

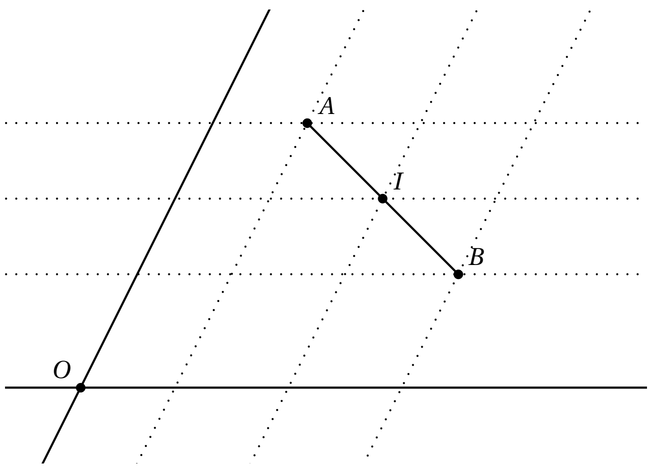
1. Placer les points $M(3;1)$, $N(-1;1{,}5)$, $P(-2;-1)$ et $Q(3;-1)$;
2. Donner graphiquement les coordonnées des points A, B, C et D ;
3. En faisant quelques essais, conjecturer le lien existant entre les coordonnées de deux points et les coordonnées du milieu de ces deux points.



Propriété 4.3. *Soit P un plan muni d'un repère quelconque.*
Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ et $I(x_I;y_I)$ milieu de $[AB]$.
Alors

- $x_I = \ldots\ldots\ldots$
- $y_I = \ldots\ldots\ldots$

Preuve. La preuve sera faite en classe à partir de cette figure :



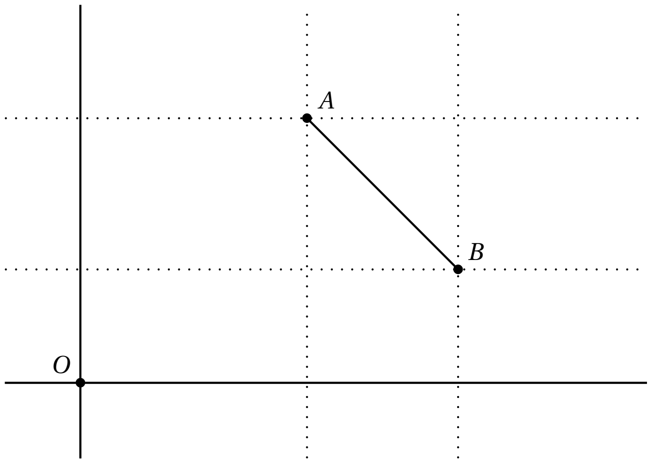
◇

4.2.4 Distance entre deux points dans un repère orthonormé

Propriété 4.4. *Soit P un plan muni d'un repère **orthonormé**.*
Soient A et B deux points du plan P de coordonnées respectives $(x_A\,;\,y_A)$ *et* $(x_B\,;\,y_B)$.
Alors la distance AB est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Preuve. La preuve sera faite en classe à partir de cette figure :



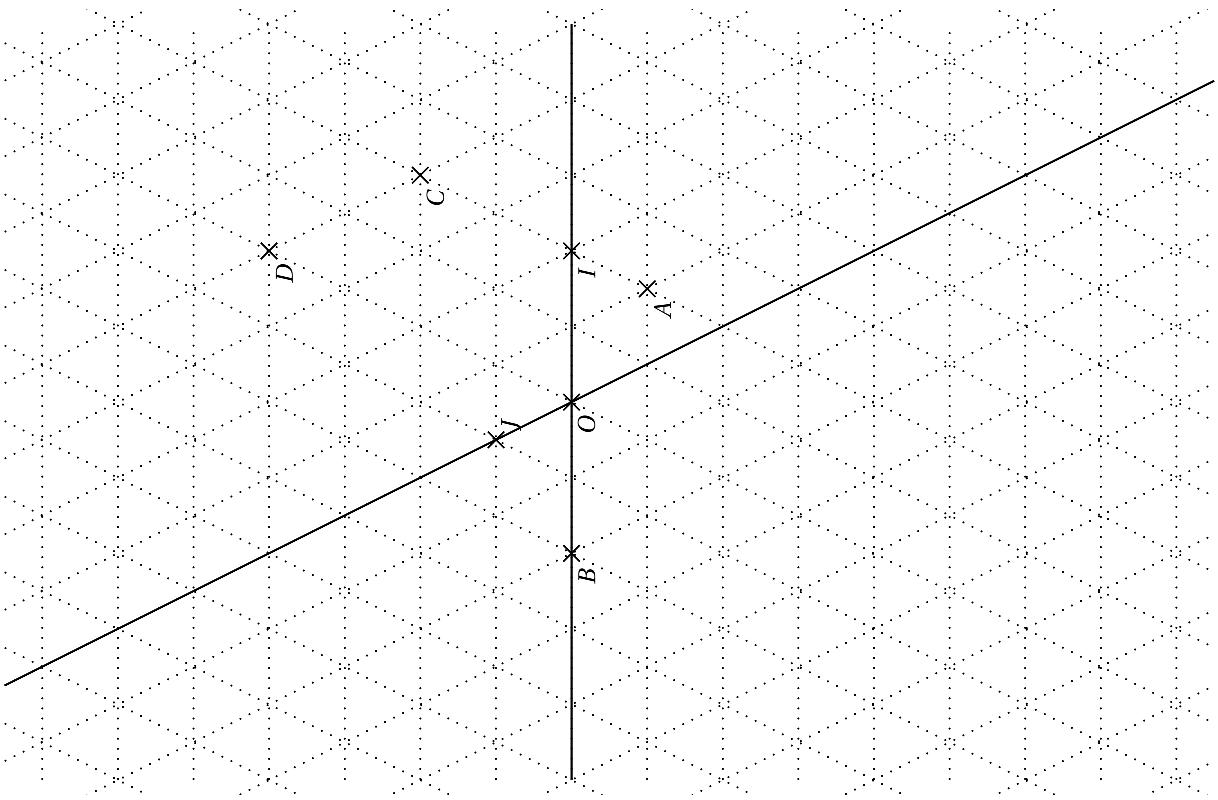
◇

4.3 Exercices et problèmes

4.3.1 Repère donné

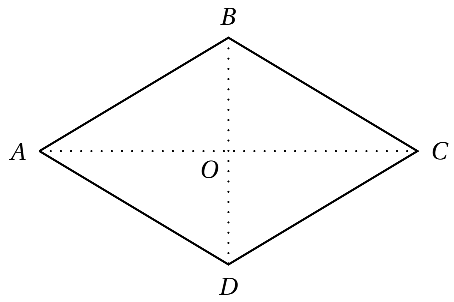
EXERCICE 4.1.
Sur le schéma ci-dessous :

1. Placer les points $M(2;1)$, $N(-1,5;1)$, $P(-2;-1)$ et $Q(1,5;-1)$;
2. Donner graphiquement les coordonnées des points A, B, C et D ;



EXERCICE 4.2.
Le quadrilatère $ABCD$ donné ci-contre est un losange de centre O.
Dans chacun des cas ci-dessous, dire de quel type est le repère et donner les coordonnées de tous les points dans ce repère.

- (A, D, B)
- (O, C, B)
- (O, B, C)
- (D, C, O)

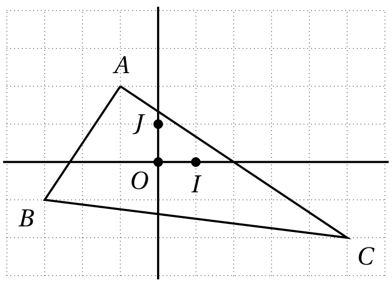


EXERCICE 4.3.
Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature du triangle ABC.

1. $A(-4\,;-1)$, $B(4\,;-2)$ et $C(-2\,;2)$
2. $A(-5\,;0)$, $B(3\,;-4)$ et $C(2\,;4)$
3. $A(0\,;0)$, $B(4\,;2\sqrt{3})$ et $C(-1\,;3\sqrt{3})$

EXERCICE 4.4.
Dans le repère orthonormé (O, I, J), on donne $A(-1\,;2)$, $B(-3\,;-1)$ et $C(5\,;-2)$.

1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Montrer que :
   (a) Le périmètre p de ABC vaut $\sqrt{13}(3+\sqrt{5})$;
   (b) L'aire a de ABC est un nombre entier.

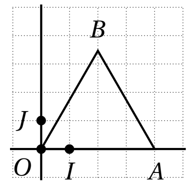


EXERCICE 4.5.
Dans le repère orthonormé (O, I, J), on donne $A(1\,;1)$, $B(4\,;5)$ et $C(10\,;8)$.

1. Déterminer les longueurs AB, AC et BC.
2. Que peut-on en déduire pour les points A, B et C ?

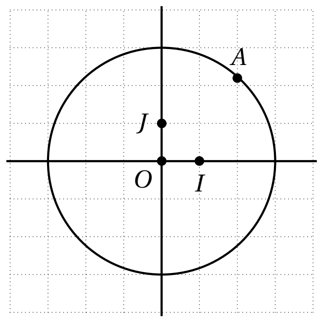
EXERCICE 4.6.
Le plan est muni d'un repère quelconque.
On donne les points $A(2\,;3)$ et $I(-4\,;1)$.
On sait que I est le milieu de $[AB]$.
Déterminer les coordonnées de B.

EXERCICE 4.7.
Dans le repère orthonormé (O, I, J), A a pour coordonnées $(4\,;0)$ et le triangle OAB est équilatéral.
Démontrer que B a pour coordonnées $(2\,;2\sqrt{3})$.



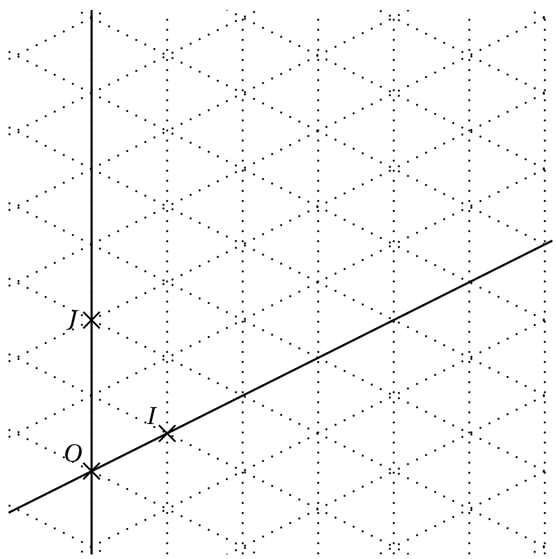
EXERCICE 4.8.
Dans le repère orthonormé (O, I, J), on a tracé le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 3.

1. A est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 2.
   Déterminer l'ordonnée de A.
2. Pour chacun des points suivants, déterminer, par le calcul, s'il est sur le cercle $\mathscr{C}$ et, sinon, s'il est sur le disque délimité par $\mathscr{C}$.
   - $B(-1\,;-2,8)$
   - $C(2,5\,;-1,7)$
   - $D(-1,5\,;2,5)$



EXERCICE 4.9.
Sur le schéma ci-contre :

1. Placer les points $A(1\,;2)$, $B(3\,;1,5)$, $C(4\,;0,5)$ et $D(2\,;0)$;
2. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.



EXERCICE 4.10.
Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Dans chacun des cas suivants, déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$:

1. $A(1;0)$, $B(1;3)$, $C(2;3)$ et $D(3;1)$;
2. $A(1;2)$, $B(4;7)$, $C(1;6)$ et $D(-2;1)$;
3. $A(1;0)$, $B(0;2)$, $C(4;4)$ et $D(5;2)$;
4. $A(-4;-1)$, $B(4;-2)$, $C(8;5)$ et $D(0;6)$;
5. $A(0;-2)$, $B(3;-1)$, $C(2;2)$ et $D(-1;1)$.

EXERCICE 4.11.
Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On donne les points $A(-3;-4)$, $B(3;2)$, $C(7;-2)$ et $D(1;-8)$.

1. Montrer que :
   (a) $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu ;
   (b) $AC = BD$.
2. (a) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
   (b) Calculer le rayon du cercle circonscrit à ce quadrilatère.

EXERCICE 4.12.
Le plan est muni d'un repère quelconque.
On donne les points $A(-5;3)$, $B(-4;1)$ et $C(1;-4)$.

1. Déterminer les coordonnées de I, milieu de $[AC]$.
2. Déterminer les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

4.3.2 Repère à choisir

EXERCICE 4.13.
$ABCD$ est un parallélogramme, I est le milieu de $[AD]$, E est le symétrique de B par rapport à I.

1. Faire une figure.
2. Choisir un repère et montrer que D est le milieu de $[EC]$

EXERCICE 4.14.
$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 8$ cm et $AD = 5$ cm.
J est le point de $[AD]$ tel que $AJ = 3$ cm.
M est le point de $[AB]$ tel que $AM = 3$ cm.

1. Faire une figure.
2. Choisir un repère et déterminer la nature du triangle MJC.

EXERCICE 4.15.
$BOIS$ est un carré de côté 12 cm.
P est le milieu de $[BS]$ et N est le point de $[BO]$ tel que $BN = 3$ cm.

1. Faire une figure.
2. Choisir un repère et déterminer si le triangle PIN est rectangle.

EXERCICE 4.16.
$ABCD$ est un carré de côté 4 cm.
E et F sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[OD]$.

1. Faire une figure.
2. Choisir un repère et démontrer que le triangle CFE est rectangle et isocèle.

4.3.3 Algorithmique

EXERCICE 4.17.
Que fait l'algorithme suivant ?

```
VARIABLES
  a, b, c, d, e, f : nombres
DEBUT
  Saisir a
  Saisir b
  Saisir c
  Saisir d
  e prend la valeur (a+c)/2
  f prend la valeur (b+d)/2
  Afficher e
  Afficher f
FIN
```

EXERCICE 4.18.
Écrire un algorithme prenant comme arguments les coordonnées de deux points et retournant la distance entre ces deux points dans un repère orthonormé.

EXERCICE 4.19.
Écrire un algorithme prenant comme arguments les coordonnées de trois points A, B et C et dessinant le triangle ABC dans un repère.

EXERCICE 4.20.
Écrire un algorithme prenant comme arguments les coordonnées de trois points A, B et C, calculant les coordonnées du point D tel que ABCD est un parallélogramme et dessinant ABCD dans un repère.

EXERCICE 4.21.
Écrire un algorithme prenant comme argument les coordonnées de trois points A, B et C dans un repère orthonormé

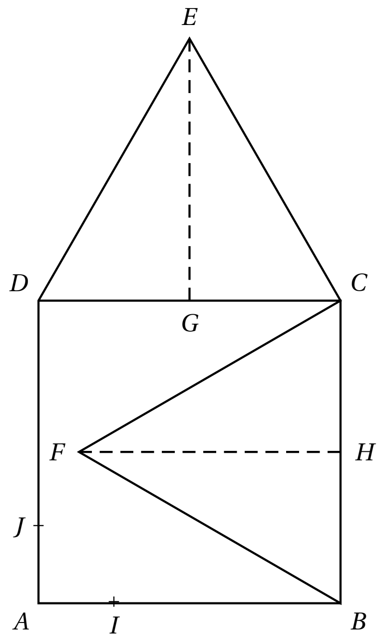
1. et indiquant si le triangle est isoèle.
2. et indiquant si le triangle est équilatéral.
3. et indiquant si le triangle est rectangle.
4. et indiquant la nature du triangle.

Devoir maison n°2

Repérage

EXERCICE.
Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ est un carré de côté 4 cm.
CED et CFB sont deux triangles équilatéraux.
On se place dans le repère (A, I, J) tel que $AI = 1$ cm et $AJ = 1$ cm.

1. Quelle est la nature du repère choisi ?
2. Quelles sont les coordonnées de A, B, C et D ?
3. Justifier que E a pour coordonnées $(2\,;\,4+2\sqrt{3})$.
4. Quelles sont les coordonnées de F ?
5. (a) Calculer AF, AE et EF.
   (b) Que peut-on en déduire ?



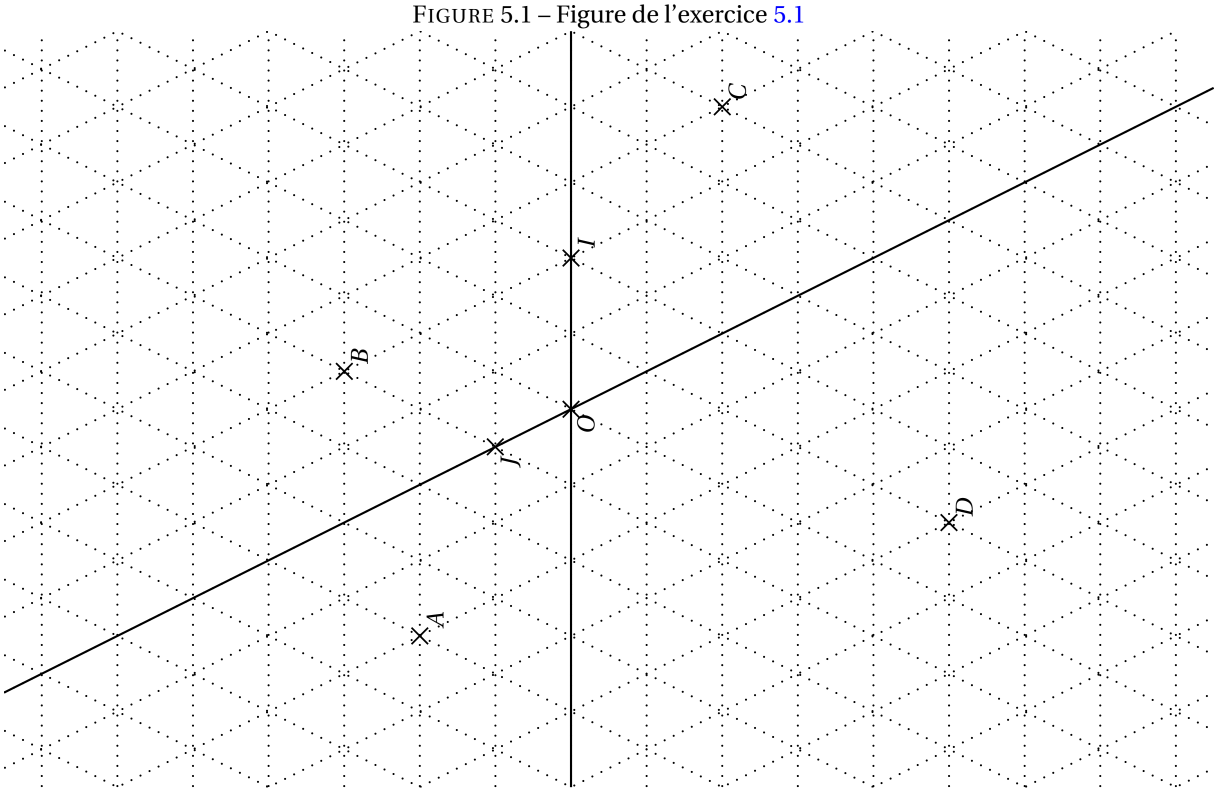
Devoir surveillé n°5

Repérage

EXERCICE 5.1 (6 points)**.**
Le plan est muni d'un repère quelconque (O, I, J) comme indiqué sur la figure 5.1 de la présente page.

1. Sans justifier, lire les coordonnées des points A, B, C et D.
2. On donne : $M(-1; 1)$, $N(1{,}5; 2)$, $P(-0{,}5; -2)$ et $Q(2; -1)$
   (a) Placer les points dans le repère.
   (b) Montrer que le quadrilatère $MNQP$ est un parallélogramme.

FIGURE 5.1 – Figure de l'exercice 5.1



EXERCICE 5.2 (3 points)**.**
Que fait l'algorithme suivant ?

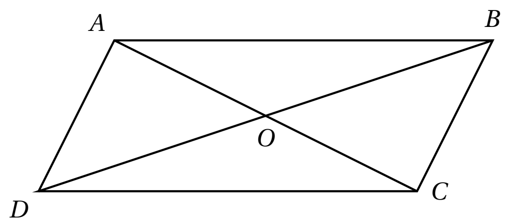
```
VARIABLES
  x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, a, b, c : nombres
DEBUT
  Lire x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C
  c prend la valeur RACINE((x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2)
  b prend la valeur RACINE((x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2)
  a prend la valeur RACINE((x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2)
  Si (a=b et b=c)
    alors afficher le message "Il l'est"
    sinon afficher le message "Il ne l'est pas"
FIN
```

EXERCICE 5.3 (4 points)**.**
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On donne : $A(2; 1)$, $B(1; -1)$ et $C(0; 2)$.
Déterminer la nature du triangle ABC.

EXERCICE 5.4 (7 points).
$ABCD$ est un parallélogramme de centre (de symétrie) O, comme indiqué sur la figure 5.2 de la présente page.
I est le milieu de $[OC]$.
A' est le symétrique de A par rapport à D.
O' est le symétrique de O par rapport à B.

1. Construire I, A' et O' sur la figure 5.2.
2. On se place dans le repère (A, B, D).
   On a donc $A(0\,;\,0)$, $B(1\,;\,0)$, $C(0\,;\,1)$ et $D(1\,;\,1)$
   (a) Montrer par le calcul que O a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.
   (b) Calculer les coordonnées de I.
   (c) Que représente D pour le segment $[AA']$? En déduire, par le calcul, les coordonnées de A'.
   (d) Que représente B pour le segment $[OO']$? En déduire, par le calcul, les coordonnées de O'.
   (e) Que peut-on dire de A', I et O'. Justifier.

FIGURE 5.2 – Figure de l'exercice 5.4



Chapitre 5

Statistiques

Sommaire

5.1 Vocabulaire

Définition 5.1. Une série statistique est un ensemble d'observations collectées et on a les définitions suivantes :
- *Population* : C'est l'ensemble sur lequel porte une étude statistique ;
- *Individu* : C'est un élément de la population ;
- *Caractère* : C'est ce qu'on observe chez l'individu ;
- *Modalité* : Ce sont les différentes valeurs prises par le caractère ;
- La série statistique est dite *quantitative* quand les modalités sont des nombres et *qualitative* sinon ;
- Dans le cas d'une série quantitative, celle-ci est dite *discrète* si les modalités sont limitées à un ensemble fini de valeurs et *continue* si les modalités peuvent prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle.

Exemples.
- On peut s'intéresser à une classe (population), comportant des élèves (individus) et observer leur nombre de frères et sœurs (caractère) qui peuvent être 0, 1, 2, ... (modalités), ces données formant alors une série statistique quantitative discrète.
- On peut s'intéresser à une chaîne d'usine produisant des bras de suspension pour voiture (population), et observer sur chaque pièce (individu) ses dimensions exactes (caractère) qui peuvent varier entre 500 et 750 mm (modalités), ces données formant alors une série statistique quantitative continue.
- On peut s'intéresser à la population française (population dont on prendra un échantillon) comportant des individus (individus) et estimer leur intention de vote (caractère) pouvant être n'importe lequel des candidats se présentant (modalités), ces données formant alors une série statistique qualitative.

Définition 5.2. On a aussi :
- Effectif d'une valeur : C'est le nombre de fois que la valeur d'un caractère (la modalité) revient dans la série ;
- Fréquence d'une valeur : C'est l'effectif de la modalité divisé par l'effectif total ; elle est comprise entre 0 et 1.
- Classes de valeurs : s'il y a trop de valeurs différentes, elles sont rangées par *classe* (intervalle), l'effectif de la classe étant alors le nombre de modalités appartenant à cet intervalle.

5.2 Mesures centrales

Elles visent à résumer la série par une seule valeur qu'on espère représentative de toutes les valeurs de la série.

5.2.1 Mode

Définition 5.3 (Mode)**.** Le *mode* d'une série statistique est la donnée la plus fréquente de la série.

Remarques. • S'il y a plusieurs données arrivant à égalité, il y a plusieurs modes.
- Si les données sont rangées en classe, on parle de *classe modale.*
- Le mode est défini aussi bien pour les séries quantitatives que qualitatives.

5.2.2 Moyenne arithmétique

Définition 5.4 (Moyenne arithmétique)**.** La *moyenne arithmétique* d'une série statistique quantitative $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est le nombre, souvent noté $\overline{x}$:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Remarques. • La somme de toutes les valeurs de la série est inchangée si on remplace chaque valeur par $\overline{x}$.
- On note parfois $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$
- Si la série S comporte n données selon p modalités $x_1, x_2, \dots, x_p$ d'effectifs respectifs (ou de fréquences respectives) n_1, n_2, ..., n_p, alors $\overline{x} = \frac{n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_px_p}{\underbrace{n_1+n_2+\ldots+n_p}_{\text{effectif total}}}$

La moyenne a des avantages calculatoires : si l'on connaît les moyennes et les effectifs de deux séries (ou deux sous-séries), on peut obtenir la moyenne de la série constituée l'agrégation de ces deux séries. Elle a le défaut d'être très sensible aux valeurs extrêmes.

5.2.3 Médiane

Définition 5.5 (Médiane)**.** On appelle *médiane* d'une série statistique quantitative tout nombre m tel que :
- la moitié au moins des valeurs de la série est inférieure à m
- la moitié au moins des valeurs de la série est supérieure à m

Remarques. • Rappel : mathématiquement « inférieur » et « supérieur » signifient, en français, « inférieur ou égal » et « supérieur ou égal ».
- On admettra qu'un tel nombre existe toujours.
- Plusieurs valeurs peuvent parfois convenir pour la médiane.
- La médiane partage la série en deux sous-séries ayant *quasiment* le même effectif ; *quasiment* car si plusieurs valeurs de la série sont égales à la médiane, les données inférieures à la médiane et les données supérieures à la médiane ne seront pas forcément en nombre égal.
- Il faut comprendre la médiane comme « la valeur du milieu ».

Propriété 5.1. *Soit une série statistique quantitative comportant n données :* $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ *telles que* $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$.
- *Si n est impair, le* $\frac{n+1}{2}^{\text{ième}}$ *élément de la série est la médiane :* $m = x_{\frac{n+1}{2}}$
- *Si n est pair, tout nombre compris entre le* $\frac{n}{2}^{\text{ième}}$ *et le* $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{\text{ième}}$ *élément de la série est **une** médiane. On prend généralement* $m = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$

On a aussi :

Propriété 5.2. *Soit une série statistique quantitative comportant n données :* $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ *telles que* $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$. *Alors la donnée de rang* $E\left(\frac{1}{2}n\right) + 1$ *convient toujours comme médiane.*

Remarque. $E(x)$ est la partie entière de x, c'est-à-dire, pour un nombre positif, le nombre sans sa partie décimale. Par exemple $E(2,7) = 2$ et $E(3) = 3$.

La médiane a l'avantage de ne pas être influencée par les valeurs extrêmes. Elle n'a aucun avantage pratique dans les calculs, puisque pour connaître la médiane d'une série constituée de l'agrégation de deux séries, il faut nécessairement re-ordonner la nouvelle série pour trouver sa médiane, qui n'aura pas de lien avec les deux médianes des deux séries initiales.

5.3 Mesures de dispersion

Elles visent à indiquer comment les données de la série statistique sont dispersées par rapport aux mesures centrales.

5.3.1 Valeurs extrêmes

Définition 5.6. Les valeurs extrêmes d'une série sont ses valeurs minimale et maximale et l'étendue est la différence entre les valeurs extrêmes de la série.

5.3.2 Quartiles et déciles

Définition 5.7. Soit S une série statistique quantitative.
- On appelle *premier quartile*, noté Q_1, tout réel tel que
  - au moins 25% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à Q_1
  - au moins 75% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à Q_1
- On appelle *deuxième quartile* ou *médiane*, noté m (ou parfois Q_2), tout réel tel que
  - au moins 50% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à m
  - au moins 50% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à m
- On appelle *troisième quartile*, noté Q_3, tout réel tel que
  - au moins 75% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à Q_3
  - au moins 25% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à Q_3

De la même manière qu'on a défini les quartiles, on peut définir les *déciles* : ce sont les 9 nombres qui partagent la série en dixièmes (comme les trois quartiles partagent la série en quarts).
On s'intéressera à deux d'entre eux :

Définition 5.8. Soit S une série statistique quantitative.
- On appelle *premier décile*, noté D_1, tout réel tel que
  - au moins 10% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à D_1
  - au moins 90% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à D_1
- On appelle *neuvième décile*, noté D_9, tout réel tel que
  - au moins 90% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à D_9
  - au moins 10% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à D_9

Définition 5.9. Soit une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}$ telles que $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$. On appelle
- *étendue* de la série la différence $e = x_n - x_1$ (différence entre les termes extrêmes de la série) ;
- *écart interquartile* la différence $Q_3 - Q_1$;
- *intervalle interquartile* l'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$.
- *écart interdécile* la différence $D_9 - D_1$;
- *intervalle interdécile* l'intervalle $[D_1 ; D_9]$.

Remarque. Toutes ces mesures statistiques sont dans la même unité que les valeurs de la série.

Comme pour la médiane, selon le nombre n de données dans la série, il y a parfois plusieurs possibilités pour Q_1 et Q_3 et parfois une seule, selon que n est ou n'est pas multiple de 4, ce qui peut compliquer leur recherche.
Heureusement, une formule permet de trouver une valeur convenable dans tous les cas :

Théorème 5.3. *Soit une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}$ telles que $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$.*
- *La donnée de rang $E\left(\frac{1}{10}n\right) + 1$ convient toujours comme premier décile.*
- *La donnée de rang $E\left(\frac{1}{4}n\right) + 1$ convient toujours comme premier quartile.*
- *La donnée de rang $E\left(\frac{3}{4}n\right) + 1$ convient toujours comme troisième quartile.*
- *La donnée de rang $E\left(\frac{9}{10}n\right) + 1$ convient toujours comme neuvième décile.*

où $E(x)$ est la partie entière de x.

On l'admettra.

Exemple 5.1. S'il y a $n = 29$ données dans la série, rangées dans l'ordre croissant :

- $E\left(\frac{1}{10} \times 29\right) + 1 = E(2,9) + 1 = 2 + 1 = 3$ donc la troisième donnée de la série convient comme premier décile ;
- $E\left(\frac{1}{4} \times 29\right) + 1 = E(7,25) + 1 = 7 + 1 = 8$ donc la huitième donnée de la série convient comme premier quartile ;
- $E\left(\frac{1}{2} \times 29\right) + 1 = E(14,5) + 1 = 14 + 1 = 15$ donc la quinzième donnée de la série convient comme médiane ;
- $E\left(\frac{3}{4} \times 29\right) + 1 = E(21,75) + 1 = 21 + 1 = 22$ donc la vingt-deuxième donnée de la série convient comme troisième quartile ;
- $E\left(\frac{9}{10} \times 29\right) + 1 = E(26,1) + 1 = 26 + 1 = 27$ donc la vingt-septième donnée de la série convient comme neuvième décile quartile.

Propriété 5.4. *Soit une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ avec $n \geq 5$. On ne change les déciles, les quartiles et la médiane si on remplace x_1 par n'importe quel nombre de l'intervalle $]-\infty\,;\, x_1]$ et x_n par n'importe quel nombre de l'intervalle $[x_n\,;\,+\infty[$.*

Preuve. Comme on ne change pas le nombre de valeurs de la série, il y en aura toujours autant inférieures et supérieures à D_1, Q_1, m, Q_3 et D_9. ♢

5.4 Représentations graphiques

5.4.1 Diagramme à bâtons, histogramme

Si les données sont regroupées en classes (intervalles), la série peut-être représentée par un histogramme où chaque rectangle a son *aire* proportionnelle à l'effectif (ou à la fréquence) de la classe.
Ainsi si on considère la série :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_i	3	5	6	5	6	7	7	10	13	20	25	21	23	12	10	5	7	5	3	2	1

Et la même regroupée en classe :

x_i	$[0\,;\,5[$	$[5\,;\,10[$	$[10\,;\,15[$	$[15\,;\,20]$
n_i	25	57	91	23

On obtient les diagrammes en bâtons (figure 5.1) et histogramme (figure 5.2).

FIGURE 5.1 – Diagramme en bâtons

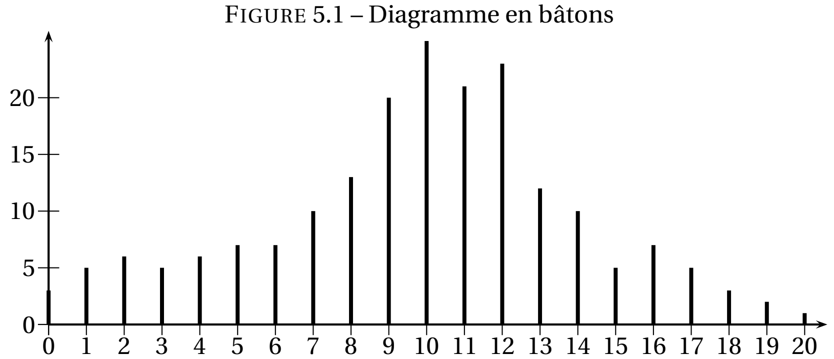
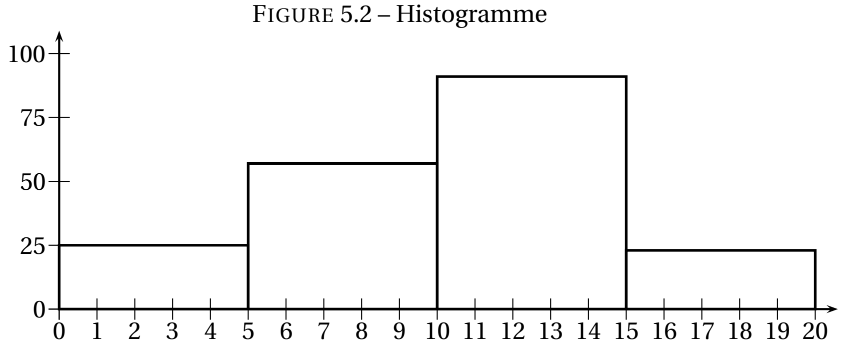


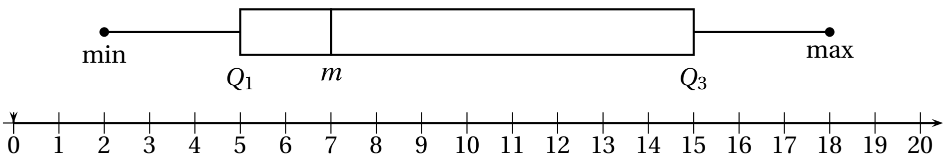
FIGURE 5.2 – Histogramme



5.4.2 Diagramme en boite

On peut représenter graphiquement les valeurs extrêmes, les quartiles et la médiane par un *diagramme en boite*, appelé aussi *boite à moustaches*, conçu de la manière suivante :

- au centre une boite allant du premier au troisième quartile, séparée en deux par la médiane ;
- de chaque côté une moustache allant du minimum au premier quartile pour l'une, et du troisième quartile au maximum pour l'autre.



Ces diagrammes permettent une interprétation visuelle et rapide de la dispersion des séries statistiques. Ils permettent également d'apprécier des différences entre des séries (lorsqu'elles ont des ordres de grandeurs comparables).

Remarques. • La hauteur des boites est arbitraire (on les fait parfois proportionnelles à l'effectif total de la série).

- La boite contient les 50% des données centrales.
- On coupe parfois les moustaches de part et d'autre à la hauteur du premier et neuvième décile ; on fait alors apparaître les minimum et maximum par un point.

5.4.3 Autres représentations

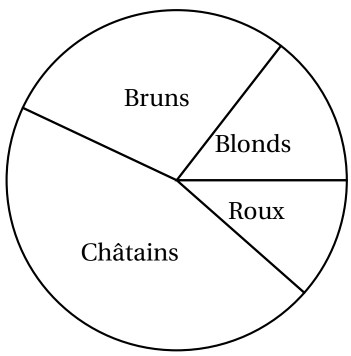
Les séries statistiques peuvent aussi être représentées en diagrammes circulaires, semi-circulaires, rectangulaires, etc. L'aire de chaque modalité devra être proportionnelle à l'effectif de cette modalité. Les fréquences permettent d'obtenir assez facilement la part du diagramme qui devra être consacrée à chaque modalité.
Ainsi si on considère la série suivante :

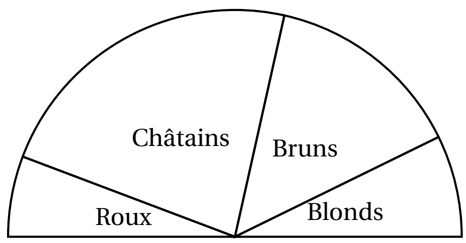
x_i	Blonds	Bruns	Châtains	Roux
n_i	25	57	91	23

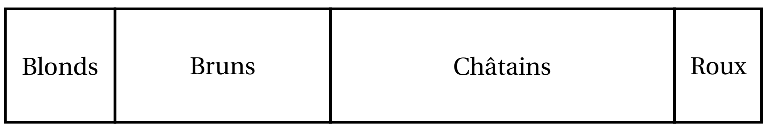
On a alors :

x_i	Blonds	Bruns	Châtains	Roux	Total
n_i	29	57	91	23	200
Fréquence f_i	$\dfrac{29}{200} = 0,145$	0,285	0,455	0,115	1
Part d'un diagramme circulaire	$0,145 \times 360 = 52,2\,^\circ$	102,6 °	163,8 °	41,4 °	360 °
Part d'un diagramme semi-circulaire	$0,145 \times 180 = 26,1\,^\circ$	51,3 °	81,9 °	20,7 °	180 °
Part d'un rectangle de 10 cm	$0,145 \times 10 = 1,45$ cm	2,85 cm	4,55 cm	1,15 cm	10 cm

On obtient les diagrammes des figures ci-dessous.







5.5 Série regroupée en classes

Lors d'une enquête portant sur 1 300 personnes, on a demandé le temps passé par jour devant le téléviseur. Les données relevées ont été regroupées par classe car les 1 300 données sont en trop grand nombre pour être manipulées toutes ensembles. On a obtenu le tableau suivant :

Temps (h)	[0; 1[	[1; 2[	[2; 3[	[3; 4[	[4; 5[	[5; 6[	[6; 7]
Effectif	170	309	432	221	103	41	24

Les 1 300 données ne sont alors plus accessibles dans le détail. Peut-on malgré tout obtenir de ce tableau les paramètres statistiques de la série (valeurs extrêmes, moyenne, médiane, etc.) ou, au moins, des valeurs approchées ?

5.5.1 Valeurs extrêmes

1. Peut-on obtenir les valeurs minimale et maximale de la série ? Si oui les donner. Sinon donner une valeur (la plus grande possible) dont on est sûr qu'elle est plus petite que toutes les données de la série et une valeur (la plus petite possible) dont on est sûr qu'elle est plus grande que toutes les données de la série.
2. Peut-on obtenir l'étendue de la série ? Si oui la donner. Sinon donner l'étendue maximale que peut avoir la série.

5.5.2 Moyenne

1. Expliquer pourquoi on ne peut pas calculer la moyenne exacte du temps passé par jour devant la télévision.
2. Pour obtenir une valeur approchée de la moyenne, on considère que toutes les données d'une classe sont égales au centre de la classe.
   Ainsi, par exemple, nous considèrerons que les 170 données de la classe $[0;1[$ sont égales à $\frac{0+1}{2}=0,5$.
   Compléter alors le tableau suivant et en déduire une valeur approchée de la moyenne :

Temps (h)	[0; 1[	[1; 2[	[2; 3[	[3; 4[	[4; 5[	[5; 6[	[6; 7]
Centre de la classe							
Effectif	170	309	432	221	103	41	24

5.5.3 Médiane

1. Quel est le rang de la médiane de cette série ?
2. Expliquer pourquoi on ne peut pas savoir le temps médian exact (la médiane exacte de cette série) passé par jour devant la télévision.
3. Compléter le tableau suivant :

Temps passé devant la télévision inférieur à	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h
Effectif							

   Les effectifs obtenus dans la seconde ligne du tableau sont appelés effectifs cumulés croissants.
   Reporter les dans le tableau ci-dessous.

Temps passé devant la télévision inférieur à	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h
Effectif	170	309	432	221	103	41	24
Effectifs cumulés croissants							

4. À l'aide de ces effectifs cumulés croissants et du 1., déterminer à quelle classe appartient la médiane exacte de cette série.
5. Cette donnée est souvent trop approximative pour être utile en statistique et l'on a souvent besoin d'une estimation plus précise. On l'obtient avec un graphique.
   (a) Représenter le tableau sur un graphique en indiquant en abscisse les temps passés devant la télévision (1 h = 2 cm) et en ordonnée les effectifs cumulés croissants (100 = 1 cm).
   (b) À l'aide de ce graphique et du 1., déterminer une valeur approchée de la médiane de cette série.

5.5.4 Mode

Lorsque les données sont regroupées par classes de même taille le mode n'est pas accessible mais la classe dont l'effectif et le plus grand est appelée classe modale. Lorsque les classes ne sont pas de la même taille, il existe des moyens d'estimer celle qui est modale, mais cette compétence n'est pas au programme de la Seconde.

5.6 Exercices

EXERCICE 5.1.
Les tableaux dont il est question dans cette activité sont ceux de la page de la présente page.

1. Le tableau 1 présente la répartition des salaires mensuels dans une entreprise (*source : DoC TICE-MEN*). Calculer la moyenne des salaires de cette entreprise et déterminer la médiane.
2. Une erreur a été commise dans les relevés : les effectifs correspondant aux salaires de 1 100 € et 1 400 € ont été permutés. Les données exactes sont celles du tableau 2.
Comparer les moyenne et médiane de cette série à celles de la précédente. Les variations étaient-elles prévisibles ?
3. Rêvons ... 35 personnes ont un salaire de 3 400 € et l'effectif total est inchangé. Utiliser le tableau 3 pour imaginer une répartition des effectifs telle que la médiane ne soit pas modifiée : comment va varier la moyenne ?
Quelle répartition des effectifs respectant ces contraintes donnera la moyenne des salaires la plus élevée (calculer alors cette moyenne) ? Quelle répartition des effectifs respectant ces contraintes donnera la moyenne des salaires la moins élevée (calculer alors cette moyenne) ?
Mathias prétend qu'avec 35 personnes ayant un salaire de 3 400 €, la moyenne est obligatoirement plus élevée. A-t-il raison ?

TABLE 5.1 – Données de l'exercice 5.1

Tableau 1

Salaire en €	Effectif	Effectif cumulé croissant
1 100	18	18
1 200	15	33
1 300	20	53
1 400	10	63
1 500	25	88
1 600	12	100
1 700	4	104
1 800	5	109
1 900	3	112
2 000	2	114
2 100	6	120
2 200	7	127
2 300	0	127
2 400	2	129
2 500	0	129
2 600	3	123
2 700	0	132
2 800	3	135
2 900	0	135
3 000	0	135
3 100	3	138
3 200	0	138
3 300	5	143
3 400	8	151

Tableau 2

Salaire en €	Effectif	Effectif cumulé croissant
1 100	**10**	
1 200	15	
1 300	20	
1 400	**18**	
1 500	25	
1 600	12	
1 700	4	
1 800	5	
1 900	3	
2 000	2	
2 100	6	
2 200	7	
2 300	0	
2 400	2	
2 500	0	
2 600	3	
2 700	0	
2 800	3	
2 900	0	
3 000	0	
3 100	3	
3 200	0	
3 300	5	
3 400	8	

Tableau 3

Salaire en €	Effectif	Effectif cumulé croissant
1 100		
1 200		
1 300		
1 400		
1 500		
1 600		
1 700		
1 800		
1 900		
2 000		
2 100		
2 200		
2 300		
2 400		
2 500		
2 600		
2 700		
2 800		
2 900		
3 000		
3 100		
3 200		
3 300		
3 400	**35**	**151**

EXERCICE 5.2.
Dans chaque cas, calculer la moyenne, le mode et la médiane de la série, vérifier que le narrateur dit la vérité et étudier quelles autres stratégies, s'il y en a, il aurait pu utiliser pour minimiser son résultat :

1. « Je n'ai eu que 8 sur 20 au contrôle de statistiques. Mes parents ne seront pas contents. Nous sommes 10 en classe. La meilleure note est 19. Ensuite il y a un 10, quatre 9, un 8 (moi) et trois 2. Je dirai donc que je suis au-dessus de la moyenne. »
2. « Encore un 8 ! Cette fois les notes sont 2, 3, 4, 5, 7, 8 (moi), 9, 9, 18, 19. Comment annoncer ma note ? Euh !... Je dirai que je suis dans la bonne moitié. »
3. « Toujours un 8 ! Cette fois il y a eu trois 7 et un 19, 18, 12, 11, 10, 8(moi) et 2. Tant pis, je dirai que je suis meilleur que le mode. »

EXERCICE 5.3.
Voici trois séries de notes obtenues en mathématiques dans des classes de seconde (à effectifs très réduits) lors d'un contrôle sur les statistiques :

1. Déterminer la note médiane de chaque classe.
2. **SANS LA CALCULER**, conjecturer pour chaque série si la moyenne sera supérieure, inférieure ou proche de la médiane.

Classe 1	Classe 2	Classe 3
2	2	8
5	3	8
6	4	9
7	4	9
9	4	10
10	9	10
10	10	10
12	12	12
13	12	13
14	12	15
15	12	15
15	12	16
16	13	17
19	13	18

EXERCICE 5.4.
Trois séries statistiques, comportant 10 données chacune, ont les paramètres suivants :

- Série A : Minimum 10 ; maximum 50 ; moyenne 28 ; médiane 20.
- Série B : Minimum 10 ; maximum 50 ; moyenne 30 ; médiane 30.
- Série C : Minimum 10 ; maximum 50 ; moyenne 21,5 ; médiane 25.

Conjecturer pour chacune de ces séries comment peuvent être réparties les données.

EXERCICE 5.5.
Le recensement de 1 999 a permis d'observer l'existence en France de dix communes de plus de 200 000 habitants. Le tableau ci-dessous donne la liste de ces communes et de leurs populations en milliers d'habitants.

1. Quelle est l'étendue de cette série statistique ? Que devient l'étendue quand on retire Paris de la liste ?
2. Comparer moyenne et médiane des populations de ces dix villes. Que constate-ton ? Comment expliquer ceci ?
3. Faire de même si on retire Paris de la liste. Que constatez-vous maintenant ?
4. Que choisiriez-vous entre « moyenne étendue »et « médiane étendue »pour résumer cette série statistique ? Expliquez votre choix.

Paris	2 116
Marseille	798
Lyon	445
Toulouse	391
Nice	341
Nantes	269
Strasbourg	264
Montpellier	225
Bordeaux	215
Rennes	206

EXERCICE 5.6.
Vous trouverez dans le tableau ci-dessous le relevé journalier des précipitations (rosée, brouillard et pluie) à St Pierre de Chartreuse (montagne) et à St Étienne de St Geoirs (plaine), en mm. (*Données Météo France Saint-Martin d'Hérès*).

1. Pour chaque mois, calculer la moyenne et l'étendue des précipitations, puis la médiane.
   Quel résumé (moyenne étendue ou médiane étendue) semble le plus pertinent ? Justifier.
2. Calculer une moyenne élaguée des précipitations à St Étienne de St Geoirs (*une moyenne élaguée d'une série est la moyenne obtenue en privant cette série de certaines données que l'on considère comme aberrantes ; il n'y a pas de règle : ici, on enlèvera la donnée n°25*).
3. Comparer cette moyenne élaguée à la moyenne de St Pierre de Chartreuse de septembre 99.
   On dit que le massif de la Chartreuse est en général plus humide que la plaine. Qu'en pensez-vous ?

	St Pierre de Chartreuse			St Ét.
Date	sept 97	sept 98	sept 99	sept 99
1	0,8	0	0	0
2	21,2	17	0	0
3	0,2	0,5	0	3,4
4	0	59,4	0	0,2
5	0,2	2,6	0	0
6	0	1	10	3,8
7	0	15,4	0	0
8	0,2	1,2	0	0,2
9	0,2	0	0	0
10	0,2	34,8	0	0
11	0	45	0	0
12	31,6	55,6	0	0
13	19	44	0	0
14	0	9,6	11	0,2
15	0,2	14,4	1,6	0,8
16	0,2	0,6	0	0
17	0,2	0,2	1,6	0,8
18	0,2	0	0	0
19	0	0	42,4	27,2
20	0,2	0	0	0
21	0,2	0	9,8	0
22	1,2	5	0	0
23	0,2	0,2	1,4	0,4
24	0,2	0	1,2	0,2
25	0,2	0,6	51,8	189,2
26	0,2	15	1,2	0,8
27	0,2	5	14,2	11,2
28	0	10	6,8	1
29	0,2	4	0	0
30	0,2	28,4	44,4	23,6

EXERCICE 5.7.
Dans une petite ville fictive où la taxe d'habitation est proportionnelle à la superficie de l'habitation, la répartition des habitations selon leur superficie est la suivante :

Superficie en m^2	Effectif
[10; 40[	14
[40; 70[	24
[70; 100[	54
[100; 120[	64
[120; 140[	32
[140; 170[	12

1. Déterminer une valeur approchée de la superficie moyenne des habitations de cette ville.
2. Un membre du conseil municipal propose d'exonérer la moitié des personnes : celles dont les habitations ont les superficies les plus faibles. Une personne dont l'appartement mesure 80 m^2 serait-elle exonérée ? Une personne dont l'appartement mesure 110 m^2 serait-elle exonérée ?
3. Un autre membre du conseil municipal propose d'exonérer le quart des personnes : celles dont les habitations ont les superficies les plus faibles. Une personne dont l'appartement mesure 80 m^2 serait-elle exonérée ?

EXERCICE 5.8.
Dans deux entreprises A et B, les employés sont classés en deux catégories : ouvriers et cadres.
Les deux tableaux qui suivent donnent la répartition des employés en fonction de leur catégorie professionnelle et de leur salaire mensuel net, en euros. On suppose qu'à l'intérieur de chaque classe, la répartition est régulière.

1. (a) Calculer la moyenne des salaires de tous les employés de l'entreprise A
   (b) Calculer la moyenne des salaires des ouvriers de l'entreprise A
   (c) Calculer la moyenne des salaires des cadres de l'entreprise A
2. Faire les mêmes calculs pour l'entreprise B
3. Le P.D.G. de l'entreprise A dit à celui de l'entreprise B : « Mes employés sont mieux payés que les vôtres. »
   « Faux »répond ce dernier, « mes ouvriers sont mieux payés et mes cadres également. »
   Expliquer ce paradoxe.

Entreprise A

Salaires	[1000; 2000[	[2000; 3000[	[3000; 4000[
Ouvriers	114	66	0
Cadres	0	8	12

Entreprise B

Salaires	[1000; 2000[	[2000; 3000[	[3000; 4000[
Ouvriers	84	42	0
Cadres	0	12	12

EXERCICE 5.9.
Lors d'une étude d'une population de rats, K. Miescher a observé l'évolution d'une population de 144 rats. Le tableau suivant indique la durée de vie (en mois) des rats.

Durée de vie (en mois)	Effectif
[10; 15[	1
[15; 20[	3
[20; 25[	9
[25; 28[	12
[28; 30[	13
[30; 32[	20
[32; 34[	23
[34; 36[	26
[36; 38[	22
[38; 40[	11
[40; 42[	3
[42; 43[	1

Ainsi, un seul rat a vécu entre 10 et 15 mois, trois ont vécu entre 15 et 20 mois, neuf entre 20 et 25 mois etc. On suppose que, dans chaque classe, la répartition est régulière.

1. Évaluez l'étendue de cette série
2. Évaluez la moyenne de la durée de vie d'un rat dans cette population
3. Quelle est le rang de la durée de vie médiane d'un rat dans cette population ?
   À l'aide du polygone des effectifs cumulés croissants,évaluez le valeur de la médiane ?
4. En observant la moyenne et la médiane, quel commentaire peut-on faire ?

EXERCICE 5.10.
Soit S_1, S_2 et S_3 les trois séries de notes suivantes :

S_1	2; 2; 4; 4; 6; 10; 14; 16; 16; 18; 18
S_2	2; 8; 9; 10; 10; 10; 11; 12; 18
S_3	2; 5; 5; 5; 5; 6; 6; 7; 9; 10; 11; 13; 14; 14; 15; 15; 15; 15; 18

1. Déterminer les mesures centrales et les mesures de dispersion les plus adaptées pour décrire les différences entre ces trois séries.
2. Construire les diagrammes qui vous semblent les plus adaptés.
3. Commenter.

EXERCICE 5.11.
On a relevé le prix de vente d'un CD et le nombre de CD vendus chez différents fournisseurs. Les résultats forment une série statistique à une variable donnée par le tableau ci-dessous.

Prix de vente (en €)	15	16	17	18	19
Nombre de CD vendus	83	48	32	20	17

1. Quelles sont les différentes valeurs de la série.
2. Donner la fréquence correspondant à chacune de ces valeurs.
3. Donner la moyenne et la médiane de la série. Que représentent ces nombres ?
4. Représenter la série par un diagramme semi-circulaire.

EXERCICE 5.12.
Dans une classe de 30 élèves, la moyenne des 20 filles est 11,5 et la moyenne des 10 garçons est 8,5. Donner la moyenne de classe.

EXERCICE 5.13.
On donne la série suivante : 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 15, 15, 17.

1. Quel est l'écart interquartile de la série ?
2. Quel est l'intervalle interdécile de la série ?

EXERCICE 5.14.
Le tableau ci-dessous donne une répartition des salaires mensuels en euros des employés dans une entreprise.

Salaire	Effectif
[1 000 ; 1 200[	326
[1 200 ; 1 500[	112
[1 500 ; 2 000[	35
[2 000 ; 3 000[	8
[3 000 ; 10 000[	3

1. Quel est le nombre d'employés de l'entreprise ?
2. Quel est le nombre d'employés touchant un salaire mensuel supérieur ou égal à 1 200 € ?
3. Estimer le salaire moyen et le salaire médian des employés de l'entreprise.

EXERCICE 5.15.
Un entomologiste a fait des relevés sur la taille de 50 courtilières adultes.
33, 35, 36, 36, 37, 37, 37, 38, 38, 38, 39, 39, 39, 39, 40, 40, 40, 40, 40, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 43, 43, 43, 43, 44, 44, 44, 44, 45, 45, 45, 46, 46, 47, 47, 48, 48, 50.

1. Organiser les relevés dans le tableau d'effectifs suivant :

Valeur	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Effectif																		
Effectif cumulé croissant																		

2. Représenter les données par un diagramme à bâtons. Un diagramme circulaire serait-il intéressant ?
3. Calculer la moyenne de la série. Déterminer sa médiane. Déterminer les premier et troisième quartiles.
4. Construire le diagramme en boîte correspondant.
5. Interpréter les résultats obtenus.

EXERCICE 5.16.
Le tableau suivant donne les effectifs des notes obtenues dans une classe en Mathématiques et en Histoire-Géographie :

Notes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Maths	0	0	0	0	1	0	1	1	3	4	4	1	3	2	2	1	1	0	0	0	0
H.-G.	0	1	0	0	2	0	1	2	1	1	4	2	2	0	3	2	1	0	1	0	1

Le but de l'exercice est de comparer la dispersion des notes en Maths et en Histoire-Géographie.

1. Calculer $\overline{x}$ et $\overline{x'}$ les moyennes respectives de Maths et d'Histoire-Géographie.
2. Calculer médiane m_e et quartiles Q_1 et Q_3 en Maths.
3. Calculer médiane m'_e et quartiles Q'_1 et Q'_3 en Histoire-Géographie.
4. Représenter les diagrammes en boîte des notes en Maths et en Histoire-Géographie.
5. Interpréter les résultats obtenus.

Devoir surveillé n°6

Statistiques

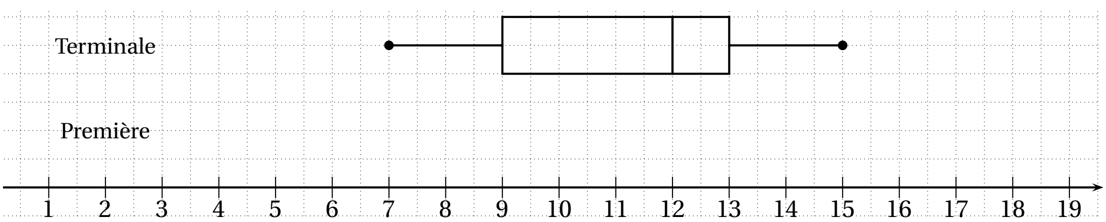
EXERCICE 6.1 (5 points)**.**
Sur le tableau ci-dessous, sans justification, entourer la proposition correcte, sachant que :
- il y a à chaque fois exactement une proposition correcte ;
- une réponse juste rapporte 1 point ;
- une réponse fausse enlève 0,5 point ;
- une absence de réponse rapporte 0 point ;
- un total négatif est ramené à zéro.

Question	Proposition A	Proposition B	Proposition C
L'INSEE indique que, pour 2 004, le revenu moyen annuel par ménage est de 28 935 € et le revenu médian annuel par ménage est 24 599 €. On peut supposer que ...	... les hauts revenus sont très hauts	... les bas revenus sont très bas	... les hauts revenus ne sont pas très hauts
Les notes d'une classe sont les suivantes $\{7; 8; 9; 9; 9; 10; 10; 11; 17; 19\}$. Sans calcul on peut conjecturer que...	... la moyenne et la médiane seront proches	... la moyenne sera supérieure à la médiane	... la moyenne sera inférieure à la médiane
Plus de la moitié des notes d'une classe à un devoir sont inférieures à 10.	La moyenne de la classe sera inférieure à 10	La moyenne sera supérieure à 10	On peut ne rien dire de la moyenne
Suzanne a eu la meilleure note de la classe mais elle s'aperçoit que le professeur lui a oublié 2 points. Elle le signale et il modifie sa note. On peut être sûr que, pour la classe, ...	... la médiane va augmenter	... le mode va augmenter	... la moyenne va augmenter
Thomas vient en bus au Lycée. Sur le trajet du bus il y a cinq feux de circulation. Thomas ne relève pas précisément le nombre de feux qui sont au rouge sur le trajet mais constate qu'il y en au minimum trois qui sont au rouge. On sait alors que ...	... le nombre moyen de feux au rouge sera inférieur à 3	... le nombre moyen de feux au rouge est égal à 3	... le nombre moyen de feux au rouge est supérieur à 3

EXERCICE 6.2 (9 points)**.**
Le tableau suivant donne les résultats obtenus par une classe de Première (arrondis au point supérieur) :

Notes x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectifs n_i	0	0	0	0	0	2	2	2	0	1	1	2	1	5	4	0	2	1	0	2	0

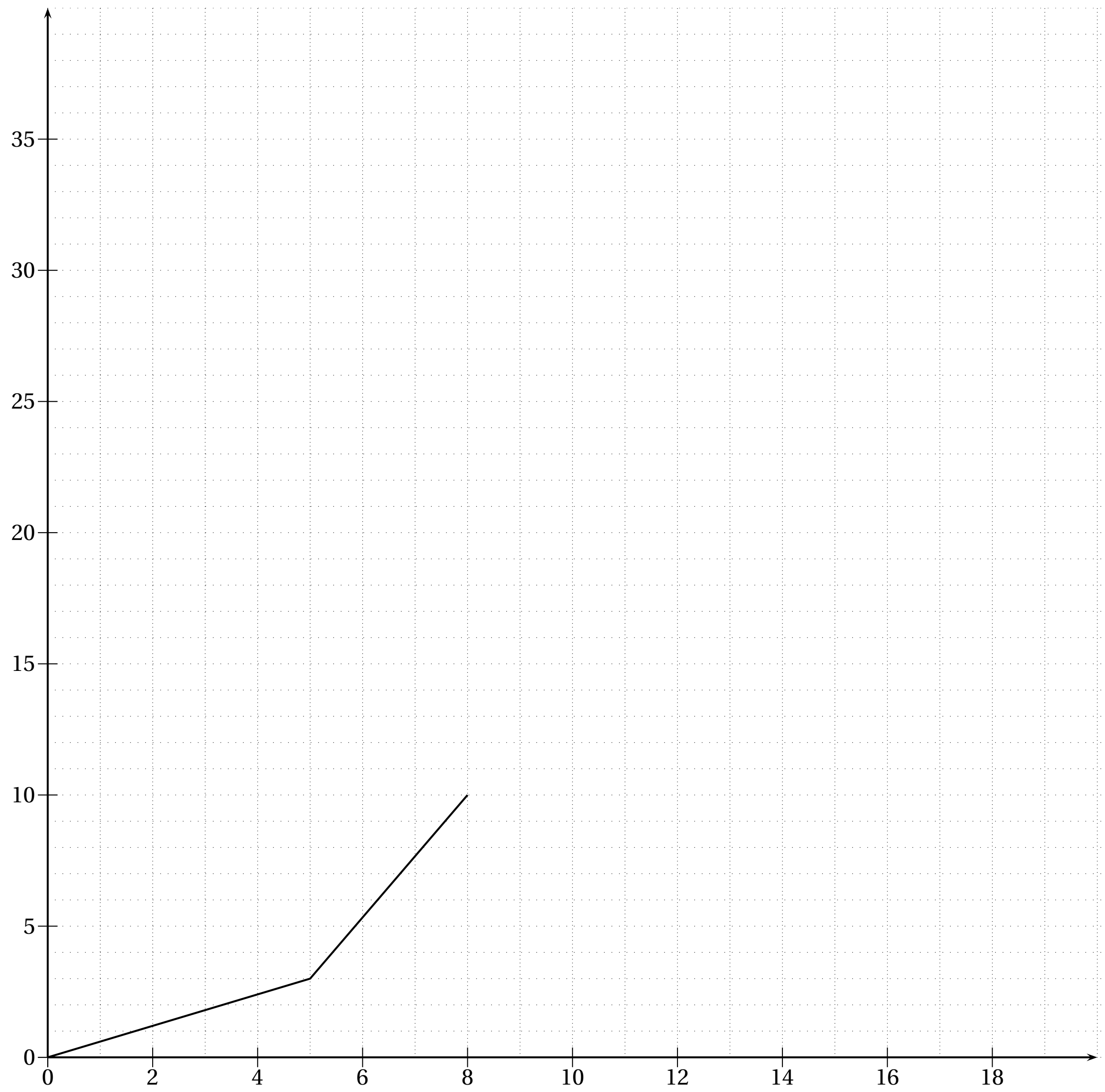
1. (a) On note $\overline{x}$ la note moyenne de cette classe. Calculer $\overline{x}$ (on arrondira au dixième).
   (b) On note m la note médiane de cette classe. Déterminer le rang de m, puis la valeur m.
   (c) Comment expliquer la différence entre ces deux résultats ?
2. (a) On note Q_1 et Q_3 les premier et troisième quartiles de cette série. Déterminer les rangs de Q_1 et Q_3 puis les valeurs de Q_1 et Q_3.
   (b) Représenter, sur la figure ci-dessous, le diagramme en boite de cette série statistique.
   (c) Sur cette figure, on a déjà représenté le diagramme en boite d'une série constituée des résultats d'une classe de Terminale.
   En vous basant sur ces diagrammes, comparer les résultats de ces deux classes.



EXERCICE 6.3 (6 points)**.**
Le tableau suivant donne les résultats obtenus par une classe de Seconde (regroupés en classes) :

Notes x_i	[0 ; 5[	[5 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 12[	[12 ; 15[	[15 ; 20]
Effectifs n_i	3	7	4	8	9	6
Effectifs cumulés croissants						

1. Évaluer l'étendue de la série.
2. Calculer une valeur approchée de la note moyenne $\overline{x}$ de cette classe (on arrondira au dixième).
3. (a) Compléter la ligne des effectifs cumulés croissants de cette série et le polygone des effectifs cumulés croissants donné ci-dessous.
   (b) Quel est le rang de la note médiane m_e de cette classe ?
   En déduire une valeur approchée à l'aide du diagramme précédent.
4. Comparer les valeurs approchées de $\overline{x}$ et de m_e.
   Que peut-on en dire ?



Devoir surveillé n°6

Statistiques

EXERCICE 6.1 (5 points)**.**
Sur le tableau ci-dessous, sans justification, entourer la proposition correcte, sachant que :

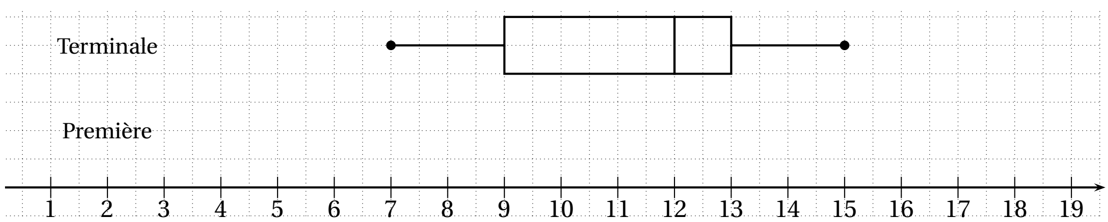
- il y a à chaque fois exactement une proposition correcte ;
- une réponse juste rapporte 1 point ;
- une réponse fausse enlève 0,5 point ;
- une absence de réponse rapporte 0 point ;
- un total négatif est ramené à zéro.

Question	Proposition A	Proposition B	Proposition C
L'INSEE indique que, pour 2 004, le revenu moyen annuel par ménage est de 28 935 € et le revenu médian annuel par ménage est 24 599 €. On peut supposer que ...	... les hauts revenus sont assez bas	... les bas revenus sont assez hauts	... les bas revenus très bas
Les notes d'une classe sont les suivantes $\{1;3;9;9;11;11;11;11;12;13\}$. Sans calcul on peut conjecturer que...	... la moyenne et la médiane seront proches	... la moyenne sera supérieure à la médiane	... la moyenne sera inférieure à la médiane
La moyenne d'une classe à un devoir est supérieure à 10.	La moitié des notes seront inférieures à 10	La moitié des notes seront supérieures à 10	On peut ne rien dire de la médiane
Suzanne a eu la meilleure note de la classe mais elle s'aperçoit que le professeur lui a mis 2 points de trop. Elle le signale et il modifie sa note. On peut être sûr que, pour la classe, ...	... la moyenne va baisser	... le mode va baisser	... la médiane va baisser
Thomas vient en bus au Lycée. Sur le trajet du bus il y a cinq feux de circulation. Thomas ne relève pas précisément le nombre de feux qui sont au rouge sur le trajet mais constate qu'il y en au maximum trois qui sont au rouge. On sait alors que ...	... le nombre moyen de feux au rouge sera inférieur à 3	... le nombre moyen de feux au rouge est égal à 3	... le nombre moyen de feux au rouge est supérieur à 3

EXERCICE 6.2 (9 points)**.**
Le tableau suivant donne les résultats obtenus par une classe de Première (arrondis au point supérieur) :

Notes x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Effectifs n_i	0	0	0	0	0	2	2	2	0	1	1	2	1	5	4	0	2	1	0	2	0

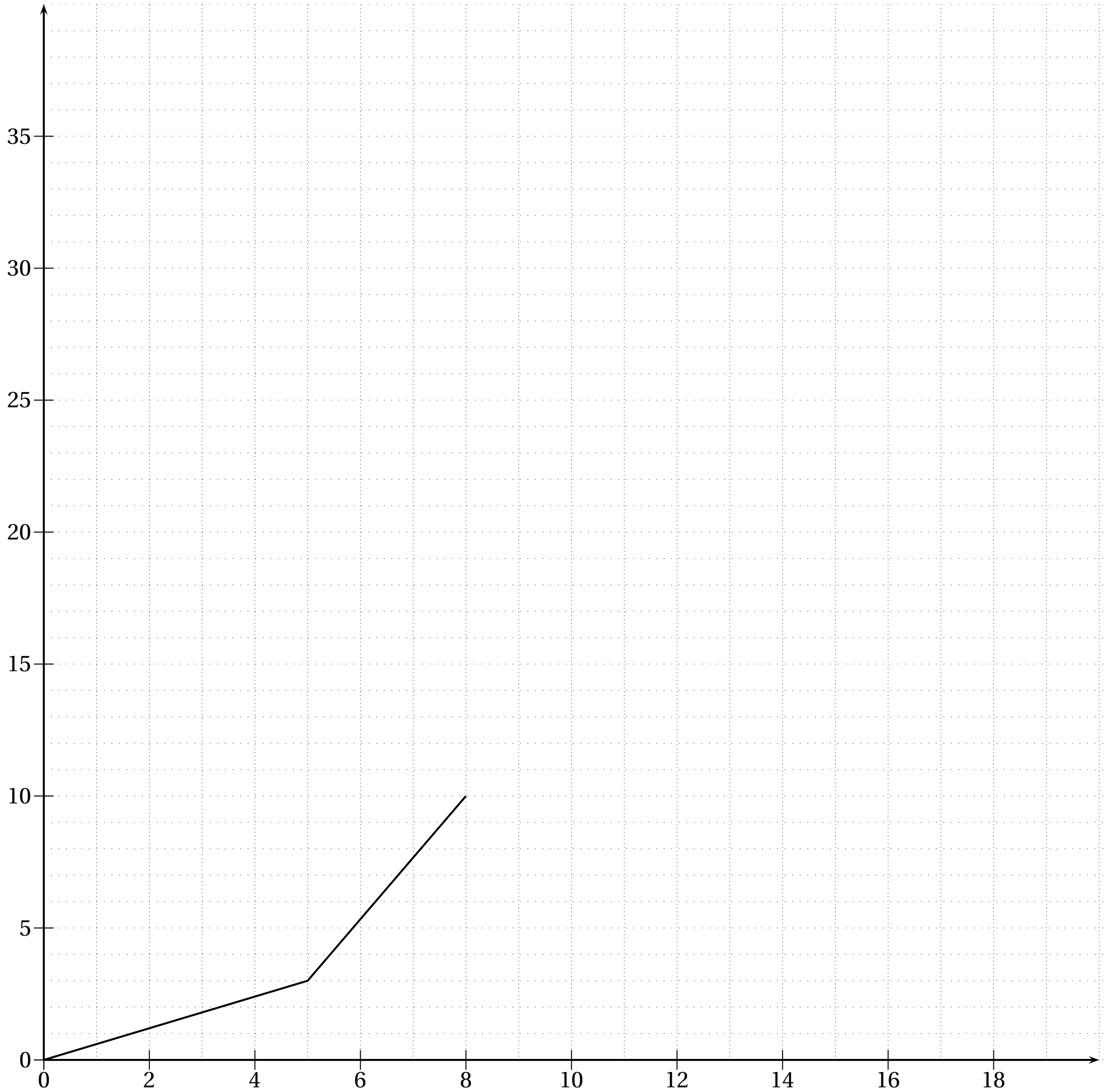
1. (a) On note $\overline{x}$ la note moyenne de cette classe. Calculer $\overline{x}$ (on arrondira au dixième).
   (b) On note m la note médiane de cette classe. Déterminer le rang de m, puis la valeur m.
   (c) Comment expliquer la différence entre ces deux résultats ?
2. (a) On note Q_1 et Q_3 les premier et troisième quartiles de cette série. Déterminer les rangs de Q_1 et Q_3 puis les valeurs de Q_1 et Q_3.
   (b) Représenter, sur la figure ci-dessous, le diagramme en boite de cette série statistique.
   (c) Sur cette figure, on a déjà représenté le diagramme en boite d'une série constituée des résultats d'une classe de Terminale.
   En vous basant sur ces diagrammes, comparer les résultats de ces deux classes.



EXERCICE 6.3 (6 points).
Le tableau suivant donne les résultats obtenus par une classe de Seconde (regroupés en classes) :

Notes x_i	[0 ; 5[	[5 ; 8[	[8 ; 10[	[10 ; 12[	[12 ; 15[	[15 ; 20]
Effectifs n_i	3	7	4	8	9	6
Effectifs cumulés croissants						

1. Évaluer l'étendue de la série.
2. Calculer une valeur approchée de la note moyenne $\overline{x}$ de cette classe (on arrondira au dixième).
3. (a) Compléter la ligne des effectifs cumulés croissants de cette série et le polygone des effectifs cumulés croissants donné ci-dessous.
   (b) Quel est le rang de la note médiane m_e de cette classe ?
   En déduire une valeur approchée à l'aide du diagramme précédent.
4. Comparer les valeurs approchées de $\overline{x}$ et de m_e.
   Que peut-on en dire ?



Devoir maison n°3

Algorithmique et repérage

EXERCICE.
À l'aide du logiciel Algobox, créer un algorithme prenant comme arguments les coordonnées de trois points A, B et C dans un repère orthonormal et déterminant la nature du triangle ABC.
Envoyer ensuite son algorithme à l'adresse suivante : david.robert@ac-rennes.fr

Chapitre 6

Fonctions affines

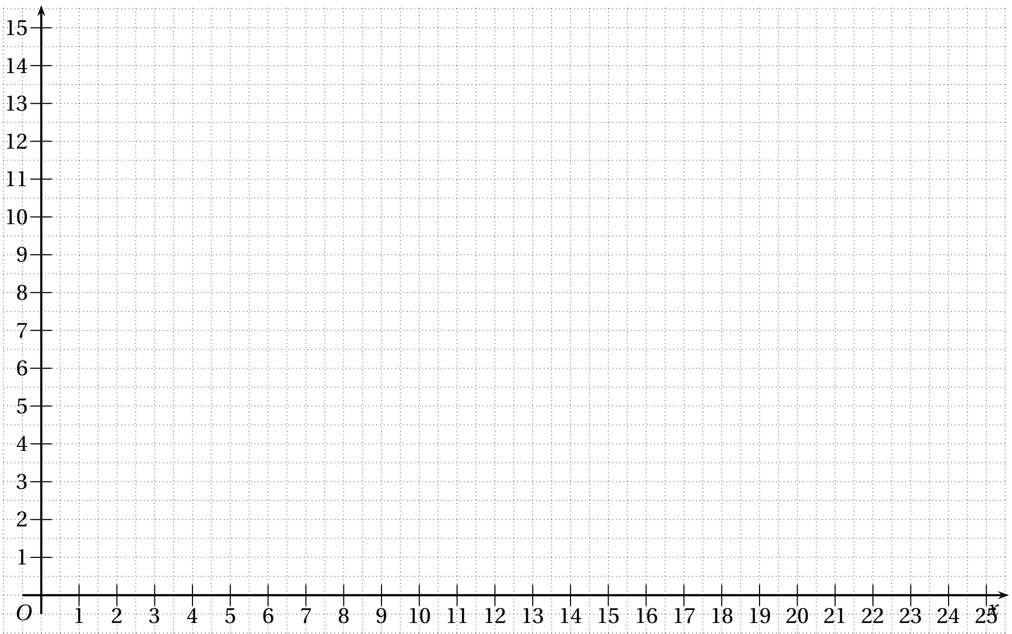
Sommaire

6.1 Activité

Trois taxis T_1, T_2 et T_3 proposent les tarifs suivants :

- T_1 : 5 € de prise en charge, puis 0,40 € du kilomètre ;
- T_2 : 4 € de prise en charge, puis 0,50 € du kilomètre ;
- T_3 : 7 € de prise en charge, puis 0,30 € du kilomètre ;

1. Quel est le taxi le plus économique pour un trajet de
   - 5 km ?
   - 10 km ?
   - 15 km ?
2. On note x la distance que veut parcourir un client en taxi. Exprimer les tarifs $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ des taxis T_1, T_2 et T_3 en fonction de x.
3. Représenter dans le repère ci-dessous les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ des fonctions f_1, f_2 et f_3.



4. En vous basant sur le graphique, indiquez pour quelles distances il est plus économique de prendre le taxi T_1, la taxi T_2 ou le taxi T_3. *On donnera les réponses sous forme d'intervalle.*
5. Un client désire faire plus de 20 km, et choisira le taxi T_3. Il vous charge étudier le coût de son trajet en fonction du nombre de la distance x.

(a) Compléter le tableau ci-dessous :

Distance x	20	21	22	23	24	25	30	40	50
Coût $f_3(x)$									

(b) La distance et le coût sont-ils des grandeurs proportionnelles ?

(c) À l'aide du tableau précédent conjecturer de combien augmente le coût lorsque la distance augmente de

- 1 km
- 2 km
- 5 km

(d) Que peut-on dire alors des grandeurs « augmentation de la distance » et « augmentation du coût » ?

6.2 Bilan et compléments

Définition 6.1. Les fonctions f, définies sur $\mathbb{R}$, dont l'expression peut se mettre sous la forme

$$f(x) = mx + p \text{ où } m \text{ et } p \text{ sont des réels}$$

sont appelées *fonctions affines*.
Cas particuliers :
- si $m = 0$ alors $f(x) = p$ est dite *constante* ;
- si $p = 0$ alors $f(x) = mx$ est dite *linéaire*.

Propriété 6.1. *La représentation graphique d'une fonction affine dans un repère est une droite.*
Celle d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère.

On le démontrera plus tard dans l'année.

Propriété 6.2. *Soit f une fonction déinie sur $\mathbb{R}$.*
- *Si les variations des x et des $f(x)$ sont proportionnels, alors f est une fonction affine.*
- *Réciproquement, si f est une fonction affine, alors les variations des x et des $f(x)$ sont proportionnels.*

Dit autrement, on a :
$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ *=constante $\Leftrightarrow$ f est une fonction affine.*
Ou encore :
Pour tout x et x', $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ *=constante $\Leftrightarrow$ f est une fonction affine*

Preuve. • Si f est une fonction affine, alors $f(x) - f(x') = (mx+p) - (mx'+p) = mx - mx' = m(x-x')$ donc, pour x et x' distincts, $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'} = m$.

- Réciproquement, si pour tout x et x' distincts, $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'} = m$ alors $f(x) - f(x') = m(x-x')$. En prenant $x' = 0$, on obtient : $f(x) - f(0) = mx \Leftrightarrow f(x) = mx + f(0)$. Donc, par définition, f est une fonction afine.

◊

Propriété 6.3. *Soit $f : x \longmapsto mx + p$ une fonction affine.*
- *Si $m > 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*
- *Si $m < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.*
- *Si $m = 0$ alors f est constante sur $\mathbb{R}$.*

Preuve. Si $m > 0$

$$\begin{aligned} a < b &\Leftrightarrow ma < mb \\ &\Leftrightarrow ma + p < mb + p \\ &\Leftrightarrow f(a) < f(b) \end{aligned}$$

donc f est strictement croissante.

Si $m < 0$

$$\begin{aligned} a < b &\Leftrightarrow ma > mb \\ &\Leftrightarrow ma + p > mb + p \\ &\Leftrightarrow f(a) > f(b) \end{aligned}$$

donc f est strictement décroissante.

Enfin, si $m = 0$, $f(a) = f(b) = p$. ◊

Propriété 6.4. *Soit $f : x \mapsto mx + p$ une fonction affine avec $m \neq 0$. Alors :*

1. *$f(x) = 0$ pour $x_0 = -\frac{p}{m}$ et*
2. *Le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x est donné par le tableau suivant :*
   - *Si $m > 0$*

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

   - *Si $m < 0$*

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

Preuve. 1.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow mx + p = 0 \\ &\Leftrightarrow mx = -p \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{p}{m} \text{ car } m \neq 0 \end{aligned}$$

2. • Si $m > 0$ alors f croissante donc
$x < x_0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f(x) < 0$ donc $f(x)$ négatif et
$x > x_0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0$ donc $f(x)$ positif.
• Si $m < 0$ alors f décroissante donc
$x < x_0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0$ donc $f(x)$ positif et
$x > x_0 \Leftrightarrow f(x) < f(x_0) \Leftrightarrow f(x) < 0$ donc $f(x)$ négatif.

♢

6.3 Exercices

EXERCICE 6.1.
Voici les tarifs pratiqués par deux agences de location de voitures pour des véhicules identiques (tarifs journaliers, assurance comprise) :

- agence A : Forfait de 50 € plus 0,42 € par km ;
- agence B : Forfait de 40 € plus 0,50 € par km.

1. Quelle est l'agence la plus économique selon que l'on désire faire un parcours de
   - 50 km ?
   - 150 km ?
   - 300 km ?
2. On appelle x la distance que l'on désire parcourir. Déterminer selon les valeurs de x l'agence la plus économique.
3. Écrire un algorithme prenant comme argument la distance à parcourir et indiquant quelle agence est la plus intéressante pour cette distance ainsi que le tarif à payer.

EXERCICE 6.2.
Les tarifs mensuels d'un abonnement pour un téléphone mobile sont les suivants : Forfait d'une heure 15 € plus 0,30 € par minute supplémentaire.

1. Compléter le tableau suivant, où la durée est la durée totale des communications du mois en minute et le coût est le montant final de la facture en euros :

Durée	45	80	120
Coût			

2. Existe-t-il une fonction affine f qui à une durée de communication x associe le coût $f(x)$?

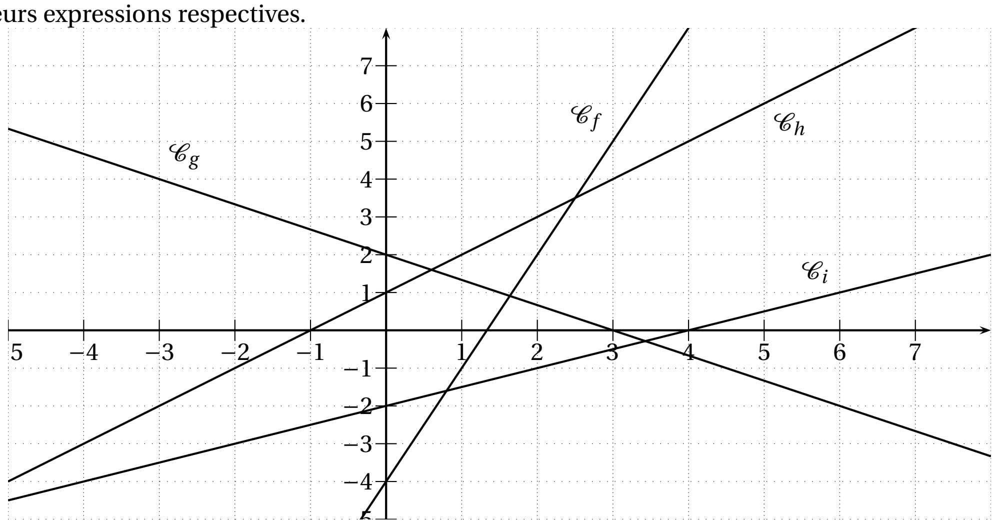
EXERCICE 6.3.
Soit f une fonction affine. Déterminer l'expression de f dans chacun des cas suivants :

1. $f(1) = 2$ et $f(4) = 8$
2. $f(-1) = 4$ et $f(2) = 3$
3. $f(5) = -1$ et $f(3) = 3$
4. $f(-4) = 5$ et $f(1) = 7$

EXERCICE 6.4.
Représenter dans un même repère les courbes des fonctions affines suivantes :

- $f(x) = 2x - 3$;
- $g(x) = 2x + 1$;
- $h(x) = \frac{1}{3}x + 3$;
- $i(x) = -x + 4$;
- $j(x) = -\frac{3}{4}x + 5$;
- $k(x) = -3x + 5$.

EXERCICE 6.5.
Dans le repère ci-dessous on a représenté les courbes de quatre fonctions affines f, g, h et i.
Déterminer leurs expressions respectives.



EXERCICE 6.6.
Le plan est muni d'un repère.

1. Soient A, B, C et D les points de coordonnées respectives $(0;1)$, $(2;2)$, $(4;3)$ et $(-1;0,5)$.
   (a) Déterminer l'expression de la fonction affine f dont la représentation graphique passe par A et B.
   (b) À l'aide de cette expression, déterminer si C appartient à la courbe de f.
   Que peut-on en déduire pour les points A, B et C ?
   (c) À l'aide de cette expression, déterminer si D appartient à la courbe de f.
   Que peut-on en déduire pour les points A, B et D ?
2. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les points A, B et C sont alignés :
   - $A(-1;0)$, $B(0;2)$ et $C(2;6)$;
   - $A(2;-1)$, $B(-1;1)$ et $C(3;4)$.

EXERCICE 6.7.
On donne $P(x) = (2x+1)(-x+2)$.

1. (a) Étudier le signe de $2x+1$ selon les valeurs de x.
   (b) Étudier le signe de $-x+2$ selon les valeurs de x.
   (c) En déduire le signe de $P(x)$ selon les valeurs de x. *On pourra étudier le signe de chacun des facteurs et faire un tableau de signes.*
   (d) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) < 0$.
2. (a) En vous inspirant du 1, étudier le signe, selon les valeurs de x, de chacune des fonctions suivantes :
   - $Q(x) = (-2x+1)(-3x+4)$;
   - $R(x) = (-x+4)(5-2x)$;
   - $S(x) = (2x+3)(x-1)$;
   - $T(x) = (x-1)(-2x+4)(2x-1)$;
   - $U(x) = (4-x)(x+1)(2x+2)$.

   (b) Résoudre les inéquations suivantes :
   - $Q(x) \leqslant 0$;
   - $R(x) > 0$;
   - $S(x) \geqslant 0$;
   - $T(x) < 0$;
   - $U(x) \leqslant 0$.

EXERCICE 6.8.
Résoudre l'inéquation : $\frac{3-x}{2x-1} \leqslant 0$
On pourra étudier le signe de chacun des facteurs et faire un tableau de signes.

EXERCICE 6.9.
Après avoir précisé les éventuelles valeurs interdites, résoudre les inéquations suivantes :

1. $x^2(1-x) \leqslant 0$
2. $(x-2)(\pi - x)(3x+5) > 0$
3. $\frac{(1+x)^2(5-x)}{1-2x} \leqslant 0$
4. $\frac{4-x}{8-x} \geqslant \frac{1-3x}{2+x}$

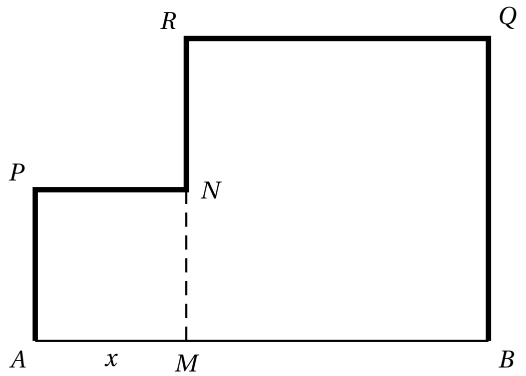
EXERCICE 6.10.
On donne $f(x) = (3x+4)(x-4) - (2x-3)(3x+4)$.
Résoudre $f(x) > 0$.
On pourra commencer par factoriser.

EXERCICE 6.11.
Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x \leqslant x^2$
2. $\frac{1}{x} \leqslant x$
3. $x^3 \leqslant x^2$

6.4 Problèmes

PROBLÈME 6.1.
On donne $AB = 6$ cm. M est un point du segment $[AB]$ et on pose $AM = x$.
Dans le même demi-plan, on construit les carrés $AMNP$ et $MBQR$.
f est la fonction définie sur $[0;6]$ qui à x associe la longueur $f(x)$ de la ligne polygonale $APNRQB$ (tracée en gras sur la figure ci-dessous).
Notez que la figure a été faite dans le cas où x est compris entre 0 et 3.



1. Faites une deuxième figure dans le cas où x est dans l'intervalle $[3;6]$.
2. Vérifiez que $f(x) = 18 - 2x$, si $x \in [0;3]$ et que $f(x) = 6 + 2x$, si $x \in [3;6]$.
3. Dans un repère orthogonal (unités : 1 cm sur les abscisses, 0,5 cm sur les ordonnées), construisez la courbe représentatice de f.
4. Trouvez graphiquement l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la longueur de la ligne polygonale est comprise entre 14 et 16 cm.

PROBLÈME 6.2 (Comparaison de tarifs)**.**
Le tableau ci-dessous présente un extrait des tarifs des forfaits non bloqués pour téléphones portables, proposés par une société de téléphonie fictive.

Forfait	Min comprises dans le forfait	Coût du forfait (en €)	Par min de dépassement (en €)
1	90	33	0,30
2	180	43	0,25
3	300	57	0,18

Pour les forfaits 1, 2 et 3 on désigne, respectivement, par $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ le prix à payer en euros pour une durée totale de communications de x minutes.

1. (a) Exprimer $f_1(x)$ en fonction de x lorsque $0 \leqslant x \leqslant 90$ puis lorsque $x > 90$.
   (b) Dans un repère orthogonal, représenter graphquement la fonction f_1 pour x compris entre 0 et 400.
2. Exprimer $f_2(x)$ et $f_3(x)$ en fonction de x et représenter sur le graphique précédent ces deux fonctions.
3. Lire sur le graphique quel est le tarif le plus avantageurx en fonction de la durée mensuelle des communications.
4. Écrire un algorithme prenant comme argument une durée de communication et indiquant quel forfait est le plus avantageux pour cette durée ainsi que le prix total à payer.

Devoir surveillé n°7

Fonctions affines

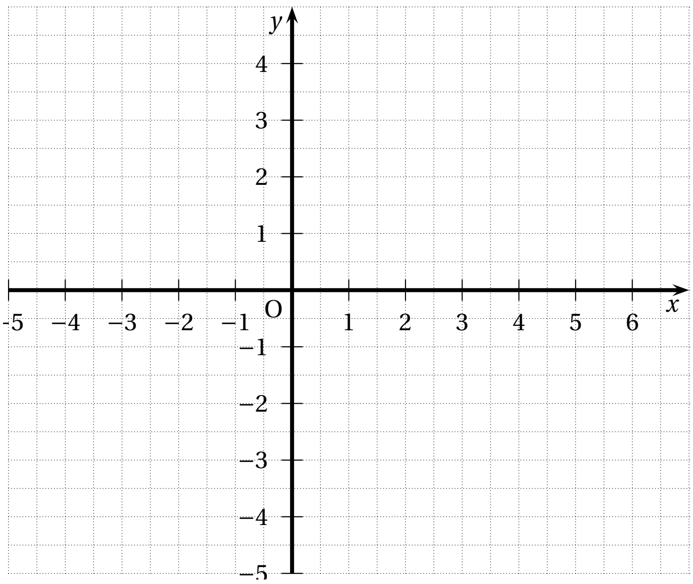
EXERCICE 7.1 (4 points)**.**
Soient f et g deux fonctions affines définies pour tout x.

1. On sait que $f(0) = -2$ et $f(3) = 1$.
   Déterminer l'expression de $f(x)$.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. On sait que $g(2) = 0$ et $g(4) = -1$.
   Déterminer l'expression de $g(x)$.
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

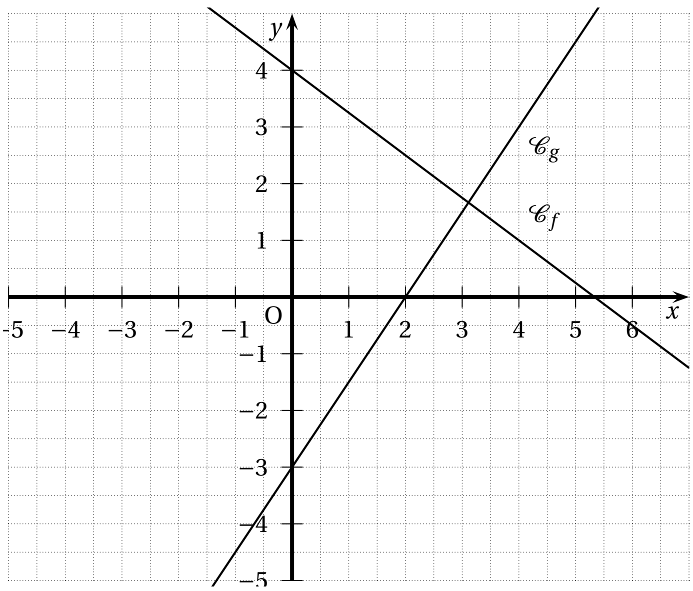
EXERCICE 7.2 (4,5 points)**.**
Représenter dans le repère ci-contre les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ des fonctions affines suivantes, définies pour tout x :

- $f(x) = 2x - 1$;
- $g(x) = \frac{2}{3}x + 1$;
- $h(x) = -x + 3$.



EXERCICE 7.3 (3 points)**.**
On donne dans le repère ci-contre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentant des fonctions affines f et g, définies pour tout x.
Compléter, <u>sans justifier</u> :

- $f(x) =$ ....
- $g(x) =$ ....



EXERCICE 7.4 (3,5 points)**.**
On donne $P(x) = -2x^2 + 9x - 4$ pour tout x.

1. Montrer que $P(x) = (2x-1)(-x+4)$.

2. Étudier le signe de $P(x)$ selon les valeurs de x.

3. En déduire l'ensemble S des solutions de l'inéquation : $P(x) > 0$.

EXERCICE 7.5 (2,5 points)**.**
Résoudre l'inéquation :

$$\frac{2x+4}{-3x+1} \leqslant 0$$

EXERCICE 7.6 (2,5 points)**.**
Résoudre l'inéquation :

$$x^3 > x$$

Chapitre 7

Configurations du plan

Sommaire

Ce chapitre est essentiellement constitué de rappels de définitions et propriétés de géométrie vues au collège.

7.1 Théorèmes

Théorème 7.1 (Pythagore). *Soit ABC un triangle.*
Si . . . .
alors . . . .

Théorème 7.2 (Contraposée de Pythagore). *Soit ABC un triangle.*
Si . . . .
alors . . . .

Théorème 7.3 (Réciproque de Pythagore). *Soit ABC un triangle.*
Si . . . .
alors . . . .

Théorème 7.4 (Contraposée de la réciproque de Pythagore). *Soit ABC un triangle.*
Si . . . .
alors . . . .

Soit ABC un triangle et deux points D et E appartenant respectivement à (AB) et à (AC). Nous dirons que ces points sont dans une configurationde Thalès.

Théorème 7.5 (Thalès). *Soit une configuration de Thalès.*
Si . . . .
alors . . . .

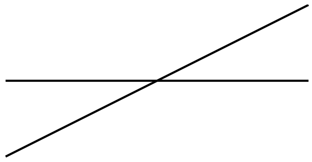
Théorème 7.6 (Contraposée de Thalès). *Soit une configuration de Thalès.*
Si . . . .
alors . . . .

Théorème 7.7 (Réciproque de Thalès). *Soit une configuration de Thalès.*
Si . . . .
alors . . . .

Théorème 7.8 (Contraposée de la réciproque de Thalès). *Soit une configuration de Thalès.*
Si . . . .
alors . . . .

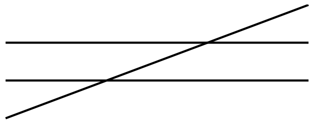
7.2 Angles

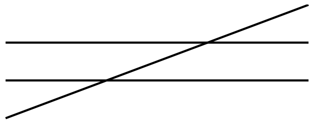
Définition 7.1. Deux droites sécantes définissent des angles opposés par le sommet.



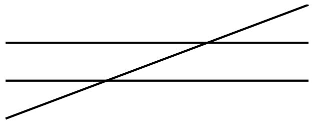
Propriété 7.9. *Deux angles opposés par le sommet sont* ....

Définition 7.2. Deux droites interceptées par une troisième définissent :
- des angles alternes internes ;
- des angles alternes externes ;
- des angles correspondants.



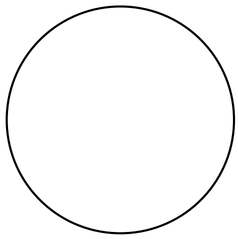


Propriété 7.10. *Les deux droites sont parallèles si et seulement si :*
- *les angles alternes internes* .... *ou*
- *les angles alternes externes* .... *ou*
- *les angles correspondants* ....



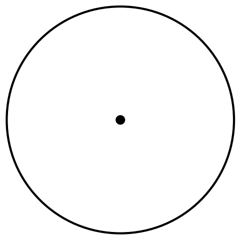
Propriété 7.11. *La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à* ....

Définition 7.3. Soient α et β deux angles dont les sommets sont sur un cercle. On dit que ces angles sont inscrits dans le cercle.



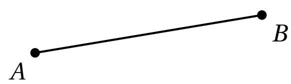
Propriété 7.12. *Si deux angles inscrits dans un cercle interceptent le même arc, alors* ....

Propriété 7.13. *Soit α un angle inscrit dans un cercle et β l'angle au centre interceptant le même arc.*
Alors ....



7.3 Droites remarquables

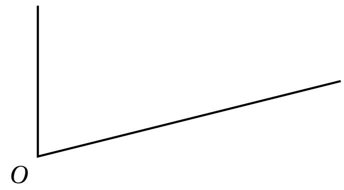
Définition 7.4. Soit A et B deux points distincts. La médiatrice du segment $[AB]$ est la droite :
- ....
- ....



Propriété 7.14 (caractéristique)**.** *M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ si et seulement si* ....

Définition 7.5. La bissectrice d'un angle est la demi-droite :
- ....
- ....

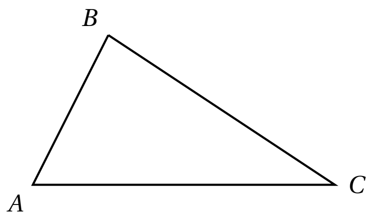
Propriété 7.15 (caractéristique)**.** *M appartient à la bissectrice si et seulement si* ....
....



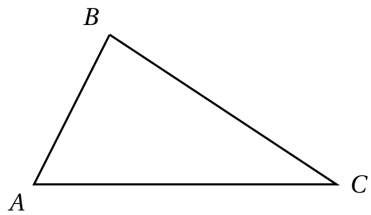
7.4 Triangles

7.4.1 Droites remarquables d'un triangle

Propriété 7.16. *Les médiatrices des côtés d'un triangle sont* ....
Ce point est ....

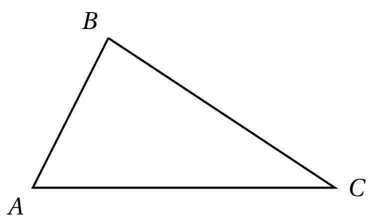


Propriété 7.17. *Les bissectrices des angles d'un triangle sont* ....
Ce point est ....



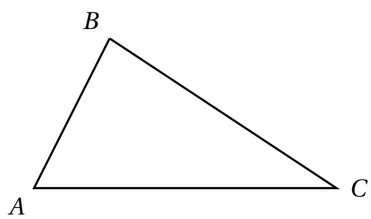
Définition 7.6. Soit ABC un triangle. La médiane issue de A est la droite :
- ....
- ....

Propriété 7.18. *Les médianes d'un triangle sont* ....
Leur intersection est appelée ....
Ce point est ....



Définition 7.7. Soit ABC un triangle. La hauteur issue de A est la droite :
- ....
- ....

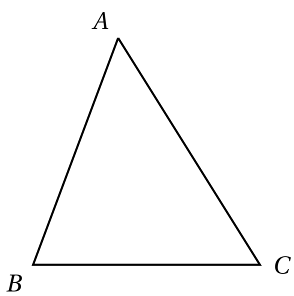
Propriété 7.19. *Les hauteurs d'un triangle sont* ....
Leur intersection est appelée ....



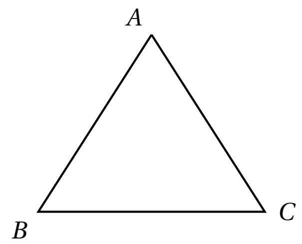
7.4.2 Triangles particuliers

Définition 7.8. Un triangle ABC est isocèle en A si ....

Propriété 7.20 (Propriétés caractéristiques)**.** *Un triangle ABC est isocèle en A si et seulement si :*
- ....
- ....

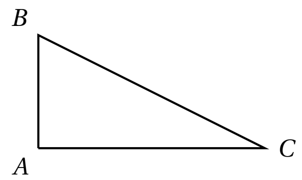


Définition 7.9. Un triangle ABC est équilatéral
si ....



Propriété 7.21 (Propriétés caractéristiques)**.** *Un triangle ABC est équilatéral si et seulement si :*
- ....
- ....
- ....
- ....

Définition 7.10. Un triangle ABC est rectangle en A
si ....
Le côté opposé à l'angle droit est appelé ....



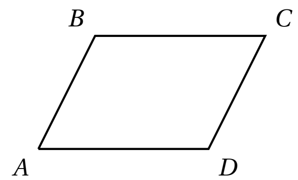
Propriété 7.22 (Propriétés caractéristiques)**.** *Un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si :*
- ....
- ....

Propriété 7.23 (Trigonométrie)**.** *Dans un triangle rectangle, où α est l'un des angles qui n'est pas droit, on a :*

- $\sin\alpha = \dfrac{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots}$
- $\cos\alpha = \dfrac{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots}$
- $\tan\alpha = \dfrac{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots}$

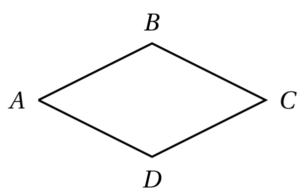
7.5 Quadrilatères particuliers

Définition 7.11. Un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme
si ....



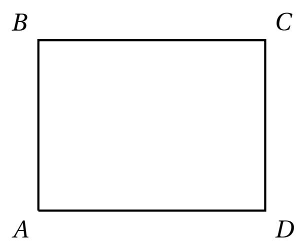
Propriété 7.24 (Propriétés caractéristiques)**.** *Un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si :*
- ....
- ....
- ....
- ....

Définition 7.12. Un quadrilatère $ABCD$ est un losange
si ....



Propriété 7.25 (Propriétés caractéristiques)**.** *Un quadrilatère $ABCD$ est un losange si et seulement si :*
- ....
- ....

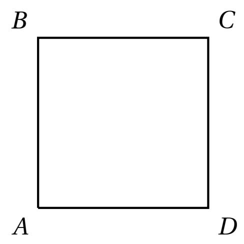
Définition 7.13. Un quadrilatère $ABCD$ est un rectangle
si ....



Propriété 7.26 (Propriétés caractéristiques)**.** *Un quadrilatère $ABCD$ est un rectangle si et seulement si :*
- ....
- ....
- ....
- ....

Définition 7.14. Un quadrilatère $ABCD$ est un carré si ....

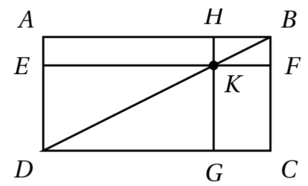
Propriété 7.27 (Propriétés caractéristiques)**.** *Un quadrilatère $ABCD$ est un carré si et seulement si :*
- ....



7.6 Exercices

Pour tous les exercices, même si cela n'est pas demandé, dans le cas où la figure n'est pas fournie, commencer par faire une figure, si possible avec le logiciel Geogebra, sinon sur votre feuille.

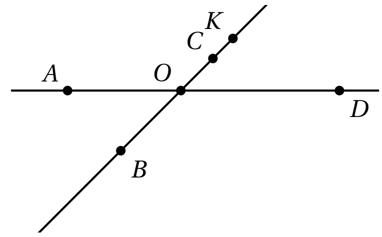
EXERCICE 7.1.
$ABCD$ est un rectangle de diagonale $[BD]$. K est un point quelconque de cette diagonale. Par le point K on trace les parallèles aux côtés du rectangle comme indiqué sur la figure ci-contre.



1. (a) Montrer que les triangles ABD et DCB ont la même aire.
   (b) Montrer que les triangles BHK et BFK ont la même aire.
   (c) Montrer que les triangles DEK et DGK ont la même aire.
2. En déduire que les rectangles $AEKH$ et $CFKG$ ont la même aire.

On rencontre cette démonstration dans le traité « Éléments » d'Euclide.

EXERCICE 7.2.
On considère la figure suivante où, l'unité étant le millimètre, on a : $OA = 20$; $OD = 28$; $OB = 15$; $OK = 13$ et $KC = 8$.
L est le point de (AD) tel que les droites (KL) et (AB) sont parallèles.



1. Construire L
2. Calculer OL en justifiant les étapes.
3. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ? Justifier.

EXERCICE 7.3.
Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon r et deux diamètres perpendiculaires $[AB]$ et $[DE]$.

1. Quelle est la nature du quadrilatère $AEBD$? Justifier.
2. Soit $\mathscr{C}'$ le cercle de centre O inscrit dans le quadrilatère $AEBD$.
   (a) Exprimer r', le rayon du cercle $\mathscr{C}'$ en fonction de r.
   (b) Exprimer l'aire de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{C}'$ en fonction de r.
   (c) En déduire que l'aire de la couronne comprise entre les deux cercles et la même que l'aire de $\mathscr{C}'$.

EXERCICE 7.4.
$ABCD$ est un carré de 8 cm de côté. E est le point de la demi-droite $[AB)$ tel que $BE = 13$ cm et F est le point de la demi-droite $[AD)$ tel que $DF = 5$ cm.

1. Faire une figure.
2. Que peut-on conjecturer pour les points E, C et F ?
3. Essayer de le démontrer.

EXERCICE 7.5.
ABC est un triangle équilatéral de 12 cm de côté. M est un point quelconque à l'intérieur de ce triangle. I, J et K sont les pieds des perpendiculaires à, respectivement, $[BC]$, $[AB]$ et $[AC]$, passant par M.

1. (a) Faire deux figures avec des poisitions de M différentes.
   (b) Dans les deux cas, estimer la valeur de $MI + MJ + MK$.
   (c) Que peut-on conjecturer ?
2. (a) Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de sa hauteur h.
   (b) Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction des aires des triangles ABM, ACM et BCM.
   (c) En déduire la valeur de $MI + MJ + MK$.

EXERCICE 7.6.
Dans le triangle ABC, H est le pied de la hauteur issue de B, K est le pied de la hauteur issue de C, A' est le milieu de $[BC]$.

1. Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle BKC ? Justifier.
2. En déduire que A' appartient à la médiatrice de $[KH]$.

EXERCICE 7.7.
Soit ABC un triangle isocèle en A, D le symétrique de B par rapport à A et H le pied de la hauteur issue de A.

1. Quelle est la nature du triangle BCD ? Justifier.
2. La médiatrice de $[CD]$ passe-t-elle par A ? Justifier.

EXERCICE 7.8.
Soit ABC un triangle quelconque. D et E sont les symétriques de B par rapport à C et à A, F est le milieu de $[DE]$. Les droites (CE) et (AD) sont sécantes en G.

1. Les droites (AC) et (ED) sont-elles parallèles ? Justifier.
2. Les points B, G et F sont-ils alignés ? Justifier.

EXERCICE 7.9.
$ABCD$ est un carré. E, F, G et H sont des points respectivement sur $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ tels que les droites (EG) et (FH) sont perpendiculaires.
La droite (EG) coupe la droite (BC) en I et la droite (FH) coupe la droite (AB) en J.

1. Que représentent les droites (BI) et (JH) par rapport au triangle EIJ ? Justifier.
2. En déduire que les droites (EF) et (IJ) sont perpendiculaires.

EXERCICE 7.10.
Deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ se coupent en A. Soit M un point qui n'appartient pas aux deux droites. La perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par M coupe $\mathscr{D}$ en I et $\mathscr{D}'$ en J. La perpendiculaire à $\mathscr{D}'$ passant par M coupe $\mathscr{D}$ en K et $\mathscr{D}'$ en L.
Montrer que la droite (JK) est perpendiculaire à la droite (AM).

EXERCICE 7.11.
$ABCD$ est un parallélogramme de centre O. Soit E le milieu de $[AB]$. La droite (DE) coupe la droite (AC) en F et la droite (BC) en G.

1. Que représente F pour le triangle ADB ? Justifier.
2. En déduire que $FD = 2FE$.
3. Démontrer l'égalité $FD^2 = FE \times FG$.

EXERCICE 7.12.
$ABCD$ est un parallélogramme. I est le milieu de $[DC]$. (AI) coupe (DB) en K.

1. Que représente K pour le triangle ADC ? Justifier.
2. En déduire que la droite (CK) coupe le segment $[AD]$ en son milieu.

EXERCICE 7.13.
ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 3$ cm et $BC = 6$ cm.

1. Calculer AC.
2. Soit E le symétrique de B par rapport à A.
   Quelle est la nature du triangle BCE ? Justifier.
3. Soit F le symétrique de E par rapport à (BC).
   Quelle est la nature du quadrilatère $BECF$? Justifier.
4. Les droites (AF) et (EC) sont sécantes en N.
   Le point A est-il le milieu de $[NF]$? Justifier.

EXERCICE 7.14.
Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O. A et B sont deux points du cercle. Les tangentes en A et en B au cercle $\mathscr{C}$ se coupent en M.

1. Que représente le point I, milieu du segment $[OM]$ pour le triangle MAB ? Justifier.
2. Soit H le symétrique de O par rapport à la droite (AB). Que représente H pour le triangle MAB ? Justifier.

EXERCICE 7.15.
Soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de A.
On sait que :
- $H \in [BC]$;
- $AB = 12$ cm ;
- $AC = 9$ cm ;
- $AH = 7{,}2$ cm.

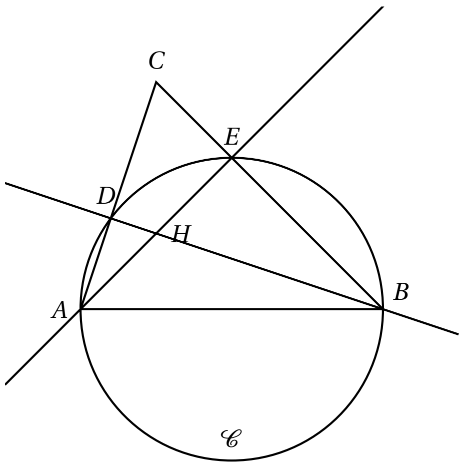
Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

Devoir surveillé n°8

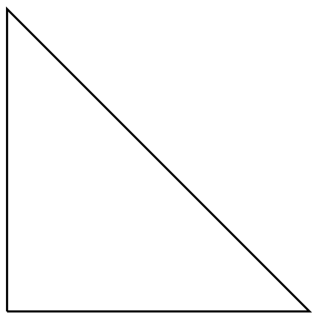
Configurations du plan

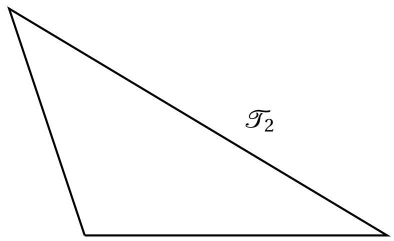
EXERCICE 8.1 (7 points)**.**
ABC est un triangle quelconque dont tous les angles sont aigus.
On a construit le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$, qui coupe le segment $[AC]$ en D et le segment $[BC]$ en E.
Les droites (BD) et (AE) se coupent en H.

1. (a) Montrer que la droite (AE) est une hauteur du triangle ABC.
   (b) Montrer que la droite (BD) est une hauteur du triangle ABC.
   (c) Que représente H pour le triangle ABC ? Justifier.
   (d) Que peut-on alors dire de la droite (CH) ?
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   On peut arriver, en s'inspirant de la construction précédente, à construire, sans équerre, l'intersection des hauteurs dans un triangle rectangle, comme le triangle $\mathscr{T}_1$ ci-dessous, ou dans un triangle présentant un angle obtus, comme le triangle $\mathscr{T}_2$ ci-dessous.
   Faire ces constructions sur les triangles $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$. *On décrira brièvement sa construction sur la copie et on laissera bien visibles les traits de construction.*

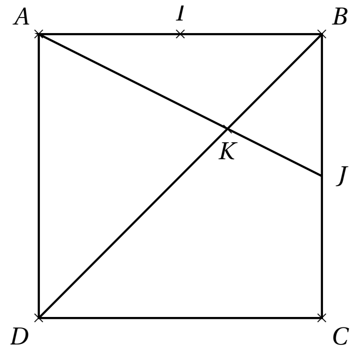


$\mathscr{T}_1$





EXERCICE 8.2 (6 points)**.**



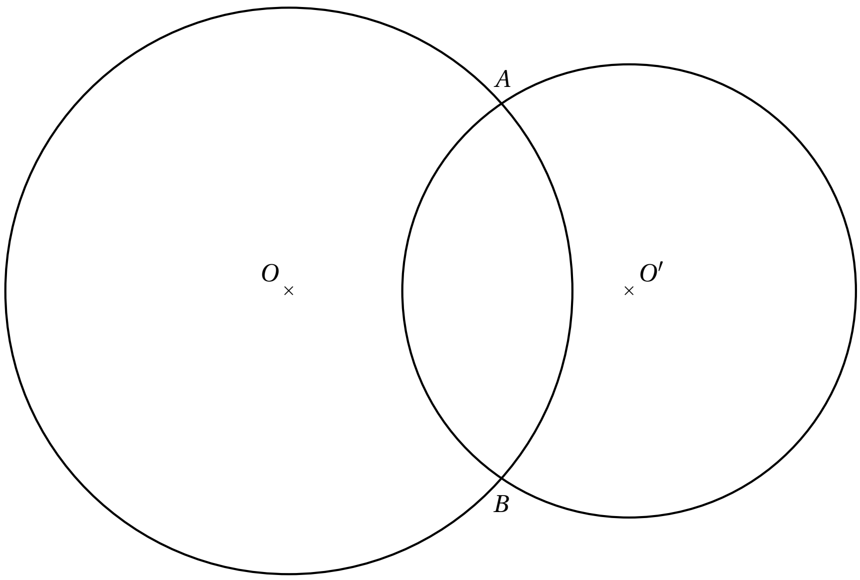
$ABCD$ est un carré. I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[BC]$. La droite (AJ) coupe la diagonale $[DB]$ en K.

1. Que représente la droite (AJ) pour le triangle ABC ? Justifier.
2. Que représente la droite (BD) pour le triangle ABC ? Justifier.
3. Que représente le point K pour le triangle ABC ? Justifier.
4. En déduire que les points I, K et C sont alignés.
5. On donne $AB = 5$ cm. Calculer la valeur exacte de la longueur AK.

EXERCICE 8.3 (7 points)**.**

$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux cercles de centres respectifs O et O' qui se coupent en A et B.
Le point C est le point de $\mathscr{C}$ diamétralement opposé à A.
Le point D est le point de $\mathscr{C}'$ diamétralement opposé à A.

1. Construire les points C et D.
2. Montrer que les points B, C et D sont alignés.
3. Montrer que les droites (OO') et (CD) sont parallèles.
4. On donne $OO' = 6$ cm. Calculer CD.



Chapitre 8

Fonction carrée
Fonctions trinômes

Sommaire

8.1 Activité

ACTIVITÉ 8.1 (Fonction trinôme)**.**
Cette activité nécessite l'utilisation du logiciel Geogebra.
Sur Geogebra, créer trois curseurs nommés a, b et c pouvant varier de -5 à 5 selon des incréments de 0,1 pour a et de 1 pour b et c puis, dans la zone de saisie, créer la fonction $f(x) = a * x^2 + b * x + c$.

1. Donner à a la valeur 0. Qu'observe-t-on ?
   Pour toute la suite on prendra $a \neq 0$.
2. Donner à a la valeur 1 et à b et c la valeur 0.
   (a) De quelle nature est la courbe obtenue ?
   (b) Indiquer l'abscisse de son sommet et ses éléments de symétrie.
   (c) Donner l'expression de $f(x)$.
   (d) Par lecture graphique, dresser le tableau des variations de f.
3. Donner à b et c la valeur 0 et faire varier a.
   (a) Quel semble être le « rôle » de a ?
   (b) Dans quel cas le tableau de variations de f est-il identique au précédent et dans quel cas est-il différent ?
4. Donner à a la valeur 1, à b la valeur 0 et faire varier c.
   (a) Quel semble être le « rôle » de c ?
   (b) Que peut-on dire de l'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées ?
   (c) Démontrer par le calcul que toute fonction de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ coupe l'axe des ordonnées en un point dont les coordonnées ne dépendent que de c.
5. On notera x_0 l'abscisse du sommet de la courbe.
   (a) Donner à a la valeur 1, à c la valeur 0 et faire varier b.
   Compléter le tableau suivant :

b	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x_0											

   (b) Donner à a la valeur 2, à c la valeur 0 et faire varier b.
   Compléter le tableau suivant :

b	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x_0											

(c) Donner à a la valeur $-0,5$, à c la valeur 0 et faire varier b.
Compléter le tableau suivant :

b	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
x_0											

(d) Faire varier c. Cela influence-t-il x_0 ?

(e) Conjecturer l'expression de x_0 en fonction de a et b.
Que peut-on dire des éléments de symétrie de la courbe dans tous les cas ?

6. Régler le curseur b pour que son incrément soit maintenant de 0,1.
On admettra qu'un projectile lancé en l'air suit une trajectoire parfaitement parabolique.
Un projectile est lancé depuis une colline depuis une altitude de 400 m symbolisée par le point $A(0; 4)$. Il doit atteindre une cible située à 1 000 m à l'altitude 0, symbolisée par le point $B(10; 0)$. Pour des raisons de sécurité, son altitude maximum ne doit pas dépasser 800 m.
Déterminer des valeurs de a, b et c permettant d'obtenir une courbe symbolisant la trajectoire de ce projectile et satisfaisant toutes ces conditions.

ACTIVITÉ 8.2 (Forme canonique)**.**
Cette activité nécessite l'utilisation du logiciel Geogebra.
Sur Geogebra, créer trois curseurs nommés α, β et γ pouvant varier de -5 à 5 selon des incréments de 0,5 puis, dans la zone de saisie, créer la fonction $f(x) = \alpha * (x-\beta)^2 + \gamma$.

1. (a) Dans la zone de saisie, créer la fonction $g(x) = 2x^2 - 2x + 4$.
   (b) Déterminer les valeurs de α, β et γ telles que la courbe de f et celle de g soient confondues.
   (c) Vérifier par le calcul que les deux fonctions sont bien égales.
   (d) Noter l'abscisse du sommet de la courbe.
   (e) Par le calcul, déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $g(x) = 0$.
   Comment cela se traduit-il graphiquement ?
2. Mêmes questions avec $g(x) = -1,5x^2 - 6x - 4,5$.
3. Mêmes questions avec $g(x) = -0,5x^2 - 2x - 1,5$.
4. (a) Conjecturer quelles doivent être les valeurs de α et de β.
   (b) **Par le calcul**, en utilisant la conjecture précédente, déterminer les valeurs de α, β et γ pour que la fonction f soit égale à la fonction $g(x) = 2x^2 - 4x - 1$.
   (c) Déduire les valeurs exactes des coordonnées des points d'intersection de la courbe de g avec l'axe des abscisses.
   Vérifier si vos résultats coïncident avec la courbe de la fonction sur Geogebra.

8.2 Fonction carrée

Définition 8.1. On appelle *fonction carrée* la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$.

Sa courbe représentative est une *parabole* qui possède l'origine du repère comme *sommet* et l'axe des ordonnées comme *axe de symétrie*.

Propriété 8.1. *La fonction carrée est strictement décroissante pour* $x \in]-\infty; 0]$ *et strictement croissante pour* $x \in [0; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^2$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Preuve. Rappelons qu'une fonction f est dite :
- strictement croissante sur un intervalle I si, pour tous a et b de cet intervalle, $a < b$ implique que $f(a) < f(b)$ (on dit qu'elle conserve l'ordre) ;
- strictement décroissante sur un intervalle I si, pour tous a et b de cet intervalle, $a < b$ implique que $f(a) > f(b)$ (on dit qu'elle inverse l'ordre).

Montrons que la fonction carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
Soit $0 \leqslant a < b$. Pour savoir si $a^2 < b^2$, nous allons étudier le signe de $a^2 - b^2$.
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.
Comme a et b sont tous deux positifs, $a+b$ est aussi positif.
Comme $a < b$ alors $a - b < 0$, donc négatif.
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ est donc négatif.
$a^2 - b^2 < 0 \Leftrightarrow a^2 < b^2$.
La fonction carrée est donc strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
Montrons que la fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$.
Soit $a < b \leqslant 0$. Pour savoir si $a^2 > b^2$, nous allons étudier le signe de $a^2 - b^2$.
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.
Comme a et b sont tous deux négatifs, $a+b$ est aussi négatif.
Comme $a < b$ alors $a - b < 0$, donc négatif.
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ est donc positif.
$a^2 - b^2 > 0 \Leftrightarrow a^2 > b^2$.
La fonction carrée est donc strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$. ♢

De la propriété précédente, on en déduit immédiatement :

Propriété 8.2. *Si a et b positifs tels que $a < b$, alors $a^2 < b^2$.*
Si a et b négatifs tels que $a < b$, alors $a^2 > b^2$.

8.3 Fonctions trinômes

Définition 8.2. Toute fonction pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2+bx+c$ où $a \neq 0$ est appelée *fonction trinôme.*

Sa courbe est une parabole admettant le point d'abscisse $-\frac{b}{2a}$ comme sommet et la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par ce sommet comme axe de symétrie.

Propriété 8.3. *Toute fonction trinôme peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$ où $\alpha = -\frac{b}{2a}$. Cette forme s'appelle la* forme canonique *du trinôme.*

On l'admettra.

Propriété 8.4. *Soit $f(x) = ax^2+bx+c$ une fonction trinôme. Alors f a les variations résumées dans les tableaux ci-dessous :*

- *Si $a > 0$:*

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘		↗ $+\infty$

- *Si $a < 0$:*

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗		↘ $-\infty$

Preuve. Montrons que dans le cas où $a > 0$, la fonction est croissante sur $\left[-\frac{b}{2a}\,;+\infty\right[$.
Écrite sous forme canonique la fonction trinôme devient $f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\beta$.
Soient x_1 et x_2 tels que $-\frac{b}{2a} \leqslant x_1 < x_2$:

$$\begin{aligned}
-\frac{b}{2a} \leqslant x_1 < x_2 &\Leftrightarrow 0 \leqslant x_1 + \frac{b}{2a} < x_2 + \frac{b}{2a} \\
&\Leftrightarrow 0 \leqslant \left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2 < \left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2 \text{ car les nombres élevés au carré sont positifs} \\
&\Leftrightarrow 0 \leqslant a\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2 < a\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2 \text{ car } a>0 \\
&\Leftrightarrow \beta \leqslant a\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2+\beta < a\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2+\beta \\
&\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)
\end{aligned}$$

La fonction est donc croissante sur $\left[-\frac{b}{2a}\,;+\infty\right[$.
Montrons que dans le cas où $a<0$, la fonction est croissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{b}{2a}\right[$.
Écrite sous forme canonique la fonction trinôme devient $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\beta$.
Soient x_1 et x_2 tels que $x_1<x_2\leqslant-\frac{b}{2a}$:

$$\begin{aligned}
x_1<x_2\leqslant-\frac{b}{2a} &\Leftrightarrow x_1+\frac{b}{2a}<x_2+\frac{b}{2a}\leqslant 0\\
&\Leftrightarrow \left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2>\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2\geqslant 0 \text{ car les nombres élevés au carré sont négatifs}\\
&\Leftrightarrow a\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2<a\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2\leqslant 0 \text{ car } a<0\\
&\Leftrightarrow a\left(x_1+\frac{b}{2a}\right)^2+\beta<a\left(x_2+\frac{b}{2a}\right)^2+\beta\leqslant\beta\\
&\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)
\end{aligned}$$

La fonction est donc croissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{b}{2a}\right[$.
Les autres cas se démontrent de la même manière. ◊

8.4 Exercices

8.4.1 Fonction carrée

EXERCICE 8.1.
En s'aidant éventuellement de la courbe de la fonction carrée ou de son tableau de variation, compléter :

1. Si $x>3$ alors x^2 ....
2. Si $x<-\sqrt{2}$ alors x^2 ....
3. Si $x>2$ alors x^2 ....
4. Si $x<-3$ alors x^2 ....
5. Si $x<4$ alors x^2 ....
6. Si $x>-10$ alors x^2 ....
7. Si $x<1$ alors x^2 ....
8. Si $x>-5$ alors x^2 ....

EXERCICE 8.2.
1. On pose : $-7\leqslant x\leqslant 5\sqrt{2}$.
   Compléter :
   (a) Si $-7\leqslant x\leqslant 0$ alors x^2 ....
   (b) Si $0\leqslant x\leqslant 5\sqrt{2}$ alors x^2 ....
   (c) Donc si $-7\leqslant x\leqslant 5\sqrt{2}$ alors ......$\leqslant x^2\leqslant$ ......
2. Compléter de la même manière :
   (a) Si $-3\leqslant x\leqslant 1$ alors ....$\leqslant x^2\leqslant$ ....
   (b) Si $-2\leqslant x\leqslant 3$ alors ....$\leqslant x^2\leqslant$ ....
   (c) Si $-3\leqslant x\leqslant 3$ alors ....$\leqslant x^2\leqslant$ ....

EXERCICE 8.3.
Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $x^2=4$;
2. $x^2=5$;
3. $x^2=0$;
4. $x^2=-2$;
5. $x^2<4$;
6. $x^2\geqslant 9$;
7. $x^2>-2$;
8. $x^2\leqslant -3$;
9. $4\leqslant x^2\leqslant 9$;
10. $-1\leqslant x^2\leqslant 9$;
11. $0\leqslant x^2\leqslant 8$;
12. $4>x^2>1$.

EXERCICE 8.4.
L'énoncé « si $x\geqslant 2$, alors $x^2\geqslant 4$ » est appelé **une implication**. On dit aussi « $x\geqslant 2$ implique $x^2\geqslant 4$ » ou bien « $x\geqslant 2$ donc $x^2\geqslant 4$ ». On note « $x\geqslant 2\Rightarrow x^2\geqslant 4$ ».

1. L'implication proposée est-elle vraie ? Justifier.
2. Parmi les implications suivantes, indiquer celles qui sont vraies et celles qui sont fausses.
   (a) $x<-1\Rightarrow x^2>1$
   (b) $x^2=4\Rightarrow x=2$
   (c) $x<0\Rightarrow x^2<0$
   (d) $x<\sqrt{3}\Rightarrow x^2<3$
   (e) $x^2=2\Rightarrow x=-\sqrt{2}$ ou $x=\sqrt{2}$
3. Traduisez par une implication les propositions suivantes :
   (a) Un nombre compris entre 0 et 1 est supérieur à son carré.
   (b) Si le nombre x est tel que $-1\leqslant x\leqslant 1$, alors $1-x^2$ est positif.
   (c) Un nombre supérieur à 1 a un carré supérieur à 1.

EXERCICE 8.5.
Les nombres a et b sont positifs.
L'énoncé « $a < b$ équivaut à $a^2 < b^2$ » signifie que $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$ et que $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$. On dit aussi « $a < b$ si et seulement si $a^2 < b^2$.
On note $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.
Parmi les équivalences suivantes, indiquer celles qui sont vraies et celles qui sont fausses.

1. Pour tous réels a et b, $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$
2. Pour tous réels négatifs a et b, $a < b \Leftrightarrow a^2 > b^2$
3. Pour tous réels a et b, $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$
4. $x^2 < 1 \Leftrightarrow x < 1$

8.4.2 Fonctions trinômes

EXERCICE 8.6.
On donne :
- $f(x) = 5-(x+1)^2$;
- $g(x) = (x-1)(2+3x)$;
- $h(x) = (x-1)(2x+1)-(x+1)$.

1. Montrer que les 3 fonctions sont des fonctions trinômes.
2. Dresser leurs tableaux de variation.
3. Indiquer les éléments de symétrie de leurs courbes représentatives.

EXERCICE 8.7.
On donne $f(x) = x^2+2x-1$.

1. Montrer que $f(x) = (x+1)^2-2$.
2. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
3. Dresser son tableau de variation en y faisant apparaître les solutions précédentes.
4. En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

EXERCICE 8.8.
On donne $f(x) = x^2+2x-15$ pour tout x.

1. Montrer que $f(x) = (x-3)(x+5)$.
2. Montrer que $f(x) = (x+1)^2-16$.
3. En utilisant la forme la plus adaptée :
   (a) Résoudre $f(x) = 0$.
   (b) Résoudre $f(x) \geqslant 9$.

EXERCICE 8.9.
On donne $f(x) = x^2+2\sqrt{2}x-6$ pour tout x.

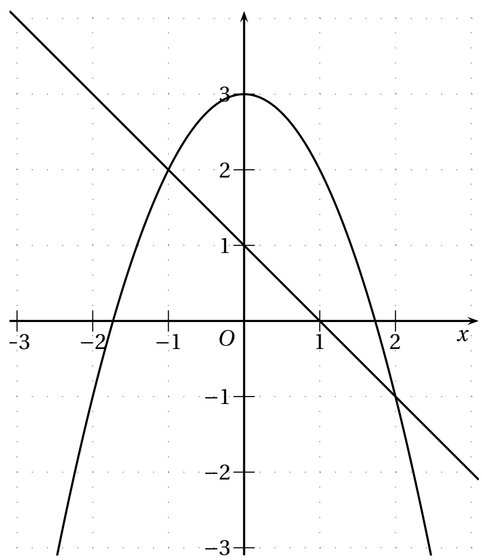
1. Montrer que $f(x) = (x-3\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.
2. Montrer que $f(x) = (x-\sqrt{2})^2-8$.
3. En utilisant la forme la plus adaptée :
   (a) Résoudre $f(x) = 4$.
   (b) Résoudre $f(x) \leqslant 0$.

EXERCICE 8.10.
On donne $f(x) = 2x^2+3x-2$ pour tout x.

1. Montrer que $f(x) = (2x-1)(x+2)$.
2. Montrer que $f(x) = 2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$.
3. En utilisant la forme la plus adaptée :
   (a) Résoudre $f(x) = 0$.
   (b) Résoudre $f(x) \leqslant \frac{11}{8}$.

EXERCICE 8.11.
Sur le graphique ci-dessous sont tracées une droite $\mathscr{D}$ et une parabole $\mathscr{P}$. Cette dernière représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3-x^2$.

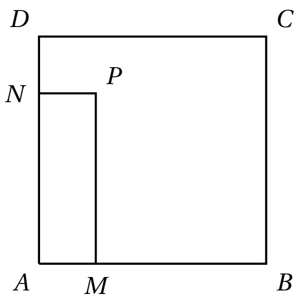
1. (a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   (b) En déduire, graphiquement, le signe de $f(x)$ en fonction de x.
2. (a) Déterminer la fonction affine g représentée par $\mathscr{D}$.
   (b) Résoudre, graphiquement, l'inéquation $f(x) > g(x)$.
3. On désire retrouver par le calcul le résultat précédent.
   (a) Prouver que $f(x) > g(x)$ équivaut à $-x^2+x+2 > 0$.
   (b) Vérifier que $(x+1)(2-x) = -x^2+x+2$.
   (c) Résoudre alors l'inéquation $f(x) > g(x)$.



8.4.3 Problèmes

PROBLÈME 8.1.
$ABCD$ est un carré de côté 4 cm. M est un point de $[AB]$ et N un point de $[AD]$ tel que $AM = DN$. P est le point tel que $AMPN$ est un rectangle.
On cherche à trouver la position de M telle que l'aire du rectangle $AMPN$ soit maximale.
On note $AM = x$ et on appelle $f(x)$ la fonction qui donne l'aire du rectangle $AMPN$ en fonction de x.

1. Sur quel intervalle f est-elle définie ?
2. Donner l'expression de $f(x)$.
3. En déduire la réponse au problème.



PROBLÈME 8.2 (La méthode d'AL-KHAWARIZMI).
Pour déterminer une solution positive de l'équation $x^2 + 10x = 96$, voici comment procédait AL-KHAWARIZMI (mathématicien arabe du IX$^{\text{è}}$ [1]) :

Diviser 10 par 2. Élever ce quotient au carré. Additionner ce carré à 96. Prendre la racine carrée de cette somme. Retrancher à ce résultat le quotient du début.

1. (a) Prouver que l'équation $x^2 + 10x = 96$ équivaut à $(x+5)^2 = 121$.
   (b) En déduire que cet algorithme donne bien une solution positive de cette équation.
2. Trouver en utilisant la même méthode une solution positive de l'équation $x^2 + 8x = 2009$.
3. En admettant que ce procédé donne la seule solution positive pour des équations du type $x^2 + bx = c$ où b et c sont deux nombres positifs, écrire un algorithme qui mette en œuvre cette méthode.

PROBLÈME 8.3.
Ce problème nécessite l'utilisation du logiciel Geogebra.
ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que $AB =$ 4 cm.
I est le milieu du segment $[BC]$ et M un point variable du segment $[AB]$.
On pose $AM = x$ avec $0 \leqslant x \leqslant 4$.
On construit les points N de $[BC]$ et P de $[AC]$ tels que $AMNP$ soit un rectangle.
Le but du problème est de comparer les aires du rectangle $AMNP$ et du triangle ABI.

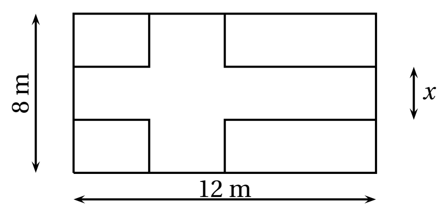
1. (a) Réaliser la figure sur Geogebra.
   (b) Faire afficher la longueur AM, puis les aires du rectangle et du triangle.
2. Déplacer M.
   Quelle semble être l'aire la plus grande ? Pour quelle position de M les deux aires semblent-elles égales ?
3. Prouver la conjecture précédente.

PROBLÈME 8.4.
Ce problème nécessite l'utilisation du logiciel Geogebra.
Dans un repère orthonormal, on donne le point $A(0;1)$ et un point $M(m;0)$, libre sur l'axe des abscisses. La perpendiculaire à (AM) passant par M coupe l'axe (Oy) en N.
P est le point tel que $OMPN$ est un rectangle.
Le but de l'exercice est de chercher sur quelle ligne se trouve P lorsque M décrit l'axe des abscisses.

1. (a) Réaliser la figure sur Geogebra.
   (b) Activer le mode trace pour le point P (propriétés) et déplacer le point M.
   (c) Conjecturer la nature de la coubre décrite par P.
2. (a) Prouver que $\widehat{OMA} = \widehat{ONM}$.
   (b) Calculer $\tan\widehat{OMA}$ et $\tan\widehat{ONM}$ et en déduire que $ON = m^2$.
   (c) Donner les expressions, en fonction de m, des coordonnées de P et en déduire que P est un point de la parabole qu'équation $y = x^2$.

PROBLÈME 8.5.
Un jardinier dispose d'un terrain rectangulaire de 12 m sur 8 m. Il désire le partager en quatre parcelles bordées par deux allées perpendiculaires de même largeur x. Il estime que l'aire des deux allées doit représenter $\frac{1}{6}$ de la superficie de son terrain.
Le but de ce problème est de déterminer la largeur x des allées.

1. Exprimer en fonction de x l'aire des deux allées.
2. (a) Prouver que le problème revient à résoudre l'équation $x^2 - 20x + 16 = 0$.
   (b) Vérifier que $x^2 - 20x + 16 = (x-10)^2 - 84$.
   (c) En déduire x.



PROBLÈME 8.6.
Une entreprise produit de la farine de blé.
On note q le nombre de tonnes de farine fabriquée avec $0 < q < 80$.
On appelle $C(q)$ le coût total de fabrication, $R(q)$ la recette obtenue par la vente et $B(q)$ le bénéfice obtenu par la vente de q tonnes de farine.

1. Sachant que chaque tonne est vendue 120 €, exprimer $R(q)$ en fonction de q.

1. Il est à l'origine du mot « algorithme » (qui n'est autre que son nom latinisé : "algoritmi")

2. Sachant que $C(q) = 2q^2 + 10q + 900$:
   (a) Déterminer l'expression de $B(q)$.
   (b) Montrer que $B(q) = -2(q-10)(q-45)$.
3. Déterminer la quantité de farine à produire pour que la production soit rentable.
4. Déterminer la production correspondant au bénéfice maximal et le montant de ce bénéfice.

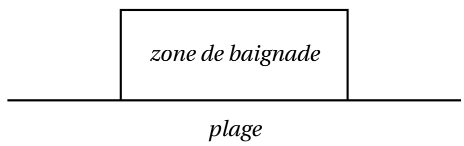
PROBLÈME 8.7.
Le propriétaire d'un cinéma de 1 000 places estime, pour ses calculs, qu'il vend 300 billets à 7 € par séance. Il a constaté qu'à chaque fois qu'il diminue le prix du billet de 0,1 €, il vend 10 billets de plus.
Il engage une campagne de promotion.

1. Il décide de vendre le billet 5 €.
   (a) Combien y aura-t-il de spectateurs pour une séance ?
   (b) Quelle est alors la recette pour une séance ?
2. À quel prix devrait-il vendre le billet pour remplir la salle ? Commenter.
3. Le propriétaire envisage de proposer x réductions de 0,1 €.
   (a) Quel est alors le prix d'un billet en fonction de x ?
   (b) Exprimer en fonction de x la recette, notée $r(x)$, pour une séance et vérifier que $r(x) = -x^2 + 40x + 2100$.
   (c) En déduire la recette maximale, le prix du billet et le nombre de spectateurs à cette séance.

PROBLÈME 8.8.
Une société de livres par correspondance a actuellement 10 000 abonnés qui paient, chacun, 50 € par an. Une étude a montré que chaque fois qu'on augmente d'1 € le prix de l'abonnement annuel, cela entraîne une diminution de 100 abonnés et chaque fois qu'on baisse d'1 € le prix de l'abonnement annuel, cela entraîne une augmentation de 100 abonnés.
On se propose de trouver comment modifier le prix de l'abonnement annuel pour obtenir le maximum de recette.
n désigne la variation du prix de l'abonnement annuel en euros (n est un entier relatif).

1. Exprimer en fonction de n le prix de l'abonnement annuel, et le nombre d'abonnés correspondant.
2. Exprimer en fonction de n la recette annuelle de cette socité, notée $R(n)$.
3. Déterminer la valeur de n pour laquelle $R(n)$ est maximum.
   Quel est alors le montant de l'abonnement annuel, le nombre d'abonnés et la recette totale correspondante ?

PROBLÈME 8.9.
Une zone de baignade rectangulaire est délimitée par une corde (agrémentée de bouées) de longueur 50 m. Quelles doivent être les dimensions de la zone pour que la surface soit maximale ?



Devoir surveillé n°9

Fonction carrée – Fonction trinôme

EXERCICE 9.1 (4 points)**.**
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Dans cet exercice, pour chacune des questions, 3 réponses sont proposées, une seule est correcte. Pour chaque question, cocher la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Chaque bonne réponse rapporte un point, chaque réponse incorrecte retire 0,5 *point, une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point. Si le total des points est négatif la note attribuée à l'exercice est* 0.

1. Si $x > 3$ alors … :

   ❒ … $x^2 > 9$ ❒ … $x^2 < 9$ ❒ … on ne peut rien dire pour x^2.

2. Si $x > -1$ alors … :

   ❒ … $x^2 > 1$ ❒ … $x^2 < 1$ ❒ … on ne peut rien dire pour x^2.

3. Si $x < -4$ alors … :

   ❒ … $x^2 > 16$ ❒ … $x^2 < 16$ ❒ … on ne peut rien dire pour x^2.

4. Si $x < 10$ alors … :

   ❒ … $x^2 > 100$ ❒ … $x^2 < 100$ ❒ … on ne peut rien dire pour x^2.

EXERCICE 9.2 (4 points)**.**
Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $x^2 = 9$

   ....

2. $x^2 = 12$

   ....

3. $x^2 < 5$

   ....

4. $x^2 > 15$

   ....

EXERCICE 9.3 (6 points)**.**
On donne $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ pour tout x.

1. Montrer que $f(x) = (x+3)(2x-1)$.

   ....

2. Montrer que $f(x) = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$.

   ....

3. En utilisant la forme la plus adaptée :
   (a) Résoudre $f(x) = 0$.
   (b) Résoudre $f(x) = -3$.
   (c) Résoudre $f(x) = 2$.

EXERCICE 9.4 (6 points).

Une entreprise produit quotidiennement des balladeurs.
On note q le nombre de balladeurs fabriqués par jour avec $0 < q < 100$.
On appelle $C(q)$ le coût total de fabrication, $R(q)$ la recette obtenue par la vente et $B(q)$ le bénéfice obtenu par la vente de q balladeurs, en euros.
On suppose que toute la production est vendue.

1. Sachant que chaque balladeur est vendu 100 €, exprimer $R(q)$ en fonction de q.
2. Sachant que $C(q) = 3q^2 - 278q + 9720$:
   (a) Montrer $B(q) = -3q^2 + 378q - 9720$.
   (b) Montrer que $B(q) = -3(q-36)(q-90)$.
3. Déterminer la quantité de balladeurs à produire pour que la production soit rentable.
4. Déterminer la production correspondant au bénéfice maximal et le montant de ce bénéfice.

Chapitre 9

Fluctuations d'échantillonage

Sommaire

Rappels :
- *l'effectif d'un résultat est le nombre de fois que ce résultat apparaît ;*
- *la fréquence d'un résultat est l'effectif de ce résultat divisé par l'effectif total.*

9.1 Activité

ACTIVITÉ 9.1 (Simulations de séries de lancers de dés)**.**
L'objectif de cette activité est de produire des séries de 50 lancers de dé à 6 faces et d'observer la distribution des fréquences de chacune des faces.
Pour éviter des lancers de dés qui peuvent être bruyants, on va simuler ces lancers à l'aide de la fonction *random* de la calcultrice.

1. La fonction *random* de la calculatrice permet d'obtenir un nombre aléatoire comportant 10 décimales et compris dans l'intervalle $[0;1[$.
   (a) Faire quelques essais.
   (b) Parfois la calculatrice n'affiche que 9 décimales. Pourquoi ?
   (c) Comment peut-on simuler le lancer d'un dé à 6 faces avec cette fonction ?

   Pour la suite de l'activité, on appelera *lancer de dé* la simulation d'un dé obtenu à la calculatrice.
2. **Par groupe de deux élèves**
   (a) Lancers.
   On notera les résultats dans les tableaux 9.1 page suivante.
   - l'un lance un dé 50 fois, l'autre note le résultat obtenu ;
   - on recommence en permuttant les rôles ;
   - chaque groupe de deux obtient alors deux tableaux de cinquante résultats et complète les trois tableaux de fréquence.

   (b) Graphiques.
   Les graphiques sont à faire dans les repères de la page 99.
   On note en abscisses les numéros des faces du dé et en ordonnées les fréquences de chacun de chacun des numéros.
   - Faire les diagrammes des fréquences de vos résultats et de ceux de votre voisin sur un même graphique en utilisant deux couleurs différentes.
   - Faire les diagrammes des fréquences de votre groupe sur le graphique suivant.
3. **Par colonne puis pour la classe**
   (a) Lancers.
   On notera les résultats dans les tableaux 9.2 page suivante.
   - relever les résultats de tous les groupes de deux élèves de votre colonne et compléter le quatrième tableau de fréquence ;

- relever enfin les résultats de tous les élèves de la classe et compléter le dernier tableau.

(b) Graphiques.
Les graphiques sont à faire dans les repères de la page ci-contre.
- Faire les diagrammes des fréquences de votre colonne.
- Faire les diagrammes des fréquences de votre classe sur le graphique suivant.

4. **Comparaison des graphiques**

(a) Comparer le diagramme de vos fréquences à celui de votre voisin.

(b) Comparer le diagramme des fréquences de votre groupe à celui d'autres groupes.

(c) Comparer le diagramme des fréquences de votre colonne à celui d'autres colonnes puis à celui de la classe.

(d) Que constate-t-on ?
Ce phénomène s'appelle *fluctuation d'échantillonage sur des séries de taille 50.*

TABLE 9.1 – Groupe de deux élèves

Mes 50 lancers

Tableau de fréquence de mes résultats

Face	Effectif	Fréquence
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Total	50	

Ceux de mon voisin

Tableau de fréquence des résultats de mon voisin

Face	Effectif	Fréquence
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Total	50	

Tableau de fréquence de mon groupe

Face	Effectif	Fréquence
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Total	100	

TABLE 9.2 – Pour la colonne puis pour la classe

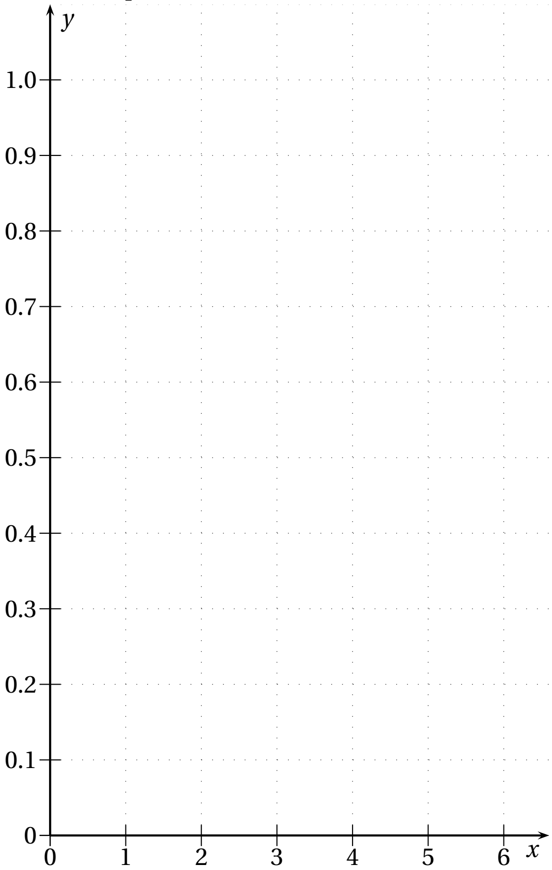
Tableau de fréquence de ma colonne

Face	Effectif	Fréquence
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Total		

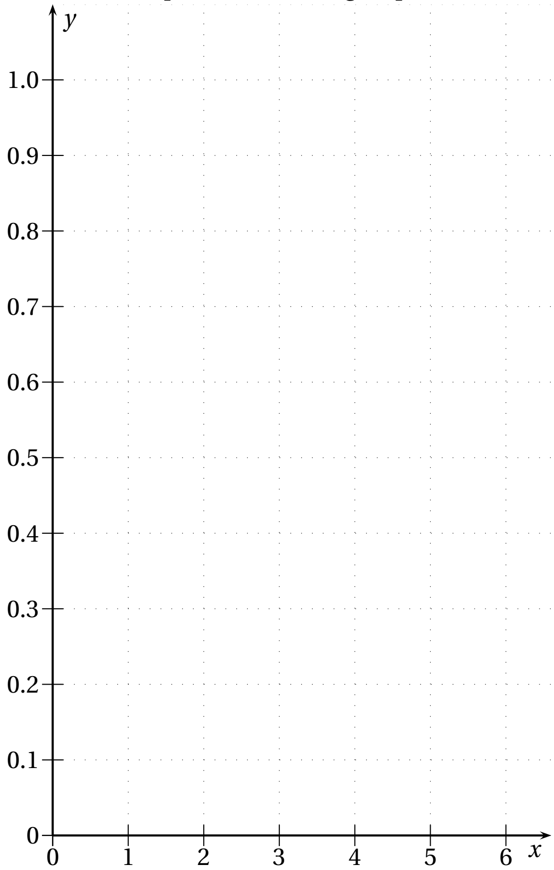
Tableau de fréquence de la classe

Face	Effectif	Fréquence
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Total		

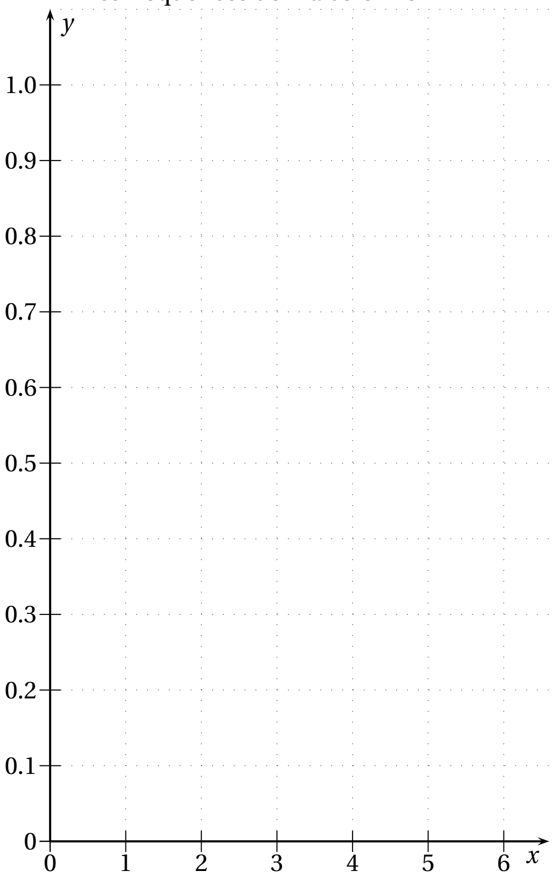
Mes fréquences et celles de mon voisin



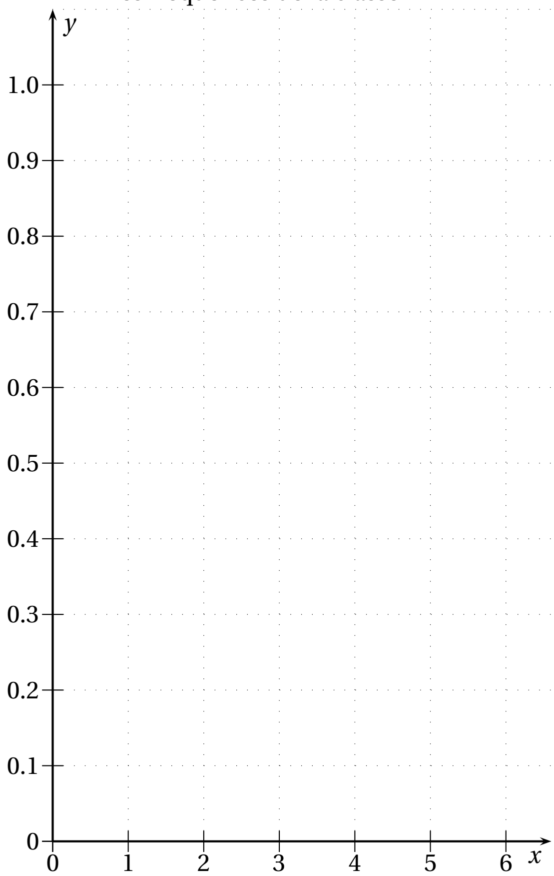
Les fréquences de mon groupe



Les fréquences de ma colonne



Les fréquences de la classe



ACTIVITÉ 9.2 (Intervalle de fluctuation)**.**
Dans la classe de Seconde 14, il y a 9 garçons et 28 filles, ce qui paraît disproportionné.
On peut se demander toutefois si, lorsqu'on choisit 37 élèves au hasard dans une population constituée d'une moitié de filles et d'une moitié de garçons, cette distribution est rare.

1. Quelle est la fréquence des filles dans la classe de Seconde 14 ?
2. Expliquer comment simuler le choix de 37 élèves au hasard dans une population d'une moitié de filles et d'une moitié de garçons à l'aide de la fonction *random* de la calculatrice.
3. Procéder à cette simulation en notant le nombre de filles et de garçons obtenus et calculer la fréquence des filles dans votre simulation (arrondie au centième).
4. Écrire cette fréquence au tableau et noter les résultats des simulations de la classe dans le tableau ci-dessous :

5. Déterminer, pour cette série statistique :
   (a) les valeurs extrêmes, les premier et troisième quartiles, les premier et neuvième déciles, la médiane et la moyenne ;
   (b) représenter le diagramme en boite correspondant ;
   (c) déterminer l'intervalle interquartile et interpréter le résultat ;
   (d) déterminer l'intervalle interdécile et interpréter le résultat.
6. D'après ces résultats, peut-il arriver que le hasard produise une distribution comparable à celle de la Seconde 14 ? Si oui, est-ce fréquent ?
7. Les résultats obtenus par la classe peuvent très bien être eux aussi exceptionnels, aussi a-t-on besoin d'une règle plus objective. Nous utiliserons la propriété suivante, qu'on admettra :

   PROPRIÉTÉ. *Dans une population, la proportion d'un caractère est p. On produit un échantillon de taille n de cette population et on détermine la fréquence f du caractère dans cet échantillon.*
   Si p est compris entre 0,2 et 0,8 et si n est supérieur ou égal à 25, alors, dans 95 % des cas au moins, f appartient à l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, que l'on appelle intervalle de fluctuation au seuil de 95 % *(ou* au risque de 5 %*)*

   Dans notre exemple :
   - Si c'est le cas, on peut avancer, au risque de 5 % de se tromper, que l'échantillon (la classe) est représentatif d'une population (le lycée) comportant une moitié de filles et d'une moitié de garçons.
   - Si ce n'est pas le cas, on peut avancer, au risque de 5 % de se tromper, que l'échantillon (la classe) n'est représentatif pas d'une population (le lycée) comportant une moitié de filles et d'une moitié de garçons.
     Les raisons peuvent être nombreuses :
     · la classe a été volontairement constituée d'une majorité de filles ;
     · la classe a été constituée en fonction des options et les filles choisissent plus souvent telle option ;
     · on est dans les 5 % exceptionnels et donc on se trompe en s'avançant ainsi ;
     · le modèle choisit n'est pas le bon (la population de référence, le lycée, ne comporte pas une moitié de filles et une moitié de garçons) ;
     · etc.

   (a) Dans notre population de référence, quelle est la valeur de p qu'on a supposée ?
   (b) Quelle est la valeur de n ?
   (c) Déterminer alors l'intervalle de fluctuation correspondant à cette expérience.
   (d) Quel pourcentage des fréquences obtenues par la classe appartient à cet intervalle ?
   (e) La fréquence des filles de la Seconde 14 appartient-elle à cet intervalle ?
8. Et si notre supposition était fausse ?
   À l'administration du lycée, on peut obtenir l'information suivante : « Au Lycée Dupuy de Lôme, pour l'année scolaire 2010–2011, il y a en Seconde 524 élèves, dont 329 filles et 195 garçons ».
   (a) Déterminer l'intervalle de fluctuation (toujours pour un échantillon de taille 37).
   (b) La fréquence des filles de la Seconde 14 appartient-elle à cet intervalle ? Qu'en conclure ?

9.2 Bilan et compléments

Lorsqu'on étudie un caractère d'une population, la connaissance de la population entière n'est en général pas envisageable (pour des raisons de temps, d'organisation ou de coût). On doit se contenter de la connaissance d'un échantillon de la population. Pour prendre des décisions fondées sur des théories mathématiques, il est indispensable que l'échantillon soit prélevé au hasard.

Définition 9.1. On appelle *échantillon de taille n* une liste de n résultats obtenus par n répétitions indépendantes d'une même *expérience aléatoire.*

Définition 9.2. Pour une population donnée, des échantillons aléatoires produits selon le même protocole peuvent avoir des compositions différentes. On dit qu'il y a *fluctuation d'échantillonage.*

Propriété 9.1. *Dans une population, la proportion d'un caractère est p. On produit un échantillon de taille n de cette population et on détermine la fréquence f du caractère dans cet échantillon.*
Si p est compris entre 0,2 et 0,8 et si n est supérieur ou égal à 25, alors, dans 95 % des cas au moins, f appartient à l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$*, que l'on appelle* intervalle de fluctuation au seuil de 95 % *(ou* au risque de 5 %*)*

9.3 Exercices

EXERCICE 9.1.
On lance deux dés et on note **le plus grand des deux nombres obtenus**.

1. Quels sont les résultats possibles ?
2. Avec la table de nombres aléatoires entiers de 1 à 6 donnée ci-dessous, simuler 50 lancers en expliquant votre façon de procéder.

1	3	5	5	6	2	6	3	2	4	3	5	2	1	3	6	3	6	1	3
6	5	2	6	4	6	4	4	2	3	6	1	2	2	3	6	4	2	1	1
4	6	3	2	5	2	2	1	5	3	6	6	4	3	3	5	5	4	1	5
5	2	3	2	3	3	5	4	3	1	6	1	6	5	4	2	5	4	2	6
4	3	4	6	1	5	2	2	1	4	3	4	5	4	1	6	4	5	1	3

3. Donner la suite des 50 résultats obtenus.
4. Calculer les fréquences obtenues pour chaque résultat possible.
5. Une simulation à l'ordinateur a donné les résultats suivants :

Face	1	2	3	4	5	6
Effectif	25	79	141	203	234	318

Comparer ces résultats à ceux de votre simulation.

EXERCICE 9.2.
Une urne contient 10 boules : **cinq** rouges, **trois** noires et **deux** blanches. On tire une boule et on note sa couleur et on la remet dans l'urne.

1. Avec la table de nombres aléatoires entiers de 0 à 9 donnée ci-dessous, simuler 25 tirages en expliquant votre méthode.

5	2	0	5	5	7	5	2	7	3	7	9	0	8	4	5	6	0	1	0
7	4	1	6	5	4	6	4	4	5	7	2	8	3	0	7	7	2	3	9
0	4	9	5	4	9	8	1	9	2	4	1	1	6	6	2	7	5	5	6
0	2	3	8	3	1	1	6	6	6	0	8	2	4	4	3	2	4	9	3
3	7	7	6	9	3	3	5	9	2	8	3	1	5	1	0	1	7	3	0

2. Calculer les fréquences obtenues pour chaque couleur.
3. Déterminer pour chacune des couleurs l'intervalle de fluctuation pour un échantillon de taille 25.
   Vos fréquences sont-elles dans ces intervalles ?
   Conclure.

EXERCICE 9.3.
On lance deux dés et on note **la somme des deux nombres obtenus**.

1. Quels sont les résultats possibles ?
2. Avec la table de nombres aléatoires entiers de 1 à 6 donnée ci-dessous, simuler 25 lancers en expliquant votre façon de procéder.

6	2	4	1	3	6	5	2	1	1	2	4	2	5	2	2	6	2	3	6
6	5	1	4	5	2	6	6	3	3	1	4	3	1	2	4	1	3	5	2
3	5	1	4	1	5	3	4	3	5	6	4	4	2	2	6	3	5	5	6
5	3	3	5	1	6	2	1	4	2	4	5	1	4	4	4	3	4	5	5
6	3	3	5	6	4	6	6	2	2	3	4	1	4	3	5	1	5	4	2

3. Donner la suite des 25 résultats obtenus.
4. Calculer les fréquences obtenues pour chaque résultat possible.
5. Norbert a procédé lui aussi à une simulation de 25 lancers, avec une autre table de nombres aléatoires, et il a obtenu les résultats suivants :

Face	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectif	1	1	2	2	1	4	4	4	3	2	1

   Comparer ces résultats à ceux de votre simulation.
6. Une simulation à l'ordinateur a donné les résultats suivants :

Face	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectif	24	49	86	103	145	178	139	114	77	55	30

   Comparer ces résultats à ceux de votre simulation.
7. Norbert pense que toutes les sommes devraient être présentes dans une même proportion.
   (a) Si Norbert a raison, quel est l'intervalle de fluctuation pour un échantillon de taille 1000 ?
   (b) Les fréquences des résultats obtenus à l'ordinateur sont-elles à 95 % dans cet intervalle ?
   (c) Qu'en conclure ?

EXERCICE 9.4.
D'après le site de l'IREM de Paris 13.
L'ensemble des faits évoqués ci-dessous est réel.
En novembre 1976 dans un comté du sud du Texas, RODRIGO PARTIDA était condamné à huit ans de prison pour cambriolage d'une résidence et tentative de viol.
Il attaqua ce jugement au motif que la désignation des jurés de ce comté était discriminante à l'égard des Américains d'origine mexicaine. Alors que 79,1 % de la population de comté était d'origine mexicaine, sur les 870 personnes convoquées pour être jurés lors d'une certaine période de référence, il n'y eût que 339 personnes d'origine mexicaine.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation correspondant à la proportion d'origine mexicaine pour un échantillon de taille 870.
2. La fréquence des personnes d'origine mexicaine dans les personnes convoquées est-elle dans cet intervalle ?
3. Qu'en conclure ?

EXERCICE 9.5.
À Dupuy de Lôme, pour la session 2009 du baccaulauréat général, il y a eu 290 reçus pour 320 candidats se présentant à l'épreuve. Les fréquences des reçus en Série L, ES et S étaient, respectivement, 0,766, 0,896 et 0,963.
Déterminer si les différences de réussite entre les filières peuvent être dues aux fluctuations d'échantillonage.

EXERCICE 9.6.
Dans le village chinois de Xicun en 2000, il est né 20 enfants dont 16 garçons. On suppose que la proportion de garçons et de filles est la même à la naissance dans toute l'espèce humaine.
Déterminer si la fréquence des naissances de garçons dans le village de Xicun en 2009 peut être due aux fluctuations d'échantillonage.

EXERCICE 9.7.
Avez-vous vérifié que toutes les conditions étaient remplies pour appliquer les intervalles de fluctuation dans les deux exercices précédents ?

EXERCICE 9.8.
Au premier tour de l'élection présidentielle française de mai 2007, parmi les suffrages exprimés, les proportions, en pourcentage, pour les candidats ayant obtenu pour de 2 % des suffrages, étaient les suivantes :

Bayrou	Besancenot	De Villiers	Le Pen	Royal	Sarkozy
18,57	4,08	2,23	10,44	25,87	31,18

Cinq mois plus tôt, le 13 décembre 2006, l'institut de sondage BVA faisait paraître un sondage effectué sur un échantillon de 797 personnes dont voici les résultats, en pourcentage, concernant les candidats précédemment cités :

Bayrou	Besancenot	De Villiers	Le Pen	Royal	Sarkozy
7	4	2	10	34	32

1. Pour quels candidats peut-on appliquer les intervalles de fluctuation parmi ceux présents au premier tour ?
2. Pour ces candidats déterminer les intervalles de fluctuation pour un échantillon de taille 797.
3. Les résultats du sondage donnent-ils des fréquences appartenant à ces intervalles ?
4. Qu'en conclure ?

EXERCICE 9.9.
Les résultats seront donnés au centième.
Les données du tableau ci-dessous sont celles de l'année scolaire pour les Premières générales à Dupuy de Lôme de pour l'année scolaire 2004–2005 :

	1 ES	1 S	1 L	Total
Filles	76	92	50	218
Garçons	43	76	13	132
Total	119	168	63	350

1. On s'intéresse d'abord à la proportion de garçons et de filles dans l'établissement.
   (a) Déterminer les proportions de garçons et de filles dans le lycée cette année là.
   Peut-on utiliser les intervalles de fluctuations dans le cas des filles et des garçons ?
   (b) Déterminer les intervalles de fluctuations pour des échantillons de tailles respectives 119, 168 et 63.
   (c) Calculer les fréquences de garçons et de filles dans chacune des trois filières.
   (d) Dans quelles filières peut-on dire, au seuil de 95 %, que la fréquence des filles et des garçons peut être due aux fluctuations d'échantillonage ?
2. En vous inspirant de la question précédente, déterminer pour chaque sexe si l'on peut dire, au seuil de 95 %, que la fréquence des ES, S et L peut être due aux fluctuations d'échantillonage.

Devoir surveillé n°10

Fluctuations

EXERCICE 10.1 (6 points)**.**
Une urne contient 10 boules : **sept** rouges, **trois** noires. On tire une boule et on note sa couleur et on la remet dans l'urne.

1. Avec la table de nombres aléatoires entiers de 0 à 9 donnée ci-dessous, décrire précisément comment simuler 50 tirages.

5	8	8	1	3	9	3	0	6	6	1	6	3	4	4	9	1	1	6	8
6	7	2	4	3	4	0	8	5	0	9	5	1	0	0	4	1	9	1	3
2	6	9	6	6	1	7	8	5	3	6	7	1	7	6	3	9	9	1	8
6	6	3	2	2	2	3	9	9	2	6	4	2	1	7	4	6	7	5	9
3	1	9	8	5	5	7	4	9	2	9	9	0	5	8	9	1	1	3	3

2. Donner la liste des résultats de vos 50 simulations.
3. Calculer les fréquences obtenues pour chaque couleur.
4. Déterminer pour chacune des couleurs l'intervalle de fluctuation pour un échantillon de taille 50.
   Vos fréquences sont-elles dans ces intervalles ?
   Conclure.

EXERCICE 10.2 (14 points)**.**
*Les résultats seront donnés au **millième**.*
Les données du tableau ci-dessous sont celles de l'année scolaire pour les Premières générales à Dupuy de Lôme pour l'année scolaire 2004–2005 :

	1 ES	1 S	1 L	Total
Filles	76	92	50	218
Garçons	43	76	13	132
Total	119	168	63	350

1. Déterminer les proportions d'élèves en 1ES, 1S et 1L parmi les élèves de Première générale au lycée cette année là. Peut-on utiliser les intervalles de fluctuations dans chacun de ces trois cas ?
2. (a) L'intervalle de fluctuation pour un échantillon de taille 132 correspondant à la proportion de 1ES parmi les élèves de Première générale au lycée est $I = [0,253\,;\,0,427]$.
      i. Calculer la fréquence des 1ES parmi les garçons en Première générale au lycée.
      ii. Cette fréquence est-elle dans l'intervalle I ?
      iii. Qu'en conclure ?
   (b) L'intervalle de fluctuation pour un échantillon de taille 132 correspondant à la proportion de 1S parmi les élèves de Première générale au lycée est $J = [0,392\,;\,0,567]$.
      Peut-on dire, au risque de se tromper de 5 %, que la fréquence des 1S parmi les garçons peut être due aux fluctuations d'échantillonage ?
3. (a) Déterminer l'intervalle de fluctuation pour un échantillon de taille 218 correspondant à la proportion de 1ES parmi les élèves de Première générale au lycée.
   (b) Déterminer l'intervalle de fluctuation pour un échantillon de taille 218 correspondant à la proportion de 1S parmi les élèves de Première générale au lycée.
   (c) Peut-on dire, au seuil de 95 %, que les fréquences de 1ES et de 1S parmi les filles peuvent être dûes aux fluctuations d'échantillonage ?
4. En première générale au lycée cette année là, il y avait environ 38 % de garçons et 62 % de filles. En 1S cette année là, il y avait environ 45 % de garçons et 55 % de filles.
   Il y avait donc proportionnellement moins de filles et plus de garçons en 1S qu'il y avait de filles et de garçons dans l'établissement.
   Selon vous, en vous basant sur le travail fait dans les questions précédentes, quelle est la principale raison de ce fait ?

Chapitre 10

Équations de droite – Systèmes

Sommaire

10.1 Activités

ACTIVITÉ 10.1.
Le plan est muni d'un repère. On cherche à représenter tous les points $M(x; y)$ du plan dont les coordonnées vérifient $y = 2x - 3$.

1. Compléter le tableau suivant :

x	-2	-1				3	4	5
y			-3	-1	1			

2. Placer les points correspondants dans un repère.
3. Que constate-t-on ?
4. Prendre un autre point ayant la même caractéristique. Ses coordonnées vérifient-elles l'équation $y = 2x - 3$?
5. Prendre un point n'ayant pas la même caractéristique. Ses coordonnées vérifient-elles l'équation $y = 2x - 3$?

ACTIVITÉ 10.2.
Soient $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$, $\mathscr{D}_4$, $\mathscr{D}_5$ et $\mathscr{D}_6$ les droites d'équations :

- $\mathscr{D}_1 : y = 3x + 1$;
- $\mathscr{D}_2 : y = 1x + 1$;
- $\mathscr{D}_3 : y = 0,25x + 1$;
- $\mathscr{D}_4 : y = 0x + 1$;
- $\mathscr{D}_5 : y = -x + 1$;
- $\mathscr{D}_6 : y = -2x + 1$;

1. Montrer que le point $(0; 1)$ appartient à toutes ces droites.
2. Déterminer, pour chacune de ces droites, un autre point lui appartenant.
3. Placer ces points dans un repère orthogonal puis tracer les droites.
4. Quelle semble être l'influence du coefficient du x sur « l'allure » de ces droites ?

ACTIVITÉ 10.3.
Le plan est muni d'un repère orthogonal.

1. Soit deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équations respectives : $\mathscr{D} : y = -0,5x + 1$ et $\mathscr{D}' : y = 0,25x - 2$
   (a) Indiquer si les points suivants appartiennent à la droite $\mathscr{D}$, puis à la droite $\mathscr{D}'$: $A(-2; 2)$, $B(2; -1,5)$, $C(-3; -1)$ et $D(4; -1)$
   (b) Tracer $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ en utilisant les résultats de la question précédente.
   (c) Calculer les coordonnées du point d'intersection des deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ en résolvant le système : $\begin{cases} y = -0,5x + 1 \\ y = 0,25x - 2 \end{cases}$

2. On considère le système : $\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

   (a) Indiquer si les couples $(x; y)$ suivants vérifient-ils la première équation, la seconde ou le système : $(-2; 2)$, $(2; -1,5)$, $(-3; -1)$, $(4; -1)$ et $(1; 2)$.

   (b) Écrire chacune des deux équations sous la forme $y = mx + p$.
   Tracer les deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ correspondant aux deux équations obtenues.

   (c) Lire les coordonnées du point F, intersection de ces deux droites. Les coordonnées de F sont-elles identiques au résultat trouvé à la première question ?
   Combien le système a-t-il de solutions ?

3. On considère le système : $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ -6x - 2y = a \end{cases}$

   (a) Représenter sur un graphique les deux équations du système pour $a = 4$ puis pour $a = 0$. Comment sont situées les droites tracées ?
   Combien le système a-t-il de solutions ?

   (b) Quelle valeur donner à a pour que les deux droites soient confondues ?
   Combien le système a-t-il alors de solutions ? Donnez-en trois.

10.2 Définitions et propriétés

Le plan est muni d'un repère.

Théorème 10.1. *Toute droite $\mathscr{D}$ non parallèle à l'axe des ordonnées est caractérisée par une relation de la forme $y = mx + p$, où m et p sont deux nombres réels constants.*
Cela signifie que :
- *tout point M appartenant à la droite $\mathscr{D}$ a ses coordonnées $(x; y)$ qui vérifient l'équation $y = mx + p$;*
- *tout point M dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient l'équation $y = mx + p$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.*

On dit que $y = mx + p$ est l'équation réduite *de $\mathscr{D}$.*

Toute droite $\mathscr{D}$ parallèle à l'axe des ordonnées est caractérisée par une relation de la forme $x = k$, où k est un nombre réel constant.

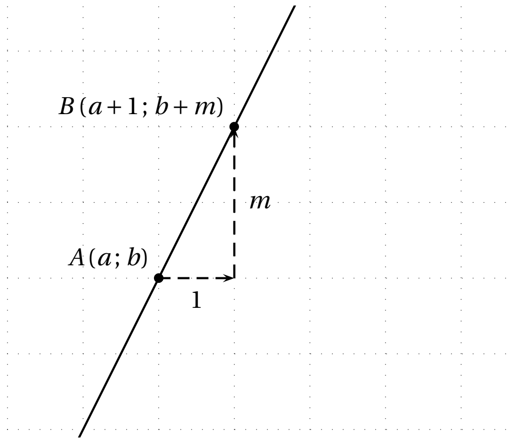
On l'admettra.

Remarque. Il peut y avoir plusieurs équations associées à une droite $\mathscr{D}$ telles que les points M ont leurs coordonnées $(x; y)$ qui vérifient ces équations. Par exemple si $y = 2x + 3$ est l'équation réduite de $\mathscr{D}$, les points de $\mathscr{D}$ ont aussi leurs coordonnées qui vérifient l'équation : $2y = 4x + 6$ puisque cette équation est équivalente à la précédente. Cependant toutes ces équations peuvent se ramener à $y = 2x + 3$ qui est unique pour une droite $\mathscr{D}$ donnée.

Propriété 10.2. *Soit $\mathscr{D}$ une droite d'équation réduite $y = mx + p$, donc non parallèle à l'axe des ordonnées, et $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts quelconques de $\mathscr{D}$.*
Alors on a :
- *$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ et ce nombre est appelé* coefficient directeur *de la droite $\mathscr{D}$;*
- *le point de coordonnées $(0; p)$ appartient à $\mathscr{D}$ et le nombre p est appelé* ordonnée à l'origine *de la droite $\mathscr{D}$.*

Preuve. On admettra le premier point.
Par ailleurs, le point d'abscisse 0 appartenant à $\mathscr{D}$ a pour ordonnée $y = m \times 0 + p = p$. ◊

Propriété 10.3. *Soit $\mathscr{D}$ une droite d'équation réduite $y = mx + p$, donc non parallèle à l'axe des ordonnées, et $A(a; b)$ un point quelconque de $\mathscr{D}$.*
Alors le point $B(a + 1; b + m)$ appartient à $\mathscr{D}$.



Preuve. Soit $\mathscr{D}$ une droite d'équation réduite $y = mx + p$ et $A(a; b)$ un point de $\mathscr{D}$ et $B(a+1; b+m)$.
Montrons que B appartient à $\mathscr{D}$.
On sait que $A(a; b) \in \mathscr{D}$ donc $b = m \times a + p$.
Cherchons l'ordonnée du point de la droite donc l'abscisse est $a+1$.
On sait que $y = m(a+1) + p = m \times a + m + p = b + m$.
Donc B appartient à $\mathscr{D}$. ◊

Propriété 10.4. *Soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites d'équations réduites respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$, donc non parallèles à l'axe des ordonnées.*
$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles (éventuellement confondues) si et seulement si $m = m'$.

On l'admettra.

10.3 Applications

10.3.1 Tracer une droite

Les propriétés 10.2 et 10.3 donnent un moyen simple de représenter une droite quand p n'est pas trop grand et quand l'axe des ordonnées est disponible :

Pour construire la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = mx + p$:

1. on place le point $P(0; p)$;
2. on place le point $Q(1; p+m)$;
3. on trace la droite $\mathscr{D} = (PQ)$.

Exemple 10.1. Pour tracer $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'équations respectives : $y = \frac{1}{2}x + 2$ et $y = -2x + 1$.
- on sait que $P_1(0; 2) \in \mathscr{D}_1$ ainsi que $Q_1(0+1; 2+0,5) = (1; 2,5)$ (ainsi que $R_1(1+1; 2,5+0,5) = (2; 3)$, etc.)
- on sait que $P_2(0; 1) \in \mathscr{D}_2$ ainsi que $Q_2(0+1; 1-2) = (1; -1)$ (ainsi que $R_2(1+1; -1-2) = (2; -3)$, etc.)

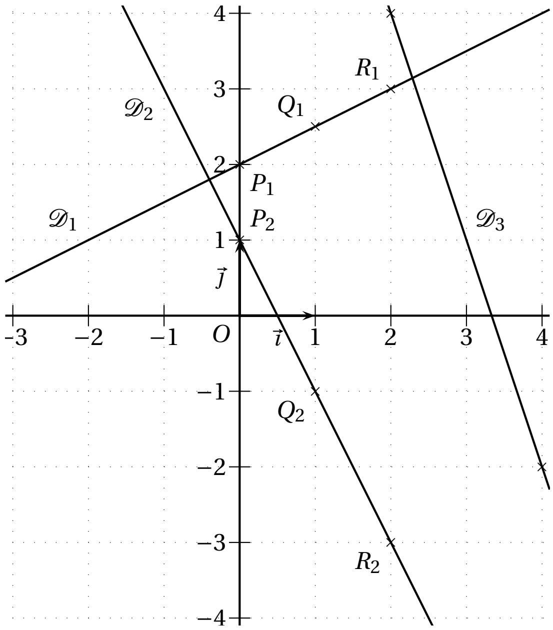
On obtient alors le schéma page suivante.

Remarque. On peut aussi lire m de la façon suivante : $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ où $\Delta y = y_B - y_A$ est la variation des ordonnées et $\Delta x = x_B - x_A$ est la variation des abscisses entre les deux points.
Ainsi si $m = 2 = \frac{2}{1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ cela signifie que quand on augmente x de 1, y augmente de 2, ou bien si $m = -3 = \frac{-3}{1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ cela signifie que quand on augmente x de 1, y augmente de -3, c'est-à-dire diminue de 3.
De même si $m = \frac{1}{2} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ cela signifie que quand on augmente x de 2, y augmente de 1, ou bien si $m = -\frac{3}{4} = \frac{-3}{4} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ cela signifie que quand on augmente x de 4, y augmente de -3, c'est-à-dire diminue de 3.

Si l'axe des ordonnées n'est pas accessible, ou si p est trop grand pour que le point $(0; p)$ apparaisse dans la fenêtre, on détermine par le calcul deux points quelconques en fixant arbitrairement deux valeurs de x.

Exemple 10.2. Pour tracer la droite $\mathscr{D}_3$ d'équation réduite $y = -3x + 10$, on peut déterminer, par exemple, les coordonnées des points d'abscisses 2 et 4 :
- $y = -3 \times 2 + 10 = 4$ donc $(2; 4) \in \mathscr{D}_3$;
- $y = -3 \times 4 + 10 = -2$ donc $(4; -2) \in \mathscr{D}_3$.

On place ensuite les deux points et on trace la droite.

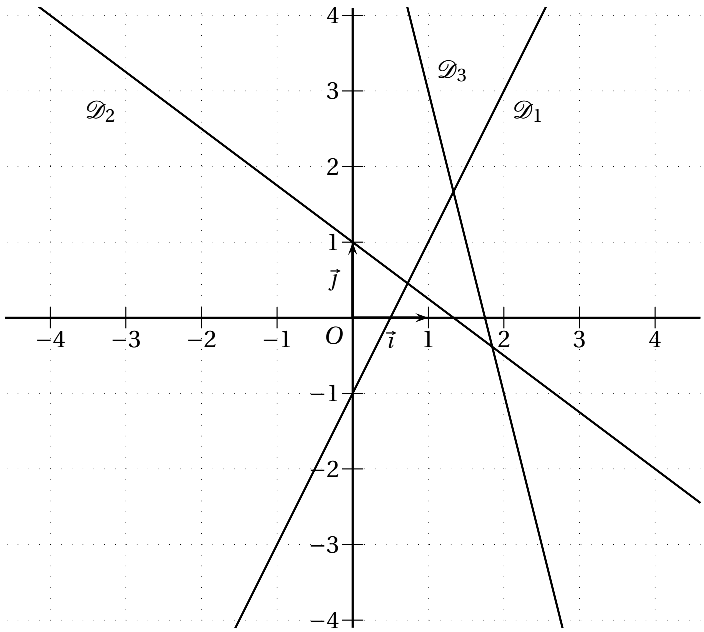


10.3.2 Retrouver l'équation réduite

Inversement, ces propriétés permettent aussi de déterminer rapidement m et p et donc l'équation réduite de $\mathscr{D}$:

> Pour déterminer l'équation $y = mx + p$ d'une droite $\mathscr{D}$ donnée :
> 1. si c'est possible, on lit l'ordonnée x_P du point P, intersection de $\mathscr{D}$ avec l'axe des ordonnées et on a $p = x_P$;
> 2. si l'on dispose de deux points A et B appartenant à $\mathscr{D}$, on a $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ où $\Delta y = y_B - y_A$ est la variation des ordonnées et $\Delta x = x_B - x_A$ est la variation des abscisses entre les deux points.
> 3. on a alors $\mathscr{D}$: $y = mx + p$.

Exemple 10.3. On donne le schéma suivant :



- Déterminons l'équation réduite de $\mathscr{D}_1$: $y = mx + p$:
  $\mathscr{D}_1$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; -1)$ donc $p = -1$.
  Par ailleurs les points de coordonnées $(0; -1)$ et $(1; 1)$ appartiennent à $\mathscr{D}_1$ donc, quand x augmente de 1, y augmente de 2, donc $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2$.
  Finalement $\mathscr{D}_1$: $y = 2x - 1$
- Déterminons l'équation réduite de $\mathscr{D}_2$: $y = mx + p$:
  $\mathscr{D}_2$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; 1)$ donc $p = 1$.

Par ailleurs les points de coordonnées $(0; 1)$ et $(4; -2)$ appartiennent à $\mathscr{D}_2$ donc, quand x augmente de 4, y diminue de 3, donc $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$.
Finalement $\mathscr{D}_2 : y = -\frac{3}{4}x + 1$

Lorsque le point d'intersection avec l'axe des ordonnées n'est pas visible, on dispose de deux méthodes.

1. **Première méthode**
   (a) On détermine m à l'aide de deux points comme précédemment ;
   (b) On remplace x et y par les coordonnées d'un des deux points pour trouver p.
   Exemple 10.4. Déterminons l'équation réduite de $\mathscr{D}_3 : y = mx + p$ de cette manière.
   Les points $(1; 3)$ et $(2; -1)$ appartiennent à $\mathscr{D}_3$ donc $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4}{1} = -4$ donc $\mathscr{D}_3 : y = -4x + p$.
   Il ne reste qu'à trouver p.
   $(1; 3) \in \mathscr{D}_3$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathscr{D}_3$:
   $3 = -4 \times 1 + p \Leftrightarrow 3 + 4 = p \Leftrightarrow 7 = p$.
   Finalement $\mathscr{D}_3 : y = -4x + 7$
2. **Deuxième méthode**
   On trouve deux points appartenant à la droite et on résoud le système où m et p sont les inconnues.
   Exemple 10.5. Déterminons l'équation réduite de $\mathscr{D}_3 : y = mx + p$ de cette manière.
   Les points $(1; 3)$ et $(2; -1)$ appartiennent à $\mathscr{D}_3$ donc leurs coordonnées vérifient l'équation de $\mathscr{D}_3$.
   On obtient le système suivant :
   $\begin{cases} 3 = m \times 1 + p \\ -1 = m \times 2 + p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = m + p \\ -1 = 2m + p \end{cases}$
   Résolvons le.
   D'après la première ligne, $p = 3 - m$.
   Remplaçons p dans la seconde ligne :
   $-1 = 2m + (3 - m) \Leftrightarrow -1 = m + 3 \Leftrightarrow -4 = m$ et $p = 3 - m = 3 - (-4) = 7$.
   Finalement $\mathscr{D}_3 : y = -4x + 7$.

10.3.3 Solutions d'un système

Rappels

Un système linéaire de deux équations à deux inconnues est un système de la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où a, b, c, a', b', c' sont des réels donnés.
Le résoudre, c'est trouver l'ensemble des couples $(x; y)$ qui vérifient les deux équations en même temps.
On peut procèder :
- par substitution, c'est-à-dire en isolant l'une des deux inconnues dans une des lignes et en la remplaçant (en la substituant) dans l'autre ;
- par combinaisons linéaires, c'est-à-dire en multipliant éventuellement les lignes par des réels bien choisis puis en les ajoutant ou en les soustrayant l'une à l'autre pour faire disparaître une inconnue.

Tout cela a déjà été vu au collège.

Systèmes et droites

Toute équation de la forme $ax + by = c$ peut s'écrire sous la forme $x = k$ si $b = 0$ ou $y = mx + p$ si $b \neq 0$.
On peut donc associer toute équation de ce type à une droite.
Le nombre de solutions d'un système est exactement le nombre d'intersections des droites associées à chacune des équations, à savoir :
- une infinité de solutions si les droites sont confondues ;
- aucune solution si les droites sont parallèles et non confondues ;
- une unique solution $(x; y)$ si les droites sont sécantes.

10.4 Exercices

Dans tous les exercices le plan est muni d'un repère.

EXERCICE 10.1.
La droite $\mathscr{D}$ est d'équation réduite $y = -3x + 0,5$. Déterminer si $A(150,5\,;\,-451)$ ou $B(-73,25\,;\,-219,5)$ appartiennent à $\mathscr{D}$.

EXERCICE 10.2.
Dans chacun des cas suivants, dire si le point A appartient à la droite $\mathscr{D}$:

1. $A\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{13}{6}\right)$ et $\mathscr{D}$: $y = 6x + \frac{1}{6}$;
2. $A(1\,;\,-7)$ et $\mathscr{D}$: $y = -\frac{3}{4}(x+2)-5$;
3. $A(2\,;\,5)$ et $\mathscr{D}$: $x = 5$;
4. $A\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{6}\right)$ et $\mathscr{D}$: $y = \frac{1}{6}$;

EXERCICE 10.3.
La droite $\mathscr{D}$ est d'équation réduite : $y = \frac{5}{2}x - 1$.

1. A est le point de $\mathscr{D}$ d'abscisse 12. Quelle est son ordonnée ?
2. B est le point de $\mathscr{D}$ d'ordonnée $-\frac{1}{2}$. Quelle est son abscisse ?

EXERCICE 10.4.
Dans un même repère, tracer les droites dont les équations sont les suivantes :

- $\mathscr{D}_1 : y = -\frac{1}{2}x + 5$;
- $\mathscr{D}_2 : y = 4x - 2$;
- $\mathscr{D}_3 : y = -3$;
- $\mathscr{D}_4 : y = \frac{3}{4}x - 4$;
- $\mathscr{D}_5 : x = 6$;

EXERCICE 10.5.
Dans un même repère, tracer les droites dont les équations sont les suivantes :

- $\mathscr{D}_1 : y = -5x + 10$;
- $\mathscr{D}_2 : y = 6x - 14$;
- $\mathscr{D}_3 : y = \frac{3x-1}{6}$;
- $\mathscr{D}_4 : y = \frac{-2x+1}{4}$;
- $\mathscr{D}_5 : 2x - 5y = 3$;

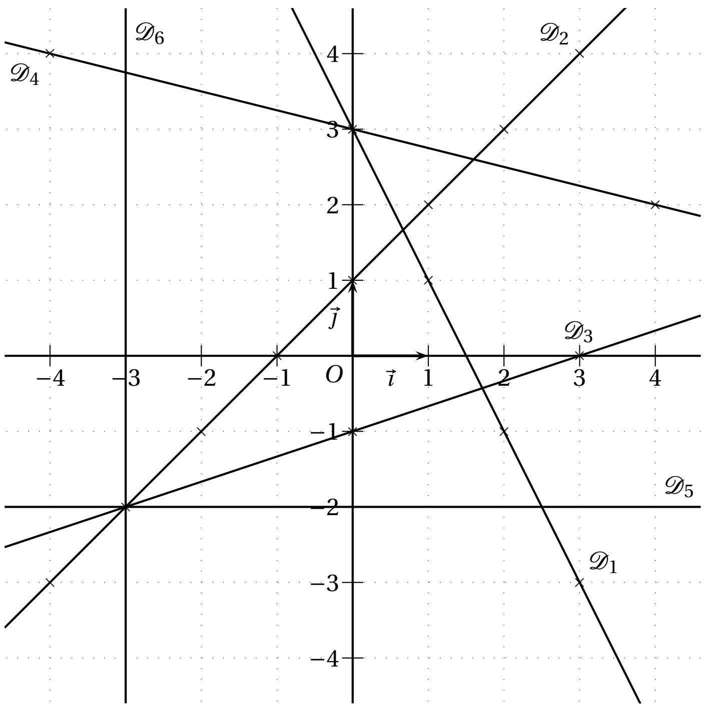
EXERCICE 10.6.
Dans un même repère, tracer les droites suivantes :

- $\mathscr{D}_1$ passant par $A(3\,;\,1)$ et de coefficient directeur -1 ;
- $\mathscr{D}_2$ passant par $B(-3\,;\,2)$ et de coefficient directeur $-\frac{1}{4}$;
- $\mathscr{D}_3$ passant par $C(1\,;\,0)$ et de coefficient directeur 3 ;
- $\mathscr{D}_4$ passant par $D(0\,;\,2)$ et de coefficient directeur $\frac{4}{3}$;
- $\mathscr{D}_5$ passant par $E(-2\,;\,2)$ et de coefficient directeur 0 ;

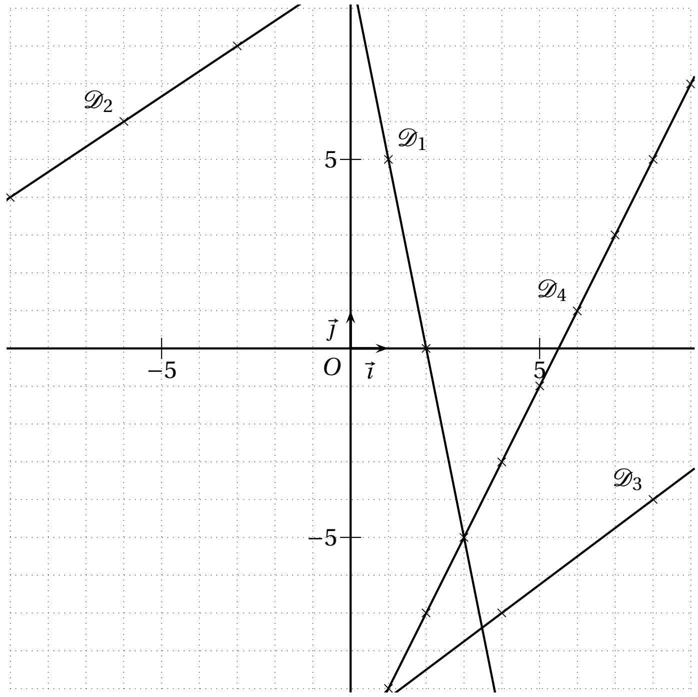
EXERCICE 10.7.
Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de la droite (AB) :

1. $A(1\,;\,2)$ et $B(3\,;\,-1)$;
2. $A(4\,;\,4)$ et $B(-1\,;\,2)$;
3. $A(0\,;\,-1)$ et $B(2\,;\,3)$;
4. $A(-2\,;\,2)$ et $B(3\,;\,2)$;
5. $A(1\,;\,3)$ et $B(1\,;\,4)$;
6. $A\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{4}\right)$ et $B(3\,;\,5)$.

EXERCICE 10.8.
Déterminer graphiquement les équations réduites des droites représentées sur le schéma suivant :



EXERCICE 10.9.
Déterminer graphiquement les équations réduites des droites représentées sur le schéma suivant :



EXERCICE 10.10.
Pour chacun des systèmes suivants :

1. déterminer sans le résoudre le nombre de solutions du système ;
2. résoudre ensuite le système.

- $\mathscr{S}_1 \begin{cases} 4x-6y=-26 \\ 5x+2y=-4 \end{cases}$
- $\mathscr{S}_2 \begin{cases} -2y+6x=5 \\ -9x+3y=-7,5 \end{cases}$
- $\mathscr{S}_3 \begin{cases} 3x=6y+7 \\ 8,5-2,5x+5y=6 \end{cases}$
- $\mathscr{S}_4 \begin{cases} -3x+4y=9-5x \\ -x+5y=25 \end{cases}$
- $\mathscr{S}_5 \begin{cases} x^2-y^2=1 \\ 3x+7y=5 \end{cases}$

EXERCICE 10.11.
On donne les points $A(3;4)$, $B(-2;-1)$ et $C(5;-1)$.

1. Déterminer une équation de chacune des médianes du triangle ABC.
2. En déduire les coordonnées de son centre de gravité G.

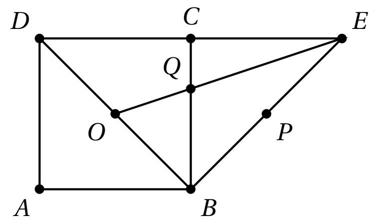
EXERCICE 10.12.

1. Dans un même repère, tracer les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$ et $\mathscr{D}_4$ d'équations respectives : $y=\frac{1}{2}x-4$, $y=-3x-1$, $y=\frac{1}{2}x+3$ et $y=-3x+15$.
2. Quelle est la nature du quadrilatère qui apparaît alors ? Justifer.
3. Déterminer par le calcul les éventuelles intersections entre chaque couple de droite.

EXERCICE 10.13.
Le plan est muni d'un repère. Les points A, B, C, D et E sont de coordonnées respectives $(0;1)$, $(1;4)$, $(3;4)$, $(1;-2)$ et $(2;1)$.

1. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
2. Montrer que les points D, E et C sont alignés.
3. Que peut-on dire du quadrilatère $ABCE$? Justifier.

EXERCICE 10.14.



$ABCD$ est un carré de centre O.
E est le symétrique de D par rapport à C.
Q est l'intersection des droites (OE) et (BC).
P est le milieu du segment $[BE]$.
On se place dans le repère (A, B, D) et on admettra que les points A, B, C et D sont de coordonnées respectives $(0\,;0)$, $(1\,;0)$, $(1\,;1)$ et $(0\,;1)$.

1. Montrer que O a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.
2. Montrer que E a pour coordonnées $(2\,;1)$.
3. Montrer que P a pour coordonnées $\left(\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.
4. On admet que Q a pour coordonnées $\left(1\,;\frac{2}{3}\right)$. Montrer que les points D, Q et P sont alignés.

Chapitre 11

Vecteurs

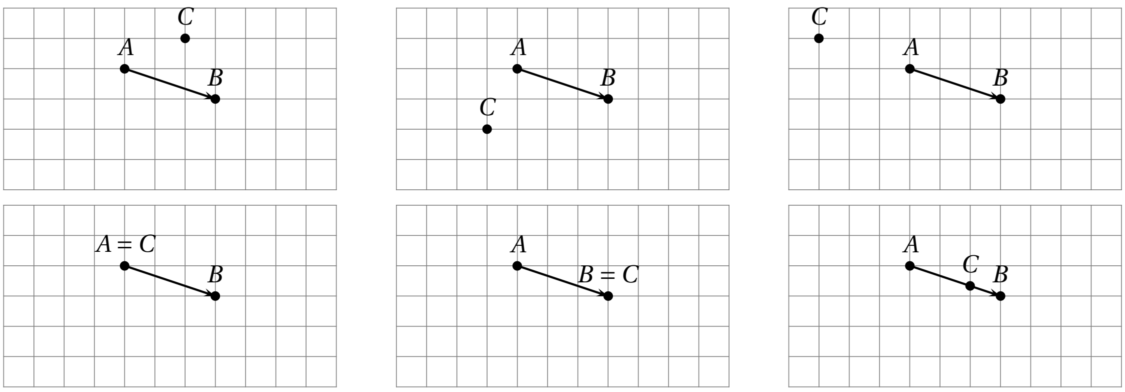
Sommaire

11.1 Translation

Définition 11.1. Soient A et B deux points du plan.
On appelle *translation qui transforme A en B* la transformation qui à tout point C du plan associe l'unique point D tel que $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu.

EXERCICE 11.1.
Sur les figures ci-dessous :

1. Construire les images respectives de C par la translation qui transforme A en B.
   Que peut-on dire du quadrilatère $ABDC$? Démontrer que c'est toujours vrai.
2. Construire les images respectives de A par la translation qui transforme C en D.
   Que constate-t-on ?



11.2 Vecteurs

11.2.1 Définition – Égalité

Définition 11.2. On appelle *vecteur* $\overrightarrow{AB}$ le bipoint associé à la translation qui transforme A en B.
A est appelé *origine du vecteur*, B est appelé *extrémité du vecteur*.

Définition 11.3. Deux vecteurs sont dits égaux s'ils sont associés à une même translation.

On a vu dans l'exercice précédent que

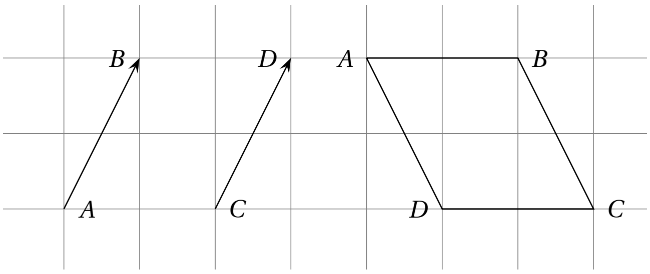
- d'une part, si D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors $ABDC$ parallélogramme
- d'autre part que les translations de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et de vecteur $\overrightarrow{CD}$ étaient les mêmes donc que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Ce cas est général. Ainsi :

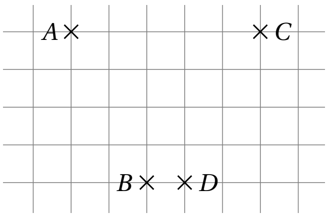
Propriété 11.1.

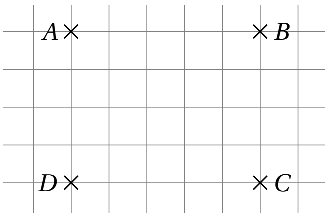
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC \text{ est un parallélogramme}$$

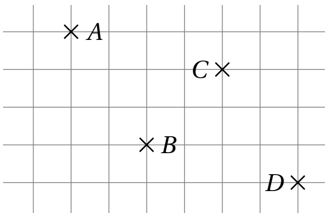
Remarque. Attention à l'ordre des lettres !



EXERCICE 11.2.
Pour chacune des figures ci-dessous, l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ est-elle vraie ?

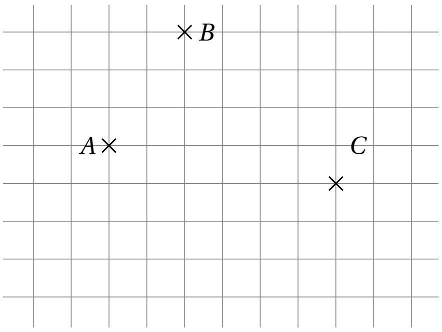




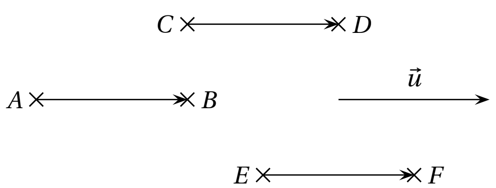


EXERCICE 11.3.
Sur la figure ci-contre :

1. Construire, à partir des points A, B et C, les points D, E et F tels que :
   $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BA}$
2. Quels parallélogrammes peut-on tracer avec ces six points ?
3. En utilisant ces six points, compléter :
   $\overrightarrow{BD} = \ldots\ldots = \ldots\ldots$ $\overrightarrow{BC} = \ldots\ldots$ $\overrightarrow{BF} = \ldots\ldots$
4. Quelles autres égalités de vecteurs peut-on déduire ?



Notation $\vec{u}$



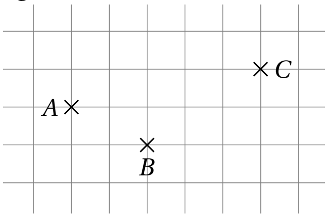
Sur le schéma ci-contre, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.
On pose alors $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$.
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont appelés des *représentants* du vecteur $\vec{u}$.

11.2.2 Somme de deux vecteurs – Relation de CHASLES

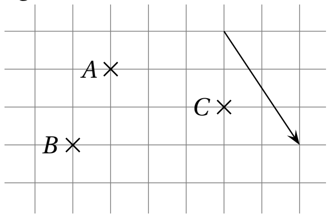
Définition 11.4. La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultat de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$.

EXERCICE 11.4.

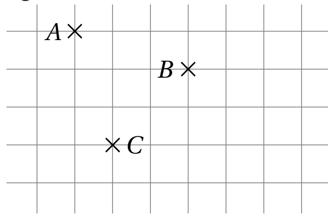
Construire ci-dessous un vecteur égal à $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.



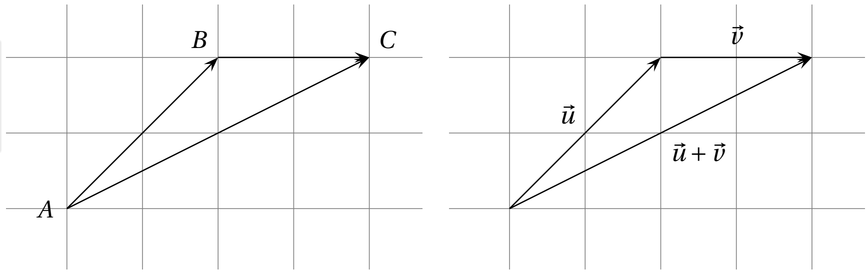
Le vecteur tracé ci-dessous est-il égal à $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$?



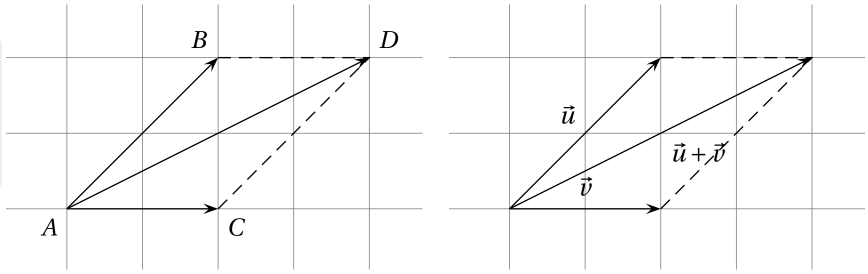
Construire ci-dessous un vecteur égal à $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.



Propriété 11.2 (Relation de CHASLES). *Pour tous points A, B et C, on a :* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



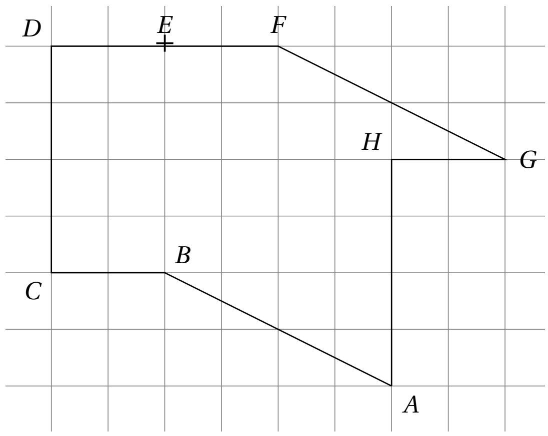
Propriété 11.3 (Règle du parallélogramme). *Pour tous points A, B, C et D on a :* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow ABCD$ *parallélogramme.*



EXERCICE 11.5 (Relation de CHASLES).
Compléter à l'aide de la relation de CHASLES :

- $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{B\ldots}$
- $\overrightarrow{XK}=\overrightarrow{XL}+\overrightarrow{\ldots K}$
- $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{\ldots A}+\overrightarrow{A\ldots}$
- $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{\ldots P}+\ldots\ldots$
- $\overrightarrow{\ldots E}=\overrightarrow{F\ldots}+\overrightarrow{G\ldots}$
- $\overrightarrow{H\ldots}=\ldots\ldots+\overrightarrow{IJ}$
- $\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{R\ldots}+\overrightarrow{\ldots S}$
- $\ldots\ldots=\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{\ldots M}$
- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\ldots\ldots$
- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\ldots C}+\overrightarrow{\ldots D}+\ldots\ldots$
- $\overrightarrow{\ldots Y}=\overrightarrow{XJ}+\ldots\ldots+\overrightarrow{R\ldots}$

EXERCICE 11.6 (Vecteurs égaux, somme).
On considère le motif représenté ci-contre.



1. Citer tous les vecteurs égaux :
   (a) au vecteur $\overrightarrow{AB}$ et représentés sur ce motif ;
   (b) au vecteur $\overrightarrow{FE}$ et représentés sur ce motif.
2. En n'utilisant que les lettres représentées sur ce motif, déterminer un vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}$.
3. En n'utilisant que les lettres représentées sur ce motif, déterminer un vecteur égal aux vecteurs suivants :
   (a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}$
   (b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$
   (c) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}$
   (d) $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{GF}$
   (e) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FB}$

EXERCICE 11.7 (Sommes).
Dans chacun des cas de la figure 11.1 page ci-contre, construire en couleur le vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$. Que remarque-t-on dans le dernier cas ?

11.2.3 Vecteur nul – Vecteurs opposés

Définition 11.5. On appelle *vecteur nul*, noté $\vec{0}$, tout vecteur dont son origine et son extrémité sont confondues. La translation associée laisse tous les points invariants.
On appelle *vecteurs opposés* tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$. On peut noter $\vec{u} = -\vec{v}$ ou $\vec{v} = -\vec{u}$.

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. On a donc :

Propriété 11.4. *Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés. On a donc $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.*

11.3 Coordonnées et vecteurs

Définition 11.6. Le plan est muni d'un repère (O, I, J). Soient $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ deux points de ce plan. Alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A\,;\,y_B - y_A)$.

EXERCICE 11.8.
Sur la figure 11.2 page suivante :

1. Donner graphiquement les coordonnées des points A, B, C et D ;
2. Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants : $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OD}$; $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
   Quel lien remarque-t-on entre les coordonnées d'un point M quelconque et celles de $\overrightarrow{OM}$?
3. Soit E tel que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$.
   (a) Construire E.
   (b) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{CE}$.
4. Soit F tel que $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{OC}$.
   (a) Construire F.
   (b) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{FD}$.
5. (a) Construire un représentant de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.
   (b) Donner les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, de $\overrightarrow{CD}$ et de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.
   (c) Que remarque-t-on ?
6. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{BD}$ et de $\overrightarrow{DB}$.
   Que remarque-t-on ?
7. (a) Construire un représentant du vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}$.
   (b) Déterminer ses coordonnées. Les comparer à celles de $\overrightarrow{OA}$.
   (c) Comment pourrait-on noter $\vec{v}$ autrement ?
8. (a) Déterminer les coordonnées de K, milieu de $[AD]$.
   (b) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   (c) Que remarque-t-on ?

Définition 11.7. Soit (O, I, J) un repère. On notera $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$ et on pourra parler du repère $\left(O\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Propriété 11.5. *Le plan est muni d'un repère.*
- *M et $\overrightarrow{OM}$ ont* ....
- *Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.*
  $\vec{u} = \vec{v}$ si, et seulement si, ... = ... *et* .... = ...

FIGURE 11.1 – Figure de l'exercice 11.7

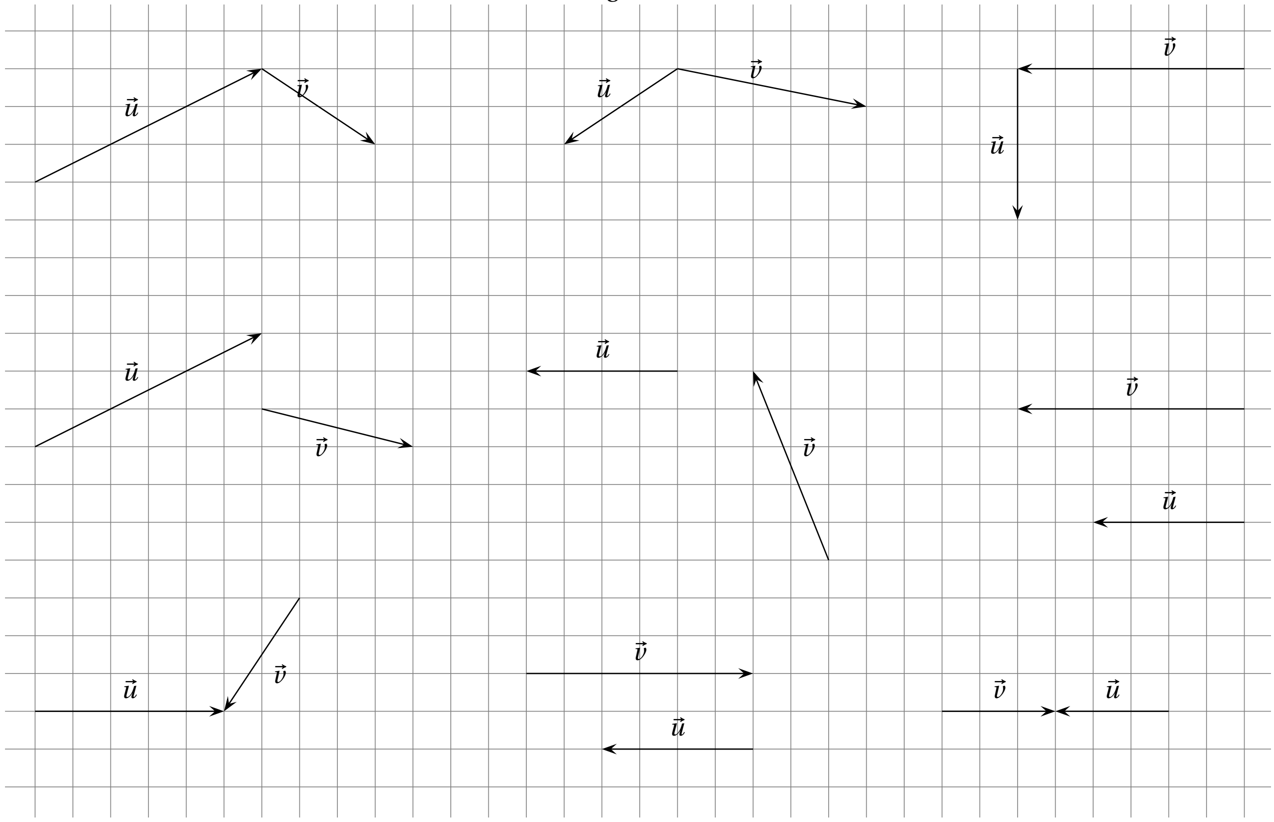
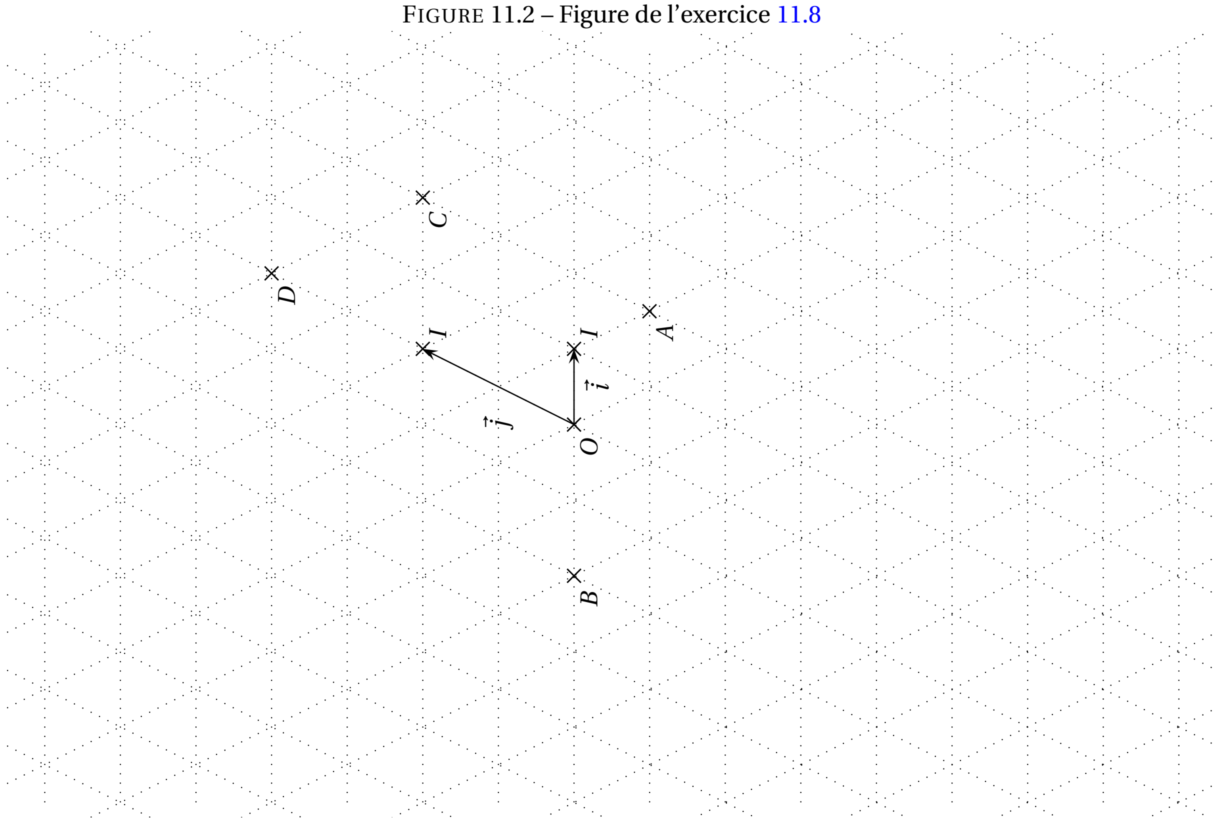


FIGURE 11.2 – Figure de l'exercice 11.8



Propriété 11.6. *Le plan est muni d'un repère.*
Soit $\vec{u}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *et k un réel.*

- *Le vecteur* $\vec{u}+\vec{v}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix} \dots\dots \\ \dots\dots \end{pmatrix}$.
- *Le vecteur* $k\vec{u}$ *a pour coordonnées* $\begin{pmatrix} \dots\dots \\ \dots\dots \end{pmatrix}$.

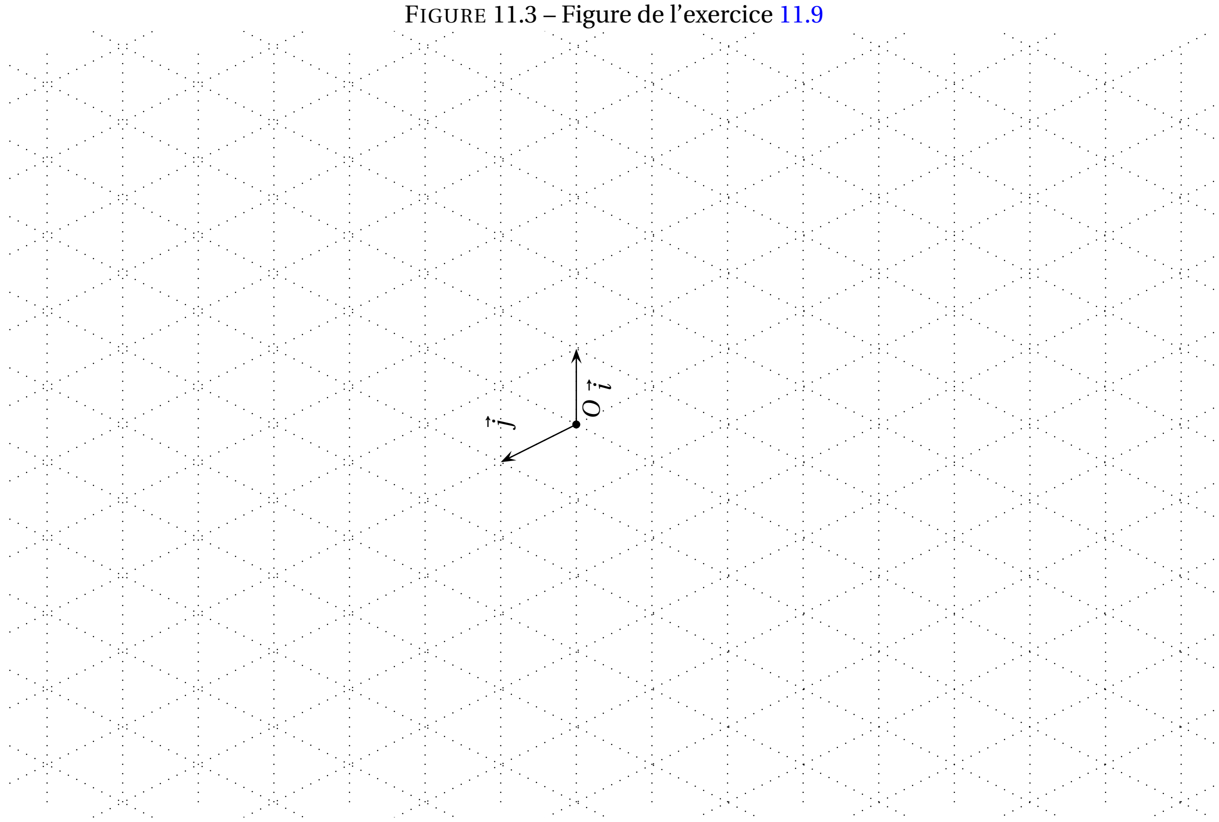
Propriété 11.7. I *milieu de* $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Propriété 11.8. *Le vecteur nul* $\vec{0}$ *a pour coordonnées* $(0;0)$.

EXERCICE 11.9.
Sur la figure 11.3 de la présente page :

1. Placer $A(2;0)$, $B(3;1)$, $C(-1;4)$ et $D(-1;-2)$.
2. (a) Construire un représentant de $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.
   (b) Donner ses coordonnées.
3. (a) Construire un représentant de $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et de $-2\overrightarrow{AD}$.
   (b) Donner les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$ et de $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
   (c) Donner les coordonnées de $\overrightarrow{AD}$ et de $-2\overrightarrow{AD}$.

FIGURE 11.3 – Figure de l'exercice 11.9



11.4 Colinéarité de deux vecteurs

Définition 11.8. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarque. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$ $\left(0\vec{u} = \vec{0}\right)$.

EXERCICE 11.10.
$ABCD$ est un parallélogramme.
E est le symétrique de D par rapport à C et F est le symétrique de D par rapport à A.

1. Dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, déterminer, par lecture graphique et sans justifier, les coordonnées de tous les points de la figure.
2. (a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{FE}$.
   Ces vecteurs sont-ils colinéaires ?
   (b) Démontrer, géométriquement, que les points F, B et E sont alignés.
3. (a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont-ils colinéaires ?
   (b) Démontrer, géométriquement, que les droites (AC) et (FE) sont parallèles.

Ce résultat est général. Plus précisément :

Propriété 11.9. *Soient A, B, C et D quatre points du plan.*

$$A, B, C \text{ alignés} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires}$$

$$(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ colinéaires}$$

On a de plus la propriété suivante :

Propriété 11.10. *Le plan est muni d'un repère. Soient $\vec{u}\,(x\,;\,y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;\,y')$ deux vecteurs du plan. Alors :*

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow xy' - x'y = 0$$

EXERCICE 11.11 (Reprise de l'exercice 4.9 du chapitre 4)**.**
Dans le repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on donne $A(1;2)$, $B(3;1{,}5)$, $C(4;0{,}5)$ et $D(2;0)$;
Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme.

EXERCICE 11.12 (Reprise de l'exercice 4.12 du chapitre 4)**.**
Le plan est muni d'un repère quelconque.
On donne les points $A(-5;3)$, $B(-4;1)$ et $C(1;-4)$.

1. Déterminer les coordonnées de I, milieu de $[AC]$.
2. Déterminer les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

EXERCICE 11.13.
Le plan est muni du repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Soient les points $A(-9;-10)$, $B(2;9)$, $C(5;3)$, $D(-1;-8)$ et $E(3;0)$.

1. Les points C, D et E sont-ils alignés ?
2. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

EXERCICE 11.14.
Le plan est muni du repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Soient les points $A(2;-4)$, $B(-1;3)$, $C(-3;-2)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.
2. Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OD}$
3. Quelles sont les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$?
4. Montrer que E milieu de $[OA]$.

EXERCICE 11.15.
$ABCD$ est un parallélogramme.
A' est le symétrique de A par rapport à B et E est le milieu de $[BC]$.

1. Déterminer les coordonnées des points A', E et D dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$
2. Montrer que les points A', E et D sont alignés

EXERCICE 11.16.
$ABCD$ est un quadrilatère quelconque. I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1. Montrer, à l'aide de la relation de CHASLES, que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
2. Montrer, à l'aide de la relation de CHASLES, que $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire la nature du quadrilatère $IJKL$.

EXERCICE 11.17.
ABC est un triangle quelconque. K est le milieu de $[AC]$, I le milieu de $[BK]$ et J le point tel que $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BJ}$.

1. Faire un figure.
2. Après avoir choisi un repère adapté, calculer les coordonnées des points K, I et J.
3. Démontrer que les points A, I et J sont alignés.

EXERCICE 11.18.
Soit un parallélogramme $ABCD$. On définit deux points E et F par : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

1. Choisir un repère et, dans ce repère, déterminer les coordonnées de tous les points de la figure.
2. Montrer que les droites (DE) et (BF) sont parallèles.
3. On appelle I le point d'intersection des droites (AB) et (DE) et J celui des droites (CD) et (BF).
   Montrer que la droite (IJ) est parallèle à la droite (AD)

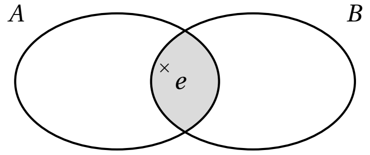
Chapitre 12

Probabilités

Sommaire

12.1 Vocabulaire des ensembles

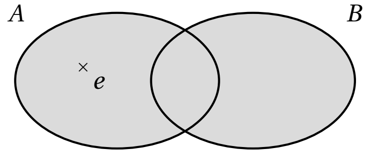
Définition 12.1 (Intersection)**.** L'*intersection* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A et B. On la note $A \cap B$.



Ainsi $e \in A \cap B$ signifie $e \in A$ **et** $e \in B$.

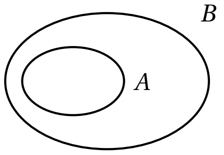
Remarque. Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

Définition 12.2 (Réunion)**.** La *réunion* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B. On la note $A \cup B$.



Ainsi $e \in A \cup B$ signifie $e \in A$ **ou** $e \in B$.

Définition 12.3 (Inclusion)**.** On dit qu'un ensemble A est *inclus* dans un ensemble B si tous les éléments de A sont des éléments de B. On note alors $A \subset B$.



On dit alors que A est une *partie* de B ou que A est un *sous-ensemble* de B.

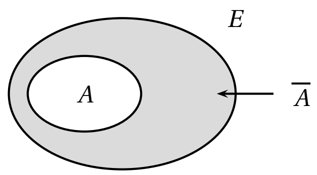
Remarque. $\varnothing$ et E sont toujours des parties de E (partie vide et partie pleine).

On notera $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

Exemples. On a toujours :

- $A \subset A \cup B$;
- $B \subset A \cup B$;
- $A \cap B \subset A$;
- $A \cap B \subset B$;
- $A \cap B \subset A \cup B$;
- $\varnothing \subset A$;
- $\varnothing \cap A = \varnothing$;
- $\varnothing \cup A = A$.

Définition 12.4 (Complémentaire)**.** Soit E un ensemble et A une partie de E. Le *complémentaire* de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On le note $\overline{A}$.



Remarque. $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Définition 12.5 (Cardinal)**.** Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé *cardinal de E*. Ce nombre est noté $\text{Card}(E)$. On convient que $\text{Card}(\varnothing) = 0$.

Exemple. Si $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ alors $\text{Card}(E) = 6$.

Remarque. La notion de cardinal ne s'applique pas aux ensembles infinis (comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc.).

12.2 Expériences aléatoires

12.2.1 Issues, univers

Définition 12.6. L'ensemble de toutes les *issues* d'une *expérience aléatoire* est appelé *univers* (ou univers des possibles). On note généralement cet ensemble Ω.

À notre niveau, Ω sera toujours un ensemble fini.

Exemples.
- On lance un dé et on regarde la face obtenue : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- On lance un dé et on regarde si le numéro de la face obtenue est pair ou impair : $\Omega = \{P; I\}$
- On lance une pièce de monnaie : $\Omega = \{P; F\}$
- On lance deux pièces de monnaie : $\Omega = \{PP; PF; FP; FF\}$
- On lance deux dés : $\Omega = \{(i; j)$ où $1 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 6\}$

Remarquons qu'une même expérience peut déboucher sur des univers différents suivant les hypothèses faites : par exemple, si on lance deux dés et qu'on fait le produit P ou la somme S des deux chiffres obtenus, on obtient respectivement :
- $\Omega_P = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10; 12; 15; 16; 18; 20; 24; 25; 30; 36\}$;
- $\Omega_S = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$.

12.2.2 Événements

Exemple : on lance deux dés et on considère la somme S obtenue. L'ensemble de toutes les issues possibles (univers) est $\Omega = \{2; 3; \cdots; 11; 12\}$.
Le tableau 12.1 page suivante définit le vocabulaire relatif aux *événements* (en probabilité) :

12.3 Loi de probabilité sur un univers Ω

12.3.1 Cas général

Définition 12.7. Soit $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \cdots; \omega_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire.
Définir une loi de probabilité P sur Ω, c'est associer, à chaque événement élémentaire w_i, des nombres $p_i \in [0; 1]$, appelés *probabilités*, tels que :
- $\sum_i p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$;
- la probabilité d'un événement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités p_i des événements élémentaires ω_i qui constituent A.

Remarque. On note aussi : $p_i = p(\{\omega_i\}) = p(\omega_i)$.

TABLE 12.1 – Vocabulaire relatif aux événements en probabilité

Vocabulaire	Signification	Illustration
Événement élémentaire (noté ω)	L'une des issues de la situation étudiée (partie de Ω ne contenant qu'un seul élément)	Obtenir 7 : $\omega = \{7\}$
Événement (notation quelconque)	Ensemble de plusieurs issues (partie de Ω)	Obtenir un nombre pair : $A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$ Obtenir un multiple de trois : $B = \{3; 6; 9; 12\}$ Obtenir une somme supérieure à 10 : $C = \{10; 11; 12\}$ Obtenir une somme inférieure à 6 : $D = \{2; 3; 4; 5; 6\}$
Événement impossible (noté $\varnothing$)	C'est un événement qui ne peut pas se produire (partie vide de Ω)	« Obtenir 13 » est un événement impossible.
Événement certain (noté Ω)	C'est un événement qui se produira obligatoirement (partie de Ω égale à Ω)	« Obtenir entre 2 et 12 » est un événement certain.
Événement « A et B » (noté $A \cap B$)	Événement constitué des issues communes aux 2 événements (intersection de deux parties de Ω)	$A \cap B = \{6; 12\}$
Événement « A ou B » (noté $A \cup B$)	Événement constitué de toutes les issues des deux événements (réunion de deux parties de Ω)	$A \cup B = \{2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12\}$
Événements incompatibles (on note alors $A \cap B = \varnothing$)	Ce sont des événements qui n'ont pas d'éléments en commun (parties disjointes de Ω, c'est-à-dire dont l'intersection est vide)	$C \cap D = \varnothing$ donc C et D sont incompatibles. Par contre, A et B ne le sont pas.
Événements contraires (l'événement contraire de A se note $\overline{A}$)	Ce sont deux événements incompatibles dont la réunion forme la totalité des issues (parties de Ω disjointes dont la réunion est égale à Ω)	Ici, $\overline{A}$ représente l'événement « obtenir une somme impaire ». On a alors : • $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (ensembles disjoints) • $A \cup \overline{A} = \Omega$

Décrire la loi de probabilité revient à indiquer, pour chaque événement élémentaire, sa probabilité. On la présente généralement sous forme de tableau.

Exemple. Soit un dé truqué dont les probabilités d'apparitions des faces sont données par le tableau suivant :

Issue ω	1	2	3	4	5	6
Probabilité $p(\omega)$	0,05	0,05	0,1	0,1	0,2	inconnue

1. Calculer la probabilité de l'événement A = « obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 ».
   D'après la définition, $p(A) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 0,3$ [1].
2. Calculer la probabilité d'obtenir 6 :
   D'après la définition, $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$, donc $p(6) = 0,5$.

Propriété 12.1. *Soit A et B deux événements de Ω, alors :*
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$;
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Remarque. Comme, par définition, la probabilité de l'événement certain est 1 alors la probabilité de l'événement impossible, qui est son contraire, est 0.

1. La notation rigoureuse est $p(\{1\})$ mais on peut noter $p(1)$ quand il n'y a pas de risque de confusion.

12.3.2 Cas particulier : l'équiprobabilité

Définition 12.8. Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont même probabilité, on dit qu'il y a *équiprobabilité* ou que la loi de probabilité est *équirépartie*.

Dans ce cas, la règle de calcul de la probabilité d'un événement A est la suivante :

Propriété 12.2. *Dans une situation d'équiprobabilité sur un univers Ω, pour tout événement élémentaire ω et tout événement A on a :*

- $p(\omega) = \dfrac{1}{Card(\Omega)}$
- $p(A) = \dfrac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}} = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$

Certaines expériences ne sont pas des situations d'équiprobabilité, mais on peut parfois s'y ramener tout de même.

Exemple. On lance deux dés équilibrés et on s'intéresse à la somme des deux dés.
L'univers est $\Omega = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ mais il n'y a pas équiprobabilité car chaque événement n'a pas la même probabilité. Ainsi il est plus difficile d'obtenir 2 que 7.
On se ramène à une situtation d'équiprobabilité : chaque dé étant équilibré, on a équiprobabilité sur chaque dé (chaque face à une probabilité de $\frac{1}{6}$).
Il reste à déterminer la façon d'obtenir chaque somme. Le tableau ci-dessous résume les possibilités pour chaque dé et la somme obtenue :

dé 1 \ dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Chaque « case » étant équiprobable ($\frac{1}{36}$) on obtient :

ω_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

12.4 Exercices

EXERCICE 12.1.
On jette un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au numéro apparaissant sur la face supérieure.

1. Décrire l'ensemble Ω, univers associé à cette expérience aléatoire.
2. Écrire sous forme de partie (d'ensemble) de Ω les événements :
   - A : « obtenir un numéro inférieur ou égal à 2 » ;
   - B : « obtenir un numéro impair » ;
   - C : « obtenir un numéro strictement supérieur à 4 ».
3. Pour chacun des événements suivants, les écrire sous forme de partie de Ω et les décrire par une phrase la plus simple possible.
   - $A \cup B$;
   - $A \cup C$;
   - $C \cup B$;
   - $\overline{A}$;
   - $\overline{A} \cap C$;
   - $A \cap B$;
   - $A \cap C$;
   - $C \cap B$;
   - $\overline{A} \cup C$;

EXERCICE 12.2.
On choisit au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il d'issues possibles ?
2. On considère les événements :
   - A : « obtenir un as » ;
   - P : « obtenir un pique ».

   (a) Combien y a-t-il d'éventualités dans A ?

   (b) Combien y a-t-il d'éventualités dans P ?

   (c) Traduire par une phrase les événements $A \cap P$ et $A \cup P$.

   (d) Déterminer Card$(A \cap P)$ et Card$(A \cup P)$.

EXERCICE 12.3.
E est l'ensemble des nombres de 1 à 20 inclus. On choisit au hasard l'un de ces nombres.

1. Quelle est la probabilité des événements suivants :
   - A : « il est un multiple de 2 »
   - B : « il est un multiple de 4 »
   - C : « il est un multiple de 5 »
   - D : « il est un multiple de 2 mais pas de 4 »
2. Calculer la probabilité de :
   - $A \cap B$;
   - $A \cup B$;
   - $A \cap C$;
   - $A \cup C$.

EXERCICE 12.4.
Pour se rendre à son travail, un automobiliste rencontre trois feux tricolores. On suppose que les feux fonctionnent de manière indépendante, que l'automobiliste s'arrête s'il voit le feu orange ou rouge et qu'il passe si le feu est vert. On suppose de plus que chaque feu est vert durant un temps égal à rouge et orange (autrement dit, l'automobiliste à autant de chance de passer que de s'arrêter).

1. Faire un arbre représentant toutes les situations possibles.
2. Quelle est la probabilité que l'automobiliste ait :
   (a) les trois feux verts ?
   (b) deux des trois feux verts ?

EXERCICE 12.5.
Deux lignes téléphoniques A et B arrivent à un standard.
On note :

- E_1 : « la ligne A est occupé » ;
- E_2 : « la ligne B est occupée ».

Après étude statistique, on admet les probabilités :

- $p(E_1) = 0,5$;
- $p(E_2) = 0,6$;
- $p(E_1 \cap E_2) = 0,3$.

Calculer la probabilité des événements suivants :

- F : « la ligne A est libre » ;
- G : « une ligne au moins est occupée » ;
- H : « une ligne au moins est libre ».

EXERCICE 12.6.
On considère un jeu de 32 cartes (la composition d'un jeu de 32 cartes est la suivante : 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; valet ; dame ; roi ; as pour chacune des 4 « couleurs » : coeur ; carreau ; trèfle et pique.)
On tire, au hasard, une carte du paquet, chaque carte ayant autant de chance d'être choisie. On considère les événements suivants :

- V : « Obtenir un valet » ;
- F : « Obtenir une figure [2] » ;
- T : « Obtenir un trèfle ».

1. Calculer les probabilités suivantes :
   - $p(V)$;
   - $p(F)$;
   - $p(T)$.
2. Décrire l'événement $F \cap T$ puis calculer sa probabilité $p(F \cap T)$.
   En déduire la probabilité $p(F \cup T)$ d'obtenir une figure ou un trèfle.
3. Décrire l'événement $\overline{F}$ et calculer (simplement !) sa probabilité $p(\overline{F})$.

EXERCICE 12.7.
Un couple de futurs parents décide d'avoir trois enfants. On fait l'hypothèse qu'ils auront, à chaque fois, autant de chances d'avoir un garçon qu'une fille et qu'il n'y aura pas de jumeaux. Calculer la probabilité des événements :

- A : « ils auront trois filles » ;
- B : « ils auront trois enfants de même sexe » ;
- C : « ils auront au plus une fille » ;
- D : « les trois enfants seront de sexes différents ».

EXERCICE 12.8.
Un dé (à 6 faces) est truqué de la façon suivante : chaque chiffre pair a deux fois plus de chance de sortir qu'un numéro impair.

1. Calculer la probabilité d'obtenir un 6.
2. On lance deux fois le dé.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un chiffre pair.
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un 6.

2. Les figures sont les valets, les dames et les rois

EXERCICE 12.9.
Un sac contient quatre jetons rouges, trois jetons verts et deux jetons bleus.

1. On tire des jetons, avec remise après tirage, jusqu'à obtention d'un jeton de même couleur qu'un des jetons précédemment tirés.
   Calculer la probabilité que les deux jetons de même couleur soient bleus.
2. Même question si on tire les jetons sans remise.

EXERCICE 12.10.
Dans une loterie, 100 billets sont vendus et il y a 7 billets gagnants. Quelle est la probabilité de gagner au moins un lot si on achète :

- Un billet ?
- Deux billets ?

EXERCICE 12.11.
Les données du tableau ci-dessous sont celles de l'année scolaire pour les Premières générales à Dupuy de Lôme pour l'année scolaire 2004–2005 :

	1 ES	1 S	1 L	Total
Filles	76	92	50	218
Garçons	43	76	13	132
Total	119	168	63	350

Les fiches de tous les élèves, indiquant leur filière et leur sexe, sont rangées dans un armoire et on prend au hasard dans cette armoire une fiche.

1. Déterminer les probabilités des évènements suivants :
   - A : La fiche est celle d'une fille ;
   - B : La fiche est celle d'un élève en 1S ;
   - C : La fiche est celle d'un garçon et d'un élève en 1L ;
   - D : La fiche est celle d'une fille ou d'un élève en 1ES.
2. Décrire avec une phrase les évènements suivant puis donner leur probabilité :
   - $\overline{A}$;
   - $A \cap B$;
   - $A \cup B$.

Devoir surveillé n°11

Probabilités – Vecteurs

EXERCICE 11.1 (7,5 points)**.**
Un magasin fait une étude sur les modes de paiement des clients et les montants m des achats (en euros) et obtient les résultats suivants :

	Carte bancaire	Espèces	Chèque	Total
$m < 10$	18	12	0	30
$10 \leqslant m \leqslant 20$	18	8	7	33
$m > 20$	30	0	7	37
Total	66	20	14	100

Une caissière enregistre un achat.

1. Déterminer les probabilités des évènements suivants :
   - A : « C'est un achat d'un montant strictement supérieur à 20 € » ;
   - B : « C'est un achat payé par carte bancaire » ;
   - C : « C'est un achat d'un montant compris en 10 € et 20 € et payé en espèces » ;
   - D : « C'est un achat payé par chèque ou d'un montant compris en 10 € et 20 € ».
2. Décrire avec une phrase les évènements suivant puis donner leur probabilité :
   - $\overline{A}$;
   - $A \cap B$;
   - $A \cup B$.

EXERCICE 11.2 (5 points)**.**
On suppose qu'à chaque naissance il y a la même probabilité d'avoir une fille ou un garçon et on s'intéresse aux familles de deux enfants qui n'ont pas eu de jumeaux.

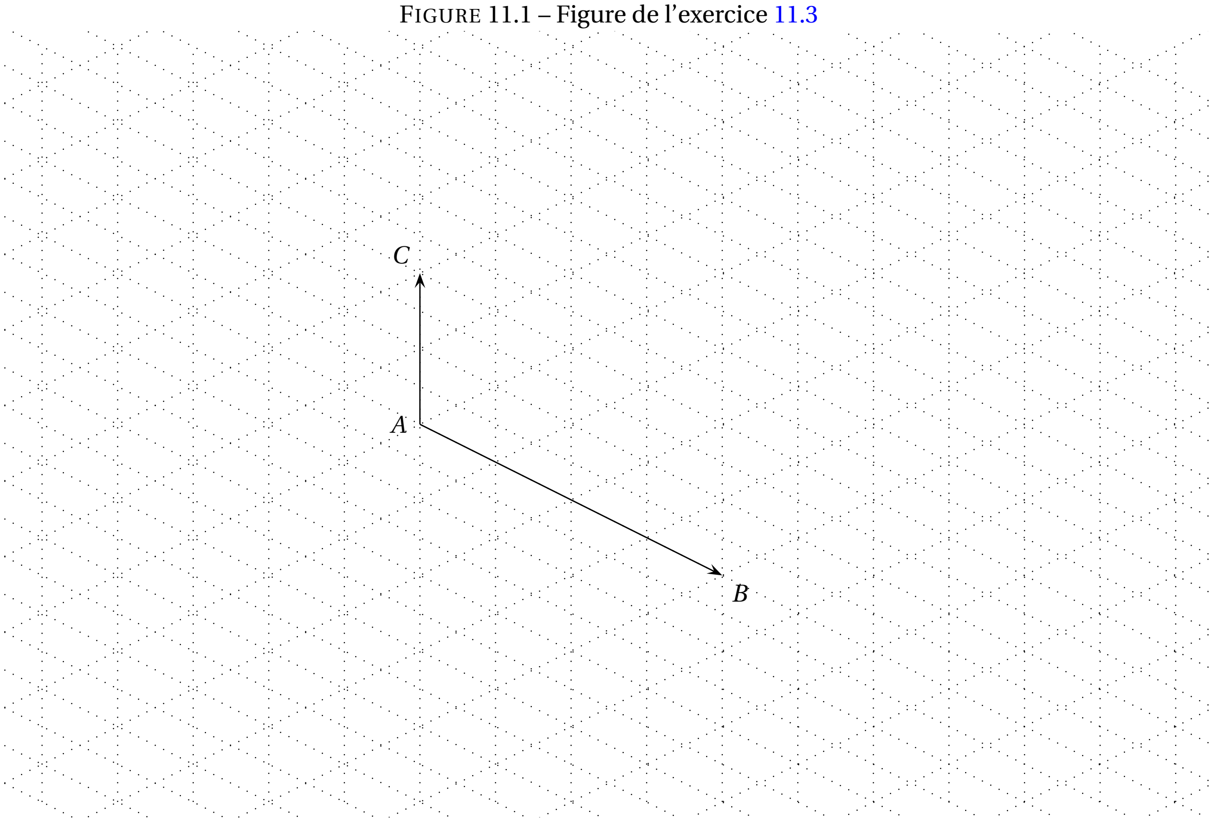
1. Faire un arbre décrivant toutes les issues possibles.
2. Déterminer les probabilités des évènements suivants :
   - A : « Les deux enfants sont des garçons » ;
   - B : « Les deux enfants sont de même sexe » ;
   - C : « Il y a au moins un garçon » ;
   - D : « Il y a au plus une fille » ;

EXERCICE 11.3 (7,5 points)**.**
On donne sur la figure 11.1 de la présente page un triangle ABC non aplati.
On se place pour tout l'exercice dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.
Les points A, B et C ont donc pour coordonnées respectives $(0\,;0)$, $(1\,;0)$ et $(0\,;1)$.
On définit les points D, E, I et G de la manière suivante :

- D est le point tel que $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;
- E est le point tel que $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;
- I est le milieu du segment $[DE]$;
- G est le point de coordonnées $\left(\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\right)$.

1. Construire les points D, E, I et G.
2. Coordonnées de D, E et I.
   (a) Soient $(x_D\,;y_D)$ les coordonnées de D.
   Expliquer pourquoi on a $\begin{pmatrix} x_D \\ y_D-1 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   En déduire que $x_D=\frac{1}{2}$ et que $y_D=1$.
   (b) Démontrer E a pour coordonnées $\left(1\,;\frac{1}{2}\right)$.
   (c) En déduire que les coordonnées de I sont $\left(\frac{3}{4}\,;\frac{3}{4}\right)$.
3. (a) Montrer que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$ sont $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   (b) Montrer que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{ED}$ sont $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
   (c) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires.
   (d) Que peut-on en déduire ?
4. Montrer que les points A, G et I sont alignés.
5. Montrer que $GBIC$ est un parallélogramme.

FIGURE 11.1 – Figure de l'exercice 11.3



Chapitre 13

Fonction inverse
Fonctions homographiques

Sommaire

13.1 Activités

ACTIVITÉ 13.1 (Fonction inverse)**.**
Chauqe année, un célèbre magazine automobile organise le concours du véhicule écologique le plus performant. Il s'agit de parcourir un kilomètre sur une piste aménagée, avec comme seul carburant de l'eau, du vent ou du soleil. On désigne par v la vitesse moyenne d'un véhicule (en kilomètres par heure) et par $f(v)$ le temps (en heures) nécessaire pour parcourir la piste.
On rappelle que la vitesse moyenne v est donnée par $\frac{d}{t}$ où d désigne la distance parcourue et t le temps mis pour parcourir cette distance.

1. (a) Donner l'expression de la fonction f en fonction de la vitesse v.

   (b) Compléter le tableau suivant :

v	0,1	0,25	0,5	0,75	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(v)$														

   (c) Le tableau précédent est-il un tableau de proportionnalité ?

2. (a) On se place dans un repère orthornormé où une unité représente 1 kilomètre par heure en abscisse et 1 heure en ordonnée. Représenter graphiquement la fonction f dans ce repère.

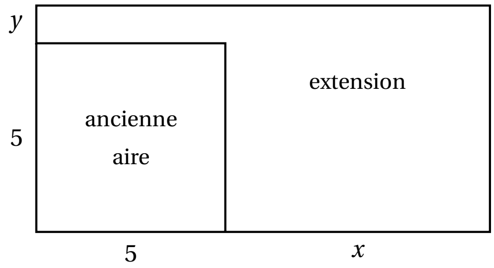
   (b) Reconnaît-on la représentation graphique d'une fonction affine ? D'une fonction trinôme ?

3. Cette année, deux véhicules se sont particulièrement distingués : le véhicule « Solaria 2200 » et le véhicule « WindBolide ».

   (a) Solaria 2200 a parcouru la piste à la vitesse de 9,5 kilomètre par heure. Donner un encadrement de son temps de parcours.

   (b) WindBolide, quant à lui, a eu besoin de 3 heures pour faire le parcours. Donner un encadrement de sa vitesse moyenne.

ACTIVITÉ 13.2 (Fonction homographique)**.**
La petite station balnéaire de Port-Soleil est de plus en plus fréquentée. Aussi pour satisfaire les vacanciers, le maire a-t-il décidé d'agrandir l'aire de jeu. Actuellement, cette aire a la forme d'un carré de 5 mètres de côté. Le responsable du projet propose d'allonger chacun de ses côtés pour lui donner la forme rectangulaire ci-dessous :



1. Exprimer l'aire de cette nouvelle aire de jeu en fonction de x et y.
2. Les contraintes budgétaires de la commune font que la surface de la nouvelle aire de jeu devra être de 100 mètres carrés.
   Démontrer que $y = \frac{100}{5+x} - 5$.
   Quelle information le maire doit-il donner à l'entrepreneur : x, y ou les deux ?
3. On considère la fonction f définie pour $x \geqslant 0$ par $f(x) = \frac{100}{5+x} - 5$.
   (a) La valeur de y est limitée à 5 mètres par le bord de mer. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
   (b) Représenter la fonction f avec la calculatrice sur l'intervalle $[5;15]$.
   (c) Quelles semblent être les variations de f sur l'intervalle $[5;15]$?
   (d) Parmi les deux valeurs suivantes de x, laquelle donne à la nouvelle aire de jeu la plus grand périmètre : $x_1 = 5\,\text{m}$ ou $x_2 = 10\,\text{m}$?

13.2 Fonction inverse

Définition 13.1. On appelle *fonction inverse* la fonction définie pour tout réel $x \neq 0$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Sa courbe représentative est une *hyperbole*.

Propriété 13.1. *La fonction inverse est strictement décroissante pour $x \in]-\infty;0[$ et strictement décroissante pour $x \in]0;+\infty[$.*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

Preuve. Rappelons qu'une fonction f est dite strictement décroissante sur un intervalle I si, pour tous a et b de cet intervalle, $a < b$ implique que $f(a) > f(b)$ (on dit qu'elle inverse l'ordre). Soient x et y deux réels non nuls.
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y}{xy} - \frac{x}{xy} = \frac{y-x}{xy}$
- Si $x < y < 0$ alors $y - x > 0$ et $xy > 0$ donc $\frac{y-x}{xy} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ donc la fonction est bien strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.
- Si $0 < x < y$ alors $y - x > 0$ et $xy > 0$ donc $\frac{y-x}{xy} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ donc la fonction est bien strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

◇

De la propriété précédente, on en déduit immédiatement :

Propriété 13.2. *Si a et b positifs tels que $a < b$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.*
Si a et b négatifs tels que $a < b$, alors $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

13.3 Fonctions homographiques

Définition 13.2. Toute fonction pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ est appelée *fonction homographique.*
Elle est définie pour tout x tel que $cx + d \neq 0$, c'est-à-dire sur $\left]-\infty ; -\frac{d}{c}\right[\cup \left]-\frac{d}{c} ; +\infty\right[$

Sa courbe est une hyperbole.

Propriété 13.3. *Toute fonction trinôme peut s'écrire sous la forme* $f(x) = \frac{\lambda}{x-\alpha} + \beta$.

On l'admettra.

Propriété 13.4. *Soit* $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ *une fonction homographique. Alors* f *a les variations résumées dans l'un des tableaux ci-dessous :*

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$	↘	‖	↘

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$	↗	‖	↗

On l'admettra.

13.4 Exercices

13.4.1 Technique

EXERCICE 13.1.
En s'aidant éventuellement de la courbe de la fonction inverse ou de son tableau de variation, compléter :

1. Si $x > 3$ alors .... $\frac{1}{x}$ ....
2. Si $x < -\sqrt{2}$ alors ...... $\frac{1}{x}$ ......
3. Si $x > 2$ alors .... $\frac{1}{x}$ ....
4. Si $x < -3$ alors .... $\frac{1}{x}$ ....
5. Si $x < 4$ alors .... $\frac{1}{x}$ ....
6. Si $x > -10$ alors .... $\frac{1}{x}$ ....
7. Si $x < 1$ alors .... $\frac{1}{x}$ ....
8. Si $x > -5$ alors .... $\frac{1}{x}$ ....

EXERCICE 13.2.
On considère les fonctions f et g définies pour tout x non nul par $f(x) = \frac{4}{x}$ et $g(x) = -\frac{2}{x}$.

1. (a) Tracer la courbe représentative de f sur la calculatrice ? Que peut-on conjecturer concernant les variations de f ?
   (b) Soient $0 < a < b$.
   Que peut-on dire alors de $\frac{1}{a}$ et de $\frac{1}{b}$?
   Que peut-on dire alors de $4 \times \frac{1}{a}$ et de $4 \times \frac{1}{b}$?
   En déduire le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.
   (c) Faire de même en partant de $a < b < 0$.
2. Mêmes questions avec la fonction g.

EXERCICE 13.3.
Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes, en justifiant votre réponse :

1. Une fonction homographique est toujours définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Une fonction homographique peut être définie sur $\mathbb{R}$ privé de 1 et 3.
3. La fonction $f(x) = \frac{2-x}{10-x}$ est une fonction homographique.
4. La fonction $g(x) = \frac{2}{2-5x} + \frac{1}{4-10x}$ est une fonction homographique.
5. La fonction $h(x) = \frac{2}{2-5x} + \frac{1}{4-6x}$ est une fonction homographique.
6. La fonction $i(x) = \frac{x^2+1}{x+4}$ est une fonction homographique.

EXERCICE 13.4.
Déterminer les ensembles de définition des fonctions homographiques suivantes et les valeurs de x pour lesquelles elles s'annulent :

- $f : x \longmapsto \frac{3x+1}{2x+4}$
- $g : x \longmapsto \frac{x+5}{x+4}$
- $h : x \longmapsto \frac{2x+3}{3x+4}$
- $i : x \longmapsto \frac{x-1}{3x+1}$

EXERCICE 13.5.
Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\frac{2x+1}{x-4} = 0$
2. $\frac{-x+4}{2x-1} = 0$
3. $\frac{-3x+4}{-2x-1} = 2$
4. $\frac{3x+4}{x+4} = 8$
5. $\frac{x-4}{x-1} = -2$
6. $\frac{2x-5}{x-6} \geqslant 0$
7. $\frac{5x-2}{-3x+1} < 0$
8. $\frac{3x}{4x+9} > 0$
9. $\frac{2x-10}{11x+2} \leqslant 0$

13.4.2 Études de variation de fonctions homographiques

EXERCICE 13.6.
On s'intéresse à la fonction f telle que $f(x) = \frac{x+4}{x+1}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Démontrer que pour tout $x \neq -1$ on a $f(x) = 1 + \frac{3}{x+1}$.
3. Soient a et b tels que $-1 < a < b$.
   (a) Compléter successivement les encadrements successifs :
$$\begin{array}{ccccc}
\dots & < & a & < & b \\
\dots & \dots & a+1 & \dots & b+1 \\
 & & \dfrac{1}{a+1} & \dots & \dfrac{1}{b+1} \\
 & & \dfrac{3}{a+1} & \dots & \dfrac{3}{b+1} \\
 & & 1+\dfrac{3}{a+1} & \dots & 1+\dfrac{3}{b+1} \\
 & & f(a) & \dots & f(b)
\end{array}$$
   (b) En déduire le sens de variation de f sur $]-1\,;+\infty[$.
4. Déterminer de la même manière le sens de variation de f sur $]-\infty\,;-1[$.

EXERCICE 13.7.
On s'intéresse à la fonction f telle que $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Démontrer que pour tout $x \neq -2$ on a $f(x) = 1 - \frac{1}{x+2}$.
3. En utilisant une des deux expressions de f, résoudre les équations ou inéquations suivantes :
   (a) $f(x) = 0$ (b) $f(x) = 1$ (c) $f(x) < 0$
4. Soient a et b tels que $-2 < a < b$.
   (a) Compléter successivement les encadrements successifs :
$$\begin{array}{ccccc}
\dots & < & a & < & b \\
\dots & \dots & a+2 & \dots & b+2 \\
 & & \dfrac{1}{a+2} & \dots & \dfrac{1}{b+2} \\
 & & -\dfrac{1}{a+2} & \dots & -\dfrac{1}{b+2} \\
 & & 1-\dfrac{1}{a+2} & \dots & 1-\dfrac{1}{b+2} \\
 & & f(a) & \dots & f(b)
\end{array}$$
   (b) En déduire le sens de variation de f sur $]-2\,;+\infty[$.
5. Déterminer de la même manière le sens de variation de f sur $]-\infty\,;-2[$.

EXERCICE 13.8.
On s'intéresse à la fonction f telle que $f(x) = \frac{2x-5}{3-x}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Démontrer que pour tout $x \neq 3$ on a $f(x) = \frac{1}{3-x} - 2$.
3. Soient a et b tels que $3 < a < b$.
   (a) Compléter successivement les encadrements successifs :

$$\begin{array}{ccccc}
\ldots & < & a & < & b \\
\ldots & \ldots & -a & \ldots & -b \\
\ldots & \ldots & 3-a & \ldots & 3-b \\
 & & \dfrac{1}{3-a} & \ldots & \dfrac{1}{3-b} \\
 & & \dfrac{1}{3-a}-2 & \ldots & \dfrac{1}{3-b}-2 \\
 & & f(a) & \ldots & f(b)
\end{array}$$

   (b) En déduire le sens de variation de f sur $]3\,; +\infty[$.
4. Déterminer de la même manière le sens de variation de f sur $]-\infty\,; 3[$.

EXERCICE 13.9.
On s'intéresse à la fonction f telle que $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Démontrer que pour tout $x \neq -3$ on a $f(x) = 2 - \frac{7}{x+3}$.
3. Déterminer le sens de variation de f sur $]-3\,; +\infty[$.

13.4.3 Problèmes

EXERCICE 13.10.
ABC est un triangle, M est un point du segment $[AB]$ et N est le point de $[AC]$ tel que $(MN) \parallel (BC)$.
On donne $AB = x$, $MB = 2$ et $MN = 4$ et on suppose que $x > 2$.

1. Exprimer la longueur BC en fonction de x.
2. On appelle $\ell(x)$ la longueur BC.
   (a) Montrer que $\ell(x) = 4 + \frac{8}{x-2}$.
   (b) Démontrer que la fonction ℓ est décroissante sur $]2\,; +\infty[$.
3. Calculer x pour que $BC = 5$.
4. Peut-on avoir $BC = 1\,000$?

EXERCICE 13.11.
Lors d'un branchement en parallèle (on dit aussi en dérivation) de deux résistances R_1 et R_2, les physiciens savent qu'une loi permet de remplacer ces deux résistances par une seule résistance R à condition qu'elle vérifie la relation :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Dans cet exercice, les résistances sont exprimées en ohms, avec $R_1 = 2$ et $R_2 = x$.

1. Démontrer que $R = \frac{2x}{x+2}$.
2. On considère la fonction r définie sur $[0\,; +\infty[$ par $r(x) = \frac{2x}{x+2}$.
   (a) Montrer que $r(x) = 2 - \frac{4}{x+2}$.
   (b) Démontrer que r est croissante sur $[0\,; +\infty[$.
   (c) Démontrer que pour tout x positif on a $0 \leqslant r(x) < 2$.
   (d) Dresser la tableau des variations de r.
3. Comment choisir R_2 pour avoir $R = 1{,}5\,\Omega$.

Chapitre 14

Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique

Sommaire

14.1 Enroulement de la droite des réels

Définition 14.1 (Orientation d'un cercle, du plan, cercle trigonométrique)**.** On se place dans le plan.

- Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé *sens direct* (ou positif). L'autre sens est appelé *sens indirect* (négatif ou rétrograde).
- Orienter le plan, c'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens. L'usage est de choisir pour sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre (appelé aussi *sens trigonométrique*).
- Un cercle trigonométrique est un cercle orienté dans le sens direct et de rayon 1. Lorsque le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, le cercle trigonométrique est le cercle orienté dans le sens direct, de centre O et de rayon 1.

ACTIVITÉ 14.1.

Soit un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 et la droite D d'équation $x = 1$ qui coupe l'axe (Ox) en I.

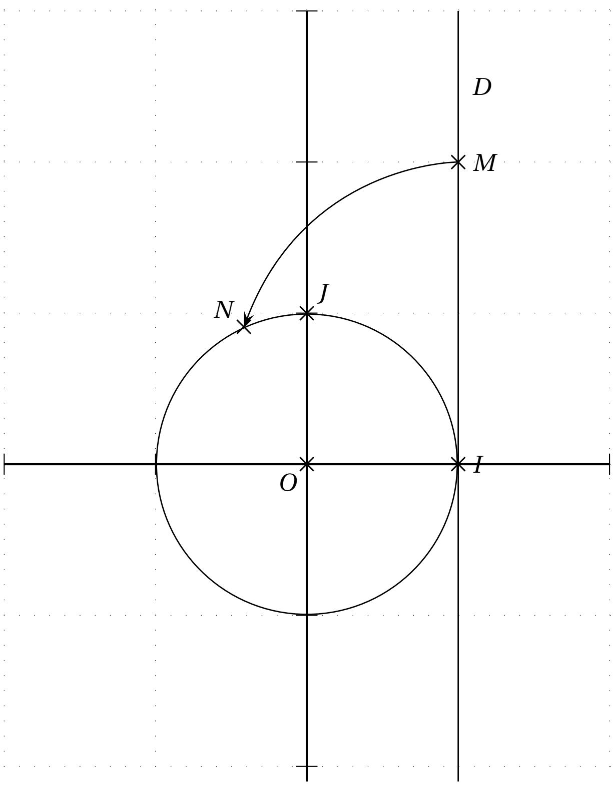
À tout nombre a, on associe le point M de la droite D, d'abscisse 1 et d'ordonnée a.

« L'enroulement » de la droite D autour du cercle $\mathscr{C}$ met en coïncidence le point M avec un point N de $\mathscr{C}$.

Plus précisément, si a est positif, le point N est tel que $\overset{\frown}{IN} = IM = a$, l'arc étant mesuré dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et, si a est négatif, le point N est tel que $\overset{\frown}{IN} = IM = |a|$, l'arc étant mesuré dans le sens des aiguilles d'une montre.

Le point N est le point du cercle $\mathscr{C}$ associé au nombre a.

1. Placer les points M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8, M_9 de la droite D dont les ordonnées respectives sont : $0;\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{3};-\frac{\pi}{3};\pi;-\pi;2\pi$ et -2π (refaire le dessin sur sa feuille au besoin).
2. Placer les points N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9 du cercle associés à ces nombres.
3. Indiquer un nombre associé à chacun des points I, J, $B(-1;0)$ et $B'(0;-1)$.
4. Existe-t-il plusieurs nombres associés à un même point ? Donner quatre nombres associés au point J.



14.2 Une nouvelle unité de mesure des angles : le radian

Dans la suite du chapitre, on suppose que le plan est orienté dans le sens trigonométrique.

Définition 14.2. La mesure d'un angle en radian est égale à la longueur de l'arc de cercle que cet angle intercepte sur le cercle trigonométrique.

Avec les notations de l'activité précédente, la mesure de l'angle $\widehat{ION}$ en radian est égale à la longueur $\overset{\frown}{IN}$, c'est-à-dire à a.

EXERCICE 14.1.
Compléter le tableau suivant :

Mesure de l'arc $\overset{\frown}{IN}$	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π	2π
Mesure en radian de l'angle $\widehat{ION}$							
Mesure en degré de l'angle $\widehat{ION}$							

14.3 Cosinus et sinus d'un réel x

ACTIVITÉ 14.2.
Compléter le tableau suivant :

Mesure de l'arc $\overset{\frown}{IN}$	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π	2π
Abscisse de N							
Ordonnée de N							

Définition 14.3. Soit x un réel et $N\,(x_n\,;\,y_n)$ le point qui lui est associé par enroulement sur le cercle trigonométrique. Alors on a :

$$\cos x = x_n \quad \sin x = y_n \quad \text{et, quand } \cos x \neq 0, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Propriété 14.1. *Pour tout réel x on a :*

- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$
- $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
- $\cos(x + 2\pi) = \cos x$
- $\cos(-x) = \cos x$
- $\sin(x + 2\pi) = \sin x$
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

EXERCICE 14.2.

1. Compléter le tableau suivant :

x	-2π	$-\pi$	$-\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{3}$	$-\dfrac{\pi}{4}$	$-\dfrac{\pi}{6}$	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π	2π
$\cos x$													
$\sin x$													
$\tan x$													

2. Tracer dans trois repères orthogonaux (ordonnées : 5 cm = une unité ; abscisses : 6 cm = π unités) les courbes représentatives des fonctions sinus, cosinus et tangente.
3. Dresser le tableau des variations de ces fonctions pour $x \in [-2\pi\,;\,2\pi]$