

Mathématiques en Terminale ES
Enseignement de spécialité

David ROBERT

2009–2010

Sommaire

1 Graphes : premières notions	1
1.1 Premières définitions et propriétés	1
1.1.1 Quelques problèmes	1
1.1.2 Premières définitions et propriétés	2
1.1.3 Vocabulaire de base : graphes, sommets, arêtes	2
1.1.4 Graphes complets	3
1.1.5 Sous-graphes	4
1.1.6 Chaînes et connexité	4
1.2 Graphes eulériens	6
1.2.1 Quelques problèmes	6
1.2.2 D'autres définitions et propriétés	10
1.3 Exercices	11
Devoir maison n°1 : Graphes eulériens	15
2 Géométrie dans l'espace	17
2.1 Quelques rappels	17
2.1.1 Quelques règles d'incidence	17
2.1.2 Repérage dans l'espace	17
2.2 Équation cartésienne d'un plan	18
2.2.1 Équation cartésienne d'un plan	18
2.2.2 Vecteur normal à un plan	18
2.2.3 Propriétés des plans et équations cartésiennes	18
2.2.4 Équations particulières	19
2.3 Système d'équations cartésiennes d'une droite	19
2.3.1 Cas général	19
2.3.2 Système d'équations cartésiennes des axes	19
2.4 Exercices	20
2.4.1 Géométrie dans l'espace	20
2.4.2 Équations de plans	22
2.4.3 Équations de droites	24
3 Rappels et compléments sur les suites	25
3.1 Définition, vocabulaire et notations	25
3.2 Représentation graphique d'une suite	25
3.2.1 Cas général	25
3.2.2 Cas d'une suite définie par récurrence	26
3.3 Monotonie d'une suite	26
3.4 Suites majorées, minorées, bornées	26
3.5 Suites convergentes	27
3.6 Démonstration par récurrence	27
3.7 Quelques suites particulières	27
3.7.1 Suites arithmétiques	27
3.7.2 Suites géométriques	28
3.8 Exercices	30

4	Comptage de chaînes, graphes orientés	35
4.1	Comptage de chaînes	35
4.1.1	Un problème	35
4.1.2	Une solution	35
4.2	Graphes orientés	36
4.2.1	Généralités	36
4.2.2	Matrice d'un graphe orienté	36
4.3	Exercices	37
5	Colorations de graphes	41
5.1	Problèmes	41
5.2	Bilan et compléments	42
5.2.1	Coloration d'un graphe et nombre chromatique	42
5.2.2	Minorant du nombre chromatique	42
5.2.3	Majorant du nombre chromatique	42
5.2.4	Un exemple	43
5.3	Exercices	44
6	Suites arithmético-géométriques	47
6.1	Un exemple	47
6.2	Bilan et compléments	47
6.3	Exercices	48
	Devoir maison n°2 : Suites	51
	Corrigé du devoir maison n°2 : Suites	52
7	Graphes étiquetés	53
7.1	Quelques exemples	53
7.1.1	Le jeu du labyrinthe	53
7.1.2	Un digicode	54
7.1.3	Reconnaissance de modèles	55
7.2	Récapitulation : définitions et résultats	55
7.3	Exercices	57
8	Graphes pondérés	59
8.1	Définition	59
8.2	Un problème	59
8.3	L'algorithme de DIJKSTRA	60
8.4	Exercices d'annales	64
9	Suites récurrentes doubles	69
9.1	Un exemple	69
9.1.1	Obtention d'une formule explicite	69
9.1.2	Par le calcul matriciel	69
9.2	Bilan	70
9.3	Exercices	70
10	Graphes probabilistes	73
10.1	Quelques exemples	73
10.1.1	Une évolution de population	73
10.1.2	Maladie	74
10.1.3	L'allumeur de réverbères	74
10.2	Cas général : graphes probabilistes à p états	75
10.3	Un cas particulier : les graphes probabilistes à 2 états	76
10.4	Exercices	77
10.4.1	Annales	79

11 Fonctions de deux variables	83
11.1 Rappels	83
11.1.1 Généralités	83
11.1.2 Représentation graphique d'une fonction de deux variables	84
11.2 Optimisation sous contrainte	86
11.3 Exercices	87

Chapitre 1

Graphes : premières notions

Sommaire

1.1 Premières définitions et propriétés	1
1.1.1 Quelques problèmes	1
1.1.2 Premières définitions et propriétés	2
1.1.3 Vocabulaire de base : graphes, sommets, arêtes	2
1.1.4 Graphes complets	3
1.1.5 Sous-graphes	4
1.1.6 Chaînes et connexité	4
1.2 Graphes eulériens	6
1.2.1 Quelques problèmes	6
1.2.2 D'autres définitions et propriétés	10
1.3 Exercices	11

1.1 Premières définitions et propriétés

1.1.1 Quelques problèmes

PROBLÈME 1.1 (Matches de football).

Une ligue de football comporte cinq équipes.

- Il est décidé par le bureau de la ligue que lors d'un week-end d'entraînement, chaque équipe jouera quatre matches (deux équipes ne peuvent pas se rencontrer plus d'une fois). Comment l'organiser (chacun est libre de ses règles d'organisation) ?
- Le calendrier étant trop chargé, les organisateurs décident que chaque équipe ne jouera que trois matches. Comment l'organiser ?

PROBLÈME 1.2 (Segments).

Comment tracer 5 segments sur une feuille, de telle manière que chaque segment en coupe exactement 3 autres ?

PROBLÈME 1.3 (Poignées de main).

M. et Mme EULER assistent à une réunion. Il y a trois autres couples dans l'assistance : certains participants à la réunion se saluent en se serrant la main.

- Personne ne serre sa propre main et les époux ne se serrent pas la main.
 - Deux personnes quelconques de l'assemblée se serrent la main au plus une fois.
 - M. EULER constate que les sept autres personnes ont échangé des poignées de mains en nombres tous distincts.
- Combien de poignées de mains M. et Mme Euler ont-ils échangé avec les autres membres de la réunion ?

PROBLÈME 1.4 (Ouverture de magasins).

Une chaîne de cinq magasins décide d'ouvrir ses magasins en nocturne avec les contraintes suivantes :

- les deux premiers magasins ne peuvent pas être ouverts ensemble ;
- il en est de même pour les deux derniers ;
- au plus un seul magasin peut être ouvert parmi les magasins 1, 3, 4.

Trouver un état qui maximise le nombre de magasins ouverts en nocturne, tout en respectant les contraintes.

1.1.2 Premières définitions et propriétés

De très nombreux problèmes pratiques peuvent être ainsi schématisés à l'aide d'un graphe ; en simplifiant la représentation, on peut ainsi trouver plus rapidement la solution (ou en voir l'impossibilité !). Pour certains problèmes, comme ceux que nous venons de voir, les arêtes n'ont pas d'orientation. Pour d'autres, il est indispensable d'avoir une orientation sur le graphe : le plan d'une ville comme graphe non orienté satisfera le piéton, tandis que ce même graphe orienté par les sens de circulation sera bien plus apprécié de l'automobiliste.

Une question importante est celle du choix du graphe associé à une situation donnée (il peut y en avoir plusieurs) ; comment choisir les sommets et les arêtes ? Comme on vient de le voir dans le problème des segments, ce n'est pas toujours évident. Dans des paragraphes ultérieurs, on étudiera des questions de compatibilité, il faudra décider si les arêtes correspondent aux couples de points compatibles ou incompatibles, et si les arêtes sont orientées ou non.

Nous allons formaliser les notions qui précèdent.

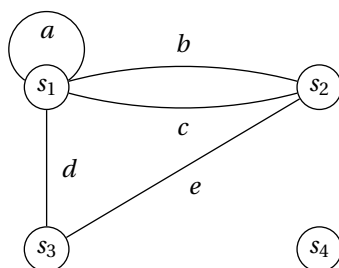
1.1.3 Vocabulaire de base : graphes, sommets, arêtes

Définition 1.1 (Graphe, sommets, arêtes, sommets adjacents). Un graphe G (non orienté) est constitué d'un ensemble $S = \{s_1; s_2; \dots; s_n\}$ de points appelés *sommets*, et d'un ensemble $A = \{a_1; a_2; \dots; a_m\}$ d'*arêtes*, tels qu'à chaque arête a_i sont associés deux éléments de S , appelés ses *extrémités*. Deux sommets qui sont les extrémités d'une arête sont dits *adjacents*.

Les deux extrémités peuvent être distinctes ou confondues ; dans ce dernier cas, l'arête s'appelle une *boucle*. Deux arêtes peuvent aussi avoir les mêmes extrémités (on dit alors qu'elles sont *parallèles*). Cependant, la très grande majorité des problèmes que nous rencontrerons, où des graphes non orientés seront en jeu, concerne des graphes *simples*, c'est-à-dire sans boucles ni arêtes parallèles. Les termes *simples* et *parallèles* ne sont pas à retenir.

Exemple 1.1. On considère le graphe G_1 , de la figure 1.1. Le sommet s_4 est un sommet isolé, l'arête a est une boucle, b et c sont des arêtes ayant mêmes extrémités, les sommets s_1 et s_2 sont adjacents, ainsi que s_1 et s_3 , puisqu'ils sont reliés par une arête.

FIGURE 1.1 – Le graphe G_1



Remarque. La position des sommets et la longueur ou l'allure des arêtes n'ont aucune importance.

EXERCICE 1.1.

Parmi les sept graphes donnés dans la figure 1.2 page ci-contre, déterminer ceux qui sont identiques.

Remarque. C'est un problème très difficile en général, dès que le nombre de sommets est assez grand.

Une première manière d'évaluer la complication d'un graphe est de compter le nombre de ses sommets :

Définition 1.2 (Ordre d'un graphe). L'*ordre* d'un graphe est le nombre de ses sommets.

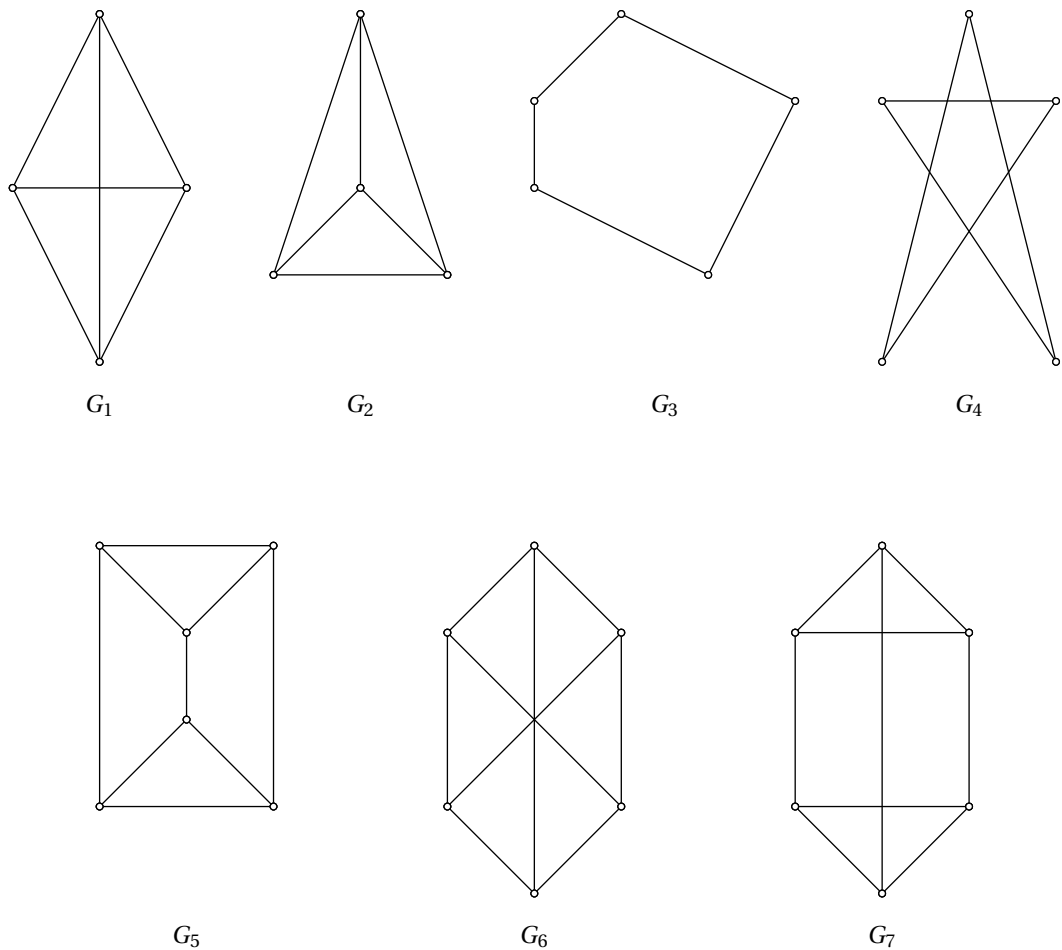
Définition 1.3 (Degré d'un sommet, parité d'un sommet). On appelle *degré d'un sommet* le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité (les boucles étant comptées deux fois). Un sommet est *pair* (respectivement *impair*) si son degré est un nombre pair (respectivement impair).

Exemple 1.2. Dans la figure 1.1, s_1 est de degré 5, s_2 de degré 3, s_4 de degré 0.

On prouve facilement le théorème suivant :

Théorème 1.1. La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes de ce graphe ; c'est donc un nombre pair.

FIGURE 1.2 – Sept graphes



Preuve. Lorsque on additionne les degrés des sommets, chaque arête est comptée deux fois, une fois pour chaque extrémité. ◇

Propriété 1.2. Dans un graphe le nombre de sommets impairs est toujours pair.

Preuve. En effet, sinon, la somme des degrés des sommets serait impaire. ◇

EXERCICE 1.2.

À l'aide de ce théorème ou de cette propriété, montrer que certains des problèmes donnés en introduction n'ont pas de solution.

1.1.4 Graphes complets

Définition 1.4 (Graphe complet). Un graphe (simple) est dit *complet* si tous ses sommets sont *adjacents*, c'est-à-dire si toutes les arêtes possibles existent (sauf les boucles). On appellera K_n le graphe complet à n sommet (il n'y en a qu'un).

EXERCICE 1.3.

Parmi les graphes de la figure 1.2, lesquels sont complets ?

EXERCICE 1.4.

Quel est le degré de chacun des sommets d'un graphe complet d'ordre n ?

1.1.5 Sous-graphes

Définition 1.5 (Sous-graphe, sous-graphe engendré par des sommets). Soit G un graphe, le graphe G' est un *sous-graphe* de G , si :

- l'ensemble $S = \{s_1; s_2; \dots; s_n\}$ des sommets de G' est un sous ensemble de celui des sommets de G ;
- les arêtes de G' sont des arêtes de G .

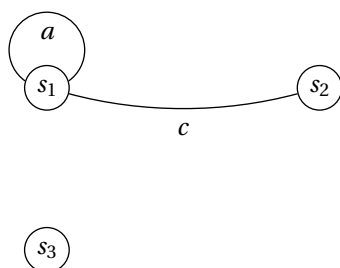
Si, de plus, les arêtes de G' sont exactement *toutes* les arêtes de G joignant les sommets de G' , on dit que G' est *le sous-graphe de G engendré par $s_1, s_2, \dots, s_n$* .

Exemple 1.3. Considérons le graphe G dont les sommets sont les villes françaises possédant une gare et dont les arêtes sont les voies ferrées reliant ces villes (on exclura les gares où ne passent plus de voies).

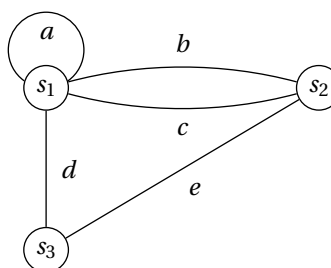
- Le graphe G' dont les sommets sont les villes d'un même département possédant une gare et dont les arêtes sont les voies ferrées reliant ces villes est le sous-graphe de G engendré par ces villes.
- Le graphe G'' dont les sommets sont les villes où passe un TGV et dont les arêtes sont des voies ferrées TGV est un simple sous-graphe de G car il existe des voies normales reliant, par exemple, Marseille à Lyon, qui ne sont pas dans ce sous-graphe.

Exemple 1.4. La figure 1.3 de la présente page présente deux sous graphes du graphe G_1 .

FIGURE 1.3 – Deux sous-graphes de G_1



G_2 un sous-graphe de G_1



G_3 le sous-graphe de G_1
engendré par s_1, s_2, s_3

EXERCICE 1.5.

Dessiner les graphes suivants :

- G_4 le sous-graphe de G_1 engendré par s_1, s_2 ;
- G_5 le sous-graphe de G_1 engendré par s_1, s_3, s_4 ;
- G_6 le sous-graphe de G_1 engendré par s_1, s_4 ;
- G_7 le sous-graphe de G_1 engendré par s_2 et s_4 .

Enfin on a :

Définition 1.6 (Sous-graphe stable). On dit qu'un sous-ensemble de l'ensemble des sommets est *stable* s'il ne contient pas de paire de sommets adjacents. On peut aussi parler de sous-graphe stable : cela revient au même, puisque si un ensemble de sommets est stable, le graphe engendré, par définition, n'a pas d'arête.

Exemple 1.5. Dans l'exercice ci-dessus, le sous-graphe G_7 est stable.

Ce terme de « stable » peut paraître arbitraire. Il est en fait naturel si l'on considère ce qu'on appelle un « graphe d'incompatibilité » : dans un groupe d'individus, on peut définir un graphe en reliant par une arête les individus qui ne peuvent se supporter. Si l'on veut choisir un sous-groupe de personnes qui travaillent ensemble, il est préférable de choisir un sous-ensemble stable ! On verra en particulier beaucoup d'applications de cette notion dans le paragraphe sur les colorations.

1.1.6 Chaînes et connexité

Dans bien des problèmes de graphes, il est naturel de considérer ce que l'on peut appeler, de façon informelle, des « parcours » ou « chemins ». Le mot utilisé en théorie des graphes est *chaîne*.

La notion intuitive de chaîne, ou plus tard de chaîne orientée, se comprend bien sur un dessin, il est moins facile d'en donner une définition effective.

Définition 1.7 (Chaîne, longueur d'une chaîne, cycle). Une *chaîne* dans un graphe G est une suite finie : $s_0; a_1; s_1; a_2; s_2; a_3; s_3; \dots a_n; s_n$ débutant et finissant par un sommet, alternant sommets et arêtes de telle manière que chaque arête soit encadrée par ses sommets extrémités. La *longueur* de la chaîne est égale au nombre d'arêtes qui la constituent; la chaîne est *fermée* si $s_0 = s_n$, si de plus toutes ses arêtes sont distinctes on dit alors que c'est un *cycle*.

Remarque. Quand il n'y a pas d'ambiguïté (pas d'arêtes multiples), on peut définir une chaîne par seulement la suite de ses sommets ou par seulement la suite de ses arêtes.

Enfin on a :

Définition 1.8 (Graphe connexe). Un graphe est *connexe* si deux sommets quelconques sont reliés par une chaîne.

Définition 1.9 (Distance entre deux sommets). Soit G un graphe connexe, s et s' , deux sommets quelconques de G . Le graphe étant connexe, il existe au moins une chaîne reliant s et s' . On appelle *distance entre s et s'* la plus petite des longueurs des chaînes reliant s à s' .

Remarque. Lorsque le graphe n'est pas connexe, il existe au moins deux sommets qui ne sont pas reliés par une chaîne. On dit parfois que la distance entre ces sommets est infinie.

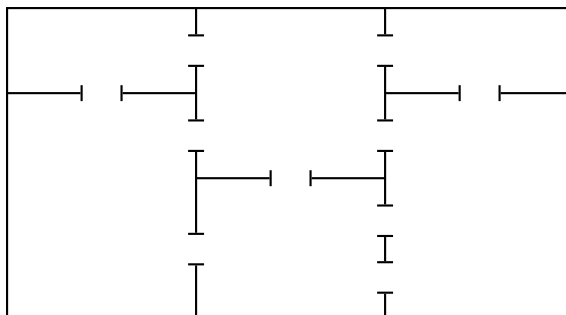
Définition 1.10 (Diamètre d'un graphe). On appelle *diamètre* d'un graphe connexe, la plus grande distance entre ses sommets.

Remarque. Lorsque le graphe n'est pas connexe, on dit parfois que son diamètre est infini.

1.2 Graphes eulériens

1.2.1 Quelques problèmes

PROBLÈME 1.5 (Au musée). 1. (a) Voici le plan du musée de la ville d'Izis :

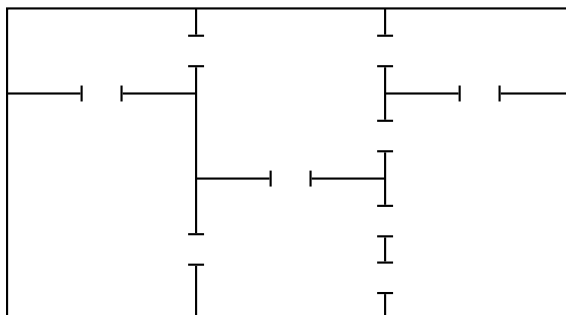


Un visiteur se promène et se rend compte qu'il peut choisir un itinéraire passant une seule fois par chaque pièce.

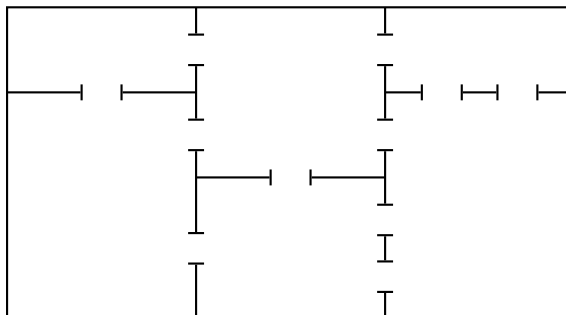
Mais peut-il trouver un chemin passant une seule fois par chacune des portes ?

Peut-il trouver un circuit¹ passant une seule fois par chacune des portes ?

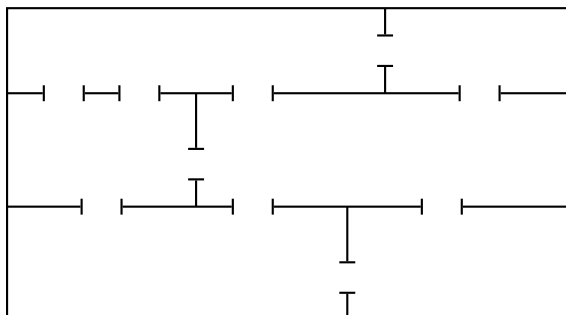
(b) Qu'en est-il du musée de la ville d'Oz donné ci-dessous ?



(c) Qu'en est-il du musée de la ville d'Aza donné ci-dessous ?



(d) Qu'en est-il du musée de la ville d'Ezé donné ci-dessous ?

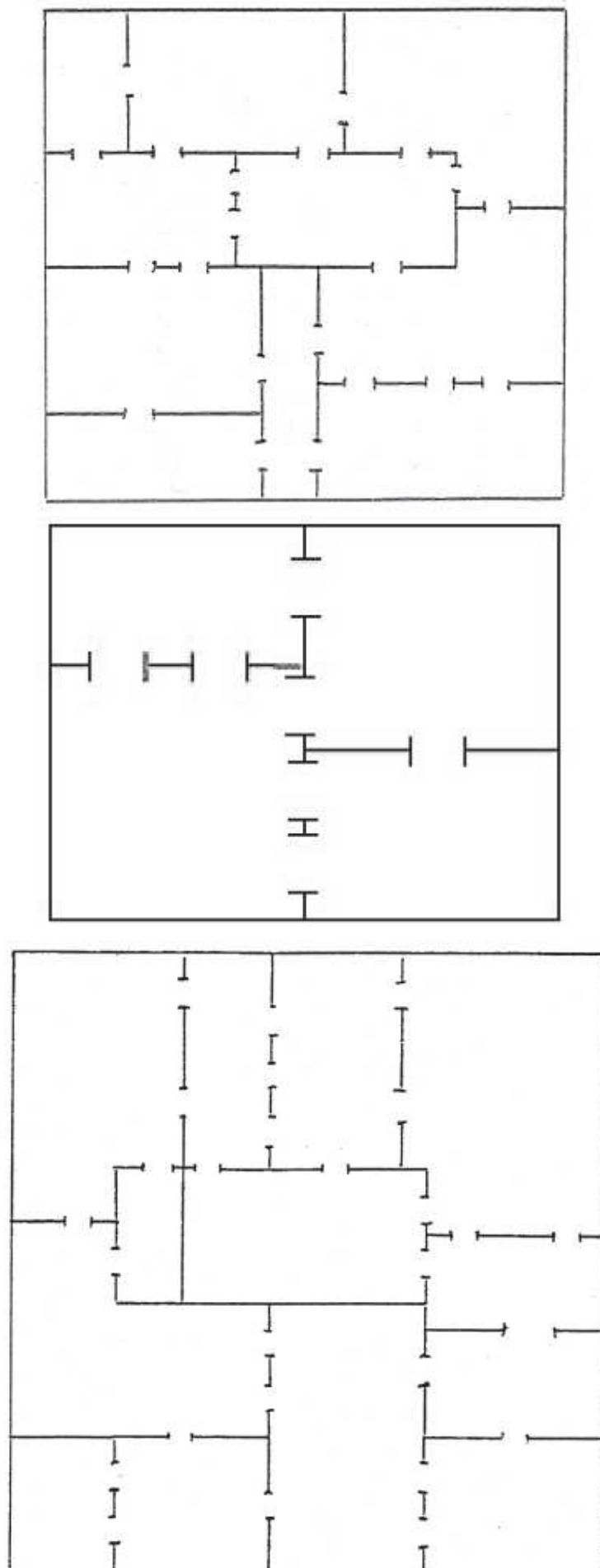


2. (a) Quelle(s) conjecture(s) pouvez-vous émettre ?

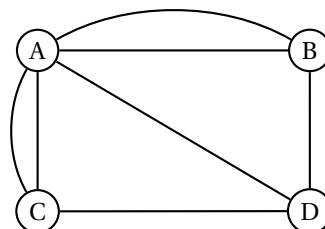
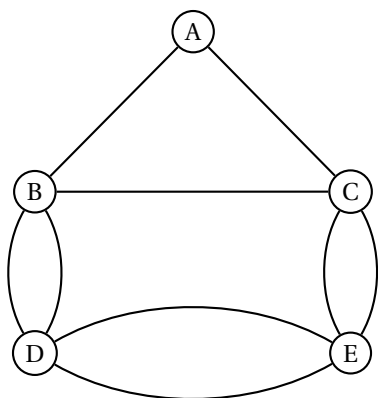
(b) Vérifier ces conjectures sur les musées de la figure 1.4 page ci-contre.

1. Un *circuit* est un chemin qui revient à son point de départ.

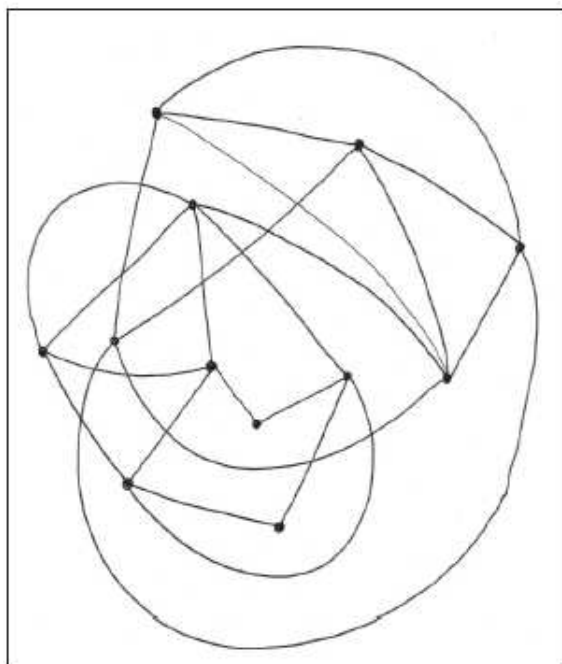
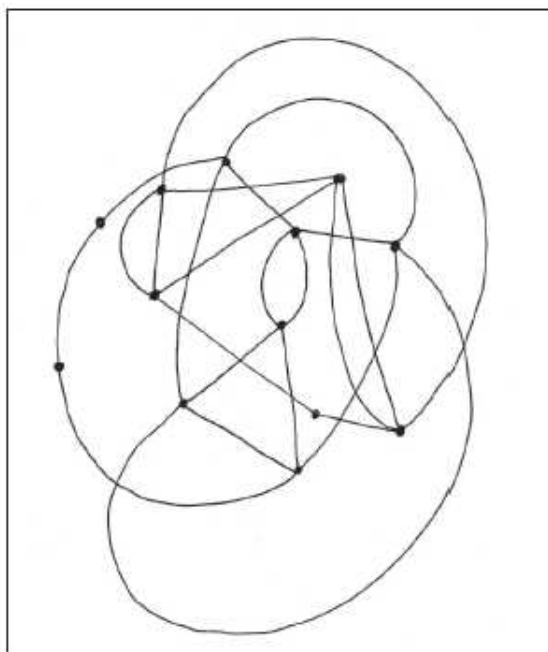
FIGURE 1.4 – Musées de la question 2b



PROBLÈME 1.6 (Avec des graphes). 1. Pour chacun des graphes, existe-t-il un chemin, ou un circuit, qui passe une seule fois par chacune des arêtes? Expliquez pourquoi.



2. Vérifier si vos conjectures sont valides sur les graphes ci-dessous.



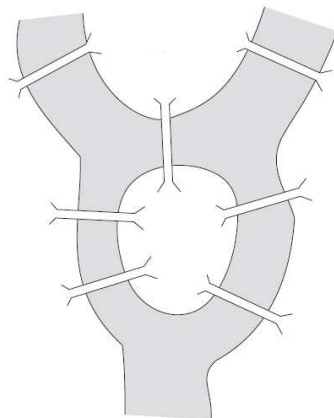
PROBLÈME 1.7 (Les sept ponts de Königsberg).

Le problème qui suit est, selon la légende², à l'origine de l'invention des graphes par EULER, qui résidait à Königsberg. Au XVIII^e siècle, les habitants de Königsberg (actuellement Kaliningrad, région de la Russie frontalière de la Pologne et de la Lituanie) aimaient se promener le dimanche.

La ville de Königsberg comprenait sept ponts, disposés selon le schéma de la figure 1.5 de la présente page.

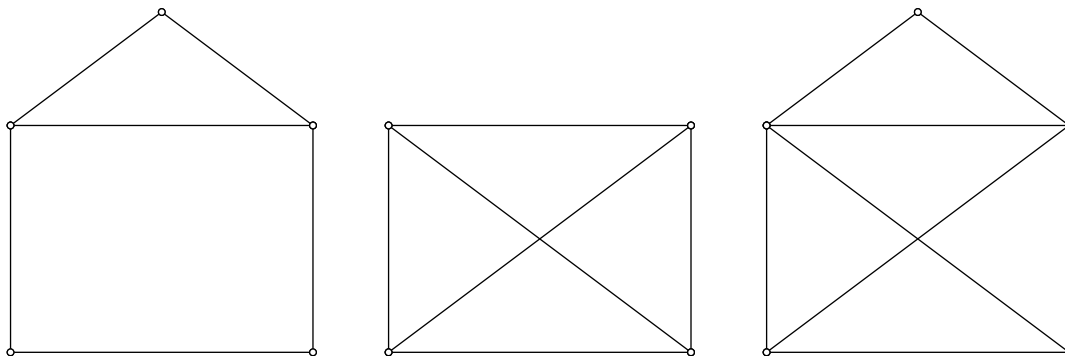
Le souhait des habitants de Königsberg était de faire un trajet passant une fois et une seule par chaque pont. Comment faire ?

FIGURE 1.5 – Les sept ponts de Königsberg

**PROBLÈME 1.8** (Les enveloppes).

Peut-on dessiner sans lever le crayon et en ne passant qu'une seule fois sur chaque arête les graphes de la figure 1.6 de la présente page ?

FIGURE 1.6 – Les enveloppes



2. EULER a bien trouvé la solution générale de ce type de problèmes mais sans utiliser les graphes.

1.2.2 D'autres définitions et propriétés

Cela nous amène à définir :

Définition 1.11 (Chaîne eulérienne). Une chaîne est *eulérienne* si elle contient une fois et une seule chaque arête du graphe ; si la chaîne est un cycle (sommet de départ et de fin confondus), on l'appelle *cycle eulérien*.

Le théorème suivant, dit théorème d'EULER, qu'on admettra, est à l'origine de la théorie des graphes :

Théorème 1.3 (d'EULER). *Un graphe connexe a une chaîne eulérienne si et seulement si tous ses sommets sont pairs sauf au plus deux.*

De façon plus précise :

- si le graphe n'a pas de sommet impair, alors il a un cycle eulérien ;
- le graphe ne peut avoir un seul sommet impair ;
- si le graphe a deux sommets impairs, ce sont les extrémités de la chaîne eulérienne.

La propriété suivante, conséquence immédiate du théorème, est souvent utile :

Propriété 1.4. *Un graphe ayant plus de deux sommets impairs ne possède pas de chaîne eulérienne.*

Ces résultats permettent de résoudre beaucoup de problèmes pratiques se traitant en théorie des graphes.

EXERCICE 1.6.

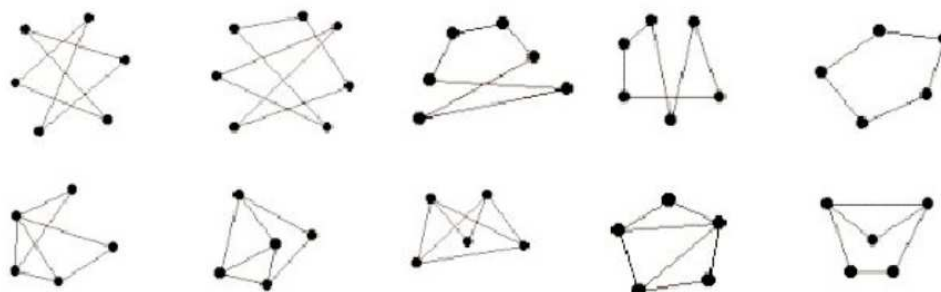
À l'aide du théorème ou de la propriété, déterminer ceux des problèmes présentés plus haut qui n'ont pas de solution et, si cela n'a pas été déjà fait, trouver les solutions des autres.

1.3 Exercices

EXERCICE 1.7.

Parmi les graphes de la figure 1.7 de la présente page, déterminer ceux qui sont susceptibles de décrire une même situation.

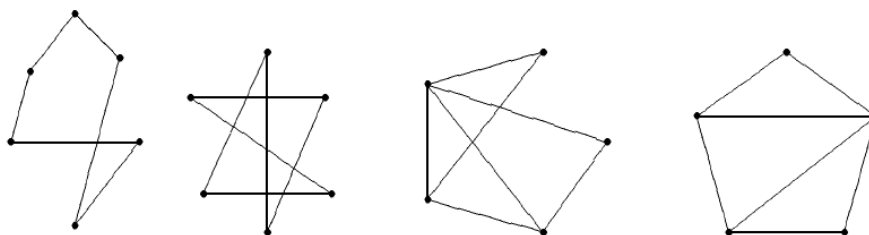
FIGURE 1.7 – Graphes de l'exercice 1.7



EXERCICE 1.8.

Même question avec les graphes de la figure 1.8 de la présente page

FIGURE 1.8 – Graphes de l'exercice 1.8



EXERCICE 1.9. • Dessiner les graphes complets K_n , pour $n = 2; 3; 4; 5$. Combien ont-ils d'arêtes ?

- Dessiner les graphes simples d'ordre 3, 4, 5, 6 dont tous les sommets sont de degré 2.

EXERCICE 1.10.

Le conseil municipal d'une ville comprend 7 commissions, qui obéissent aux règles suivantes :

- Règle 1 : tout conseiller municipal fait partie de 2 commissions exactement ;
- Règle 2 : deux commissions quelconques ont exactement un conseiller en commun.

Combien y a-t-il de membres dans le conseil municipal ?

EXERCICE 1.11.

Dans un groupe de vingt enfants, est-il possible que sept d'entre eux aient chacun exactement trois amis, neuf d'entre eux en aient exactement quatre, et quatre d'entre eux exactement cinq ?

EXERCICE 1.12.

Peut-on dessiner des graphes simples (pas d'arêtes dont les extrémités sont confondues et au plus une arête joignant deux sommets) dont la liste des degrés des sommets soit :

- 6-3-2-2-1-1-1
- 7-5-3-2-2-2-2

EXERCICE 1.13 (Associer un graphe à une situation).

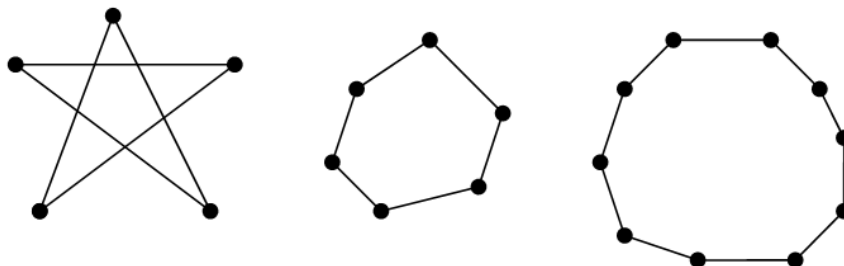
Comparer les trois graphes définis ci-dessous :

- on considère un octaèdre ; un sommet du graphe est associé à un sommet de l'octaèdre et une arête correspond à une arête de l'octaèdre ;
- on considère un cube ; un sommet du graphe est associé à une face du cube et deux sommets du graphe sont reliés par une arête si les faces correspondantes ont une arête commune ;
- les sommets du graphe sont tous les sous-ensembles à deux éléments de $\{1, 2, 3, 4\}$; deux sommets sont reliés si leur intersection est non vide ;
- trois pays envoient chacun à une conférence deux espions ; chaque espion doit espionner tous les espions des autres pays.

- EXERCICE 1.14.** 1. Dessiner tous les graphes simples possible d'ordre n pour n variant de 1 à 4.
 2. Lire graphiquement leur diamètre.
 3. Caractériser les graphes de diamètre 1.

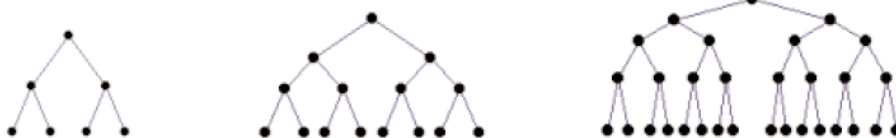
EXERCICE 1.15 (Diamètre d'un graphe). 1. Quels sont les diamètres des graphes de la figure 1.9 de la présente page?

FIGURE 1.9 – Graphes de l'exercice 1.15, question 1



2. Quels sont les diamètres des graphes de la figure 1.10 de la présente page? Si on continuait à construire des graphes sur le même modèle, quels seraient les nombres de sommets et d'arêtes en fonction du diamètre?

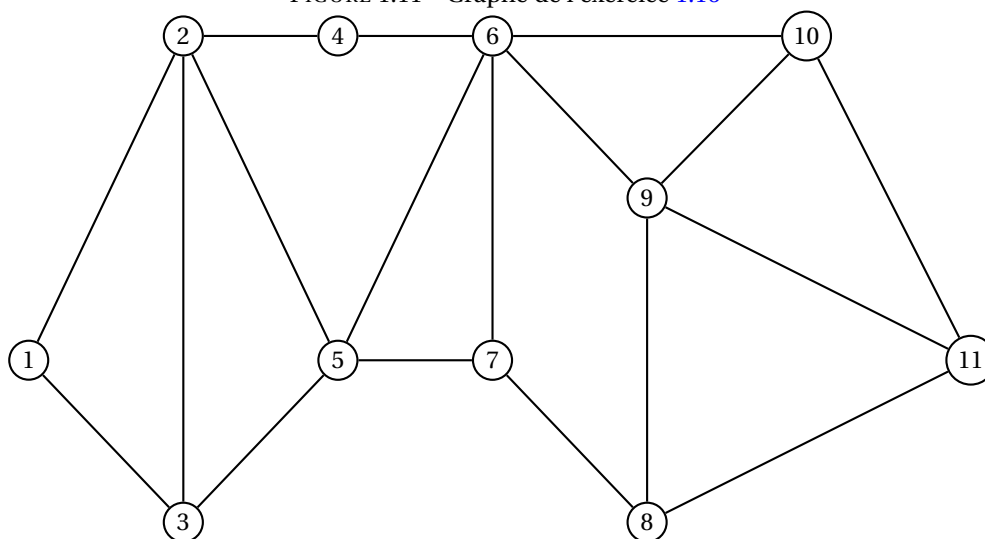
FIGURE 1.10 – Graphes de l'exercice 1.15, question 2



EXERCICE 1.16.

Quel est le diamètre du graphe donné par la figure 1.11 de la présente page?

FIGURE 1.11 – Graphe de l'exercice 1.16

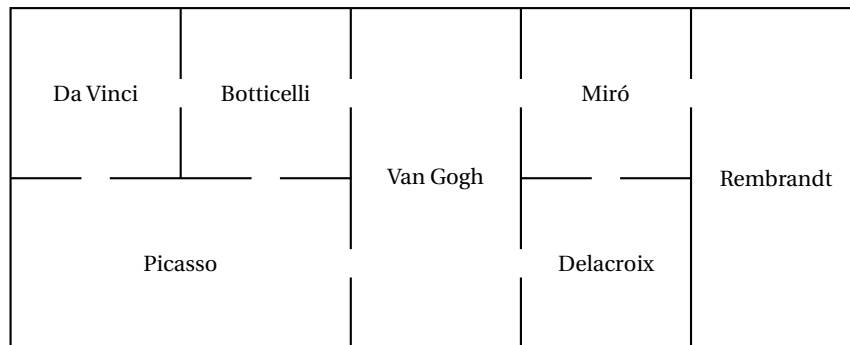


EXERCICE 1.17.

On construit un musée dont les pièces sont disposées comme indiqué sur la figure 1.12 de la présente page (les entrées et sorties du musée ne sont pas créées).

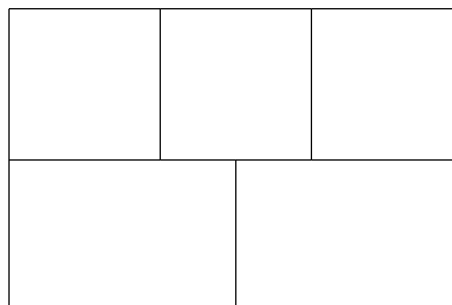
1. Montrer qu'il est impossible d'organiser un parcours dans ce musée qui emprunterait une et une seule fois chaque passage entre deux salles.
2. Quel passage doit-on condamner, ou quel passage doit-on créer pour qu'un tel trajet soit possible ? Dans quelle(s) pièce(s) doit-on alors créer l'entrée et la sortie du musée ?

FIGURE 1.12 – Figure de l'exercice 1.17


EXERCICE 1.18.

Cinq pays sont représentés (schématiquement) avec leurs frontières sur la figure 1.13 de la présente page. Est-il possible de partir d'un pays et d'y revenir en franchissant chaque frontière une fois et une seule ?

FIGURE 1.13 – Problème des frontières


EXERCICE 1.19.

La carte de la figure 1.14 page suivante est celle des régions françaises. Est-il possible de parcourir la France en passant une et une seule fois par toutes les frontières entre les régions ?

EXERCICE 1.20.

On dispose d'un fil de fer de 120 cm. Est-il possible de préparer une carcasse de cube de 10 cm d'arête sans couper le fil ? Sinon, combien de fois au minimum faut-il couper le fil de fer pour fabriquer cette carcasse ?

FIGURE 1.14 – Les régions de France



Devoir maison n°1

Graphes eulériens

EXERCICE.

Peut-on aligner tous les pions d'un jeu de domino suivant la règle du domino ?

On commencera par étudier la question avec un jeu dont les dominos comportent les chiffres jusqu'à n , pour $n = 2, 3, 4$, puis on essayera de trouver les arguments permettant de généraliser.

Chapitre 2

Géométrie dans l'espace

Sommaire

2.1 Quelques rappels	17
2.1.1 Quelques règles d'incidence	17
2.1.2 Repérage dans l'espace	17
2.2 Équation cartésienne d'un plan	18
2.2.1 Équation cartésienne d'un plan	18
2.2.2 Vecteur normal à un plan	18
2.2.3 Propriétés des plans et équations cartésiennes	18
2.2.4 Équations particulières	19
2.3 Système d'équations cartésiennes d'une droite	19
2.3.1 Cas général	19
2.3.2 Système d'équations cartésiennes des axes	19
2.4 Exercices	20
2.4.1 Géométrie dans l'espace	20
2.4.2 Équations de plans	22
2.4.3 Équations de droites	24

Ce chapitre est constitué de rappels de Seconde et de Première. Les propriétés n'y seront donc pas démontrées

2.1 Quelques rappels

2.1.1 Quelques règles d'incidence

Règle 2.1. Par deux points distincts de l'espace A et B , il passe une unique droite, notée (AB) .

Règle 2.2. Par trois points non alignés de l'espace A , B et C , il passe un unique plan, noté (ABC) .

Règle 2.3. Si deux points distincts A et B de l'espace appartiennent à un plan $\mathcal{P}$, alors la droite (AB) est contenue dans le plan $\mathcal{P}$.
Si $A \in \mathcal{P}$ et $B \in \mathcal{P}$ alors $(AB) \subset \mathcal{P}$

Remarque. Cela signifie que tout point M appartenant à la droite (AB) appartient aussi au plan $\mathcal{P}$.

Règle 2.4. Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants (en un unique point), soit parallèles.

Règle 2.5. Deux plans de l'espace sont soit sécants, et alors leur intersection est une droite, soit parallèles.

2.1.2 Repérage dans l'espace

Définition 2.1. Un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace si les points O , I , J et K tels que $\vec{OI} = \vec{i}$, $\vec{OJ} = \vec{j}$ et $\vec{OK} = \vec{k}$ ne sont pas coplanaires.

O est appelé *origine du repère* et $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est appelée la *base du repère*.

Si les droites (OI) , (OJ) et (OK) sont perpendiculaires, le repère est dit *orthogonal*.

Si le repère est orthogonal et que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$, le repère est dit *orthonormal* (ou orthonormé).

Propriété 2.1 (Définition, existence et unicité des coordonnées de vecteurs et de points). *Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.*

- Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
- Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ tel que $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Remarque. Par définition les coordonnées de M et de $\vec{OM}$ sont donc les mêmes.

Propriété 2.2 (Coordonnées du milieu, coordonnées du vecteur $\vec{AB}$). *Si A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A; y_A; z_A)$ et $(x_B; y_B; z_B)$:*

- $\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$;
- les coordonnées de I , milieu de $[AB]$, sont $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Propriété 2.3 (Distance et norme dans un repère orthonormal). *Soit $\vec{u}(x; y; z)$, $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$. Si le repère est orthonormal alors :*

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
- $AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Propriété 2.4 (Condition d'orthogonalité dans un repère orthonormal). *Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.*

Si le repère est orthonormal alors $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$

2.2 Équation cartésienne d'un plan

2.2.1 Équation cartésienne d'un plan

Théorème 2.5. *Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.*

- Tout plan $\mathcal{P}$ de l'espace admet une équation de la forme $ax + by + cz = d$ avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$
- Si $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ alors l'ensemble des points M de coordonnées $(x; y; z)$ vérifiant $ax + by + cz = d$ est un plan.

2.2.2 Vecteur normal à un plan

Définition 2.2. $\vec{n}$ est dit *vecteur normal* au plan $\mathcal{P}$ lorsqu'il est orthogonal à deux droites sécantes incluses dans $\mathcal{P}$.

Propriété 2.6. *Soit $\vec{n}$ normal à un plan $\mathcal{P}$ et $A \in \mathcal{P}$. Pour tout point $M \in \mathcal{P}$ on a $\vec{AM} \perp \vec{n}$.*

Théorème 2.7. *Dans un repère orthonormal, soit $\vec{n}$ non nul et $\mathcal{P}$ un plan.*

$\vec{n}(a; b; c)$ normal à $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{P}$ admet une équation de la forme $ax + by + cz = d$.

2.2.3 Propriétés des plans et équations cartésiennes

Propriété 2.8 (Parallélisme). *L'espace étant muni d'un repère orthonormal, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux plans d'équations respectives $\mathcal{P}: ax + by + cz = d$ et $\mathcal{P}': a'x + b'y + c'z = d'$.*

$\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}' \Leftrightarrow \vec{n}(a; b; c)$ et $\vec{n}'(a'; b'; c')$ colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe k tel que $a = ka', b = kb'$ et $c = kc'$

Remarque. Une conséquence de cette propriété est que les plans $\mathcal{P}: ax + by + cz = d$ et $\mathcal{P}': ax + by + cz = d'$ sont parallèles ($k = 1$).

Propriété 2.9 (Perpendicularité). *L'espace étant muni d'un repère orthonormal, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont deux plans d'équations respectives $\mathcal{P}: ax + by + cz = d$ et $\mathcal{P}': a'x + b'y + c'z = d'$.*

$\mathcal{P} \perp \mathcal{P}' \Leftrightarrow \vec{n}(a; b; c)$ et $\vec{n}'(a'; b'; c')$ orthogonaux $\Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0$

2.2.4 Équations particulières

Propriété 2.10 (Équations des plans de base). Le plan étant muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a :

- le plan (xOy) admet $z = 0$ comme équation cartésienne ;
- le plan (zOy) admet $x = 0$ comme équation cartésienne ;
- Le plan (xOz) admet $y = 0$ comme équation cartésienne.

Propriété 2.11 (Plans parallèles aux plans de base). Le plan étant muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a :

- tout plan parallèle à (xOy) admet $z = d$ comme équation cartésienne ;
- tout plan parallèle à (zOy) admet $x = d$ comme équation cartésienne ;
- tout plan parallèle à (xOz) admet $y = d$ comme équation cartésienne.

Propriété 2.12 (Plans parallèles aux axes). Le plan étant muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a :

- tout plan parallèle à (Ox) admet $by + cz = d$ avec $(b; c) \neq (0; 0)$ comme équation cartésienne ;
- tout plan parallèle à (Oy) admet $ax + cz = d$ avec $(a; c) \neq (0; 0)$ comme équation cartésienne ;
- tout plan parallèle à (Oz) admet $ax + by = d$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$ comme équation cartésienne.

2.3 Système d'équations cartésiennes d'une droite

2.3.1 Cas général

Théorème 2.13. Le plan étant muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a :

- toute droite de l'espace admet un système d'équation de la forme $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ avec $(a; b; c) \neq (0; 0; 0) \neq (a'; b'; c')$ et tels que il n'existe pas de réel k tel que $a = ka'$, $b = kb'$ et $c = kc'$;
- Si $(a; b; c) \neq (0; 0; 0) \neq (a'; b'; c')$ et qu'il n'existe pas de réel k tel que $a = ka'$, $b = kb'$ et $c = kc'$ alors l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x; y; z)$ vérifient $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$ est une droite.

2.3.2 Système d'équations cartésiennes des axes

Propriété 2.14. Le plan étant muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a :

- l'axe (Ox) admet $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ comme système d'équations cartésiennes ;
- l'axe (Oy) admet $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ comme système d'équations cartésiennes ;
- l'axe (Oz) admet $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ comme système d'équations cartésiennes.

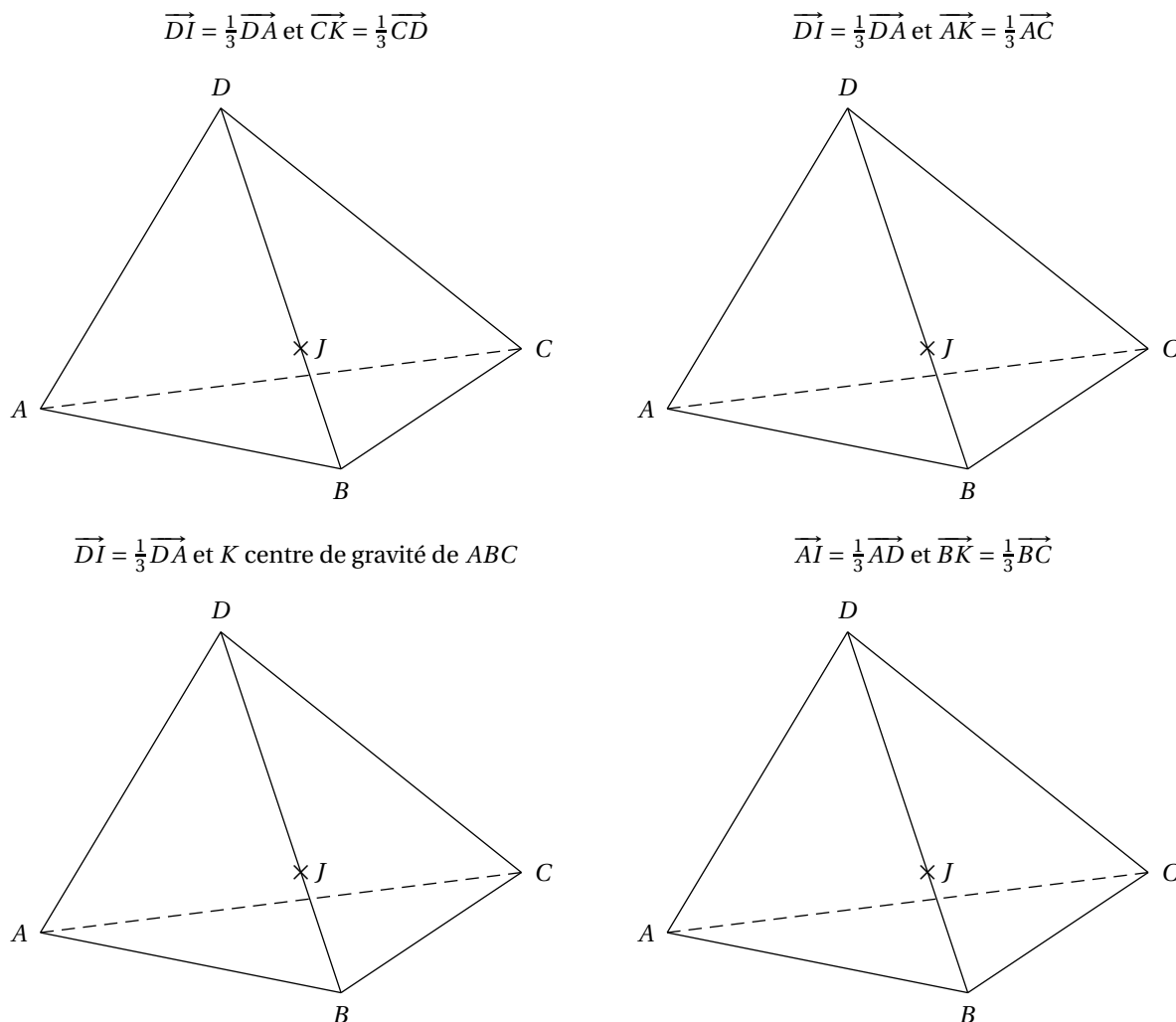
2.4 Exercices

2.4.1 Géométrie dans l'espace

EXERCICE 2.1 (Sections planes d'un tétraèdre).

Dans chacun des cas présentés sur la figure 2.1 de la présente page, placer les points I et K , puis, à l'aide des propriétés de géométrie dans l'espace vues en Seconde, construire sur le dessin en perspective la trace du plan (IJK) sur le tétraèdre $ABCD$. On donne $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

FIGURE 2.1 – Sections de l'exercice 2.1



EXERCICE 2.2 (Sections planes d'un cube).

Dans chacun des cas présentés sur la figure 2.2 page ci-contre, à l'aide des propriétés de géométrie dans l'espace vues en Seconde, construire sur le dessin en perspective la trace du plan (IJK) sur le cube $ABCDEFGH$. On donne : $AB = 6$ cm ; $EI = 2$ cm ; J milieu de $[HG]$.

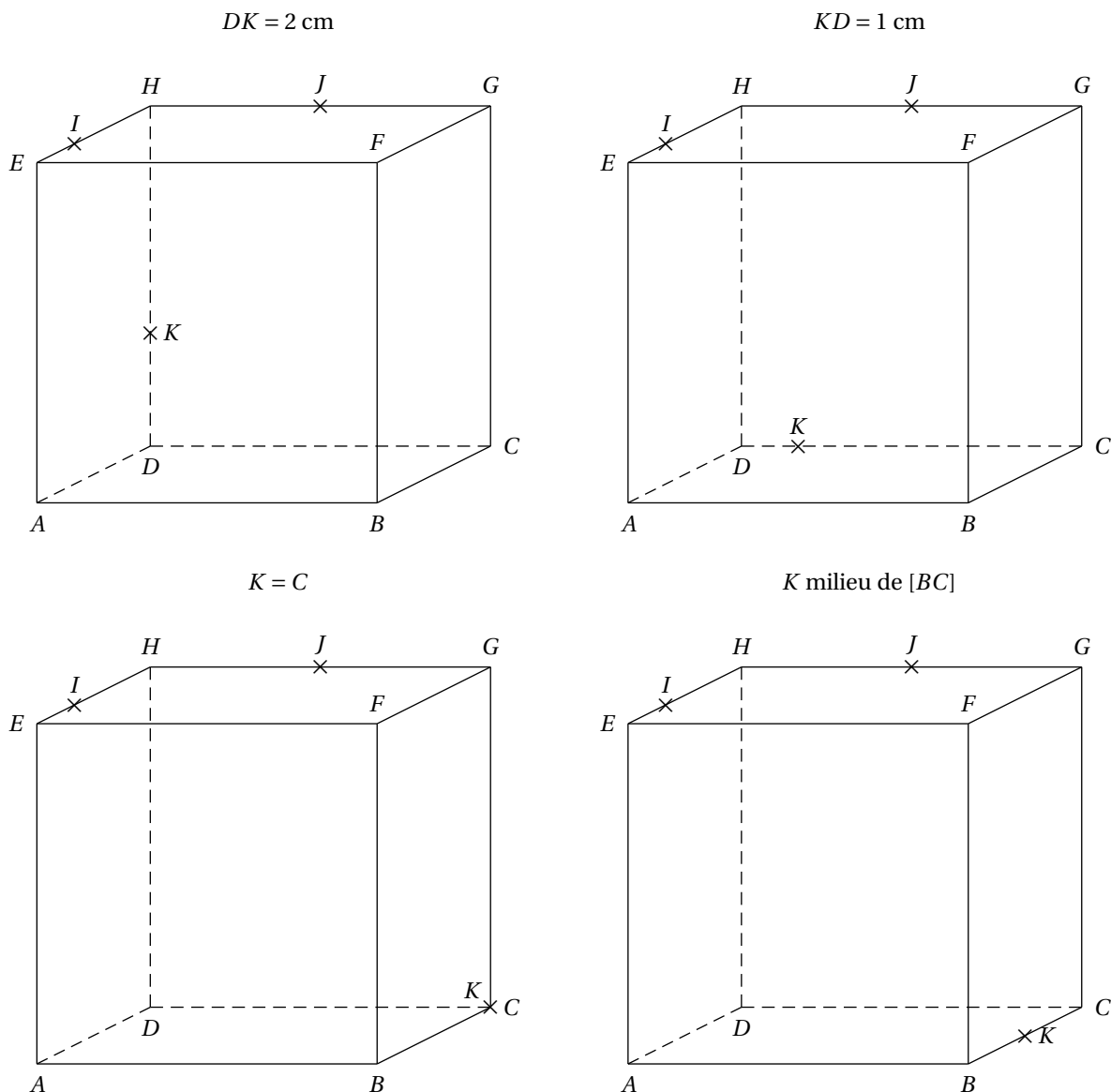
EXERCICE 2.3.

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. L'unité est le centimètre.

On considère les points $A(-1; 3; 3)$, $B(0; 5; 5)$, $C(2; 3; 6)$ et $D(1; 1; 4)$.

- Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
 - Montrer que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$.
 - Montrer que $AB = AD$.
 - Que peut-on en déduire pour $ABCD$? Calculer son aire.
- Calculer les coordonnées du point I , centre du carré $ABCD$.
 - Soit $J(\frac{9}{2}; 5; \frac{1}{2})$. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est normal au plan (ABC) .
 - En déduire une équation du plan (ABC) .
- Montrer que la droite (AB) coupe l'axe des abscisses en un point F que l'on déterminera.

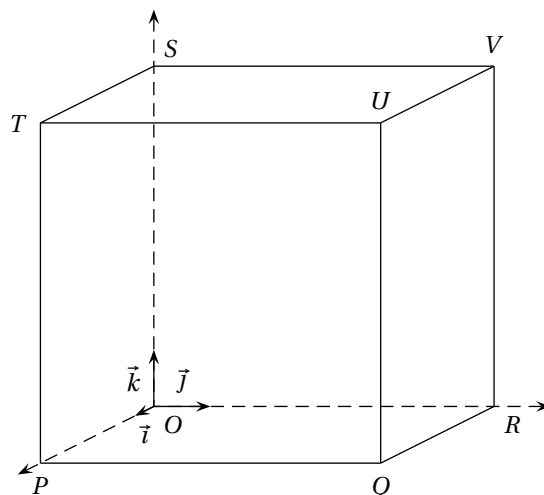
FIGURE 2.2 – Sections de l'exercice 2.2

**EXERCICE 2.4.**

$OPQRSTUV$ est un cube de côté 6 dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace (voir la figure 2.3 page suivante).

1. (a) Soit $G(4; 2; 4)$, montrer que les points R , G et T sont alignés.
 (b) Montrer que les droites (RG) et (SG) sont perpendiculaires.
2. On désigne par I le milieu de $[TP]$ et par J le milieu de $[VR]$.
 (a) Calculer les coordonnées de I et de J .
 (b) Calculer les coordonnées du milieu M du segment $[IJ]$.
 (c) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{SM}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont orthogonaux.
 (d) Calculer l'aire du triangle SIJ .
3. (a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{UM}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont orthogonaux.
 (b) Déterminer alors une équation du plan (SUM) .

FIGURE 2.3 – Figure de l'exercice 2.4



2.4.2 Équations de plans

EXERCICE 2.5.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(A; \vec{AI}; \vec{AJ}; \vec{AK})$.

Le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ est tel que $B(2; 0; 0)$, $D(0; 6; 0)$, $E(0; 0; 4)$.

Les points L et M sont les milieux respectifs des segments $[EF]$ et $[FB]$

1. Placer les points L et M sur la figure 2.4 de la présente page.

Donner (sans justification) les coordonnées des points A , C , F , G et H , puis vérifier par le calcul que les points L et M ont respectivement pour coordonnées $(1; 0; 4)$ et $(2; 0; 2)$.

2. Soit $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation : $y = 0$ et $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation : $2x + z = 6$.

(a) Montrer que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles.

(b) Soit Δ l'intersection des deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

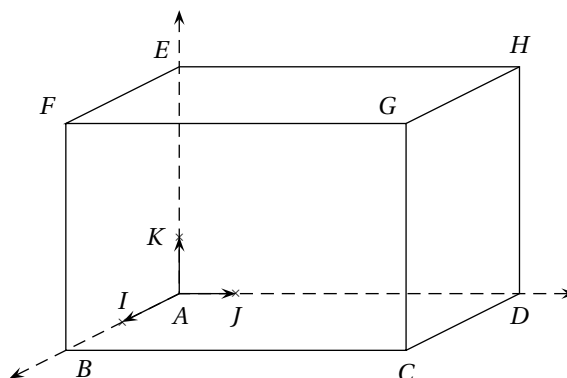
Montrer que Δ est la droite (ML) .

(c) Justifier que le plan $\mathcal{P}_2$ est parallèle à l'axe $(A; \vec{AJ})$.

(d) Tracer en rouge sur la figure l'intersection de $\mathcal{P}_2$ avec le pavé $ABCDEFGH$.

On ne demande pas de justifier cette construction.

FIGURE 2.4 – Figure de l'exercice 2.5



EXERCICE 2.6.

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé.

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(1; -2; 7)$ et dont $\vec{u} = (-1; \frac{1}{2}; 2)$ est un vecteur normal.

Déterminer une équation de $\mathcal{P}$.

EXERCICE 2.7. 1. $2x + 3y - 4z + 1 = 0$ est l'équation d'un plan.

Quels points parmi $A(0; 0; \frac{1}{4})$, $B(0; \frac{1}{4}; 0)$, $C(-\frac{1}{2}; 0; 0)$ et $D(1; -1; 2)$ appartiennent à ce plan ?

2. Soit $A(1; 1; 1)$, $B(0; -1; 2)$ et $C(-2; 1; 2)$.

(a) Montrer que $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires et en déduire que A , B et C définissent un plan.

(b) Sachant que ce plan est d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et que A , B et C appartiennent à ce plan, en déduire une équation de ce plan.

EXERCICE 2.8.

Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $2x + y + z = 6$.

1. Déterminer les coordonnées du point A , intersection du plan $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses (Ox).

2. Déterminer les coordonnées des points B et C , intersections respectives du plan $\mathcal{P}$ avec les axes (Oy) et (Oz).

3. Dans un repère de l'espace, placer les points A , B et C .

Tracer les droites (AB) , (AC) et (BC) , traces du plan $\mathcal{P}$ sur les plans de coordonnées.

EXERCICE 2.9.

Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par : $A(3; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$ et $C(0; 0; 6)$ sous la forme $ax + by + cz = d$.

On choisira d entier afin que a, b et c soient aussi des entiers.

EXERCICE 2.10.

Soit $A(1; 1; 1)$, $B(0; 2; 3)$ et $C(1; 2; 0)$.

1. Justifier que les points A , B et C définissent un plan $\mathcal{P}$.

2. Soit $ax + by + cz = d$ une équation de ce plan $\mathcal{P}$.

Déterminer des valeurs possibles pour a , b , c et d .

En déduire une équation de $\mathcal{P}$ dont tous les coefficients sont entiers.

EXERCICE 2.11. 1. Lire les coordonnées des points A , B , C , D , E et F dans le repère de la figure 2.5 de la présente page.

2. Déterminer les équations des plans

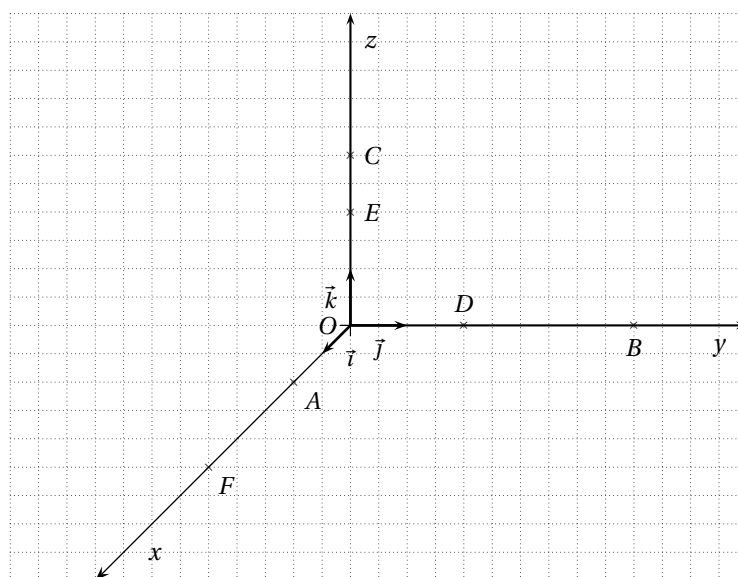
(a) $\mathcal{P}_1$ parallèle à (Ox) passant par B et C ;

(b) $\mathcal{P}_2$ parallèle à (Oy) passant par A et E ;

(c) $\mathcal{P}_3$ parallèle à (Oz) passant par B et F .

3. Déterminer les équations des plans (ABC) , (ADE) , (CFB) et (FED) .

FIGURE 2.5 – Figure de l'exercice 2.11



EXERCICE 2.12.

On considère les points $A(0; 3; 2)$, $B(0; 2; 4)$ et $C(3; 0; 2)$.

1. Montrer que ces points définissent un plan $\mathcal{P}$.
2. Justifier que la droite (AB) est la trace du plan $\mathcal{P}$ sur le plan (yOz) .
3. Déterminer graphiquement les points d'intersection E et F de la droite (AB) sur les axes (Oz) et (Oy) .
4. En déduire la représentation du plan $\mathcal{P}$.

2.4.3 Équations de droites**EXERCICE 2.13.**

On donne $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans d'équations respectives $2x + 3y - 4z + 5 = 0$ et $-x + y - z + 2 = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ne sont pas parallèles.
2. En déduire quel est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$.

EXERCICE 2.14.

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. A et B sont les deux points de coordonnées $A(0; 0; 2)$ et $B(0; 3; 2)$.

1. Montrer que A et B appartiennent au plan (yOz) .
2. Montrer que A et B appartiennent à un plan parallèle à (xOy) .
3. En déduire un système d'équations cartésiennes de la droite (AB) .

EXERCICE 2.15.

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont les deux plans d'équations respectives $2x + 3y + z - 4 = 0$ et $z = 2$.

1. (a) Le système $\begin{cases} 2x + 3y + z - 4 \\ z = 2 \end{cases}$ définit-il une droite $\mathcal{D}$?
 (b) Construire la trace de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{Q}$ sur les plans de coordonnées.
 (c) En déduire la représentation de $\mathcal{D}$.

2. Mêmes questions avec les systèmes suivants :

$$\bullet \begin{cases} 2x - y - z - 7 = 0 \\ x = 5 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} 3x - 2y + z - 8 = 0 \\ -x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} x + 3y + 2z - 6 = 0 \\ 3x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

EXERCICE 2.16.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère les points $A(-1; 2; 1)$ et $B(3; -2; 0)$.
 (a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (AB) .
 (b) Soit $M(x; y; z)$ un point de la droite (AB) .

Expliquer pourquoi les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-1}{-1}$.

- (c) En déduire un système d'équations cartésiennes de (AB) .
2. De la même manière, déterminer un système d'équations cartésiennes de :
 • (CD) avec $C(-1; 2; -3)$ et $D(0; -2; 1)$.
 • (EF) avec $E(1; 0; 1)$ et $F(1; -2; 4)$;

EXERCICE 2.17.

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite :

1. qui passe par $A(-3; 2; 0)$ et qui est perpendiculaire au plan (xOy) ;
2. qui passe par $B(5; 0; -2)$ et qui est perpendiculaire au plan (xOz) .

EXERCICE 2.18.

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\mathcal{D}$ est la droite dont un système d'équations cartésiennes est : $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y - z + 3 = 0 \end{cases}$.

1. (a) Résoudre le système suivant $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y - z + 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$.

(b) Interpréter géométriquement la solution du système résolu en 1a.

2. Déterminer l'intersection de la droite $\mathcal{D}$ avec chacun des plans de coordonnées.

Chapitre 3

Rappels et compléments sur les suites

Sommaire

3.1 Définition, vocabulaire et notations	25
3.2 Représentation graphique d'une suite	25
3.2.1 Cas général	25
3.2.2 Cas d'une suite définie par récurrence	26
3.3 Monotonie d'une suite	26
3.4 Suites majorées, minorées, bornées	26
3.5 Suites convergentes	27
3.6 Démonstration par récurrence	27
3.7 Quelques suites particulières	27
3.7.1 Suites arithmétiques	27
3.7.2 Suites géométriques	28
3.8 Exercices	30

Une grande partie des sections de ce chapitre sont des rappels de Première. Dans ce cas les exemples seront limités et les preuves des propriétés ne seront pas rappelées.

3.1 Définition, vocabulaire et notations

Définition 3.1. Une suite numérique u est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une fonction qui à tout entier naturel n associe un réel, noté $u(n)$ ou, plus généralement, u_n .

Définition 3.2 (explicite). Soit f une fonction définie au moins sur $\mathbb{R}^+$. Une suite (u_n) , telle que $u_n = f(n)$ est dite définie de manière *explicite*.

Définition 3.3 (par récurrence). Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$. Une suite (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ est dite définie *par récurrence*.

Remarque. Une suite peut aussi être définie par la donnée de u_0 et u_1 et une relation de récurrence du type $u_{n+2} = f(u_{n+1}; u_n)$ où f est une fonction de deux variables.

EXERCICE 3.1.

Dans chacun des cas suivants, déterminer les termes jusqu'au rang $n = 5$.

1. (u_n) telle que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{1}{n+1} + n$
2. (v_n) telle que $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = \frac{2}{v_n} + 1$
3. (w_n) telle que $w_0 = 0$, $w_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $w_{n+2} = -2(w_{n+1})^2 + w_n$

3.2 Représentation graphique d'une suite

3.2.1 Cas général

Définition 3.4. Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la représentation graphique d'une suite (u_n) est l'ensemble des points M_n de coordonnées $(n; u_n)$.

EXERCICE.

Construire les représentations graphiques de (u_n) et (v_n) définies à l'exercice 3.1.

3.2.2 Cas d'une suite définie par récurrence

Dans le cas d'une suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$, une autre représentation graphique possible s'obtient en procédant de la façon suivante :

1. On trace la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f et la première bissectrice d'équation $y = x$.
2. On place le premier terme u_0 sur l'axe des abscisses.
3. On utilise $\mathcal{C}$ pour construire $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées.
4. On reporte u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la première bissectrice.
5. On utilise $\mathcal{C}$ pour construire $u_2 = f(u_1)$ sur l'axe des ordonnées.
6. etc.

On obtient alors la *représentation en chemin* de la suite.

EXERCICE.

Construire la représentation en chemin de (v_n) définie à l'exercice 3.1.

3.3 Monotonie d'une suite

Définition 3.5. Une suite est dite :

- *croissante* si, pour tout n , $u_{n+1} \geq u_n$;
- *décroissante* si, pour tout n , $u_{n+1} \leq u_n$;
- *stationnaire* si, pour tout n , $u_{n+1} = u_n$.

Si la suite ne change pas de sens de variation, on dit qu'elle est *monotone*.

Remarque. On obtient les définitions de *strictement* croissante, décroissante ou monotone en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

Remarques. Pour étudier la monotonie d'une suite :

- On peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$. Cette méthode est très générale et « fonctionne » souvent.
- Dans le cas d'une suite à *termes strictement positifs*, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1. Cette méthode est plus adaptée aux suites dont le terme général est une puissance ou un produit.
- Dans le cas d'une suite définie par une formule explicite, on peut étudier les variations de la fonction associée sur $[0; +\infty[$.

EXERCICE.

Étudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n) définies dans l'exercice 3.1.

3.4 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 3.6. Une suite (u_n) est dite :

- *majorée* par un réel M si, pour tout entier naturel n , $u_n \leq M$;
- *minorée* par un réel m si, pour tout entier naturel n , $u_n \geq m$;
- *bornée* par m et M si elle est minorée par m et majorée par M .

EXERCICE.

On a vu dans l'exemple précédent que la suite (u_n) définie dans l'exemple 3.1 était croissante. En déduire que la suite est minorée et donner le *plus grand* minorant possible.

Propriété 3.1. Soit (u_n) une suite.

- Si (u_n) est croissante alors (u_n) est minorée par u_0 (et par tout réel inférieur à u_0).
- Si (u_n) est décroissante alors (u_n) est majorée par u_0 (et par tout réel supérieur à u_0).

La preuve de cette propriété triviale est laissée en exercice au lecteur.

3.5 Suites convergentes

Définition 3.7. Une suite (u_n) est dite :

- *convergente* si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ où l est un réel ;
- *divergente* sinon.

Propriété 3.2. Soit (u_n) une suite définie de manière explicite par $u_n = f(n)$ où f est une fonction admettant une limite en l'infini. Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

On l'admettra.

EXERCICE.

Étudier la convergence de la suite (u_n) définie dans l'exemple 3.1.

3.6 Démonstration par récurrence

Dans le cas de suites définies de façon explicite, toutes les propriétés des fonctions (dérivée, limites) sont disponibles. Ce n'est pas le cas des suites définies par récurrence. On procède alors parfois à des démonstrations dites par récurrence.

ACTIVITÉ 3.1.

On considère la suite (u_n) définie par récurrence par : $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n} \end{cases}$.

1. Montrer que u_1, u_2 et u_3 appartiennent à $[0; 1]$.
2. Montrer que si $0 \leq u_p \leq 1$ alors $0 \leq u_{p+1} \leq 1$.
3. Que peut-on en déduire pour (u_n) ?

Ce type de démonstration est appelé « une démonstration par récurrence ».

Ainsi si on veut démontrer par récurrence que tous les termes d'une suite vérifient une propriété $\mathcal{P}$, on procède de la façon suivante :

- on montre que le ou les premiers termes vérifient $\mathcal{P}$;
- on montre que si u_p vérifie $\mathcal{P}$, alors u_{p+1} vérifie $\mathcal{P}$ (on dit qu'elle est *héréditaire*) ;
- on peut alors conclure que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.7 Quelques suites particulières

3.7.1 Suites arithmétiques

Définition et premières propriétés

Définition 3.8. On appelle *suite arithmétique* toute suite (u_n) telle que

$$\text{Pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n + r \text{ où } r \in \mathbb{R}$$

r est appelé *la raison* de la suite arithmétique.

Remarque. Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de montrer que, pour tout n , la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante. Cette constante sera alors la raison de la suite.

Propriété 3.3. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et raison r . Alors, pour tout entier naturel n et tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$, on a : $u_n = u_p + (n - p)r$.

Et en particulier, avec $p = 0$:

$$u_n = u_0 + nr$$

Remarque. Cette propriété est importante car elle transforme une suite arithmétique, définie par récurrence ($u_{n+1} = f(u_n)$), en une suite définie explicitement ($u_n = f(n)$).

Preuve. Voir l'exercice 3.2.



Somme de termes consécutifs

Pour obtenir ce résultat, nous avons besoin de la petite propriété suivante (on appelle ça un *lemme* : une propriété qui sert à la démonstration d'une autre)

Lemme 3.4. Soit $S_n = 1 + 2 + \dots + n$ la somme des n premiers entiers. Alors $S_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{(1+n)n}{2}$

Preuve. Écrivons S de deux manières :

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + 2 + \dots + n-1 + n \\ \text{et } S_n &= n + n-1 + \dots + 2 + 1 \\ \text{donc } 2S_n &= n+1 + n+1 + \dots + n+1 + n+1 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } 2S_n = n(n+1) \Leftrightarrow S_n = \frac{(1+n)n}{2}$$

◇

Démontrons alors que :

Propriété 3.5. Soit (u_n) une suite arithmétique et n et p deux entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$. Alors :

$$\sum_{i=p}^n u_i = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{(u_p + u_n)(n-p+1)}{2}$$

En particulier, en posant $p = 0$, on obtient :

$$\sum_{i=0}^n u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$$

Preuve. Commençons par le second point.

Pour tout i on a $u_i = u_0 + ir$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n u_i &= u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_0 + (u_0 + r) + \dots + (u_0 + (n-1)r) + (u_0 + nr) \\ &= (n+1)u_0 + r(1 + \dots + n) = (n+1)u_0 + r \left(\frac{(1+n)n}{2} \right) \text{ d'après le lemme} \\ &= \frac{2(n+1)u_0 + r(1+n)n}{2} = \frac{(n+1)(2u_0 + nr)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(u_0 + u_0 + nr)}{2} = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2} \text{ car } u_0 + nr = u_n \end{aligned}$$

Passons au premier point.

$$\begin{aligned} \sum_{i=p}^n u_i &= u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p + (u_p + r) + \dots + (u_p + (n-p)r) \\ &= (n-p+1)u_p + r(1 + \dots + (n-p)) = \dots \\ &= \frac{(n-p+1)(u_p + u_p + (n-p)r)}{2} = \frac{(u_p + u_n)(n-p+1)}{2} \end{aligned}$$

◇

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs d'une suite arithmétique est :

$$S = \frac{(1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier}) \times (\text{nb de termes})}{2}$$

3.7.2 Suites géométriques

Définition et premières propriétés

Définition 3.9. On appelle *suite géométrique* toute suite (u_n) telle que

$$\text{Pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = q \times u_n \text{ où } q \in \mathbb{R}$$

q est appelé la *raison* de la suite géométrique.

Remarques. 1. Si $q = 0$, tous les termes de la suite, hormis peut-être u_0 sont nuls.

Si $u_0 = 0$, tous les termes de la suite sont nuls.

En dehors de ces deux cas triviaux, inintéressants, tous les termes de la suite sont différents de zéro.

2. Pour démontrer qu'une suite est géométrique (en dehors des deux cas triviaux), il suffit de montrer que, pour tout n , le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. Cette constante sera alors la raison de la suite.

Exemples 3.1. • La suite définie par : pour tout $n \geq 1$, $u_n = 2^n$ est géométrique.

En effet $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \Leftrightarrow u_{n+1} = 2u_n$ (de raison 2).

- La suite définie par : pour tout n , $u_n = n^2$ n'est pas arithmétique.

En effet $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \neq \text{constante}$.

On peut le voir encore plus facilement sur les premiers termes :

$$\frac{u_2}{u_1} = 4 \neq \frac{u_3}{u_2} = \frac{9}{4}$$

Propriété 3.6. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et raison q . Alors, pour tout entier naturel n et tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$, on a : $u_n = q^{n-p} u_p$

Et en particulier, avec $p = 0$:

$$u_n = q^n u_0$$

Remarque. Cette propriété est importante car elle transforme une suite géométrique, définie par récurrence ($u_{n+1} = f(u_n)$), en une suite définie explicitement ($u_n = f(n)$).

Preuve. Voir l'exercice 3.3. ◇

Somme de termes consécutifs

Pour obtenir ce résultat, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.7. Soit $q \neq 1$ et $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$. Alors $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Preuve. Remarquons que $q \times S = q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1}$.

Donc $S - qS = 1 - q^{n+1} \Leftrightarrow S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$ donc, pour $q \neq 1$, $S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. ◇

Démontrons alors que :

Propriété 3.8. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et n et p deux entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$. Alors :

$$\sum_{i=p}^n u_i = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

En particulier, en posant $p = 0$, on obtient :

$$\sum_{i=0}^n u_i = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Preuve. On ne démontrera que le second point.

Pour tout i on a $u_i = q^i u_0$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n u_i &= u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_0 + qu_0 + q^2 u_0 + \dots + q^n u_0 \\ &= u_0(1 + q + \dots + q^n) = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \end{aligned}$$
◇

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique est :

$$S = 1^{\text{er}} \text{ terme} \frac{1 - q^{nb \text{ de termes}}}{1 - q}$$

3.8 Exercices

EXERCICE 3.2 (Suites arithmétiques).

L'objet de cet exercice est d'étudier quelques propriétés supplémentaires des suites arithmétiques.

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r

1. Étude de la monotonie d'une suite arithmétique

(a) Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

(b) En déduire dans quels cas on a, pour tout entier naturel n :

$$\bullet u_{n+1} \leq u_n \qquad \bullet u_{n+1} \geq u_n \qquad \bullet u_{n+1} = u_n$$

(c) En déduire dans quels cas une suite arithmétique est croissante, décroissante ou stationnaire.

2. Démonstration par récurrence

On a conjecturé en Première que, pour une suite arithmétique, comme $u_1 = u_0 + 1 \times r$, comme $u_2 = u_0 + 2 \times r$, on avait très certainement la relation $\mathcal{P} : u_n = u_0 + n \times r$.

On va le démontrer.

(a) Montrer que $\mathcal{P}$ est vraie pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

(b) Supposons que $\mathcal{P}$ est vraie au rang p . Montrer qu'alors elle est vraie au rang $p + 1$.

(c) Conclure.

3. Étude de la convergence d'une suite arithmétique

On vient de voir qu'une suite arithmétique peut être définie de façon explicite par $u_n = f(n)$.

(a) Expliciter f .

(b) Étudier la limite de f en $+\infty$.

(c) En déduire la convergence d'une suite arithmétique.

4. Soit $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Étudier la convergence de la suite (S_n) .

EXERCICE 3.3 (Suites géométriques).

L'objet de cet exercice est d'étudier quelques propriétés supplémentaires des suites arithmétiques.

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 > 0$ et de raison q

1. Étude de la monotonie d'une suite géométrique

(a) Montrer que si $q < 0$ alors la suite n'est pas monotone.

(b) Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ selon les valeurs de q lorsque $q \geq 0$.

(c) En déduire dans quels cas on a, pour tout entier naturel n :

$$\bullet u_{n+1} \leq u_n \qquad \bullet u_{n+1} \geq u_n \qquad \bullet u_{n+1} = u_n$$

(d) En déduire dans quels cas une suite géométrique est croissante, décroissante ou stationnaire.

2. Démonstration par récurrence

On a conjecturé en Première que, pour une suite arithmétique, comme $u_1 = u_0 \times q$, comme $u_2 = u_0 \times q^2$, on avait très certainement la relation $\mathcal{P} : u_n = u_0 \times q^n$.

On va le démontrer.

(a) Montrer que $\mathcal{P}$ est vraie pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

(b) Supposons que $\mathcal{P}$ est vraie au rang p . Montrer qu'alors elle est vraie au rang $p + 1$.

(c) Conclure.

3. Étude de la convergence d'une suite géométrique

On admettra la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 3.9. Soit q un réel.

$$\bullet \text{ Si } q > 1, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty \qquad \bullet \text{ Si } -1 < q < 1, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

En déduire la convergence d'une suite géométrique quand $u_0 > 0$.

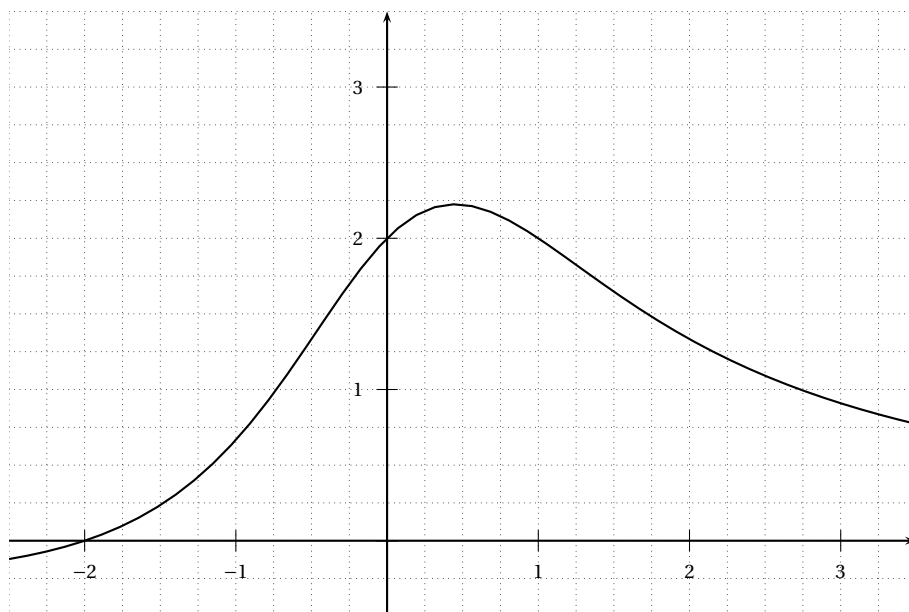
4. Soit $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Étudier la convergence de la suite (S_n) .

EXERCICE 3.4.

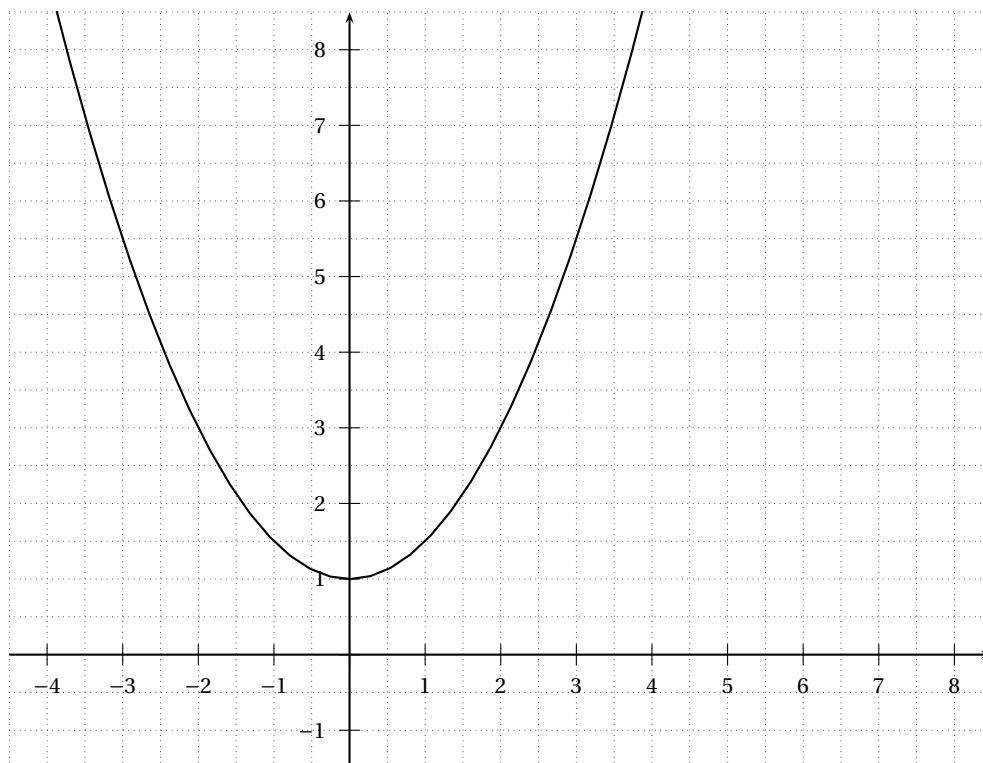
On a tracé dans le repère ci-dessous la courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{2x+4}{2+x^2}$.

Construire la représentation graphique en chemin de la suite (u_n) définie par $(u_n) : \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+4}{2+u_n^2} \end{cases}$

**EXERCICE 3.5.**

On a tracé dans le repère ci-dessous la courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$.

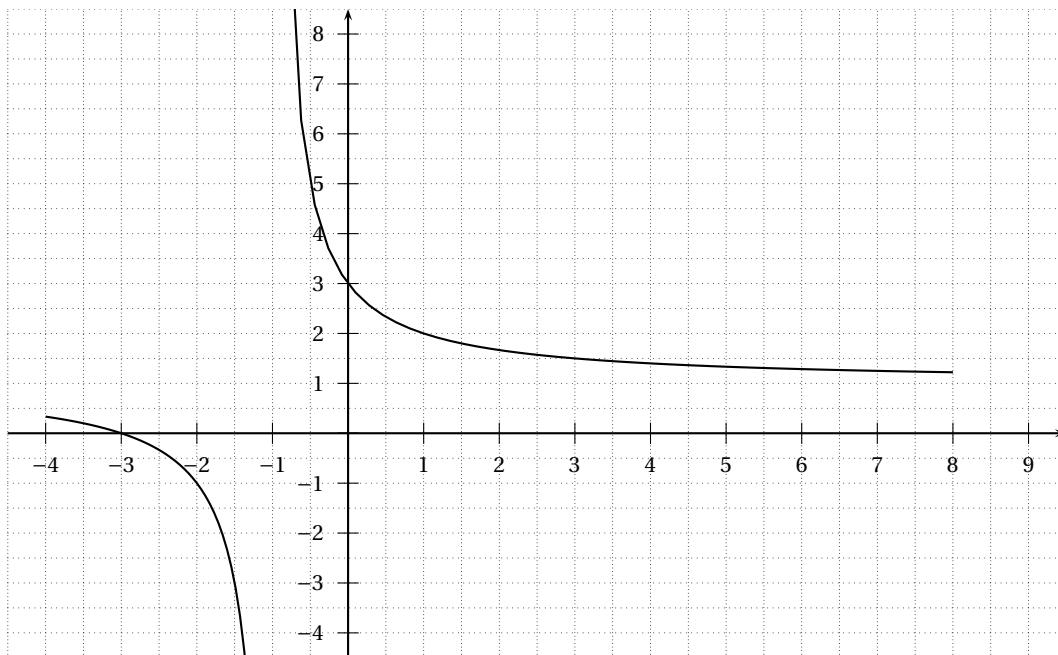
Construire la représentation graphique en chemin de la suite (u_n) définie par $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 0,5 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 + 1 \end{cases}$



EXERCICE 3.6.

On a tracé dans le repère ci-dessous la courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$.

Construire la représentation graphique en chemin de la suite (u_n) définie par $(u_n) : \begin{cases} u_0 = -1,5 \\ u_{n+1} = \frac{u_n+3}{u_n+1} \end{cases}$

**EXERCICE 3.7.**

On considère la suite (u_n) définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+1}$ avec $u_0 = 2$.

- Montrer que la fonction f , définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x}{x+1}$, est croissante sur $[0; +\infty[$.
 - Déterminer un encadrement de $f(x)$ dans le cas où $x \in [1; 2]$.
- Calculer u_1 , u_2 et u_3 . Vérifier que $u_0 \in [1; 2]$.
 - Montrer que, si $u_p \in [1; 2]$, alors $u_{p+1} \in [1; \frac{4}{3}]$ et donc, *a fortiori*, $u_{p+1} \in [1; 2]$.
 - Que peut-on en conclure ?

EXERCICE 3.8.

On donne la suite $(v_n) : \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{v_n}{1+v_n} \right) \end{cases}$

- Construire sa représentation graphique en chemin dans le repère de la figure 3.1.
 - Conjecturer sa monotonie et ses bornes.
- Montrer par récurrence que (v_n) est minorée par 0.
- Montrer que $v_1 < v_0$.
 - On suppose que $v_{p+1} < v_p$. Montrer qu'alors $v_{p+2} < v_{p+1}$ (on pourra étudier le signe de $v_{p+2} - v_{p+1}$).
 - Que peut-on en conclure ?
 - En déduire que (v_n) est majorée par 2.

EXERCICE 3.9.

On donne la suite $(w_n) : \begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n+1} = \frac{2w_n+3}{w_n+4} \end{cases}$

- Construire sa représentation graphique en chemin dans le repère de la figure 3.2.
 - Conjecturer sa convergence
- On pose $v_n = \frac{w_n-1}{w_n+3}$
 - Montrer que (v_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
 - Donner l'expression de v_n en fonction de n .
 - En déduire l'expression de w_n en fonction de n .
 - En déduire la convergence de (w_n) .

FIGURE 3.1 – Figure de l'exercice 3.8

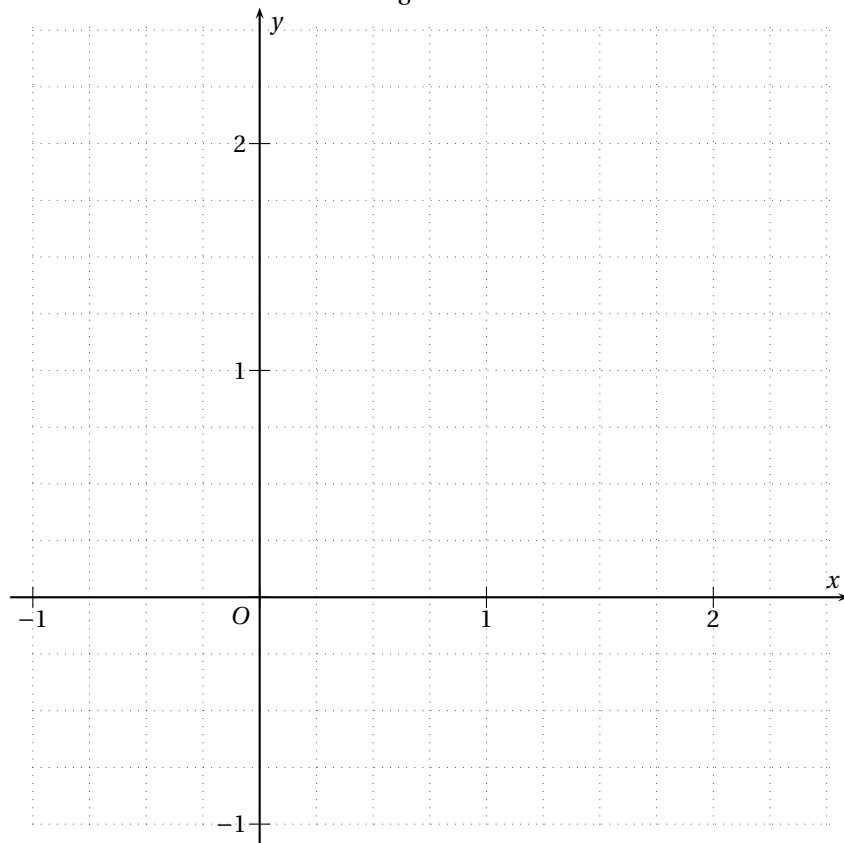
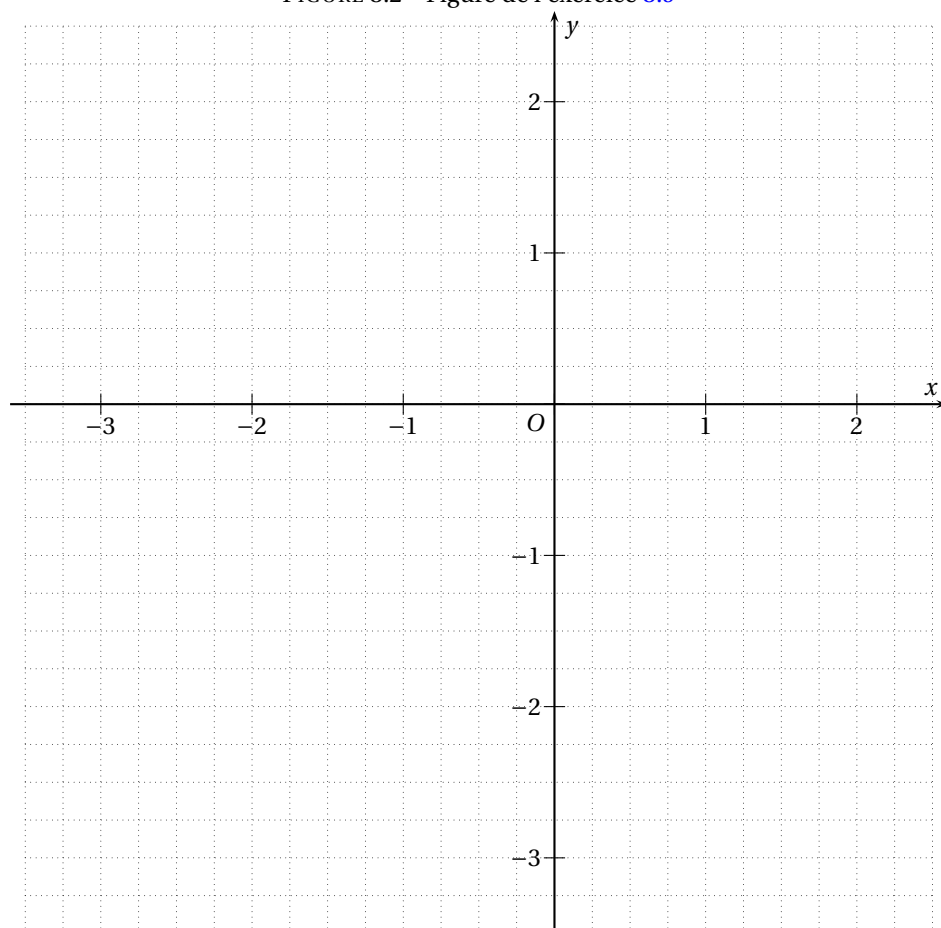


FIGURE 3.2 – Figure de l'exercice 3.9

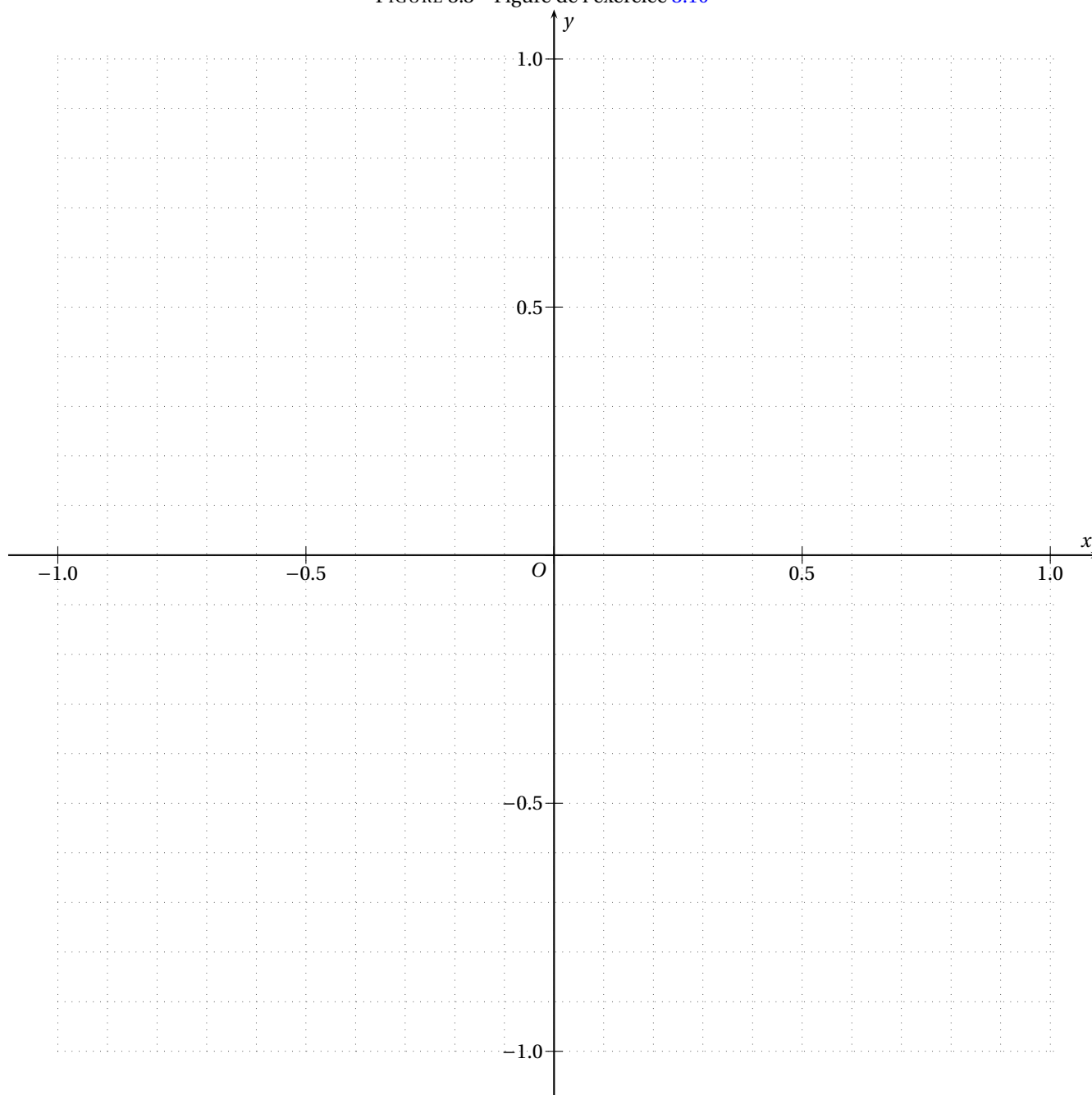


EXERCICE 3.10.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+7u_n}$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 . La suite (u_n) est-elle arithmétique ou géométrique?
2. (a) Construire sa représentation graphique en chemin dans le repère de la figure 3.3.
(b) Conjecturer sa convergence.
3. Montrer que si $u_{n+1} = 0$, alors $u_n = 0$. En déduire que pour tout n , $u_n \neq 0$.
4. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{2-u_n}{u_n}$.
 - (a) Calculer les quatre premiers termes de (v_n) .
 - (b) Montrer que (v_n) est arithmétique.
 - (c) Exprimer v_n en fonction de n . En déduire une expression de u_n en fonction de n .
 - (d) La suite (u_n) a-t-elle une limite? Si oui, laquelle?

FIGURE 3.3 – Figure de l'exercice 3.10



Chapitre 4

Comptage de chaînes, graphes orientés

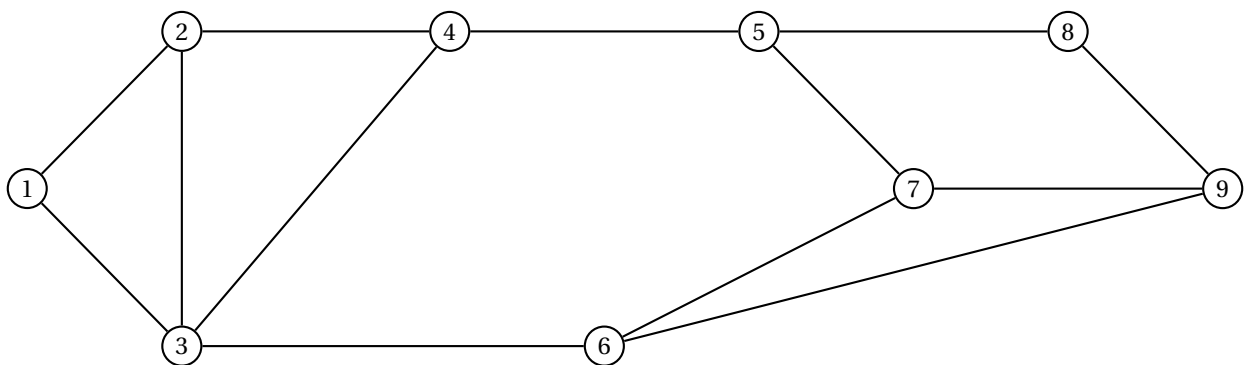
Sommaire

4.1 Comptage de chaînes	35
4.1.1 Un problème	35
4.1.2 Une solution	35
4.2 Graphes orientés	36
4.2.1 Généralités	36
4.2.2 Matrice d'un graphe orienté	36
4.3 Exercices	37

4.1 Comptage de chaînes

4.1.1 Un problème

Sébastien se rend régulièrement en train de la ville U (sommet 1) à la ville V (sommet 9), dans un réseau donné par le graphe ci-dessous. Il fait toujours le trajet en 5 étapes, et veut faire à chaque fois un chemin différent. Combien de trajets pourra-t-il faire ?



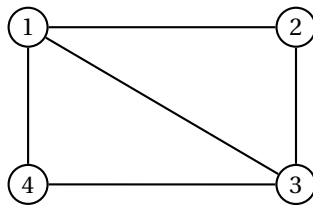
4.1.2 Une solution

Comme on l'a vu précédemment, si l'on essaie une énumération complète de tous les chemins de longueur 5 de U à V , on se rend vite compte qu'il est difficile de ne pas en oublier. Il faut trouver un moyen systématique de faire l'énumération.

La solution passe par les matrices.

Définition 4.1. Soit G un graphe qui possède n sommets numérotés de 1 à n . On appelle matrice d'adjacence du graphe la matrice $A = (a_{i,j})$, où $a_{i,j}$ est le nombre d'arêtes joignant le sommet de numéro i au sommet de numéro j .

Exemple 4.1. Le graphe G ci-dessous a la matrice d'adjacence A ci-contre.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque. L'allure de la matrice d'adjacence donne des indications sur la nature du graphe :

- La matrice d'adjacence d'un graphe sans boucle n'a que des 0 sur la diagonale.
- La matrice d'adjacence d'un graphe sans arête parallèle n'a que des 1 ou des 0.
- La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique par rapport à sa diagonale.
- La matrice d'adjacence d'un graphe complet n'a que des 1, hormis sur sa diagonale où il y a des 0.

EXERCICE.

Considérons le graphe G ci-dessus.

1. Déterminer le nombre de chaînes de longueur 2 entre deux sommets quelconques et présenter les résultats sous forme de matrice.
2. À la calculatrice, obtenir A^2 . Que constate-t-on ?
3. Le résultat précédent étant vrai dans le cas général, résoudre, à l'aide des matrices, le problème d'introduction.

Théorème 4.1 (admis). Soit G un graphe de matrice d'adjacence A . Le nombre de chaînes de longueur n joignant le sommet i au sommet j est donné par le terme d'indice i, j de la matrice A^n .

4.2 Graphes orientés

4.2.1 Généralités

Il existe de nombreux domaines où les graphes sont orientés. Par exemple : plan de ville, avec les sens interdits ; parcours en montagne, où il est utile d'indiquer le sens de montée ! Circuit électrique en courant continu, où il faut orienter les arêtes pour décider du signe de l'intensité : ce n'est pas la même chose de faire passer 10 ampères de A vers B ou de B vers A ; graphe d'ordonnancement, où les arêtes relient une tâche à une autre qui doit la suivre : on ne peut faire la peinture avant le plâtre.

Définition 4.2. On appelle graphe orienté un graphe où chaque arête est orientée, c'est-à-dire qu'elle va de l'une des ses extrémités, appelée *origine* ou *extrémité initiale* à l'autre, appelée *extrémité terminale*.

Dans un graphe orienté, chaque arête orientée possède un début et une fin. Toutes les notions que nous avons définies pour un graphe ont un équivalent pour un graphe orienté. Nous nous contenterons de rajouter le mot « orienté » pour préciser ; le contexte rendra évidente l'interprétation à donner.

En particulier, une chaîne orientée est une suite d'arêtes telle que l'extrémité finale de chacune soit l'extrémité initiale de la suivante. On prendra garde au fait que l'on peut définir et utiliser des chaînes (non orientées) sur un graphe orienté. Par exemple, sur un plan de ville où toutes les rues sont en sens unique, un parcours de voiture correspond à une chaîne orientée, un parcours de piéton correspond à une chaîne (non orientée).

4.2.2 Matrice d'un graphe orienté

On a vu que la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique. Il n'en va pas de même pour celle d'un graphe orienté car si une arête a pour extrémité initiale le sommet A et pour extrémité finale le sommet B , il n'en existe pas forcément une allant de B vers A , aussi dans ce cas le coefficient correspondant aux arêtes allant de A vers B ne sera pas le même que le coefficient correspondant aux arêtes allant de B vers A .

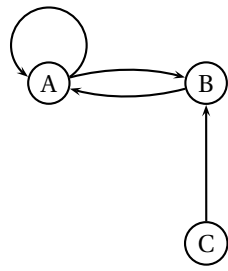
De la même manière que précédemment, les différentes puissances de la matrice d'adjacence d'un graphe orienté ne sont pas, en général, symétriques.

Dans le même ordre d'idée, on doit convenir d'un sens de lecture pour la matrice d'un graphe orienté. La matrice

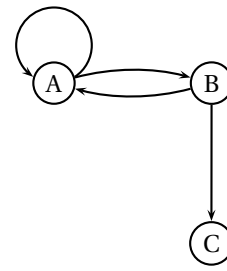
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

peut correspondre à l'un ou l'autre des graphes ci-dessous selon qu'on choisit de lire les extrémités initiales en ligne ou en colonne :

En ligne



En colonne



On convient alors de la chose suivante :

Définition 4.3. Par convention, dans la matrice d'adjacence d'un graphe G orienté, le terme a_{ij} (i -ième ligne, j -ième colonne) désigne le nombre d'arêtes d'origine le sommet i et d'extrémité finale le sommet j .

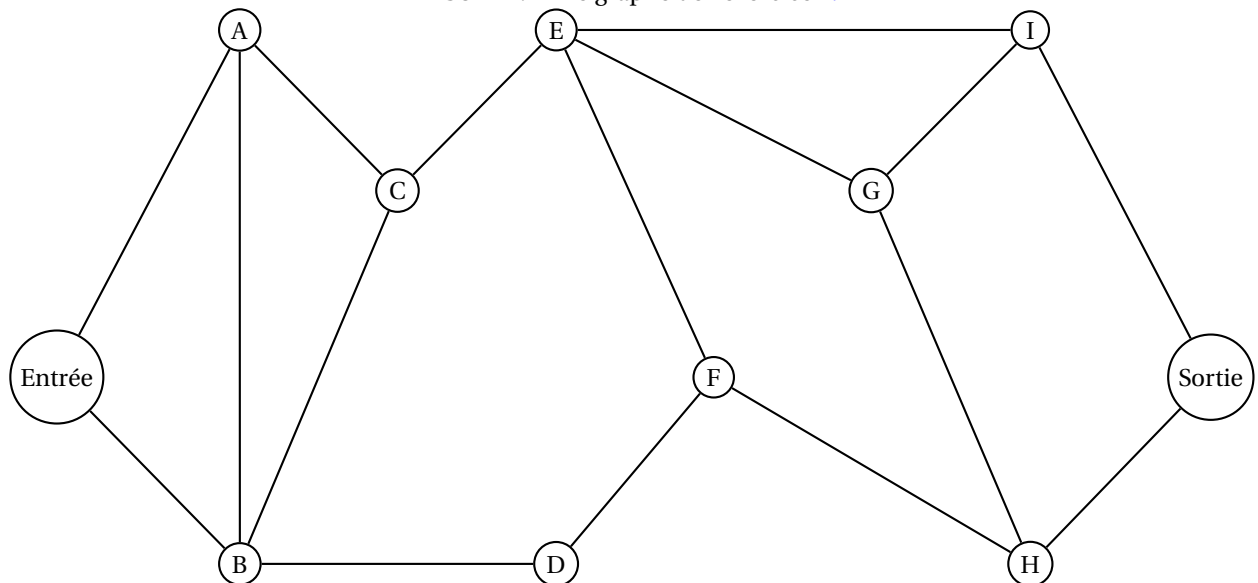
Pour la suite nous travaillerons indifféremment avec des graphes orientés ou non orientés.

4.3 Exercices

EXERCICE 4.1.

Quel est le nombre de chaînes de longueur 6 entre l'entrée et la sortie du graphe donné par la figure 4.1 de la présente page ?

FIGURE 4.1 – Le graphe de l'exercice 4.1



EXERCICE 4.2.

La figure 4.2 page suivante donne un graphe représentant un plan de circulation du centre-ville de Neverland.

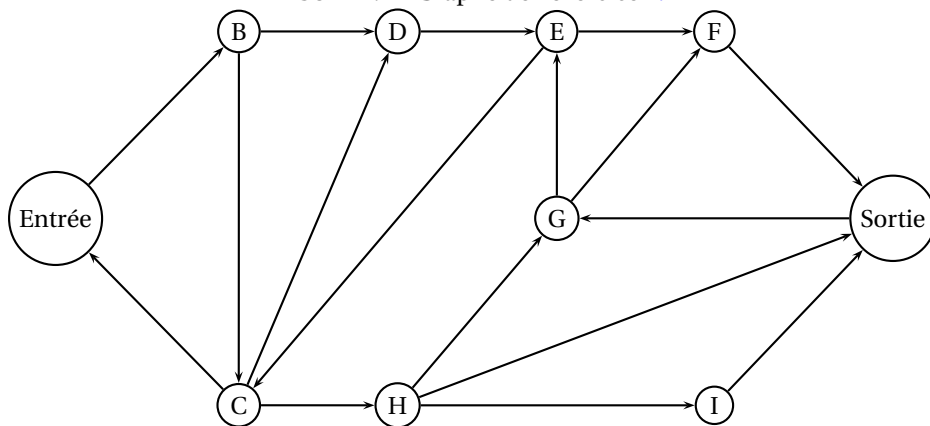
1. Quel est le nombre de manières d'aller en voiture de l'entrée à la sortie en 10 étapes ?
2. Et à pied ?

EXERCICE 4.3.

Représenter le graphe G dont la matrice d'adjacence est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

FIGURE 4.2 – Graphe de l'exercice 4.2

**EXERCICE 4.4.**

On donne A la matrice d'adjacence d'un graphe G ainsi que quelques-unes de ses puissances ci-dessous. Sans tracer le graphe répondre aux questions.

1. Quel est l'ordre de G ?
2. G est-il un graphe orienté?
3. (a) Quel est le degré du sommet 3?
- (b) Le graphe est-il eulérien?
4. Combien de chaînes de longueur 4 relient les sommets 2 et 5?
5. Pourquoi y a-t-il forcément une erreur dans la matrice A^5 ?
6. (a) Quelle est la distance entre les sommets 1 et 7?
- (b) Quel est le diamètre de G ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 & 3 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 6 & 6 & 7 & 6 & 9 & 3 & 3 & 1 \\ 5 & 7 & 4 & 3 & 9 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 2 & 7 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 9 & 7 & 6 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 6 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 7 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 11 & 9 & 18 & 5 & 5 & 2 \\ 13 & 28 & 21 & 15 & 25 & 12 & 13 & 3 \\ 11 & 21 & 21 & 16 & 18 & 11 & 12 & 2 \\ 9 & 15 & 16 & 13 & 15 & 9 & 10 & 2 \\ 18 & 25 & 18 & 15 & 38 & 13 & 13 & 7 \\ 5 & 12 & 11 & 9 & 13 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 13 & 12 & 10 & 13 & 9 & 14 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 7 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 24 & 49 & 42 & 31 & 43 & 23 & 25 & 5 \\ 49 & 74 & 66 & 53 & 89 & 38 & 40 & 13 \\ 42 & 66 & 50 & 39 & 81 & 30 & 31 & 12 \\ 31 & 53 & 39 & 30 & 63 & 25 & 26 & 10 \\ 43 & 89 & 81 & 63 & 84 & 51 & 58 & 13 \\ 23 & 38 & 30 & 25 & 51 & 22 & 27 & 9 \\ 25 & 40 & 31 & 26 & 58 & 27 & 24 & 14 \\ 5 & 13 & 12 & 10 & 13 & 8 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 4.5.

Pour chacun des graphes de la figure 4.3 de la présente page :

1. donner sa matrice d'adjacence ;
2. déterminer s'il est connexe ;
3. déterminer s'il contient un cycle contenant au moins deux sommets.

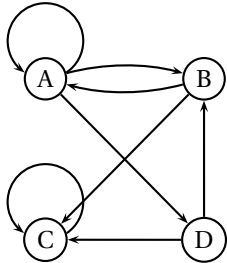
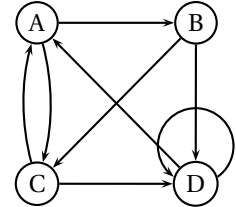
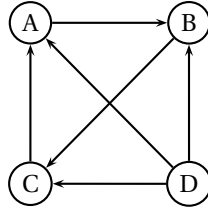


FIGURE 4.3 – Graphes de l'exercice 4.5

**EXERCICE 4.6.**

Pour chacune des matrices suivantes, dessiner le graphe associé.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 4.7.

Pour traverser une chaîne de montagnes, il faut passer par plusieurs sommets, reliés entre eux par des voies ne pouvant être franchies que dans un seul sens. On donne, sur la figure ci-dessous, le graphe associé à cette situation (E est le point d'entrée et S le point de sortie). L'office de tourisme cherche toutes les traversées qui partent de E et arrivent en S en 4, 5 ou 8 étapes (une étape est le passage d'un sommet à un autre, ou du départ à un sommet, ou d'un sommet à l'arrivée).

Les sommets étant classés dans l'ordre E, A, B, C, G, D, F, S , on a :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La première ligne de M^3 est : 0 1 0 0 2 2 2 2

La première ligne de M^4 est : 0 0 0 0 3 3 2 4

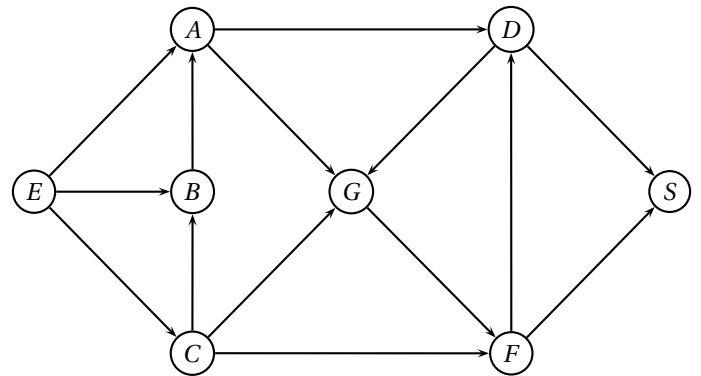
La première ligne de M^5 est : 0 0 0 0 3 2 3 5

La première ligne de M^7 est : 0 0 0 0 3 3 2 6

La première ligne de M^8 est : 0 0 0 0 3 2 3 5

Combien de traversées peut-on faire en 4 (resp. 5) étapes ?

Trouver toutes les traversées possibles en 8 étapes.



Chapitre 5

Colorations de graphes

Sommaire

5.1 Problèmes	41
5.2 Bilan et compléments	42
5.2.1 Coloration d'un graphe et nombre chromatique	42
5.2.2 Minorant du nombre chromatique	42
5.2.3 Majorant du nombre chromatique	42
5.2.4 Un exemple	43
5.3 Exercices	44

5.1 Problèmes

PROBLÈME 5.1 (Un problème d'aquariophile).

A, B, C, D, E, F, G et H désignent huit poissons ; dans le tableau ci-dessous, un X signifie que les poissons ne peuvent cohabiter dans un même aquarium.

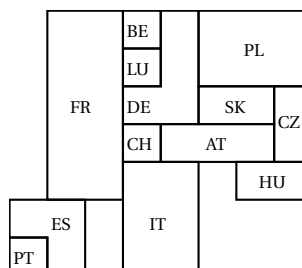
Quel nombre minimum d'aquariums faut-il ?

	A	B	C	D	E	F	G	H
A		X	X	X			X	X
B	X				X	X	X	
C	X					X	X	X
D	X				X			X
E		X		X		X	X	
F		X	X		X			
G	X	X	X		X			
H	X		X	X				

PROBLÈME 5.2 (Colorier une carte).

On veut colorier chaque pays de la carte ci-dessous, qui est la carte schématisée d'une partie de l'Europe, de telle sorte que deux pays voisins ne soient pas de la même couleur.

Montrer qu'il faut disposer d'au moins quatre couleurs et que quatre couleurs suffisent.



PROBLÈME 5.3 (Organisation d'un tournoi).

Pendant un festival, on veut organiser des tournois de scrabble (S), échecs (E), go (G), dames (D), tarot (T) et mastermind (M). Plusieurs personnes se sont inscrites à la fois pour les tournois E, S, G, d'autres personnes pour les tournois G, D, M, et enfin d'autres personnes pour les tournois M, T, S. Il est entendu qu'une participation simultanée à plusieurs tournois est impossible et que les organisateurs veulent satisfaire tout le monde.

1. Quel est le nombre maximum de tournois qui pourraient se dérouler en même temps ?
2. En sachant que chaque tournoi doit durer au maximum 3 heures, proposer un horaire des tournois nécessitant une durée minimale et respectant bien sûr les choix des participants.

5.2 Bilan et compléments

5.2.1 Coloration d'un graphe et nombre chromatique

Les problèmes ci-dessus peuvent tous se ramener à un problème de coloration de graphe.

Définition 5.1. Une coloration d'un graphe consiste en l'attribution de couleurs aux sommets, de telle manière que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.

Remarque. Il s'agit simplement d'un moyen de donner un contenu intuitif à une notion utile dans des contextes très variés. Dans les problèmes, cet ensemble de couleurs peut être un ensemble de tranches horaires dans lesquelles on doit faire tenir diverses occupations de façon compatible, de cages de zoo dans lesquelles il ne faut pas mettre des animaux qui vont s'attaquer, de salles de classes dans lesquelles on veut organiser des options, etc.

Une grande partie de la difficulté tient ici dans le travail de modélisation, pour faire apparaître la question comme un problème de coloriage. En particulier, la construction du graphe n'est pas toujours évidente : pour les problèmes de coloriage de carte, comme on l'a vu dans l'exercice sur la carte de l'Europe, c'est le graphe directement induit qu'il faut considérer. Dans les problèmes de compatibilité, ce ne sont pas les sommets compatibles qu'il faut relier sur le graphe, comme on a spontanément tendance à le faire, mais les sommets incompatibles.

Définition 5.2. Le nombre chromatique d'un graphe est le nombre minimum de couleurs nécessaires à sa coloration. On note généralement $\gamma(G)$ le nombre chromatique d'un graphe G .

On ne connaît pas de formule miracle permettant de déterminer le nombre chromatique d'un graphe quelconque. La plupart du temps il faut se contenter d'un encadrement, autrement dit d'un minorant et d'un majorant du nombre chromatique.

On a intérêt bien sûr à ce que le minorant soit le plus grand possible et que le majorant soit le plus petit possible. Si par hasard le minorant et le majorant sont les mêmes, on a gagné puisqu'on a alors le nombre chromatique du graphe.

5.2.2 Minorant du nombre chromatique

Quelques remarques simples permettent de minorer ce nombre chromatique.

Propriété 5.1. Si G est un graphe, alors pour tout sous-graphe H de G on a : $\gamma(H) \leq \gamma(G)$

Preuve. Une coloration de G avec $\gamma(G)$ couleurs induit une coloration de H avec au plus $\gamma(G)$ couleurs. $\diamond$

Propriété 5.2. Le nombre chromatique du graphe complet K_n est n .

Preuve. Les sommets étant tous adjacents, il faut autant de couleurs qu'il y a de sommets. $\diamond$

Propriété 5.3. Soit G un graphe. Si G contient un sous-graphe complet d'ordre n , alors $\gamma(G) \geq n$.

Preuve. C'est la conséquence évidente des deux précédentes propriétés. $\diamond$

5.2.3 Majorant du nombre chromatique

Il est plus difficile de prouver des majorations générales du nombre chromatique.

Deux propriétés sont disponibles, mais elles donnent souvent des majorations trop larges :

Propriété. Soit G un graphe d'ordre n , alors $\gamma(G) \leq n$.

Preuve. Cette propriété est triviale : si on donne une couleur différente à chacun des sommets de G , on obtient une coloration de G . $\diamond$

Cette propriété donne un majorant du nombre chromatique qui est mauvais. La suivante, qu'on admettra, donne un meilleur majorant, aussi nous n'utiliserons que celle-là :

Propriété 5.4. *Considérons un graphe G et soit r le plus grand des degrés des sommets. Alors : $\gamma(G) \leq r + 1$*

Pour en obtenir de meilleurs majorants, il faut avoir une stratégie pour colorier un graphe, stratégie qu'on appellera *algorithme de coloration*.

Un algorithme de coloration

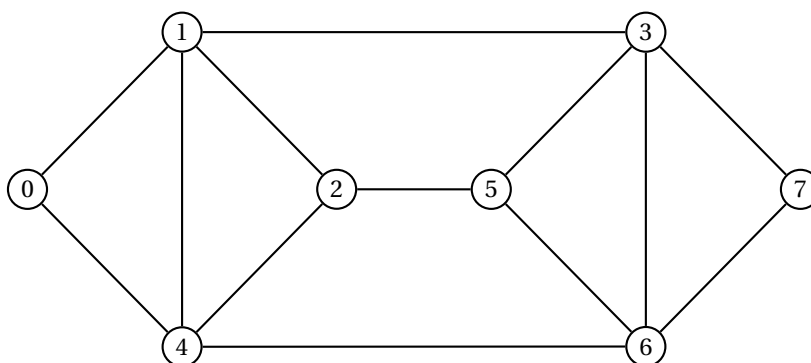
Nous allons décrire ci-après l'algorithme de coloration de WELCH et POWELL.

1. On classe d'abord les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leur degré. On obtient ainsi une liste $x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n$ de sommets telle que $\deg(x_1) \geq \deg(x_2) \geq \dots \geq \deg(x_n)$.
2. On choisit une couleur c_1 pour le sommet x_1 , et :
 - en parcourant la liste dans l'ordre, on attribue la couleur c_1 au premier sommet non colorié et non adjacent à c_1 ;
 - en continuant à parcourir la liste dans l'ordre, on attribue la couleur c_1 aux autres sommets non coloriés et non adjacents aux sommets déjà coloriés avec c_1 et, ce, jusqu'à la fin de la liste.
3. S'il reste des sommets non coloriés, on attribue une nouvelle couleur au premier sommet non colorié et on reprend la démarche.
4. On s'arrête dès que tous les sommets ont été coloriés.

Remarque. C'est un bon algorithme, mais précisons quand même que le nombre de couleurs utilisé par cet algorithme n'est pas forcément le nombre chromatique du graphe. L'exemple qui suit illustre cela. De plus, on remarquera qu'une partie de l'algorithme n'est pas entièrement déterminée : en effet, s'il y a plusieurs sommets de même degré, l'ordre dans lequel on les range est arbitraire, donc deux personnes appliquant cet algorithme au même graphe n'obtiendront pas forcément le même coloriage.

5.2.4 Un exemple

Considérons le graphe G dessiné ci-dessous.



Appliquons l'algorithme décrit ci-dessus : 1, 3, 6, 4, 2, 5, 0, 7 est une liste des sommets classés dans l'ordre décroissant de leurs degrés.

D'après l'algorithme :

- à la première étape on attribue une couleur c_1 aux sommets 1 et 6 ;
- à la deuxième étape, on attribue une couleur c_2 aux sommets 3 et 4 ;
- à la troisième étape, on attribue une couleur c_3 aux sommets 2, 0 et 7 ;
- enfin à la dernière étape on attribue une couleur c_4 au sommet 5.

Un tel algorithme peut se présenter sous forme de tableau :

Sommets (degré)	1 (4)	3 (4)	6 (4)	4 (4)	2 (3)	5 (3)	0 (2)	7 (2)
Étape 1	c_1		c_1					
Étape 2		c_2		c_2				
Étape 3					c_3		c_3	c_3
Étape 4						c_4		

On obtient un coloriage de G avec 4 couleurs, mais en fait le nombre chromatique de G est 3. En effet deux couleurs ne suffisent pas car G admet des triangles comme sous-graphes, c'est-à-dire des sous-graphes complets d'ordre 3, par contre, en prenant du bleu pour les sommets 0, 2 et 3, du rouge pour les sommets 4, 5 et 7 et du jaune pour les sommets 1 et 6, on obtient un coloriage avec 3 couleurs.

On a alors $\gamma(G) \geq 3$ car G contient un sous-graphe d'ordre 3 et $\gamma(G) \leq 3$ car on a mis en évidence une coloration de G à l'aide de 3 couleurs donc on a bien $\gamma(G) = 3$.

La morale de tout cela est que pour un petit nombre de sommets, il faut chercher directement le nombre chromatique plutôt que d'utiliser tel ou tel algorithme, même si à l'épreuve du baccalauréat on attend de vous que vous mettiez en évidence un algorithme de coloriage.

5.3 Exercices

EXERCICE 5.1 (Ouverture de magasins).

Une chaîne de cinq magasins décide d'ouvrir ses magasins en nocturne avec les contraintes suivantes : les deux premiers magasins ne peuvent pas être ouverts ensemble ; il en est de même pour les deux derniers ; au plus un seul magasin peut être ouvert parmi les magasins 1, 3, 4.

Trouver un état qui maximise le nombre de magasins ouverts en nocturne, tout en respectant les contraintes.

EXERCICE 5.2 (Produits chimiques).

On veut transporter dans un train des produits chimiques. Pour des raisons de sécurité, on ne mettra pas certains produits chimiques dans le même wagon.

On appelle $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ les produits chimiques et on indique dans le tableau ci-dessous les produits incompatibles (notés par un X).

Combien de wagons faudra-t-il prévoir ?

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1		X		X		
P_2	X		X		X	
P_3		X		X		
P_4	X		X			
P_5		X				X
P_6					X	

EXERCICE 5.3 (Organisation d'un examen).

On veut organiser un examen comportant, outre les matières communes, six matières d'options : Français (F), Anglais (A), Mécanique (M), Dessin industriel (D), Internet(I), Sport (S) ; les profils des candidats à options multiples sont : F-A-M ; D-S ; I-S ; I-M.

1. Quel est le nombre maximum d'épreuves que l'on peut mettre en parallèle ?
2. Une épreuve occupe une demi-journée ; quel est le temps minimal nécessaire pour ces options ?

EXERCICE 5.4 (Menuiserie).

Dans un atelier de menuiserie, six travaux sont à réaliser. On utilise quatre machines : une scie à dégrossir ; une raboteuse ; une mortaiseuse ; une ponceuse. Chaque travail nécessite l'utilisation de deux machines, comme indiqué dans le tableau ci-dessous.

Plan des utilisations	
Travail	Machines utilisées
1	Scie et raboteuse
2	Scie et mortaiseuse
3	Mortaiseuse et ponceuse
4	Raboteuse et ponceuse
5	Mortaiseuse et ponceuse
6	Scie et mortaiseuse

Deux travaux ne peuvent être exécutés en même temps que s'ils utilisent des machines différentes.

1. Certains travaux ne peuvent être réalisés en même temps. Représenter ces contraintes par un graphe.
2. On suppose que le temps nécessaire pour chaque travail est le même (une séquence de 20 min). Déterminer le nombre minimal de séquences nécessaires pour réaliser ces six travaux.
3. Proposer une organisation.

EXERCICE 5.5 (Habillement).

Aujourd'hui Nathalie est perplexe : que mettre pour cet entretien d'embauche ?

Dans son armoire, elle a : 3 pulls, 3 jupes, 3 paires de chaussures à assortir.

Elle ne peut pas mettre plusieurs pulls, plusieurs jupes ou plusieurs paires de chaussures et, par ailleurs, il y a des incompatibilités qui sont donnés dans le tableau suivant, où p_1, p_2, p_3 désignent les trois pulls, j_1, j_2, j_3 , les trois jupes, c_1, c_2, c_3 les trois paires de chaussures.

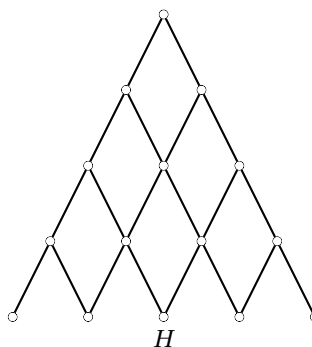
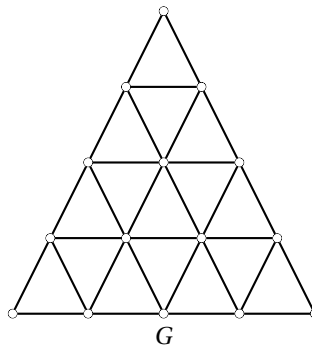
	ne peut aller avec
p_1	j_1, c_2, j_3
p_2	c_1, j_2, c_3, j_3
p_3	j_1, j_2, c_2
j_1	p_1, p_3, c_3, c_1
j_2	p_2, p_3, c_1, c_2
j_3	p_1, p_2, c_1

1. Représenter ces incompatibilités à l'aide d'un graphe dont les vêtements sont les sommets.
2. Colorier ce graphe.
3. En déduire toutes les possibilités d'assortiments compatibles.

EXERCICE 5.6 (Coloration de graphes). 1. Montrer que le nombre chromatique du graphe G ci-dessous vaut 3.

Pour trois couleurs données, combien y a-t-il de colorations possibles ?

2. Montrer que le nombre chromatique du graphe H ci-dessous vaut 2.



Chapitre 6

Suites arithmético-géométriques

Sommaire

6.1 Un exemple	47
6.2 Bilan et compléments	47
6.3 Exercices	48

L'objectif de ce chapitre est d'acquérir un savoir-faire sur un type d'exercice. Une définition et une propriété sont données mais elles ne sont pas exigibles. La propriété sera à démontrer, le cas échéant, dans chaque exercice, si l'énoncé l'impose.

6.1 Un exemple

Un fournisseur fait une étude sur la fidélité de sa clientèle depuis l'année $n = 0$, où il y a eu 200 clients. Chaque année, sa clientèle est composée de 50 % des clients de l'année précédente auxquels s'ajoutent 400 nouveaux clients.

1. Soit u_n le nombre de clients l'année n .
Justifier que $u_{n+1} = 0,5u_n + 400$, puis calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 .
2. La fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = 0,5x + 400$ est représentée par la courbe $\mathcal{C}$ de la figure 6.1 page suivante, ainsi que la première bissectrice d'équation $y = x$.
Construire la représentation en escalier de la suite (u_n) .
3. (a) Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection des deux droites
(b) Que laisse supposer cette représentation sur la limite de la suite (u_n) ?
4. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 800$.
(a) Vérifier que $v_{n+1} = 0,5v_n$.
(b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
(c) En déduire l'expression de v_n , puis celle de u_n , en fonction de n .
(d) Étudier la limite de la suite (u_n) .
Que peut on en déduire concernant le nombre de clients du fournisseur ?

6.2 Bilan et compléments

Définition. Soit m et p deux réels.

Une suite définie par récurrence par $(u_n) : \begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = mu_n + p \end{cases}$ est dite *arithmético-géométrique*.

Cette définition n'est pas à retenir.

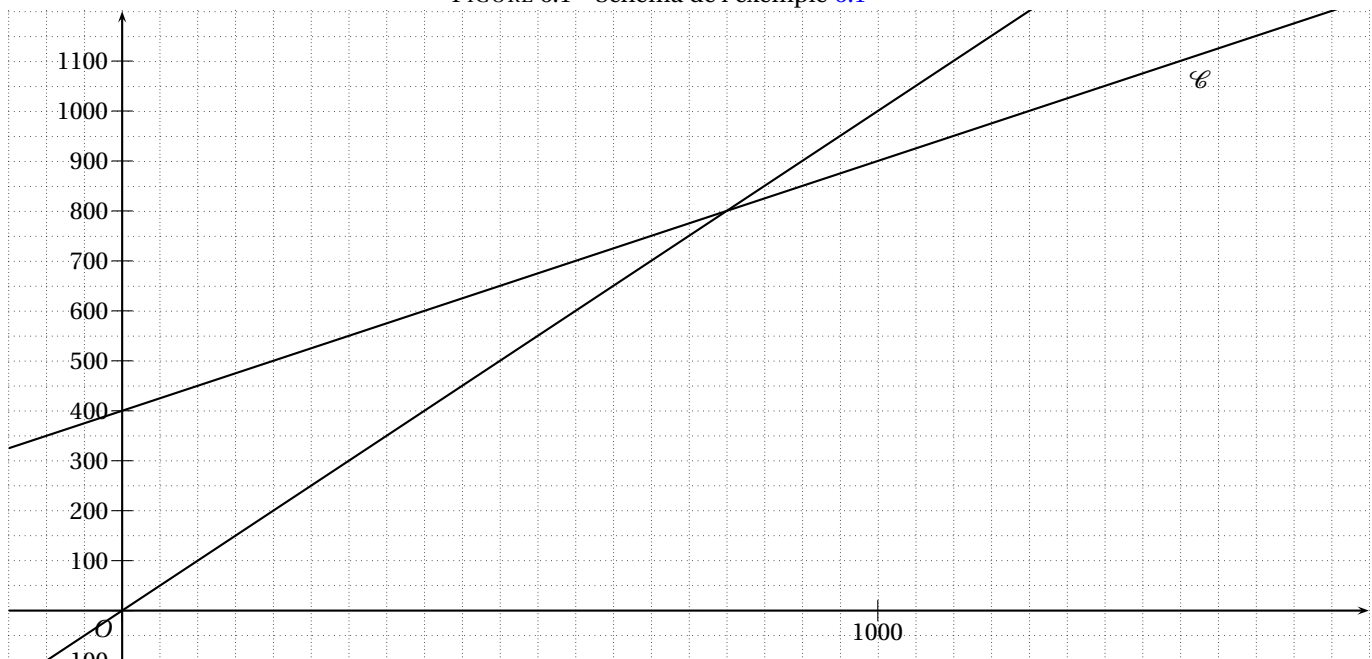
Remarque. • Si $p = 0$, elle est géométrique car $u_{n+1} = mu_n = qu_n$.

• Si $m = 1$, elle est arithmétique car $u_{n+1} = u_n + p = u_n + r$.

• Dans les autres cas, elle n'est ni géométrique, ni arithmétique.

Dans toute la suite on supposera $m \neq 1$ et $p \neq 0$.

FIGURE 6.1 – Schéma de l'exemple 6.1



Propriété. Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = mx + p$.
Si (u_n) converge c'est vers le nombre α tel que $f(\alpha) = \alpha$.

On l'admettra.

Exemple 6.1. Dans l'exemple d'introduction on a conjecturé que la suite (u_n) convergeait vers 800. Or $0,5x + 400 = x$
 $\Leftrightarrow 400 = 0,5x \Leftrightarrow x = 800$.

6.3 Exercices

EXERCICE 6.1.

On donne la suite : $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1 \end{cases}$

- Déterminer les 30 premiers termes de la suite à l'aide d'un tableur ou de la calculatrice.
 - Conjecturer sa monotonie.
 - Conjecturer sa convergence.
- Pour tout entier naturel n on pose $v_n = u_n - \frac{3}{2}$
 - Calculer v_0 , v_1 et v_2 .
 - Montrer que (v_n) est une suite géométrique et exprimer v_n en fonction de n .
 - Quelle est la monotonie de (v_n) ? En déduire celle de (u_n) .
 - Quelle est la convergence de (v_n) ? En déduire celle de (u_n) .

EXERCICE 6.2.

Le 1^{er} janvier 2005, une grande entreprise compte 1500 employés.

Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10 % de l'effectif du 1^{er} janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année. Pour tout entier n on appelle u_n le nombre d'employés le 1^{er} janvier de l'année $(2005 + n)$.

- Déterminer u_0 , u_1 , u_2 et u_3
- Montrer que $u_{n+1} = 0,9u_n + 100$.
 - Cette suite est-elle arithmétique? Cette suite est-elle géométrique?
- On pose $v_n = u_n - 1000$.
 - Déterminer v_0 , v_1 , v_2 et v_3 .
 - Montrer que (v_n) est géométrique.

- (c) En déduire v_n en fonction de n .
- (d) En déduire u_n en fonction de n .
- (e) En déduire quel sera l'effectif de l'entreprise le 1^{er} janvier de l'année 2027

EXERCICE 6.3.

Un étudiant souhaite s'acheter une super collection de CD d'une valeur de 1000 €. Pour économiser une telle somme, il ouvre un compte épargne à la banque qui rapporte 0,25 % mensuellement. À l'ouverture, il dépose 100 € le premier d'un mois, et ensuite 50 € le 1^{er} de chaque mois. On pose $c_0 = 100$ et on note c_n le capital le premier de chaque mois après le versement initial.

1. Calculer les capitaux c_1 , c_2 et c_3 du premier, deuxième et troisième mois.
2. Montrer que (c_n) vérifie une relation de récurrence de la forme $c_{n+1} = ac_n + b$, où a et b sont des réels à déterminer.
3. On pose $u_n = c_n + 20000$.
 - (a) Montrer que cette suite est géométrique.
 - (b) En déduire c_n puis u_n en fonction de n .
4. Montrer que (c_n) est croissante.
5. Déterminer le nombre de mois nécessaires pour l'achat de la collection.

EXERCICE 6.4.

Une ville comprenait 300 000 habitants au premier janvier 1950. On estime que la ville accueille tous les ans 2% de nouveaux arrivants et a un taux annuel de natalité de 3%. On constate curieusement un nombre fixe de décès et de départ de 800 personnes par an. On veut déterminer à partir de quelle année la population de la ville sera supérieure au double de la population en 1950.

1. Quelle était la population estimée de la ville le premier janvier 1951 ?
2. On note p_n la population de la ville à l'année 1950 + n . Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n .
3. On pose $q_n = p_n - 16000$.
 - (a) Montrer que cette suite est une suite géométrique.
 - (b) Exprimer q_n puis p_n en fonction de n .
4. Montrer que (p_n) est croissante.
5. Déterminer à partir de quelle année la population de la ville sera supérieure au double de la population en 1950.

EXERCICE 6.5 (Amérique du sud, novembre 2003).

Monsieur X a placé 2 000 € le 31 décembre 2002 sur son livret bancaire, à intérêts composés au taux annuel de 3,5 % (ce qui signifie que, chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital et produisent à leur tour des intérêts). À partir de l'année suivante, il prévoit de placer, chaque 31 décembre, 700 € supplémentaires sur ce livret. On désigne par C_n le capital, exprimé en euros, disponible le 1^{er} janvier de l'année (2003 + n), où n est un entier naturel. Ainsi, on a $C_0 = 2000$.

1.
 - (a) Calculer le capital disponible le 1^{er} janvier 2004.
 - (b) Établir, pour tout entier naturel n , une relation entre C_{n+1} et C_n .
 2. Pour tout entier naturel n , on pose : $u_n = C_n + 20000$.
 - (a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
 - (b) Exprimer u_n en fonction de n .
 - (c) En déduire que, pour tout entier naturel n , on a : $C_n = 22000 \times (1,035)^n - 20000$.
 - (d) Calculer le capital disponible le 1^{er} janvier 2008 (on arrondira le résultat à l'euro près).
 3. Le premier janvier 2008, Monsieur X retirera alors le capital disponible de la banque pour financer un voyage dont le coût (supposé fixe) est de 6 000 €. Il paiera cette somme en 4 mensualités qui seront 4 termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 800 €.
- Calculer le montant de chacune de ces 4 mensualités.

EXERCICE 6.6 (Nouvelle-Calédonie, novembre 2003, 4 points).

Un magasin de logiciels de jeux décide de lancer la commercialisation d'un nouveau produit. Pour cela, il planifie sur trois ans ses objectifs trimestriels de prix de vente en se basant sur la loi de l'offre et de la demande.

n étant un entier naturel, on désigne par v_n l'indice du prix de vente lors du n -ième trimestre. L'indice de départ est noté v_0 . On a : $v_0 = 100$ et $v_{n+1} = \frac{4}{5}v_n + 28$.

1. On pose : $u_n = v_n - 140$.
 - (a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{5}$ de premier terme (-40) .
 - (b) Exprimer u_n en fonction de n , puis v_n en fonction de n .
2. On désigne par d_n l'indice de la demande lors du n -ième trimestre.
Sachant que : $d_n = \frac{750}{7} - \frac{5}{7}v_n$, calculer d_0 et exprimer d_n en fonction de n .
3. Calculer les valeurs des deux indices au bout des trois ans.

Devoir maison n°2

Suites

EXERCICE 2.1.

On considère la suite (u_n) définie pour $n > 0$ par $u_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

1. (a) Montrer que (u_n) est majorée par 0.
 (b) Étudier la monotonie de (u_n) .
 (c) Étudier la convergence de (u_n) .
2. On pose $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$.
 Calculer S_n en fonction de n , puis étudier sa convergence.

EXERCICE 2.2.

Le but de cet exercice est de démontrer la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ. Soit (u_n) une suite telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = mx + p$ où $m \neq 1$ et $p \neq 0$.
 Alors il existe α tel que $f(\alpha) = \alpha$ et la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique.

Ainsi que de compléter la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ. Soit (u_n) une suite telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = mx + p$ où $m \neq 1$ et $p \neq 0$.
 • Si alors (u_n) converge vers
 • Si alors (u_n) diverge.

1. (a) On pose $f(x) = mx + p$.
 À quelle condition existe-t-il un réel α tel que $f(\alpha) = \alpha$?
 Justifier.
- (b) Soit (u_n) une suite telle que $u_{n+1} = mu_n + p$ où $m \neq 1$.
 Soit la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \alpha$.
 Montrer que (v_n) est géométrique.
 On précisera son premier terme et sa raison en fonction de u_0 , m , p ou α .
- (c) Conclure.
2. (a) Exprimer v_n en fonction de n , u_0 , m , p ou α .
 (b) Exprimer u_n en fonction de n , u_0 , m , p ou α .
 (c) Étudier la convergence de la suite (u_n) selon les valeurs de u_0 , m , p ou α .
 (d) Recopier et compléter la seconde propriété.
 On listera tous les cas possibles.

Corrigé du devoir maison n°2

Suites

EXERCICE 2.1.

On considère la suite (u_n) définie pour $n > 0$ par $u_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

1. (a) Montrer que (u_n) est majorée par 0.

Quelques essais à la calculatrice montrent que u_n est négatif pour tout $n > 0$ car $\frac{n}{n+1}$ est toujours inférieur à 1. Démontrons que c'est toujours le cas.

$$\begin{aligned} n < n+1 &\Leftrightarrow \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+1} \text{ car } n \text{ positif} \\ &\Leftrightarrow \frac{n}{n+1} < 1 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) < \ln(1) \text{ car la fonction logarithme est croissante} \\ &\Leftrightarrow u_n < 0 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est majorée par 0.

- (b) Étudier la monotonie de (u_n) .

Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n+1+1}\right) - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n+2} \times \frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)(n+1)}{(n+2)n}\right) = \ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right).$$

Or $n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n$ donc $\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1$ donc $\ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right) > \ln(1) = 0$.

On a donc $u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$ donc (u_n) est croissante.

- (c) Étudier la convergence de (u_n) .

La suite étant définie de manière explicite, elle aura la même limite que celle de la fonction $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.

Or :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{X \rightarrow 1} \ln(X) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ donc, par composition, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

La suite (u_n) converge vers 0.

2. On pose $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$.

Calculer S_n en fonction de n , puis étudier sa convergence.

Regardons les premiers termes :

$$S_1 = u_1 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(1) - \ln(2) = -\ln(2).$$

$$S_2 = u_1 + u_2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln(1) - \ln(2) + \ln(2) - \ln(3) = -\ln(3).$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln(1) - \ln(2) + \ln(2) - \ln(3) + \ln(3) - \ln(4) = -\ln(4).$$

Il semble que $S_n = -\ln(n+1)$. Démontrons-le par récurrence.

- C'est vrai pour $n = 1$.

- Supposons que jusqu'au rang p , $S_p = -\ln(p+1)$.

$$S_{p+1} = S_p + u_{p+1} = -\ln(p+1) + \ln\left(\frac{p+1}{p+2}\right) = -\ln(p+1) + \ln(p+1) - \ln(p+2) = -\ln(p+2)$$

- Donc, par récurrence, pour tout $n > 0$, $S_n = -\ln(n+1)$.

Pour étudier sa convergence, étudions $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln(x+1)$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 &= +\infty \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} -\ln(X) &= -\infty \end{aligned} \right\} \text{ donc, par composition, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty$.

La suite (S_n) diverge.

EXERCICE 2.2.

Cet exercice n'ayant été traité par aucun élève, il n'y aura pas de corrigé.

Chapitre 7

Graphes étiquetés

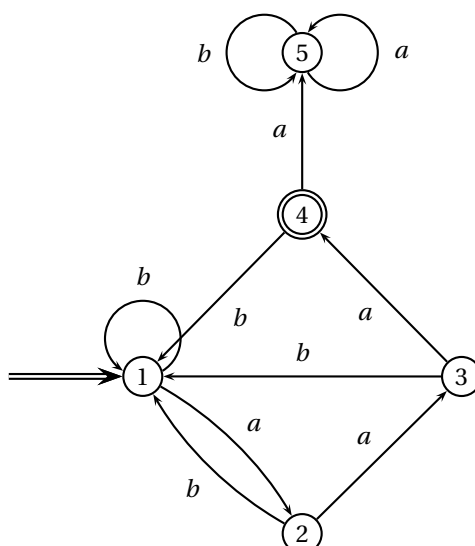
Sommaire

7.1 Quelques exemples	53
7.1.1 Le jeu du labyrinthe	53
7.1.2 Un digicode	54
7.1.3 Reconnaissance de modèles	55
7.2 Récapitulation : définitions et résultats	55
7.3 Exercices	57

7.1 Quelques exemples

7.1.1 Le jeu du labyrinthe

Nous allons commencer par un jeu : on a représenté ci-dessous le plan d'un petit labyrinthe. Ce labyrinthe possède 5 salles, numérotées de 1 à 5 ; au départ, on est dans la salle 1, indiquée par une flèche. Les salles qui ouvrent sur l'extérieur sont entourées par un double rond ; ici il n'y en a qu'une, c'est la salle 4. De chaque salle partent des couloirs à sens unique, portant une lettre (a ou b), et allant à une autre salle (ou parfois revenant à la même salle, comme dans le cas de la salle 5).



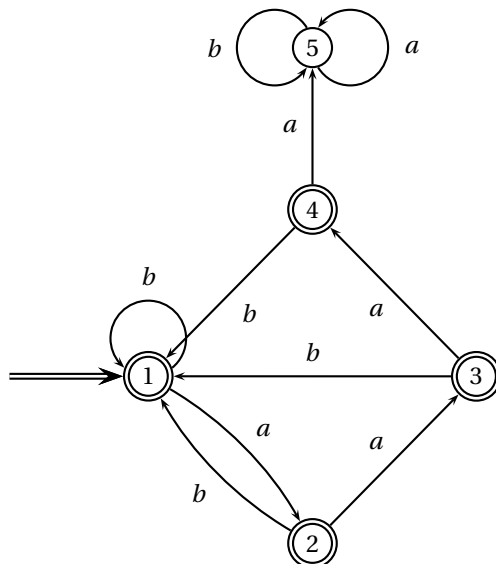
Au début du jeu, on vous remet une suite de lettre, par exemple $abaab$. En lisant ces lettres l'une après l'autre, on suit un chemin partant de la salle 1 dans le labyrinthe. Si, après avoir lu toute la suite, on est dans une salle qui ouvre sur l'extérieur, on a gagné, sinon, on a perdu.

Par exemple, à la suite $abaab$ correspond le chemin qui part de la salle 1 et parcourt les salles 2 ; 1 ; 2 ; 3 ; 1. Comme la salle 1 n'ouvre pas sur l'extérieur, on a perdu. Par contre, au mot $abaaa$ correspond le chemin 1 ; 2 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 : ce mot est gagnant.

On peut se poser deux types de questions au sujet de ce labyrinthe : tout d'abord, un mot étant donné, est-il gagnant ou perdant ? Ensuite, plus généralement, peut-on caractériser simplement les mots gagnants ?

On vient de voir comment vérifier si un mot est gagnant. Il n'est en fait pas très difficile de les caractériser tous. On voit d'abord que, si on est dans la salle 5, on ne peut plus en sortir, et donc on a perdu. Quand on est dans les autres salles, dès qu'on lit un b , on revient en salle 1 ; ensuite, si on lit un a , on arrive en salle 2, si on lit aa , on arrive en salle 3, si on lit aaa , on arrive en salle 4, et si on lit $aaaa$, on arrive en salle 5. Un peu de réflexion montre que les mots gagnants sont exactement les mots qui ne contiennent pas $aaaa$ et qui finissent par aaa .

Pouvez-vous caractériser les mots gagnants pour le labyrinthe suivant, petite modification du premier, où toutes les salles, sauf la salle 5, ouvrent sur l'extérieur ?

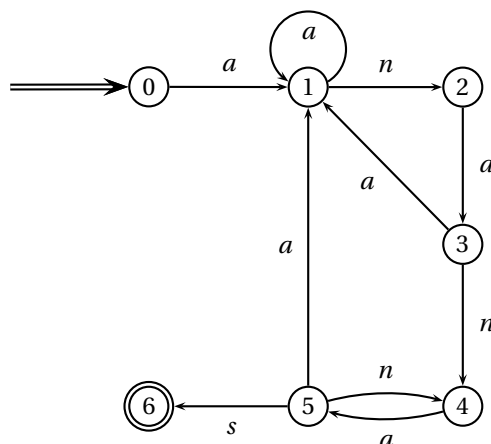


Cet exercice peut paraître élémentaire. On a pourtant réalisé quelque chose de non évident : une machine qui sait reconnaître certains mots (car il n'est pas difficile de réaliser un équivalent électronique de ce labyrinthe), et on va voir que cela a de nombreuses applications.

Bien entendu, on va cesser de parler de salles et de labyrinthes. On reconnaît dans le plan de ce labyrinthe un graphe orienté, où chaque arête est munie d'un nom appelé *étiquette*.

7.1.2 Un digicode

Prenons comme deuxième exemple celui d'un digicode comme ceux permettant l'ouverture de la porte de nombreux bureaux ou appartements. Considérons un digicode constitué d'un clavier à 26 touches (les 26 lettres) qui constitue l'organe d'entrée d'un automate dont la sortie commande l'ouverture d'une porte. La porte s'ouvre dès que l'on a tapé la bonne suite de lettres et cela (au moins pour le digicode considéré ici) même si l'on a commencé par se tromper. Si le mot permettant l'ouverture de la porte est « *ananas* », le système peut être modélisé par le graphe étiqueté représenté par la figure ci-dessous.



Dans ce chapitre, les sommets du graphe seront appelés, pour suivre la terminologie habituelle en la matière, des *états* et les arcs étiquetés des *transitions*. Pour ne pas alourdir le schéma ci-dessus nous n'avons pas représenté les transitions provoquées par la frappe des autres lettres.

Chaque état (y compris l'état 0) est relié en fait à l'état 0 par autant d'arcs étiquetés par toutes les autres lettres. Par exemple, on n'a pas représenté les 25 arcs qui bouclent sur l'état 0 et qui sont étiquetés par toutes les lettres différentes de « a ». Il est facile de constater que dès que la suite de lettres a, n, a, n, a, s est frappée, on atteint l'état 6 (par convention un état final est entouré par deux cercles concentriques) qui déclenche l'ouverture.

7.1.3 Reconnaissance de modèles

Le problème de la reconnaissance de modèles (*pattern matching*) consiste à rechercher les occurrences de certaines séquences de caractères, que l'on appellera mots-clés, dans un texte t .

L'application la plus typique est la recherche documentaire. Étant donné un fond documentaire comprenant des références bibliographiques accompagnées de résumés indiquant les thèmes de chaque ouvrage, on désire chercher les références dans lesquelles certains mots-clés apparaissent.

Mais il existe bien d'autres domaines d'applications, comme celle du génome par exemple : on recherche des séquences d'acides aminés dans une très longue suite. L'algorithme trivial qui consiste à parcourir tout le texte pour rechercher les occurrences du premier mot-clé, puis à le parcourir à nouveau pour rechercher le second, etc. est inefficace, voire impraticable si le texte comporte plusieurs millions de caractères et que l'on recherche plusieurs mots. Le graphe étiqueté ci-dessous a été construit par l'algorithme du à AHO et CORASICK (1975), il permet de rechercher plusieurs mots en ne parcourant le texte qu'une seule fois (donc en n'effectuant que n comparaisons si n est la longueur du texte t) et ceci quel que soit le nombre de mots recherchés ! Supposons que les mots clés soient : « ni », « rein », « rene » et « irene ». À partir de cet ensemble de mots recherchés, l'algorithme de AHO et CORASICK fournit le graphe étiqueté de la figure 7.1 page suivante.

Pour des raisons de lisibilité nous n'avons pas représenté toutes les transitions. L'état 0 est l'état initial et partant de l'état 0, bouclant sur ce même état il y a autant de transitions étiquetées par les caractères autres que « n », « r », « i ». Partant des autres états, sauf arc explicite, les transitions étiquetées par « n », « r », « i » sont reliées respectivement aux états 1, 2 et 3 et les transitions étiquetées par les caractères autres que « n », « r », « i » sont toutes reliées à l'état 0.

L'utilisation de ce graphe étiqueté pour le problème de reconnaissance de modèles est très simple : on explore le texte t , en partant de l'état 0 et en suivant les transitions. À chaque étape, si on est dans l'état i , on examine le caractère c du texte t sur lequel on est. S'il existe une transition partant de l'état i , étiquetée c , conduisant à un état j , on passe à l'état j ; dans le cas contraire on passe dans l'état 0. Dans les deux cas on avance d'un caractère dans le texte t . Chaque fois qu'on passe par un état dont l'ensemble des mots clés associés n'est pas vide, on sait que l'on vient de déceler tous les mots-clés qui se trouvent dans cet ensemble. Sur le schéma, ces ensembles de mots sont reliés à l'état correspondant.

Remarque. De tels graphes étiquetés sont utilisés de manière intensive sur tous les traitements de texte. Ces programmes possèdent tous une fonction « recherche et remplacement » qui construit un graphe étiqueté pour rechercher un mot (ou un type de mots) dans un texte. Ces fonctions de recherche permettent en général de chercher des expressions plus compliquées qu'un simple mot. C'est souvent utilisé dans la recherche de fichiers : si l'on veut chercher tous les fichiers dont le nom commence par « lettre » et se termine par « .txt », on peut demander les fichiers dont le nom est du type « lettre*.txt », où * est un « joker » qui remplace n'importe quel mot.

Les fichiers « lettre1.txt » ou « lettrebis.txt » sont de ce type.

7.2 Récapitulation : définitions et résultats

Formalisons un peu ce que nous venons de voir. Pour parler de graphe étiqueté, il faut d'abord choisir un *alphabet*, dans lequel seront choisies les étiquettes du graphe. On notera A cet alphabet ; dans tous les exercices, l'alphabet sera petit (habituellement 2 ou 3 lettres, exceptionnellement l'alphabet usuel, mais dans ce cas on ne représentera bien sûr pas toutes les arêtes).

Définition 7.1. On appelle *graphe étiqueté* un graphe orienté où toutes les arêtes portent une étiquette choisie dans l'alphabet A , et qui possède un sommet initial (indiqué par une flèche pointant vers ce sommet) et un ou plusieurs sommets finaux (indiqués par un double rond entourant le sommet).

On ne considérera que des graphes étiquetés déterministes, c'est-à-dire tels que de chaque sommet parte une seule arête portant une étiquette donnée.

L'intérêt d'un graphe étiqueté est de reconnaître des mots sur l'alphabet A ; précisons un peu :

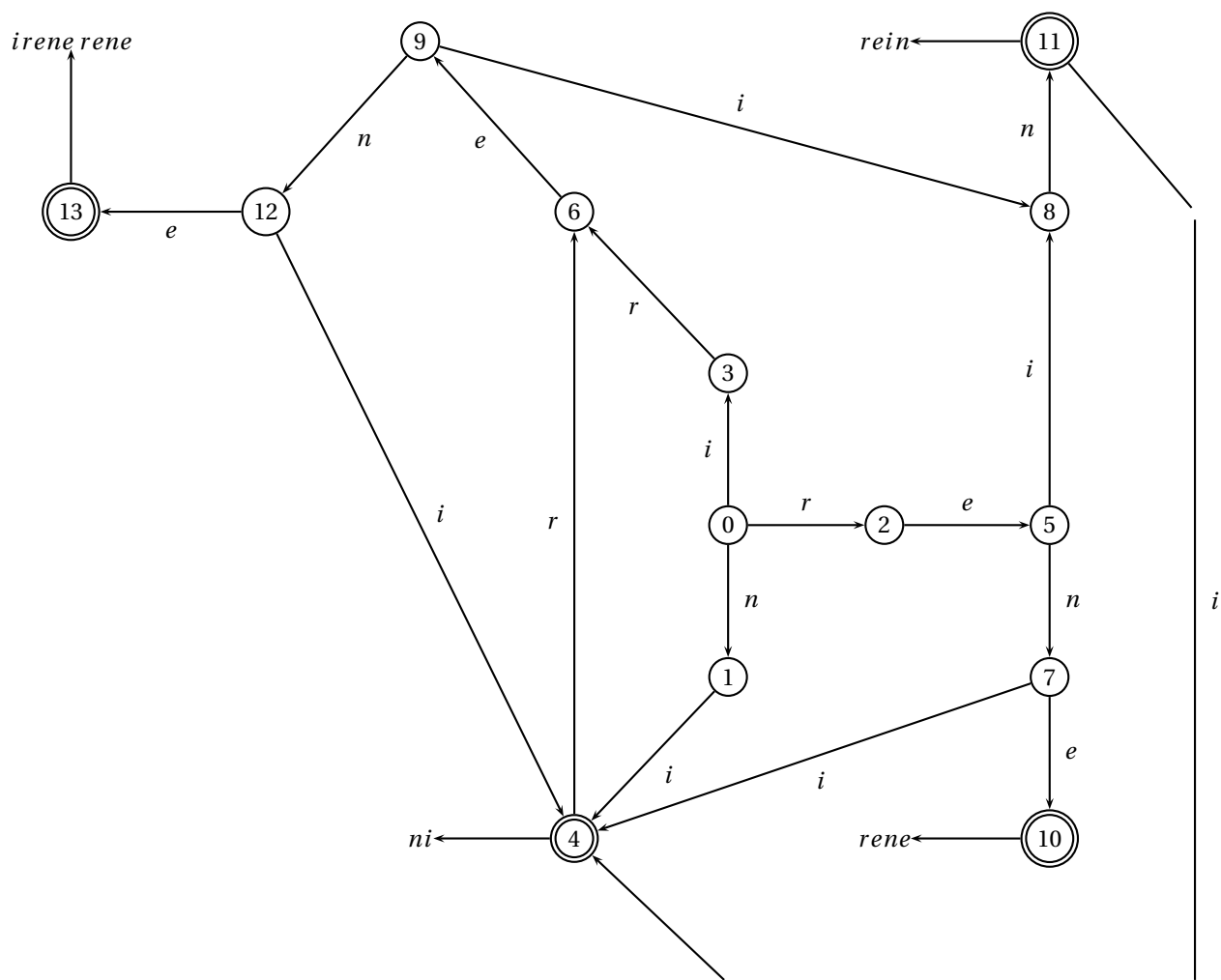
Définition 7.2. On appelle *mot* sur l'alphabet A une suite finie de lettres de A .

Définition 7.3. Soit G un graphe étiqueté par l'alphabet A . On dit qu'un mot sur l'alphabet A est *reconnu* par le graphe G s'il existe un chemin orienté sur le graphe G , partant du sommet initial, arrivant à un sommet final, et étiqueté par ce mot.

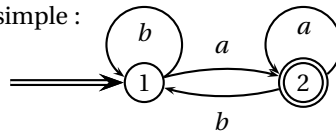
Définition 7.4. On appelle *langage associé* à un graphe étiqueté l'ensemble des mots reconnus par ce graphe étiqueté.

Le contenu de ce chapitre se borne à faire comprendre ces notions de mot reconnu par un graphe étiqueté et de langage associé à un graphe étiqueté, et à les faire fonctionner dans des cas simples.

FIGURE 7.1 – Graphe étiqueté construit par l'algorithme du à AHO et CORASICK



Exemple 7.1. Voici un graphe étiqueté très simple :



Ce graphe étiqueté reconnaît les mots sur l'alphabet $A = \{a; b\}$ (c'est-à-dire les mots formés à partir des lettres a et b) se terminant par la lettre a . Le langage L associé à cet automate est l'ensemble des suites finies de a ou de b se terminant par a .

Remarque. Aucun théorème n'est au programme. Il ne faudrait pas s'imaginer que c'est parce qu'il n'y en a pas ! Les graphes étiquetés, ou automates, ont donné lieu depuis une cinquantaine d'années à une théorie mathématique abstraite, riche et diversifiée, possédant de nombreuses applications.

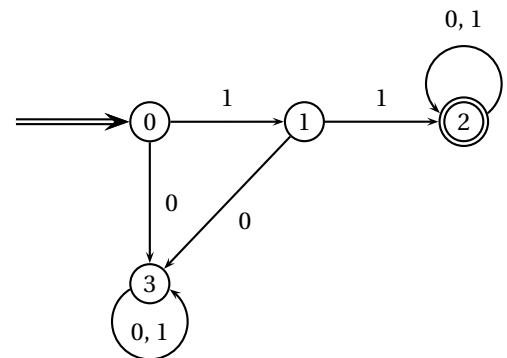
Ils sont en particulier fondamentaux en informatique, et c'est pourquoi on a jugé utile de les faire connaître aux élèves de terminale.

7.3 Exercices

EXERCICE 7.1.

Soit l'automate ci-contre.

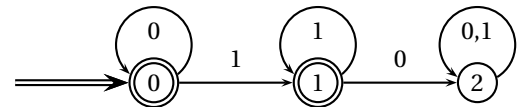
1. Les mots « 11 », « 101 », « 110 », « 1011 » sont-ils reconnus par cet automate ?
2. Donner la liste des mots de quatre lettres reconnus par celui-ci.
3. Caractériser les mots reconnus.



EXERCICE 7.2.

Soit l'automate ci-contre.

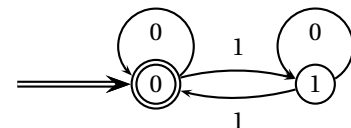
1. Les mots « 000 », « 001 », « 010 », « 0011 » sont-ils reconnus par cet automate ?
2. Donner la liste des mots de moins de quatre lettres reconnus par celui-ci.
3. Caractériser les mots reconnus.



EXERCICE 7.3.

Soit l'automate ci-contre.

1. Les mots « 11 », « 101 », « 110 », « 1011 » sont-ils reconnus par cet automate ?
2. Donner la liste des mots de trois lettres reconnus par celui-ci.
3. Caractériser les mots reconnus.



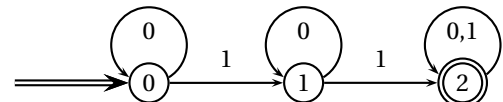
EXERCICE 7.4.

Représenter l'automate qui reconnaît les mots ne comportant que des 0 et des 1, et dont le nombre de 1 est impair.

EXERCICE 7.5.

Soit l'automate ci-contre.

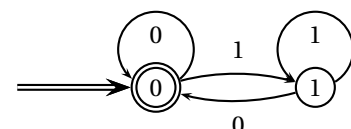
1. Les mots « 11 », « 101 », « 110 », « 1011 » sont-ils reconnus par cet automate ?
2. Donner la liste des mots de trois lettres reconnus par celui-ci.
3. Caractériser les mots reconnus.



EXERCICE 7.6.

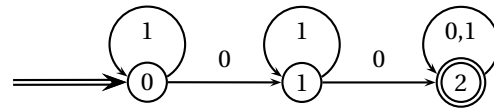
Soit l'automate ci-contre.

1. Les mots « 11 », « 010 », « 110 », « 101010 » sont-ils reconnus par cet automate ?
2. Donner la liste des mots de quatre lettres reconnus par celui-ci.
3. Caractériser les mots reconnus.



EXERCICE 7.7.

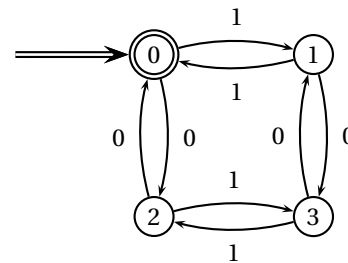
Soit l'automate ci-contre.



1. Les mots « 11 », « 101 », « 110 », « 1011 » sont-ils reconnus par cet automate ?
2. Donner la liste des mots de trois lettres reconnus par celui-ci.
3. Caractériser les mots reconnus.

EXERCICE 7.8.

Soit l'automate ci-contre.



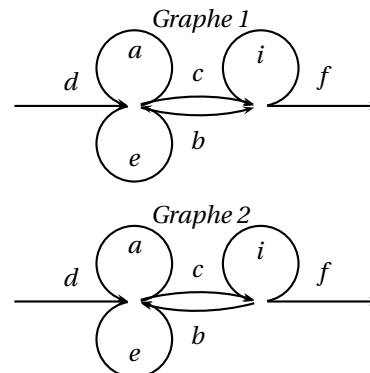
1. Les mots « 11 », « 101 », « 1010 », « 1001 » sont-ils reconnus par cet automate ?
2. Donner la liste des mots de trois lettres reconnus par celui-ci.
3. Caractériser les mots reconnus.

EXERCICE 7.9.

Donner la suite des états visités par l'automate de la reconnaissance de modèles page 56 si les mots sont recherchés dans le texte t suivant : « annie n'honnit ni irene ni nina »

EXERCICE 7.10.

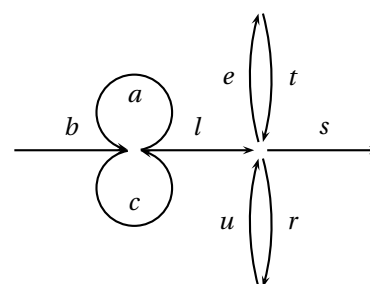
Un réseau informatique doit être accessible à un grand nombre de personnes, qui ne doivent cependant pas avoir le même code d'accès. Cet accès est régi par un des graphes étiquetés ci-dessous ; un mot est accepté comme code d'accès (ou reconnu) si c'est une liste de lettres commençant par d et terminant par f , associée à une chaîne de ce graphe.



1. Les mots « $decif$ » et « $daaeebii f$ » sont-ils des mots reconnus par les graphes étiquetés ci-dessus ?
2. Donner, pour chaque graphe ci-contre, la liste des mots de 5 lettres reconnus.
3. Caractériser pour chaque graphe les mots reconnus.
4. Caractériser les mots reconnus par les deux graphes ci-dessus.

EXERCICE 7.11.

Le graphe étiqueté ci-contre permet de reconnaître des mots (un mot est une suite finie de lettres, n'ayant pas forcément un sens).



VRAI	FAUX	
		il reconnaît le mot « <i>baccalets</i> »
		il reconnaît tous les mots commençant par « <i>bac</i> »
		il reconnaît le mot « <i>bleus</i> »
		il reconnaît exactement six mots de cinq lettres

Chapitre 8

Graphes pondérés

Sommaire

8.1 Définition	59
8.2 Un problème	59
8.3 L'algorithme de DIJKSTRA	60
8.4 Exercices d'annales	64

8.1 Définition

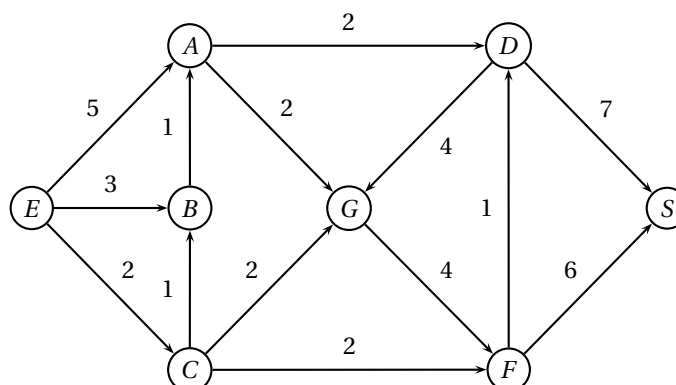
Définition 8.1. On appelle *graphe pondéré* un graphe tel que, à chaque arête a est associé un *poids* P_a .

Remarque. En Terminale nous nous limiterons aux graphes pondérés par des poids positifs.

Les applications des graphes pondérés sont nombreuses : cartes routières avec des indications de durée, de tarif ou de distance portée sur des routes entre deux lieux, par exemple.

8.2 Un problème

Le graphe suivant représente un réseau routier (avec des sens interdits) ; quel est l'itinéraire le plus court qui relie E à S ?

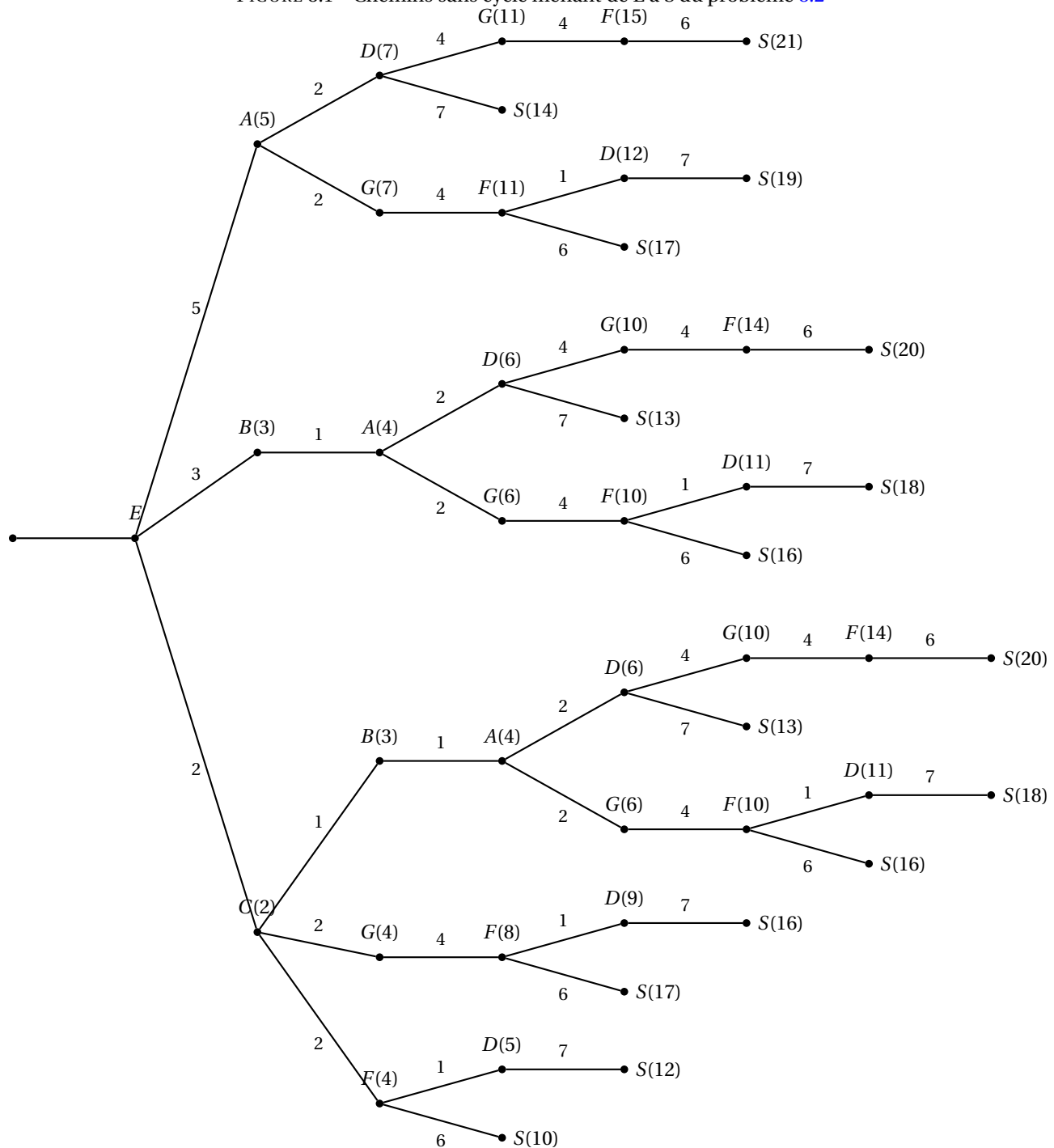


Remarque. Attention à la terminologie : la notion de longueur (plus court chemin) que nous utilisons ici n'est pas la même que celle que nous avons définie au premier chapitre (nombre d'arêtes qui composent un chaîne donnée) ; dans les termes du premier chapitre, $EAGF$, par exemple, est une chaîne orientée de longueur 3, alors qu'ici nous nous permettons de dire qu'elle est de longueur 11 ($5 + 2 + 4$). Nous faisons cet abus de langage à cause de l'interprétation routière évidente de l'exercice ; dans la suite, on utilisera la terminologie exacte (plutôt *poids* que *longueur*), s'il y a un risque de confusion. Ainsi, selon la terminologie exacte, la chaîne $EAGF$ est une chaîne de *longueur* 3 (trois arêtes) mais de *poids* 11 (somme des poids des arêtes).

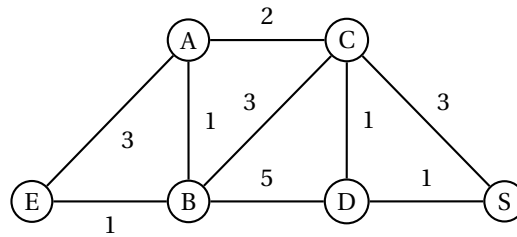
8.3 L'algorithme de DIJKSTRA

Ce problème est très naturel, et se présente dans bien des domaines différents. Même pour un graphe aussi simple que celui-là, il n'est pas évident d'être sûr que l'on a trouvé le plus court chemin. La méthode la plus immédiate est de considérer tous les chemins de A à S, et de chercher le plus court. Cette méthode est très inefficace : on peut bien sûr se limiter aux chemins sans cycle, donc de longueur bornée par le nombre de sommets, mais, même comme cela, le nombre de chemins possibles reste très grand. Voir la figure 8.1 de la présente page représentant l'arbre pondéré de tous les chemins sans cycle menant de E à S.

FIGURE 8.1 – Chemins sans cycle menant de E à S du problème 8.2

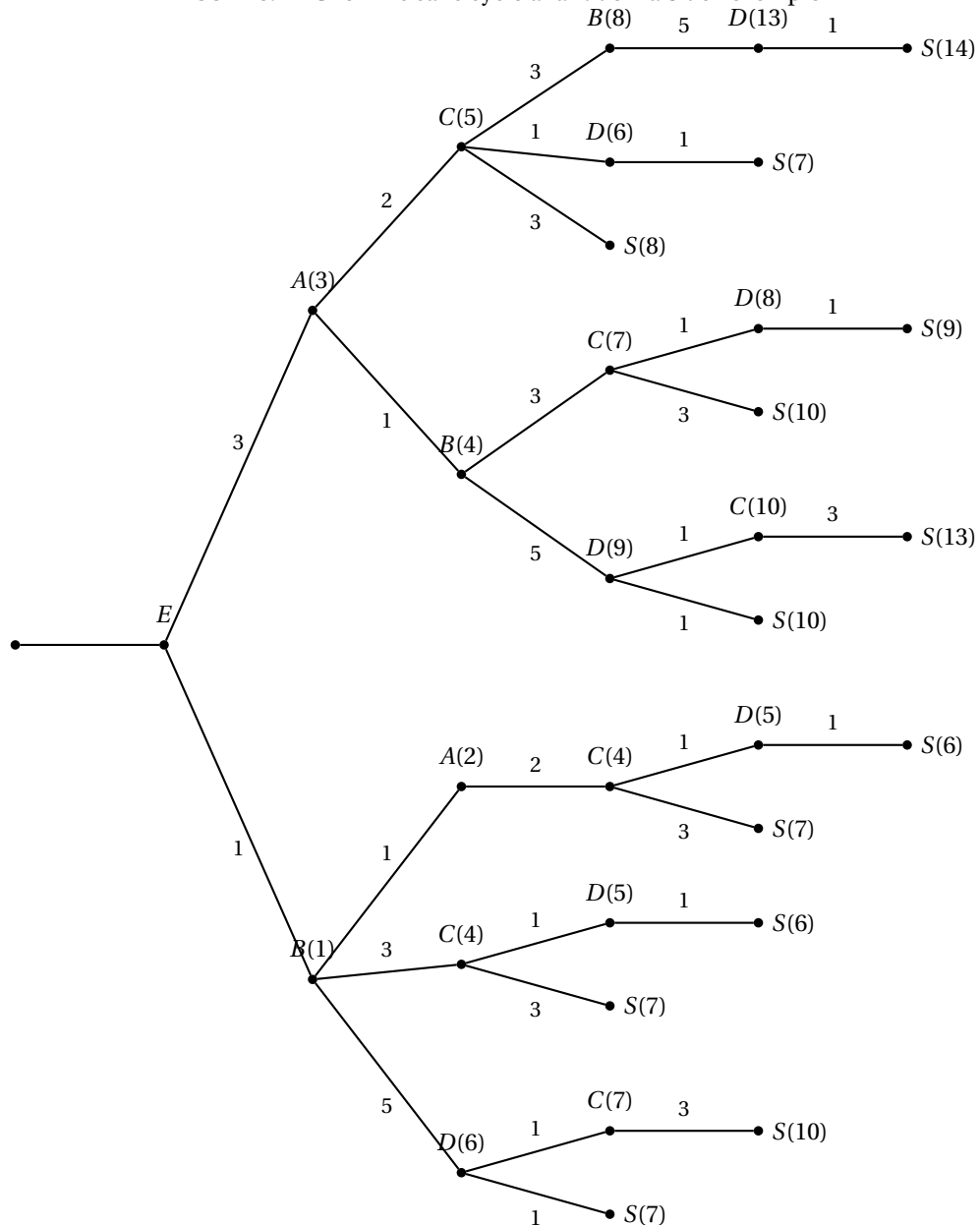


Il nous faut donc obtenir une méthode plus efficace qui, si possible, donne systématiquement le bon résultat. L'une d'elles est l'algorithme de DIJKSTRA.

Exemple

La figure 8.2 de la présente page présente tous les chemins sans cycle allant de E à S. On pourra y suivre le fonctionnement de l'algorithme.

FIGURE 8.2 – Chemins sans cycle allant de E à S de l'exemple



Initialisation : On affecte *provisoirement* le poids 0 à E et on attribue *provisoirement* à tous les sommets le poids $+\infty$.

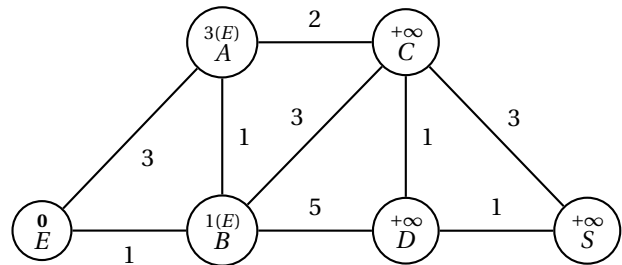
Algorithme : Tant que tous les sommets ne sont pas marqués définitivement ou que le sommet S à atteindre n'est pas affecté du plus petit des poids provisoires, exécuter les actions suivantes :

- parmi tous les sommets provisoirement pondérés, fixer **définitivement** le poids d'un de ceux qui ont un poids minimum ; soit T ce sommet.
- parmi tous les sommets T' *non marqués définitivement* adjacents à T, si la somme s de T et de l'arête de T à T' est inférieure à leur poids provisoire les affecter de s (en indiquant entre parenthèse la provenance)

TABLE 8.1 – Application de l'algorithme de DIJKSTRA

Étape 1 Aucun sommet n'est marqué définitivement. E est le seul marqué provisoirement. On marque donc définitivement son poids (0) et on affecte provisoirement A et B , adjacents à E de la somme de E (0) et du poids des arêtes menant de E à A et de E à B .

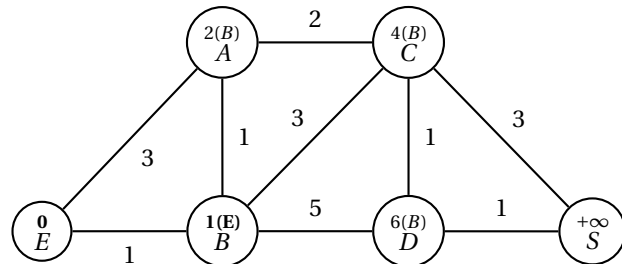
On obtient :



Étape 2 B est le plus petit poids parmi les poids provisoires. On marque donc définitivement son poids (1). On affecte les sommets adjacents à B des poids suivants :

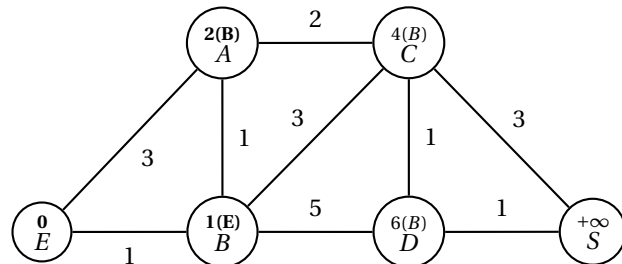
- $A = 2$ car $1(B) + 1(\text{arête } BA) < 3$ (poids provisoire de A)
- $C = 4$ ($1(B) + 3(BC)$)
- $D = 6$ ($1(B) + 5(BD)$)

On obtient :



Étape 3 A est le plus petit poids parmi les poids provisoires. On marque donc définitivement son poids (2). On ne change rien à C $2(A) + 2(AC) = 4$ (on pourrait aussi le changer car il y a égalité)

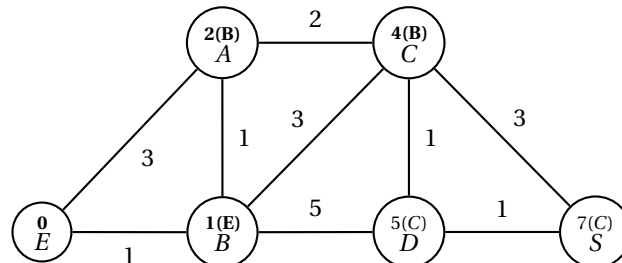
On obtient :



Étape 4 C est le plus petit poids parmi les poids provisoires. On marque donc définitivement son poids (4). On affecte

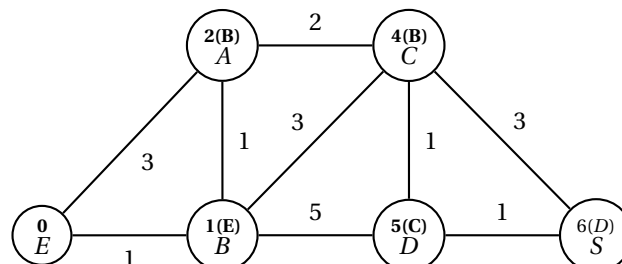
- D du poids provisoire 5 car $4(C) + 1(CD) < 6$
- S du poids provisoire 7 ($4(C) + 3(CS)$)

On obtient :



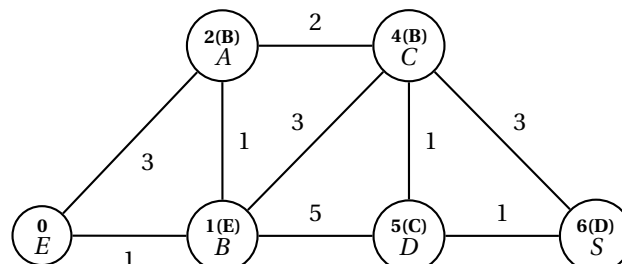
Étape 5 D est le plus petit poids parmi les poids provisoires. On marque donc définitivement son poids (5). On affecte S du poids provisoire 6 car $5(D) + 1(DS) < 7$

On obtient :



Étape 6 S est le plus petit poids parmi les poids provisoires. On marque donc définitivement son poids (6).

On obtient :



Le tableau 8.1 page ci-contre montre comment appliquer cet algorithme à notre exemple.

Pour retrouver le chemin le plus court, on se sert des sommets marqués : Sur S l'indication est qu'on provient de D , sur D qu'on provient de C , sur C qu'on provient de B et sur B qu'on provient de E .

La plus courte chaîne est donc $EBCDS$, elle mesure 6.

Remarque. On notera que l'algorithme fournit aussi la plus courte chaîne pour aller de E à n'importe lequel des sommets du graphe.

L'algorithme se présente aussi sous forme de tableau :

E	A	B	C	D	S
0	3(E)	1(E)	∞	∞	∞
	2(B)	1 (E)	4(B)	6(B)	
	2 (B)				
			4 (B)	5(C)	7(C)
				5 (C)	6(D)
					6 (D)

Théorème 8.1. Soit G un graphe connexe, éventuellement orienté, l'algorithme de DIJKSTRA fournit systématiquement la plus courte chaîne d'un sommet initial à tous les autres sommets du graphe.

On l'admettra.

EXERCICE.

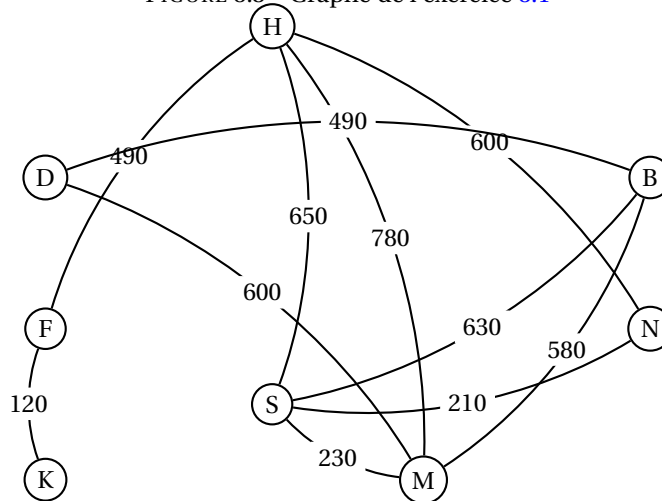
Résoudre le problème d'introduction à l'aide de l'algorithme de DIJKSTRA.

8.4 Exercices d'annales

EXERCICE 8.1 (Baccalauréat ES Amérique du Sud novembre 2006). 1. À l'occasion de la coupe du monde de football 2006 en Allemagne, une agence touristique organise des voyages en car à travers les différentes villes où se joueront les matchs d'une équipe nationale. Les routes empruntées par les cars sont représentées par le graphe donné sur la figure 8.3, de la présente page. Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres séparant les villes.

Les lettres B, D, F, H, K, M, N et S représentent les villes Berlin, Dortmund, Francfort, Hambourg, Kaiserslautern, Munich, Nuremberg et Stuttgart.

FIGURE 8.3 – Graphe de l'exercice 8.1



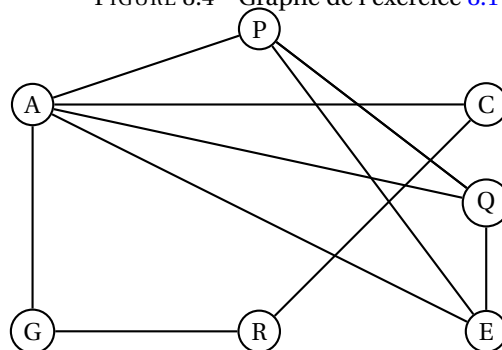
En précisant la méthode utilisée, déterminer le plus court chemin possible pour aller de Kaiserslautern à Berlin en utilisant les cars de cette agence.

2. Pour des raisons de sécurité, les supporters de certaines équipes nationales participant à la coupe du monde de football en 2006 ne peuvent être logés dans le même hôtel.

L'objectif de cette question consiste à rechercher une répartition des supporters afin d'utiliser le minimum d'hôtels.

On donne sur la figure 8.4 de la présente page le graphe d'incompatibilité entre les supporters de différentes équipes : par exemple, un supporter de l'équipe A ne peut être logé avec un supporter de l'équipe B.

FIGURE 8.4 – Graphe de l'exercice 8.1

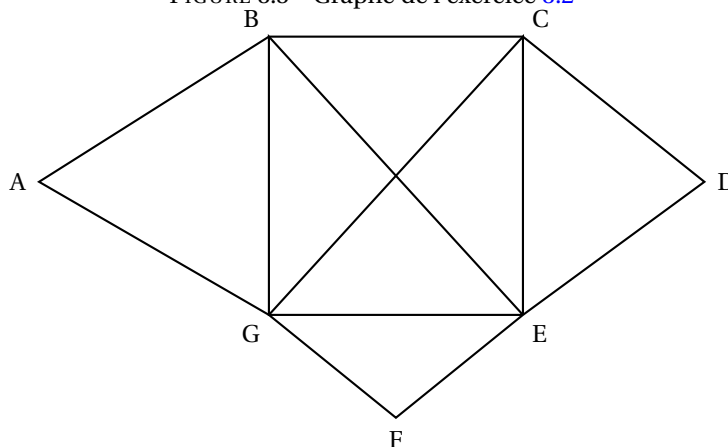


- Déterminer le nombre chromatique de ce graphe en justifiant la valeur trouvée.
- Proposer une répartition des supporters par hôtel en utilisant un nombre minimum d'hôtels.

EXERCICE 8.2 (France, juin 2004).

Le graphe de la figure 8.5 de la présente page indique, sans respecter d'échelle, les parcours possibles entre les sept bâtiments d'une entreprise importante.

FIGURE 8.5 – Graphe de l'exercice 8.2



Un agent de sécurité effectue régulièrement des rondes de surveillance. Ses temps de parcours en minutes entre deux bâtiments sont les suivants :

- AB : 16 minutes ; • BE : 12 minutes ; • CE : 4 minutes ; • EF : 8 minutes ;
- AG : 12 minutes ; • BG : 8 minutes ; • CG : 10 minutes ; • EG : 15 minutes ;
- BC : 8 minutes ; • CD : 7 minutes ; • DE : 2 minutes ; • FG : 8 minutes.

Sur chaque arête, les temps de parcours sont indépendants du sens de parcours.

1. En justifiant la réponse, montrer qu'il est possible que l'agent de sécurité passe une fois et une seule par tous les chemins de cette usine. Donner un exemple de trajet.
2. L'agent de sécurité peut-il revenir à son point de départ après avoir parcouru une fois et une seule tous les chemins ? Justifier la réponse.
3. Tous les matins, l'agent de sécurité part du bâtiment A et se rend au bâtiment D.
En utilisant un algorithme que l'on explicitera, déterminer le chemin qu'il doit suivre pour que son temps de parcours soit le plus court possible, et donner ce temps de parcours.

EXERCICE 8.3 (La Réunion, juin 2004).**Partie A**

On note G le graphe représenté sur la figure 8.6 page suivante et M sa matrice obtenue en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique. La matrice M^3 est également donnée est la suivante :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 11 & 10 & 12 & 5 & 13 & 4 \\ 8 & 2 & 7 & 3 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 11 & 7 & 8 & 6 & 12 & 3 & 10 & 5 \\ 10 & 3 & 6 & 2 & 11 & 1 & 4 & 8 \\ 12 & 5 & 12 & 11 & 8 & 8 & 13 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 8 & 0 & 2 & 6 \\ 13 & 4 & 10 & 4 & 13 & 2 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 5 & 8 & 3 & 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Dire, en justifiant votre réponse, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

1. L'ordre du graphe est égal au plus grand des degrés des sommets.
2. Le graphe G contient un sous-graphe complet d'ordre 3.
3. Les sommets de G peuvent être coloriés avec trois couleurs sans que deux sommets adjacents soient de même couleur.
4. Il est possible de parcourir ce graphe en passant une fois et une seule par chaque arête.
5. Il existe au moins un chemin de longueur 3 qui relie chaque sommet à chacun des sept autres sommets du graphe.
6. Il y a 72 chemins de longueur 3 qui relient le sommet e à chacun des huit sommets du graphe.

Partie B

Le graphe de la figure 8.7 page suivante représente un réseau de lignes d'autobus. Les sommets du graphe désignent les arrêts. Les poids des arêtes sont les durées de parcours, en minutes, entre deux arrêts (correspondances comprises). Déterminer, à l'aide d'un algorithme, la durée minimum pour aller de l'arrêt a à l'arrêt h et donner ce trajet.

FIGURE 8.6 – Graphe de l'exercice 8.3

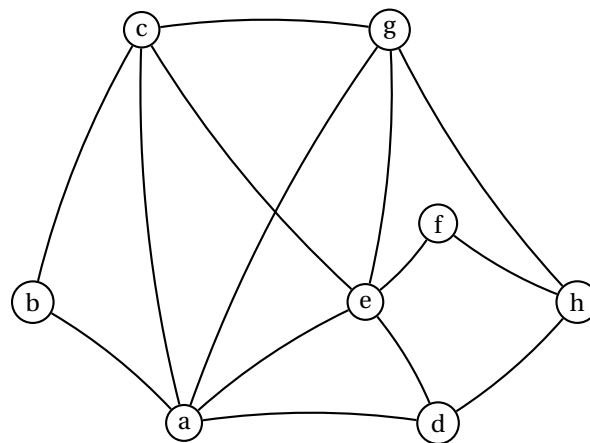
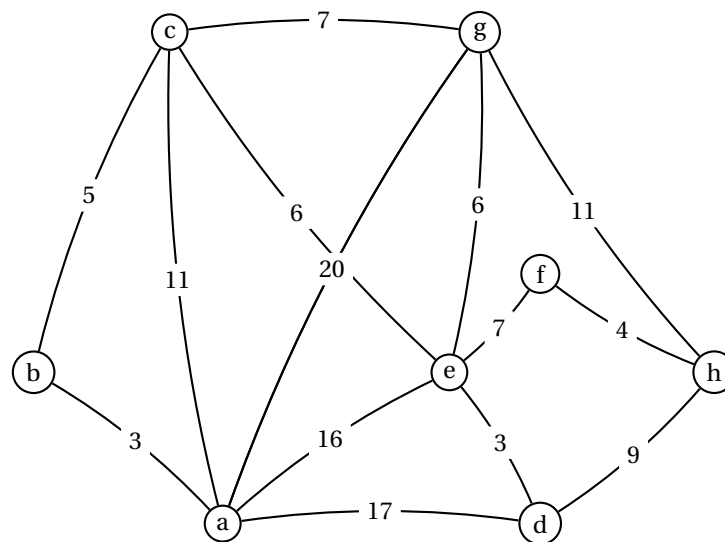


FIGURE 8.7 – Figure de l'exercice 8.3

**EXERCICE 8.4** (Centres étrangers juin 2003).

Un livreur d'une société de vente à domicile doit, dans son après-midi, charger son camion à l'entrepôt noté A, livrer cinq clients que nous noterons B, C, D, E et F, puis retourner à l'entrepôt. Le réseau routier, tenant compte des sens de circulation, et les temps de parcours (en minutes) sont indiqués sur le graphe G de la figure 8.8 page ci-contre.

1. Donner la matrice M associée au graphe G.

On utilisera le modèle suivant :

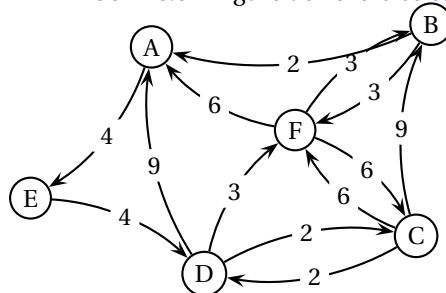
	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

2. On donne la matrice M^6 :

$$M^6 = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 & 3 & 4 & 6 \\ 19 & 11 & 12 & 9 & 6 & 16 \\ 36 & 28 & 23 & 22 & 18 & 34 \\ 37 & 24 & 25 & 17 & 15 & 31 \\ 15 & 12 & 9 & 10 & 8 & 15 \\ 28 & 22 & 19 & 15 & 15 & 26 \end{pmatrix}$$

On s'intéresse aux chemins partant de l'entrepôt A et se terminant en A.

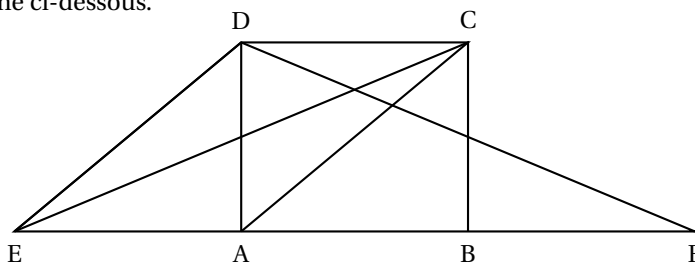
FIGURE 8.8 – Figure de l'exercice 8.4



- Combien existe-t-il de chemins de longueur 6 reliant A à A ?
 - Citer ces chemins.
 - Parmi ceux qui passent par tous les sommets du graphe, lequel minimise le temps de parcours ?
 - Quelle conséquence peut tirer le livreur du dernier résultat ?
3. Au départ de sa tournée, le livreur a choisi de suivre l'itinéraire le plus rapide. Malheureusement, le client C n'est pas présent au passage du livreur et celui-ci décide de terminer sa livraison par ce client. Indiquer quel est le chemin le plus rapide pour revenir à l'entrepôt A à partir de C. La réponse devra être justifiée.

EXERCICE 8.5 (La Réunion, juin 2003).

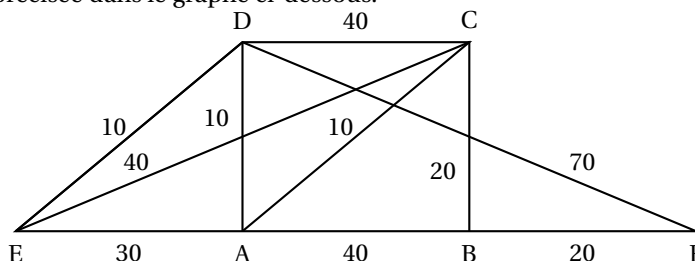
Une grande surface est conçue de telle façon que six secteurs (alimentation, hi-fi, etc.) notés A, B, C, D, E, F sont reliés par des allées selon le graphe ci-dessous.



1. (a) Recopier et compléter le tableau suivant :

Secteur	A	B	C	D	E	F
Degré						

- Le graphe est connexe. Pourquoi ?
2. Un visiteur désire parcourir l'ensemble des allées en ne passant par celles-ci qu'une seule fois.
- Démontrer que son souhait est réalisable.
 - Donner un exemple d'un tel parcours.
3. Le directeur désire associer chaque secteur à une couleur de sorte que deux secteurs (sommets) ne portent pas la même couleur.
- Démontrer que le nombre chromatique n du graphe vérifie $n \geq 4$.
 - Expliquer pourquoi $n \leq 5$.
 - Proposer un coloriage du graphe permettant de déterminer son nombre chromatique.
4. Une famille se trouve dans le secteur E et doit se rendre dans le secteur E. Cela étant, les parents connaissent suffisamment les allées pour savoir que, pour chacune d'elles, les enfants ne résistant pas, il leur faudra déboursier une somme (en euros) précisée dans le graphe ci-dessous.



(AB = 40 ; AC = 10 ; AD = 10 ; AE = 30 ; BC = 20 ; BF = 20 ; CD = 40 ; CE = 40 ; DE = 10 ; DF = 70)

Indiquer une chaîne qui minimise la dépense de cette famille.

Chapitre 9

Suites récurrentes doubles

Sommaire

9.1 Un exemple	69
9.1.1 Obtention d'une formule explicite	69
9.1.2 Par le calcul matriciel	69
9.2 Bilan	70
9.3 Exercices	70

9.1 Un exemple

Une usine émet chaque mois des matières polluantes et cette production augmente de 10 % chaque mois. Un système est mis en place pour réduire cette production et l'on constate qu'il permet une diminution équivalente à 30 % de la production de polluant émis deux mois avant.

On note u_n la masse de matières polluantes n mois après le début de la mise en place du système. Avant l'installation du système, la production de polluant est $u_0 = 3500$ kg et, le mois suivant, après un mois de traitement, $u_1 = 1900$ kg.

1. Calculer u_2 et u_3 .
2. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et de u_n . On appellera $\mathcal{R}$ cette relation de récurrence.

On se propose d'étudier le comportement de cette suite. Pour cela deux approches sont possibles.

9.1.1 Obtention d'une formule explicite

1. Montrer que si une suite géométrique du type $v_n = q^n$ vérifie $\mathcal{R}$ alors q est solution de l'équation du second degré $q^2 - 1,1q + 0,3 = 0$.
2. Résoudre cette équation. On appellera q_1 et q_2 ses solutions.
3. On admet que toutes les suites (s_n) qui vérifient $\mathcal{R}$ sont de la forme $s_n = \alpha \times q_1^n + \beta \times q_2^n$.
 - (a) À l'aide de u_0 et de u_1 déterminer α et β pour la suite (u_n) .
 - (b) Vérifier que u_2 et u_3 peuvent s'obtenir à l'aide de la formule $u_n = \alpha \times q_1^n + \beta \times q_2^n$.
 - (c) Donner alors la masse de polluant au bout de 10 mois d'utilisation du système.
 - (d) Étudier la convergence de (u_n) .

9.1.2 Par le calcul matriciel

1. Montrer que $\mathcal{R}$ peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,3 & 1,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

2. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0,3 & 1,1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$.
3. Donner alors la masse de polluant au bout de 10 mois d'utilisation du système.

9.2 Bilan

Définition 9.1. Soit f une fonction de deux variables. Une suite (u_n) définie par u_0, u_1 et $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$ est appelée *suite récurrente double*.

9.3 Exercices

EXERCICE 9.1.

On considère la suite (u_n) définie par récurrence par : $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 1 & \text{et} & u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 5u_n \end{cases}$

- Calculer u_2, u_3 et u_4 .
- On veut démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}$ suivante est vérifiée : $\mathcal{P} : u_n = A \times 5^n + B$ où A et B sont deux réels à déterminer.
 - À l'aide de u_0 et u_1 , déterminer les seules valeurs possibles pour A et B et regarder si u_2, u_3 et u_4 vérifient $\mathcal{P}$.
 - On suppose que u_n et u_{n+1} vérifient $\mathcal{P}$, c'est-à-dire que $u_n = A \times 5^n + B$ et que $u_{n+1} = A \times 5^{n+1} + B$. Montrer qu'alors u_{n+2} vérifie $\mathcal{P}$.
 - Conclure.
- En déduire u_{10} .

EXERCICE 9.2 (Suite de FIBONACCI¹).

La suite de Fibonacci est la suite (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et par la relation de récurrence $\mathcal{R} : u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

- Déterminer les cinq premiers termes de la suite.
- Montrer que si une suite géométrique du type $v_n = q^n$ vérifie $\mathcal{R}$ alors q est solution de l'équation du second degré $q^2 - q - 1 = 0$.
 - Résoudre cette équation. On appellera q_1 et q_2 ses solutions.
 - On admet que toutes les suites (s_n) qui vérifient $\mathcal{R}$ sont de la forme $s_n = \alpha \times q_1^n + \beta \times q_2^n$.
 - À l'aide de u_0 et de u_1 déterminer α et β pour la suite (u_n) .
 - Donner la terme de la suite de rang 20.
- Montrer que $\mathcal{R}$ peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

(b) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$.

(c) Vérifier le terme de rang 20.

EXERCICE 9.3 (Oscillateur de SAMUELSON²).

On part des hypothèses suivantes :

- il y a égalité en chaque période n entre le revenu national R_n d'un pays et sa dépense effective, décomposée en dépenses de consommation C_n et en dépenses d'investissement I_n : $R_n = C_n + I_n$;
- la consommation et l'investissement sont eux-mêmes déterminés par les relations :
 - $C_{n+1} = cR_n$ où c est un réel appartenant à $[0; 1]$ appelé *propension marginale à consommer* ;
 - $I_{n+1} = v(C_{n+1} - C_n)$ où v est un réel positif appelé *coefficient d'accélération*.

1. Des observations

- Montrer que pour tout entier naturel n , $R_{n+2} = c(1+v)R_{n+1} - cvR_n$.
- Dans chacun des cas suivants, déterminer avec l'éditeur de suites de la calculatrice les valeurs de R_n demandées en prenant $R_0 = R_1 = 1$ et commenter les « oscillations » des résultats obtenus :
 - $c = 0,4$ et $v = 1,5$ pour n variant de 2 à 36 ;
 - $c = 0,7$ et $v = 1,2$ pour n variant de 2 à 38 ;
 - $c = 0,8$ et $v = 2$ pour n variant de 2 à 72 ;

1. Leonardo FIBONACCI (v. 1175 à Pise, Italie - v. 1250) est un mathématicien italien qui a, entre autres, introduit la notation arabe des chiffres en Europe

2. Paul Anthony SAMUELSON est un économiste américain. Il a participé à la mise au point des premiers ordinateurs à la fin de la Seconde Guerre mondiale. Dans ses analyses économiques, il fait une large place aux outils mathématiques. Il a obtenu le prix Nobel de sciences économiques en 1970

- $c = 0,8$ et $v = 1,25$ pour n variant de 2 à 39 ;
- $c = 0,4$ et $v = 2,5$ pour n variant de 2 à 31.

Pour SAMUELSON le seul cas où ce modèle est pertinent pour décrire les fluctuations du revenu national est celui où $c = \frac{1}{v}$ (deux derniers des cas précédents).

2. Avec les matrices

- Vérifier que, pour tout entier naturel n , $\begin{pmatrix} R_{n+1} \\ R_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -cv & c(1+v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_n \\ R_{n+1} \end{pmatrix}$
- En reprenant les données du premier cas de la question 1b, calculer les vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} R_9 \\ R_{10} \end{pmatrix}$. Vérifier ainsi les résultats obtenus.
- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\begin{pmatrix} R_n \\ R_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -cv & c(1+v) \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} R_0 \\ R_1 \end{pmatrix}$
- En reprenant les données de l'avant dernier cas de la question 1b, déterminer les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -cv & c(1+v) \end{pmatrix}^n$ pour n variant de 1 à 6 et en déduire $R_2, R_3, \dots, R_7$. Vérifier ainsi les résultats obtenus.

EXERCICE 9.4.

Dans une zone de marais on s'intéresse à la population des libellules.

On note p_0 la population initiale et p_n la population au bout de n années.

Des études ont permis de modéliser l'évolution de p_n par la relation :

$$\mathcal{R} : \text{Pour tout entier naturel } n \text{ on a : } p_{n+2} - p_{n+1} = \frac{1}{2}(p_{n+1} - p_n).$$

On suppose que $p_0 = 40\,000$ et $p_1 = 60\,000$.

On définit l'accroissement de la population pendant la n -ième année par la différence $p_n - p_{n-1}$.

- Calculer l'accroissement de la population pendant la première année, la deuxième année, la troisième année, puis en déduire p_2 et p_3
- On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par : $u_n = p_{n+1} - p_n$ et $v_n = p_{n+1} - \frac{1}{2}p_n$.
 - Prouver que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
Exprimer u_n en fonction de n .
 - En utilisant la relation $\mathcal{R}$, calculer $v_{n+1} - v_n$.
En déduire que, pour tout n , on a : $v_n = p_1 - \frac{1}{2}p_0$.
Calculer v_n .
 - Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a $p_n = 2(v_n - u_n)$.
En déduire une expression de p_n en fonction de n .
 - Montrer que la suite (p_n) converge et calculer sa limite.
Que peut-on en déduire en ce qui concerne l'évolution de cette population au bout d'un nombre d'années suffisamment grand ?

Chapitre 10

Graphes probabilistes

Sommaire

10.1 Quelques exemples	73
10.1.1 Une évolution de population	73
10.1.2 Maladie	74
10.1.3 L'allumeur de réverbères	74
10.2 Cas général : graphes probabilistes à p états	75
10.3 Un cas particulier : les graphes probabilistes à 2 états	76
10.4 Exercices	77
10.4.1 Annales	79

10.1 Quelques exemples

10.1.1 Une évolution de population

Le problème

Deux villes X et Y totalisent à elles deux une population d'un million d'habitants.

La ville X est plus agréable, mais la ville Y offre de meilleurs salaires.

20 % des habitants de Y partent chaque année habiter X pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5 % des habitants de X partent chaque année habiter Y pour augmenter leur niveau de vie.

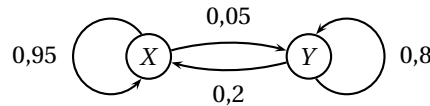
1. Sachant qu'en l'année 0, un quart des habitants sont en X , calculer la population de X et de Y au bout de 1, 2, 5, 10, 30, 40 ans.
2. Que se passe-t-il si l'on suppose que 99 % des habitants sont initialement en X ou en Y ?
3. Même question si la population est également répartie entre les deux villes en l'année zéro ?
4. Que constate-t-on ?

Une solution

1. Commençons par nous demander à quelle condition les populations des deux villes sont stables.
On admet qu'une telle répartition existe et on appelle x la population de X et y celle de Y pour lesquelles la population de chaque ville est la même chaque année.
 - (a) Montrer que x et y sont solutions de :
$$\begin{cases} 0,2y = 0,05x \\ x + y = 1\,000\,000 \end{cases}$$
 - (b) Déterminer alors x et y .
2. Que se passe-t-il dans le cas général ?
 - (a) L'énoncé nous dit que 95 % des gens qui sont en X y restent, 5 % partent en Y , et que 80 % des gens qui sont en Y y restent, 20 % partant en X .
En appelant X_n la population de la ville X à l'année n et Y_n celle de Y , expliquer pourquoi on peut représenter l'évolution par le système d'équations :

$$\begin{cases} X_{n+1} = 0,95X_n + 0,2Y_n \\ Y_{n+1} = 0,05X_n + 0,8Y_n \end{cases}$$

- (b) Chercher la solution stable, c'est déterminer X et Y tels que $X_{n+1} = X_n = X$ et $Y_{n+1} = Y_n = Y$, sachant que, pour tout entier naturel n , $X_n + Y_n = 1\,000\,000$ et donc que $X + Y = 1\,000\,000$. En remplaçant dans les deux équations, déterminer X et Y .
- (c) Dans le cas général, on peut représenter la situation par le graphe suivant, où l'on a marqué, sur chaque arête joignant le sommet X au sommet Y , la proportion de population qui passe à chaque étape de X à Y . Remarquons que, puisque la population ne peut disparaître ou apparaître, la somme des coefficients sur toutes les arêtes quittant un sommet doit être 1 :



Si l'on note, pour tout entier naturel n , $P_n = (X_n \ Y_n)$ le vecteur ligne qui décrit la population de X et de Y au bout de n années, déterminer la matrice M telle que l'équation d'évolution trouvée en 2a peut se réécrire :

$$P_{n+1} = P_n \times M$$

On appellera M : *matrice de transition du système*.

Attention ! Le produit ne se fait pas à droite de la matrice, comme on en a l'habitude, mais à gauche. Cela présente l'avantage de garder l'écriture des vecteurs en ligne, et c'est l'habitude en probabilité.

- Exprimer P_1 et P_2 en fonction de M et de P_0 .
- Montrer par récurrence que $P_n = P_0 M^n$.
- À l'aide de cette formule, traiter le problème.

10.1.2 Maladie

Un individu vit dans un milieu où il est susceptible d'attraper une maladie par piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois états suivants : immunisé (I), malade (M), sain, c'est-à-dire non malade et non immunisé, (S).

D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :

- étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité 0,9 ou passer à l'état S avec une probabilité 0,1 ;
- étant dans l'état S , il peut le rester avec une probabilité 0,5 ou passer à l'état M avec une probabilité 0,5 ;
- étant malade, il peut le rester avec une probabilité 0,2 ou passer à l'état I avec une probabilité 0,8.

- Tracer un graphe probabiliste pour décrire cette situation et écrire la matrice de transition.
- Calculer l'état de probabilité de l'individu au bout de trois mois, de six mois, d'un an, de deux ans pour chacune des situations suivantes :
 - au départ, il est immunisé ;
 - au départ, il est non malade et non immunisé ;
 - au départ, il est malade.

10.1.3 L'allumeur de réverbères

Chaque matin, l'allumeur de réverbère du Petit Prince change l'état de sa planète avec une probabilité 0,75. Au jour 0, le réverbère est éteint.

- Faire un arbre permettant de trouver l'état probabiliste du réverbère au deuxième jour.
- Décrire cette situation à l'aide d'un graphe probabiliste.
- Soit M la matrice de transition associée à ce graphe.

Vérifier que : $M = N - \frac{1}{2}R$, où $N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

- Calculer N^2 , R^2 , NR et RN puis en déduire M^n , pour n entier naturel.
- Au jour 0, le réverbère est allumé (respectivement éteint). Calculer la probabilité p_n (respectivement p'_n) que le réverbère soit allumé. (respectivement éteint) au n -ième matin.

10.2 Cas général : graphes probabilistes à p états

On considère un système qui peut se trouver dans p états $\{1; 2; \dots; p\}$, avec une certaine probabilité, variable au cours du temps, pour chaque état.

On s'intéresse à l'évolution de ce système au cours du temps, et on fait l'hypothèse que la probabilité de transition de l'état i à l'état j est indépendante du temps, et ne dépend pas de l'histoire antérieure, mais seulement de l'état dans lequel on se trouve.

De bons exemples de tels systèmes sont donnés par les jeux de hasard, tels que jeu de l'oie, Monopoly, jacquet, petits chevaux, etc. Pour de tels jeux, l'état est donné par la case sur laquelle on se trouve ; la façon dont on y est arrivé n'a pas d'importance pour la suite du jeu.

Les systèmes qu'on observe dans la vie réelle sont en général beaucoup plus complexes, mais l'approximation simple qu'on en fait ici (comme dans le dernier des exercices précédents) donne souvent des indications utiles ; ce type de modèle est utilisé en pratique dans un grand nombre de situations, avec de bons résultats.

On peut représenter un tel système par un graphe orienté, dont les sommets sont les états du système, et où l'on associe à chaque transition, de l'état i à l'état j , une arête orientée allant de i vers j , étiquetée par la probabilité de transition, c'est-à-dire la probabilité conditionnelle d'être dans l'état j à l'instant $n+1$ sachant que l'on est dans l'état i à l'instant n . Remarquons que l'on peut rester dans un même état : le graphe peut avoir des boucles.

Définition 10.1. On appelle *graphe probabiliste* un graphe orienté, tel que pour chaque couple de sommets $(i; j)$ distincts ou confondus il existe au plus une arête de i vers j , et où chaque arête est étiquetée par un réel p_{ij} compris entre 0 et 1, la somme des poids des arêtes issues d'un même sommet étant égale à 1.

De même qu'à un graphe (orienté ou non), on associe une matrice d'adjacence A , dont le terme a_{ij} compte le nombre d'arêtes joignant le sommet i au sommet j , on peut associer à un graphe probabiliste une matrice qui décrit les probabilités de transition :

Définition 10.2. Étant donné un graphe probabiliste à p sommets, on appelle *matrice de transition* associée la matrice carrée $M = (m_{ij})$ à p lignes et p colonnes, dont le coefficient m_{ij} est l'étiquette de l'arête orientée de i vers j si elle existe (c'est-à-dire la probabilité de transition de i à j), et 0 sinon.

On veut étudier l'évolution d'un tel système au cours du temps ; on note X_n le vecteur ligne à p éléments dont l'élément d'ordre j est la probabilité que le système se trouve à l'instant n dans l'état j (Attention aux indices ! on a ici une suite de vecteurs lignes, avec chacun p composantes!).

La propriété fondamentale est la suivante :

Propriété 10.1. Pour tout entier n , on a $X_{n+1} = X_n \times M$

On l'admettra.

On en déduit immédiatement (la démonstration, simple, par récurrence est laissée au lecteur) :

Propriété 10.2. Pour tout entier $n > 0$, on a : $X_n = X_0 \times M^n$

Cette formule, qui permet de calculer la répartition de probabilités au temps n si on la connaît au temps 0, est fondamentale pour tous les exercices.

Un cas particulièrement intéressant est celui où la répartition de probabilité est stable au cours du temps.

Définition 10.3. On appelle *état stable* un vecteur ligne $X = (x_1 \dots x_p)$ à p composantes tel que $X = X \times M$ et $\sum_{i=1}^p x_i = 1$

La dernière condition $\sum_{i=1}^p x_i = 1$ est due au fait que X représente une répartition de probabilité.

Remarquons que la recherche d'un état stable n'est pas difficile en pratique : il s'agit de résoudre l'équation $X = X \times M$, et d'en chercher une solution satisfaisant $\sum_{i=1}^p x_i = 1$, ce qui se fait sans problème pour une matrice M donnée.

Nous avons vu, au tout début du premier exercice, l'interprétation de cette équation : pour obtenir un état stable, il faut que toutes les transitions s'équilibrent ; si l'on considère le problème comme une évolution de population, il faut que, pour tout état i , la quantité de personnes qui quittent l'état i à chaque étape soit égale à la quantité de personnes qui y arrivent.

Ce qui est moins évident, c'est qu'un tel état existe, et qu'il soit unique. Ce qui se passe quand on ne part pas d'un état stable n'est pas évident non plus. Nous allons l'étudier en détail dans le cas d'un système à deux états, cas qui est accessible au niveau de la terminale.

10.3 Un cas particulier : les graphes probabilistes à 2 états

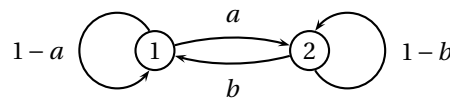
On suppose qu'il n'y a que deux états, notés 1 et 2. On note U_n (resp. V_n) la probabilité qu'à l'instant n , le système se trouve dans l'état 1 (resp. 2).

Pour tout entier n , on note X_n le vecteur-ligne à deux colonnes, $X_n = (U_n \ V_n)$. Remarquons que l'on a toujours $U_n + V_n = 1$.

On note a la probabilité de transition de l'état 1 à l'état 2, c'est-à-dire la probabilité que le système passe à l'état 2 à l'étape $n+1$ sachant que le système est à l'état 1 à l'étape n et b la probabilité de transition de l'état 2 à l'état 1.

Les probabilités de demeurer dans l'état 1 ou dans l'état 2 sont donc $1-a$ et $1-b$.

Le système peut donc être représenté par le graphe probabiliste suivant :



et la matrice correspondante est :

$$M = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

Les nombres a et b sont tous deux compris entre 0 et 1.

Il y a quelques **cas triviaux** que l'on peut traiter à part :

- Si a et b sont nuls, M est la matrice identité, et **tous les états sont stables**. Ce n'est pas étonnant, puisqu'il est impossible de changer !
- Si l'un des deux seulement est nul, par exemple a , on voit que l'on finit toujours par arriver dans l'état 1. C'est le cas d'une population qui ne se renouvelle pas, et dont les individus peuvent être dans deux états, vivants (état 2) ou morts (état 1) : à long terme, la population ne sera plus composée que de morts. On parle alors d'état absorbant (pour l'état 1). Il y a donc **un état stable**.
- Enfin, si les deux coefficients a et b sont égaux à 1, le système clignote : il oscille sans se stabiliser entre l'état 1 et l'état 2, et se retrouve tous les deux coups dans le même état. **Il n'y a pas d'état stable**.

Ces cas particuliers étant faciles à étudier, et peu intéressants, **on supposera désormais que a et b sont strictement positifs, et ne sont pas tous deux égaux à 1**.

On admettra alors le résultat général suivant :

Théorème 10.3. *Considérons un graphe probabiliste à deux états, de matrice de transition $M = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ telle que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$. Alors, le système admet un unique état stable, indépendamment de l'état initial.*

Remarque. On peut retrouver l'état limite stable par le raisonnement élémentaire fait dans le premier exercice : pour qu'une répartition de probabilité $(u \ v)$ soit stable, il faut que le flux de l'état 1 à l'état 2, ua , soit égal au flux en sens inverse vb ; on a donc une équation $ua = vb$. Comme c'est une répartition de probabilité, on doit aussi avoir $u + v = 1$. En résolvant le système on trouve l'état stable.

On peut généraliser, sous certaines conditions à un graphe à n états :

Théorème 10.4. *Soit un graphe probabiliste à n états, de matrice de transition M . S'il existe une puissance M^k de M dont tous les coefficients sont strictement positifs, alors il existe un seul état stable X , vérifiant $X = XM$, et quel que soit l'état initial, le système converge exponentiellement vite vers l'état stable.*

On l'admettra.

10.4 Exercices

EXERCICE 10.1.

Trois sortes d'images sont réparties en proportions égales dans des boîtes de céréales.

Un inspecteur des fraudes, ayant observé ce qui se passait pour 1 000 personnes achetant chaque semaine une boîte de céréales et voyant qu'au bout de 13 semaines, 15 personnes n'avaient que deux des trois sortes d'image, a déclaré mensongère la publicité : « Les images sont également réparties dans les boîtes ». Que penser de ce qu'il affirme ?

On donnera les résultats numériques arrondis à 1 près.

Considérons donc 1 000 personnes qui, chaque semaine, achètent exactement une boîte de céréales.

Partie A : Étude du début du processus.

On pourra s'aider d'un arbre pour représenter la situation

- Déterminer le nombre prévisible de personnes ayant exactement une sorte d'image la première semaine, la deuxième semaine, la cinquième semaine.
- Déterminer le nombre prévisible de personnes ayant exactement deux sortes d'image la première semaine, la deuxième semaine, la troisième semaine.
- Déterminer le nombre prévisible de personnes ayant exactement trois sortes d'image la troisième semaine.

Partie B : Modélisation de la situation.

- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On appelle :
 - a_n le nombre prévisible de personnes possédant exactement une sorte d'image la semaine n ;
 - b_n le nombre prévisible de personnes possédant exactement deux sortes d'image la semaine n ;
 - c_n le nombre prévisible de personnes possédant exactement trois sortes d'image la semaine n .
 Préciser a_1 ; b_1 ; c_1 ; a_2 ; b_2 ; c_2 .
- On choisit une personne au hasard parmi les 1 000.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère les événements :

 - A_n : « La personne considérée possède exactement une sorte d'image la semaine n » ;
 - B_n : « La personne considérée possède exactement deux sortes d'image la semaine n » ;
 - C_n : « La personne considérée possède exactement trois sortes d'image la semaine n ».
 - Exprimer $p(A_n)$ en fonction de a_n , $p(B_n)$ en fonction de b_n et $p(C_n)$ en fonction de c_n .
 - Représenter par un arbre pondéré l'évolution de la situation de la semaine n à la semaine $n + 1$.
 - En utilisant la formule des probabilités totales, exprimer $p(A_{n+1})$, $p(B_{n+1})$ et $p(C_{n+1})$ en fonction $p(A_n)$, $p(B_n)$ et $p(C_n)$.
 - En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n \quad (1)$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n \quad (2)$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + c_n \quad (3)$$
- L'état E_n du système la n -ième semaine est le vecteur-ligne $E_n = (a_n \quad b_n \quad c_n)$
 - Traduire le système formé par les trois équations (1), (2) et (3) par une seule équation matricielle de la forme $E_{n+1} = E_n \times M$.
 - Représenter le graphe G , orienté et pondéré, associé à la matrice M .
 - Exprimer E_{n+1} en fonction de E_1 , M et n .
 - En utilisant la calculatrice pour faire les calculs, déterminer E_{13} et E_{22} .
Commenter l'accusation de l'inspecteur des fraudes.

EXERCICE 10.2.

Dans une île, les mouvements de population peuvent être modélisés ainsi : chaque année, 40 % des habitants de la capitale quittent celle-ci tandis que 20 % des habitants du reste de l'île viennent y habiter. On néglige les autres échanges. On pourra éventuellement représenter ces mouvements de population par un arbre pondéré ou par un graphe probabiliste G .

On donnera les résultats en pourcentage, sous forme décimale arrondie à 0,01 près.

1. On suppose dans cette question qu'en 2002, 25 % de la population totale de l'île habite dans la capitale.
 - (a) Quelle est la répartition prévisible de la population totale de l'île entre la capitale et le reste de l'île en 2003 ?
 - (b) Traduire le calcul effectué par la relation matricielle $E_1 = E_0 \times M$, où :
 - E_0 est un vecteur-ligne de dimension 2 représentant la répartition de la population entre la capitale et le reste de l'île en 2002 ;
 - E_1 est un vecteur-ligne de dimension 2 représentant la répartition prévisible de la population entre la capitale et le reste de l'île en 2003 ;
 - M est une matrice carrée de dimension 2 représentant les mouvements de population dans l'île d'une année sur l'autre.
 - (c) Quel est le lien entre la matrice M et le graphe G ?
 - (d) À l'aide d'un calcul matriciel, déterminer la répartition prévisible de la population totale de l'île en 2005.
2. On suppose dans cette question qu'en 2002, 75 % de la population totale de l'île habite dans la capitale. À l'aide d'un calcul matriciel et en utilisant la fonction matrice de la calculatrice :
 - (a) Déterminer la répartition prévisible de la population totale de l'île en 2005.
 - (b) Déterminer la répartition prévisible de la population totale de l'île en 2010.
3. Reprendre la question précédente en supposant qu'en 2002, 10 % de la population totale de l'île habite dans la capitale.
Que remarque-t-on ?

4. On considère les matrices :

$$\bullet N = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \bullet R = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

- (a) Démontrer que $M = N + 0,4R$.
 - (b) Calculer N^2 , R^2 , NR et RN .
 - (c) Démontrer, par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $M^n = N + 0,4^n R$.
 - (d) En déduire la valeur exacte de chaque coefficient de la matrice M^n .
 - (e) Déterminer la limite de chaque coefficient de la matrice M^n quand n tend vers l'infini.
5. Dans cette question, on appelle x la valeur décimale du pourcentage de la population totale de l'île qui habite dans la capitale en 2002 (x est un réel de l'intervalle $]0; 1[$).
Soit n un entier naturel, la répartition prévisible de la population de l'île en l'année 2002 + n est un vecteur-ligne E_n .
 - (a) Déterminer E_0 .
 - (b) Exprimer E_n en fonction de M et E_0 .
 - (c) Calculer le vecteur-ligne $E = E_0 \times N$.
Vérifier que E est indépendant de x .
 - (d) Déterminer la limite de chaque coefficient du vecteur-ligne E_n quand n tend vers l'infini.
Comparer cette limite au coefficient correspondant du vecteur-ligne E .
 - (e) Démontrer que $EM = E$.

10.4.1 Annales

EXERCICE 10.3 (Centres étrangers, juin 2005).

On a divisé une population en deux catégories : « fumeurs » et « non-fumeurs ».

Une étude statistique a permis de constater que, d'une génération à l'autre,

- 60 % des descendants de fumeurs sont des fumeurs,
- 10 % des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.

On suppose que le taux de fécondité des fumeurs est le même que celui des non-fumeurs.

On désigne par :

- f_n le pourcentage de fumeurs à la génération de rang n ,
- $g_n = 1 - f_n$ le pourcentage de non-fumeurs à la génération de rang n , où n est un entier naturel.

On considère qu'à la génération 0, il y a autant de fumeurs que de non-fumeurs.

On a donc $f_0 = g_0 = 0,5$.

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.
2. Justifier l'égalité matricielle : $(f_{n+1} \quad g_{n+1}) = (f_n \quad g_n) \times A$ où A désigne la matrice : $\begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$
3. Déterminer le pourcentage de fumeurs à la génération de rang 2.
4. Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.
5. Montrer que, pour tout entier naturel n , $f_{n+1} = 0,5f_n + 0,1$.
6. On pose, pour tout entier naturel n , $u_n = f_n - 0,2$.
 - (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - (b) Donner l'expression de u_n en fonction de n .
 - (c) En déduire que, pour tout entier naturel n , $f_n = 0,3 \times 0,5^n + 0,2$.
 - (d) Déterminer la limite de la suite (f_n) lorsque n tend vers $+\infty$ et l'interpréter.

EXERCICE 10.4 (Liban, juin 2003).

Un théâtre propose deux types d'abonnements pour une année : un abonnement A donnant droit à six spectacles ou un abonnement B donnant droit à trois spectacles.

On considère un groupe de 2 500 personnes qui s'abonnent tous les ans. n étant un entier naturel, on note :

a_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement A l'année n ;

b_n la probabilité qu'une personne ait choisi un abonnement B l'année n ;

P_n la matrice $[a_n \quad b_n]$ traduisant l'état probabiliste à l'année n .

Tous les ans 85 % des personnes qui ont choisi l'abonnement A et 55 % des personnes qui ont choisi l'abonnement B conservent ce type d'abonnement l'année suivante. Les autres personnes changent d'abonnement.

1. On suppose que, l'année zéro, 1500 personnes ont choisi l'abonnement A et 1000 l'abonnement B.
Déterminer l'état initial $P_0 = [a_0 \quad b_0]$.
2. (a) Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.
(b) Déterminer la matrice de transition M de ce graphe.
(c) En déduire le nombre d'abonnés pour chaque type d'abonnement l'année un.
3. Soit $P = [x \quad y]$ l'état stable, où x et y sont deux nombres réels positifs tels que $x + y = 1$.
Justifier que x et y vérifient l'équation $x = 0,85x + 0,45y$.
Déterminer x et y .
En déduire la limite de la suite (a_n) quand n tend vers plus l'infini.
Interpréter le résultat précédent en terme de nombre d'abonnements de type A.

EXERCICE 10.5 (Amérique du sud, novembre 2004).

Au cours de la première semaine de l'année scolaire, un professeur propose aux élèves de sa classe le choix entre deux sorties pédagogiques une sortie A et une sortie B.

20 % des élèves de la classe sont favorables à la sortie A et tous les autres élèves sont favorables à la sortie B.

Les arguments des uns et des autres font évoluer cette répartition en cours d'année.

Ainsi 30 % des élèves favorables à la sortie A et 20 % des élèves favorables à la sortie B changent d'avis la semaine suivante.

On note :

a_n la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie A la semaine n ;

b_n la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie B la semaine n ;

P_n la matrice $(a_n; b_n)$ traduisant l'état probabiliste la semaine n .

1. Déterminer l'état initial P_1 .
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste.
3. En déduire que $P_{n+1} = P_n \times M$ où M est la matrice $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$
4. Déterminer l'état probabiliste P_3 et en déduire la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie A la troisième semaine.
5. Déterminer le réel x tel que $(x \quad 1-x) \times M = (x \quad 1-x)$.

On admet que la suite (a_n) est croissante. La sortie A finira-t-elle par être préférée à la sortie B ?

EXERCICE 10.6 (Antilles-Guyane, juin 2004).

On s'intéresse aux performances réalisées par des étudiants courant le 200 mètres dans les compétitions universitaires. Lors d'une compétition, le **score** d'un(e) étudiant(e) est son meilleur temps en secondes obtenu aux 200 m. Une enquête a permis d'établir le comportement général suivant, qu'on supposera valable pour les filles et les garçons dans toute la suite :

- Lors de la première compétition, le score d'un(e) étudiant(e) est toujours supérieur ou égal à 25 secondes.
- Si, lors de la n -ième compétition, l'étudiant(e) a réalisé un score strictement inférieur à 25 secondes, la probabilité qu'il (elle) réalise encore un score strictement inférieur à 25 secondes lors de la $(n+1)$ -ième compétition est de $\frac{2}{5}$.
- Si, lors de la n -ième compétition, l'étudiant(e) a réalisé un score supérieur ou égal à 25 secondes, la probabilité qu'il (elle) réalise encore un score strictement inférieur à 25 secondes est $\frac{1}{5}$.

On représente les données précédentes par un graphe probabiliste G à deux états.

On note A tout score strictement inférieur à 25 secondes et B tout score supérieur ou égal à 25 secondes.

On note a_n la probabilité d'obtenir un score A lors de la compétition n et b_n la probabilité d'obtenir un score B lors de la compétition n .

L'état probabiliste lors de la compétition n est donc représenté par la matrice ligne $(a_n \quad b_n)$.

1. Représenter G et donner sa matrice.
2. Jamalia, jeune étudiante, se présente à sa première compétition universitaire.
 - (a) Calculer la probabilité qu'elle réalise un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres lors de cette compétition.
 - (b) Calculer la probabilité qu'elle réalise un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres lors de sa troisième compétition.
3. Déterminer l'état stable du graphe G .
4. Julien a déjà de nombreuses compétitions universitaires dans les jambes.
Montrer que, pour sa prochaine compétition, il a environ une chance sur quatre de réaliser un score strictement inférieur à 25 secondes aux 200 mètres.

EXERCICE 10.7 (Polynésie, juin 2004).

Étude de l'évolution météorologique d'un jour à l'autre dans une localité.

Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions rationnelles.

Partie A

- S'il fait sec aujourd'hui, alors il fera encore sec demain avec la probabilité $\frac{5}{6}$, donc il fera humide demain avec la probabilité $\frac{1}{6}$.
- S'il fait humide aujourd'hui, alors il fera encore humide demain avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

Nous sommes dimanche et il fait sec. On s'intéresse à l'évolution météorologique des jours suivants.

1. Construire un arbre de probabilité représentant la situation de dimanche à mercredi.
2. En déduire la probabilité des événements suivants :
J : « il fera sec lundi, mardi et mercredi » ;
K : « il fera sec mardi » ;
L : « il fera humide mercredi ».

Partie B

1. Soit n un entier naturel, on note :
 s_n la probabilité pour que le jour n , il fasse sec ;
 h_n la probabilité pour que le jour n , il fasse humide ;
 P_n la matrice $(s_n \quad h_n)$ traduisant l'état probabiliste du temps le jour n . Déterminer une relation entre s_n et h_n .
2. (a) Si le premier dimanche est le jour correspondant à $n = 0$, donner la matrice associée à l'état initial du temps.
(b) Décrire l'évolution de cet état à l'aide d'un graphe probabiliste.

3. La matrice M de ce graphe est $\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

(a) Déterminer M^2 (utiliser la calculatrice).

(b) Expliquer comment retrouver à l'aide de la matrice M , la situation du mardi étudiée dans la partie A.

4. (a) Déterminer l'état stable associé à l'évolution météorologique.

(b) En déduire, qu'à long terme, la probabilité qu'il pleuve un certain jour est $\frac{1}{3}$.

EXERCICE 10.8 (France, septembre 2004).

On considère une grande population d'acheteurs de yaourts.

On suppose que l'effectif de cette population est stable.

Une entreprise commercialise des yaourts sous la marque Y.

30% des acheteurs de yaourts achètent la marque Y.

L'entreprise décide de faire une campagne publicitaire pour améliorer ses ventes.

Au bout d'une semaine, une enquête indique que :

- 20% des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts des autres marques achètent maintenant des yaourts Y.
- 10% des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts Y achètent maintenant des yaourts des autres marques.

L'entreprise continue sa campagne publicitaire. On fait l'hypothèse que l'évolution des résultats obtenus à l'issue de la première semaine de campagne publicitaire est la même les semaines suivantes.

1. Dessiner le graphe probabiliste correspondant à cette situation.

2. Soit $X_0 = (0, 3 \quad 0, 7)$ la matrice ligne décrivant l'état initial de la population.

(a) Donner la matrice de transition (notée A) associée au graphe précédent.

(b) Déterminer la probabilité qu'un acheteur de yaourts choisi au hasard après deux semaines de campagne publicitaire, achète des yaourts de la marque Y.

3. On admet que pour tout entier naturel n on a : $A^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)0,7^n & \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)0,7^n \\ \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)0,7^n & \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)0,7^n \end{pmatrix}$

Avec l'hypothèse ci-dessus, l'entreprise peut-elle espérer atteindre une part de marché de 70% ? Justifier.

Chapitre 11

Fonctions de deux variables

Sommaire

11.1 Rappels	83
11.1.1 Généralités	83
11.1.2 Représentation graphique d'une fonction de deux variables	84
11.2 Optimisation sous contrainte	86
11.3 Exercices	87

11.1 Rappels

11.1.1 Généralités

Définition 11.1. Une fonction numérique de deux variables est une fonction qui à deux nombres x et y associe un nombre z noté $z = f(x, y)$.

Une telle fonction est représentée dans l'espace par l'ensemble des points $M(x; y; z)$ où $z = f(x, y)$.

Cet ensemble est appelé *surface*, d'équation $z = f(x, y)$.

Définition 11.2. Soit S une surface d'équation $z = f(x, y)$.

On appelle ligne de niveau $z = k$, la courbe formée par l'intersection du plan d'équation $z = k$ et de la surface d'équation $z = f(x, y)$.

C'est donc l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient le système
$$\begin{cases} z = k \\ z = f(x, y) \end{cases}$$

Remarque. On définit de la même manière les lignes de niveau $x = k$ et $y = k$.

Propriété 11.1. Soit S une surface d'équation $z = f(x, y)$.

Si la ligne de niveau $z = k$ est équivalente à un système de la forme :

- $\begin{cases} z = k \\ ax + by = c \end{cases}$ alors c'est une droite (contenue dans le plan d'équation $z = k$);
- $\begin{cases} z = k \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$ alors c'est un cercle de centre $\Omega(0; 0; k)$ et de rayon r (contenu dans le plan d'équation $z = k$);
- $\begin{cases} z = k \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ ou $\begin{cases} z = k \\ x = ay^2 + by + c \end{cases}$ alors c'est une parabole (contenue dans le plan d'équation $z = k$);
- $\begin{cases} z = k \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$ ou $\begin{cases} z = k \\ x = \frac{1}{y} \end{cases}$ ou bien encore $\begin{cases} z = k \\ y = u(x) \end{cases}$ où u est une fonction associée à la fonction inverse alors c'est une hyperbole (contenue dans le plan d'équation $z = k$).

On l'admettra.

Remarque. On obtient des propriétés équivalentes pour les lignes de niveau $y = k$ et $x = k$ en permutant les lettres.

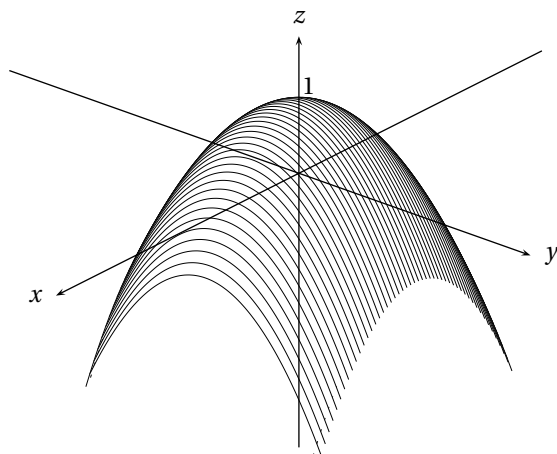
11.1.2 Représentation graphique d'une fonction de deux variables

Pour toute la suite nous considérerons la fonction de deux variables f définie par :

$$f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Une première représentation

Un logiciel en donne la représentation suivante :



Une deuxième représentation

Une telle représentation n'est guère exploitable. Si l'on peut deviner (éventuellement) les coordonnées du sommet (0; 0; 1), quasiment aucun autre point n'est lisible.

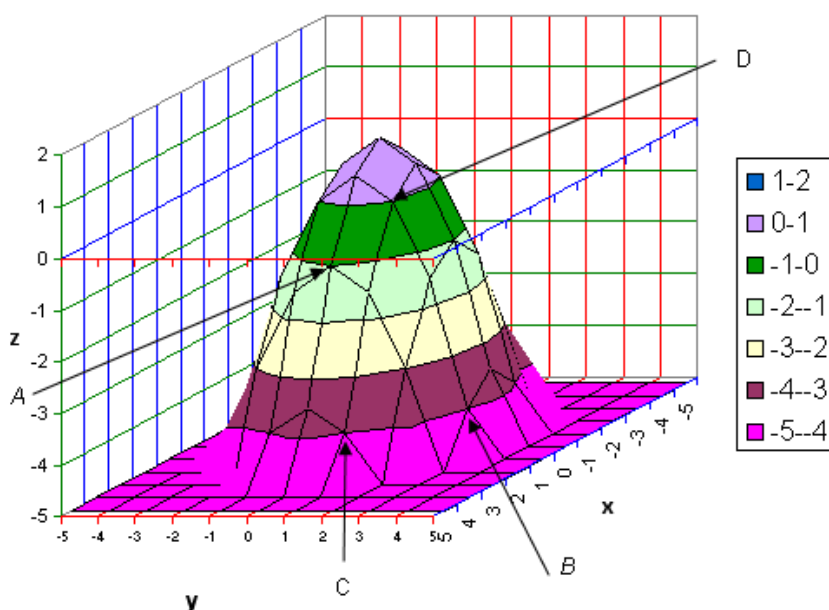
Pour pouvoir procéder plus facilement à des lectures graphiques, on fait apparaître sur cette surface des lignes de niveau $x = k$, $y = k$ et $z = k$ où k prend des valeurs entières (0, 1, 2, 3, etc. ou bien 0, 5, 10, etc.), c'est-à-dire l'ensemble des points appartenant à cette surface tels que $x = 0$, $x = 1$, etc. $y = 0$, $y = 1$ etc. et $z = 0$, $z = 1$ etc.

On colore en général les espaces entre deux lignes de niveau $z = 0$, $z = 1$ etc.

Enfin on place les axes à l'extérieur.

On obtient alors, avec un autre logiciel la figure 11.1 de la présente page.

FIGURE 11.1 – Deuxième représentation



Remarque. La surface semble présenter des « angles », mais cela est dû au logiciel, la surface étant parfaitement « lisse ».

Les lignes joignant l'axe des x « de droite » à l'axe des x « de gauche » sont les lignes de niveau $x = k$, avec ici k variant de 5 (devant) à -5 (derrière).

Les lignes joignant l'axe des y « de devant » à l'axe des y « de derrière » sont les lignes de niveau $y = k$, avec ici k variant de -5 (gauche) à 5 (droite).

Enfin les autres lignes délimitant les couleurs sont les lignes de niveau $z = k$, avec ici k variant de -5 (bas) à 2 (haut).

Le point A est sur la surface aux croisements des lignes de niveau $x = 2$, $y = 0$ et $z = -1$. Ses coordonnées sont donc $A(2; 0; -1)$. Le calcul le confirme : $f(x_A, y_A) = f(2, 0) = 1 - \frac{1}{2}(2^2 + 0^2) = 1 - 2 = -1 = z_A$.

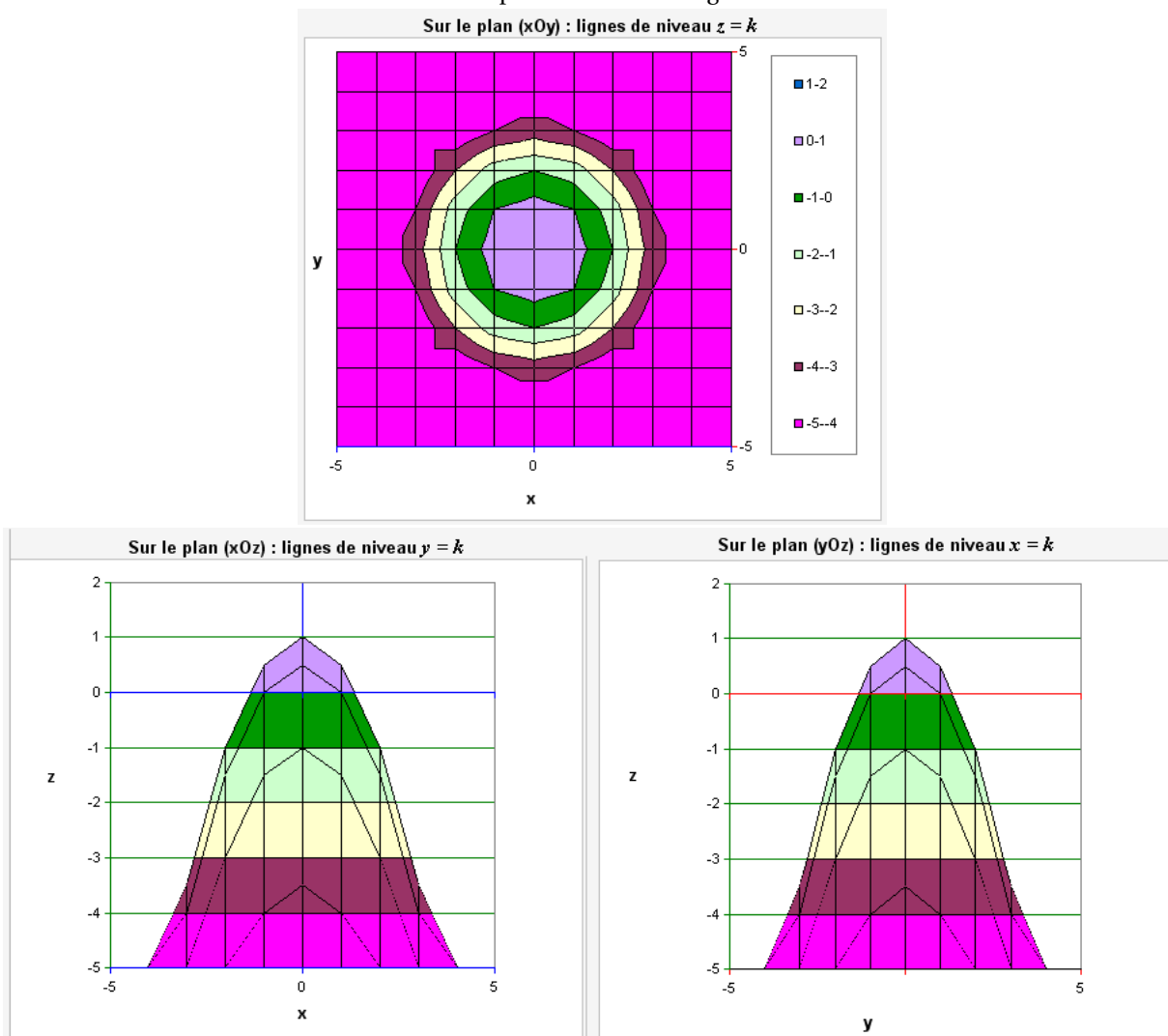
Le point B est sur la surface aux croisements des lignes de niveau $x = 1$, $y = 3$ et $z = -4$. Ses coordonnées sont donc $B(1; 3; -4)$. Le calcul le confirme : $f(x_B, y_B) = f(1, 3) = 1 - \frac{1}{2}(1^2 + 3^2) = 1 - 5 = -4 = z_B$.

Représentations des lignes de niveau

On peut avoir besoin de visualiser la surface « d'en haut », « de droite » ou « de face ».

On obtient les projections des lignes de niveau comme le montre la figure 11.2 de la présente page (les « angles » sont dûs au logiciel).

FIGURE 11.2 – Représentations des lignes de niveau



Montrons que la ligne de niveau $z = -1$ est un cercle pour notre fonction $f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Par définition, la ligne de niveau $z = -1$ est constituée des points dont les coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} z = -1 \\ z = f(x, y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ z = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ -1 = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ 4 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

C'est donc un cercle de centre $(0; 0; -1)$ et de rayon $\sqrt{4} = 2$.

11.2 Optimisation sous contrainte

Les fonctions de deux variables sont généralement utilisées en économie pour mathématiser *la satisfaction* (on dit aussi *l'utilité*) associée pour un consommateur à la possession de deux quantités de biens consommables A et B .

Ainsi x est le nombre de biens A , y le nombre de biens B et $f(x, y)$ la modélisation de la satisfaction engendrée chez le consommateur par x biens de type A et y biens de type B .

Ce consommateur peut avoir des contraintes (de budget en général) et peut chercher à optimiser sa satisfaction sous ses contraintes (la théorie économique suppose que les individus sont parfaitement rationnels).

Ainsi si, par exemple, le bien A coûte 12€ et le bien B coûte 10€ et que le consommateur dispose d'un budget total de 150€, on aura comme contrainte : $12x + 10y = 150$.

On cherche alors les x et y tels que la satisfaction $f(x, y)$ est maximale.

On a alors :

$$\begin{cases} 12x + 10y = 150 \\ z = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 - 1,2x \\ z = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + (15 - 1,2x)^2) \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à étudier la fonction $f(x) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + (15 - 1,2x)^2)$ (et souvent ses variations), pour savoir si elle admet un maximum et en quelle valeur de x il est atteint.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{1}{2}(x^2 + (15 - 1,2x)^2) \\ &= 1 - \frac{1}{2}(x^2 + 225 - 36x + 1,44x^2) \\ &= -1,22x^2 + 18x - 111,5 \end{aligned}$$

f est une fonction trinôme de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1,22 < 0$ donc elle admet un maximum atteint en $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{18}{-2,44} \approx 7,38$.

On aura alors $y_0 = 15 - 1,2x_0 \approx 6,15$.

Et la satisfaction sera $f(x_0, y_0) \approx -45,11$

Remarque. Le système $\begin{cases} 12x + 10y = 150 \\ z = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{cases}$ s'interprète géométriquement de la façon suivante : $12x + 10y = 150$ est l'équation d'un plan (parallèle à l'axe (Oz)) et $z = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ est l'équation de la surface S .

L'ensemble des points vérifiant ce système est donc l'intersection entre ce plan et la surface. C'est une courbe et on admettra que, dans le cas présent, c'est une parabole.

La recherche du maximum de satisfaction est la recherche des coordonnées du plus haut point de cette courbe, donc du sommet de la parabole.

EXERCICE.

Déterminer x , y pour que la satisfaction soit maximale quand les prix des biens de type A et B sont de 10€ et que le consommateur dispose de 100€. On indiquera quelle est cette satisfaction.

11.3 Exercices

EXERCICE 11.1 (Asie – Juin 2006).

On a représenté de la présente page la surface (S) d'équation $z = 3(x^2 + y)$, avec x appartenant à l'intervalle $[0; 1,5]$, et y appartenant à l'intervalle $[0; 1,5]$.

Partie A – Exploitation du graphique.

On considère le plan (P) d'équation $z = 6$.

1. Sur la figure donnée, placer le point A de coordonnées $(1; 1; 6)$.
2. Surlignez en couleur la partie visible de l'intersection de la surface (S) et du plan (P) sur la figure donnée.

Partie B – Recherche d'un coût minimum.

Une entreprise fabrique des unités centrales pour ordinateurs dont les composants sont essentiellement des cartes mères et des microprocesseurs.

On appelle x le nombre (exprimé en milliers) de microprocesseurs produits chaque mois et y le nombre (exprimé en milliers) de cartes mères produites chaque mois.

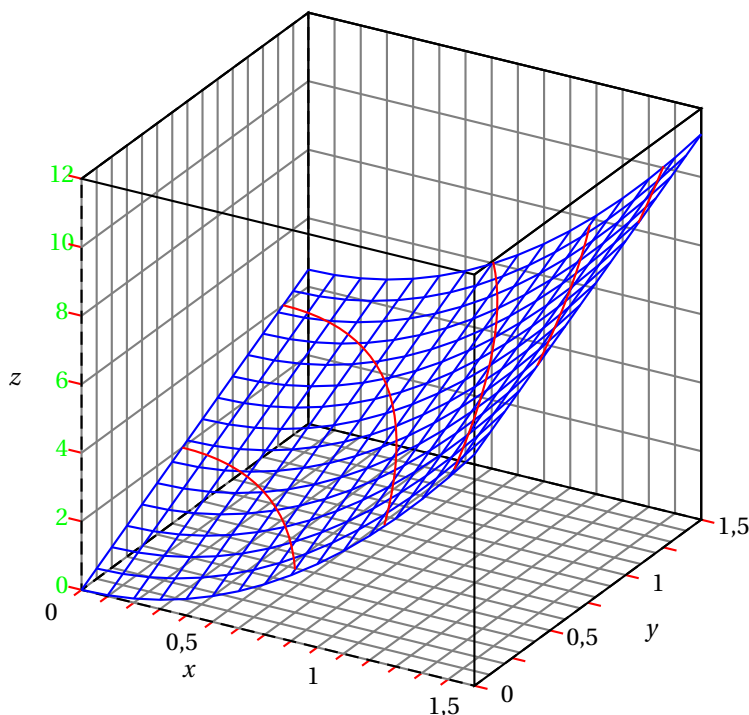
Le coût mensuel de production, exprimé en milliers d'euros, est donné par :

$$C(x; y) = 3(x^2 + y)$$

On se propose de trouver les quantités de microprocesseurs et de cartes mères que l'entreprise doit produire par mois pour minimiser ce coût.

1. La production mensuelle totale est de deux milliers de composants. On a donc $x + y = 2$.
Exprimer $C(x; y)$ en fonction de la seule variable x . On note f la fonction ainsi obtenue.
Vérifier que $f(x) = 3x^2 - 3x + 6$.
2. Montrer que sur l'intervalle $[0; 1,5]$, la fonction f admet un minimum atteint pour $x = 0,5$.
3. Quelles quantités de microprocesseurs et de cartes mères, l'entreprise doit-elle produire chaque mois pour minimiser le coût mensuel de production ? Quel est ce coût ?
4. Placer sur la figure donnée le point K correspondant au coût minimum.

FIGURE 11.3 – Figure de l'exercice 11.1



EXERCICE 11.2 (D'après Asie – Juin 2005).

Pour fabriquer un alliage une usine utilise deux métaux A et B en quantités x et y exprimées en tonnes. Le coût de production qui en résulte, exprimé en milliers d'euros, est donné par la formule :

$$C(x; y) = 2x + 0,5y^2 + 4.$$

La page ci-contre comporte deux figures.

- La figure 11.4 représente la surface d'équation $z = C(x; y)$ pour $0 \leq x \leq 20$ et $0 \leq y \leq 12$.
- La figure 11.5 représente les courbes de niveau de cette surface pour z variant de 20 en 20.

Partie 1

- Lequel des points donnés ci-dessous est un point de la surface d'équation $z = C(x; y)$?
 (a) $M(13; 9; 60)$ (b) $N(12; 4; 40)$ (c) $R(12; 8; 60)$ (d) $S(15; 4; 40)$
- La courbe de niveau $z = 20$ est :
 (a) une parabole (b) une droite (c) une hyperbole (d) autre réponse
- Déterminer la nature de la courbe de niveau $y = 10$.
- (a) Déterminer la nature des courbes de niveau $x = k$ pour $k = 0, k = 5, k = 10, k = 15, k = 20$.
 (b) Représenter leurs projections dans le plan (yOz)

Partie 2

Les métaux A et B sont achetés respectivement 0,5 et 1 millier d'euros la tonne. L'entreprise affecte 11 milliers d'euros à l'achat des métaux.

- Un exemple :
 Si l'entreprise achète 4 tonnes de métal A, combien de tonnes de métal B achète-t-elle ?
- Cas général
 Soit x la quantité de métal A et y la quantité de métal achetées.
 Montrer que x et y sont liés par la relation $x + 2y = 22$.
- (a) Tracer sur la figure 11.5 l'ensemble des points dont l'équation est $x + 2y = 22$.
 (b) En déduire, graphiquement le coût minimum de production des alliages pour un investissement de 11 milliers d'euros, et les quantités correspondantes de métaux A et B achetées.

EXERCICE 11.3.

Soit f la fonction définie pour tout réel x élément de $[0; 10]$ et pour tout réel y élément de $[0; 12]$ par : $f(x; y) = 2x(y+1)$. On donne page 90 la représentation graphique de la surface $z = f(x; y)$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Pour financer un projet humanitaire, les adhérents d'une association décident de fabriquer des cartes de vœux.

Pour produire une quantité z de paquets de cartes, ils utilisent x décilitres d'encre A et y décilitres d'encre B. On admet que x , y et z sont liés par la relation $z = 2x(y+1)$ où x est un nombre entier compris entre 0 et 10, et y un nombre entier compris entre 0 et 12.

Dans tout l'exercice, les quantités d'encre seront exprimées en décilitres.

Partie A

- (a) Combien de paquets de cartes peut-on fabriquer avec 7 décilitres d'encre A et 8 décilitres d'encre B ?
 (b) Donner la quantité d'encre A, la quantité d'encre B, et le nombre de paquets de cartes associés respectivement aux points M, P et R à coordonnées entières, de la surface donnée ci-dessous.
- Quelle est la nature de la section de la surface par le plan d'équation $x = 4$, parallèle au plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$? Justifier la réponse.

Partie B

Le prix d'un décilitre d'encre A est 6€ et celui d'un décilitre d'encre B est 2€.

L'association décide d'investir 46€ dans l'achat des encres.

- Donner la relation entre les quantités x et y d'encres A et B achetées pour un montant de 46€.
- Montrer alors que $z = -6x^2 + 48x$.
- (a) Quelle quantité d'encre A l'association achètera-t-elle pour fabriquer le maximum de paquets de cartes ?
 (b) Combien de paquets de cartes seront alors fabriqués ?
 (c) Quelle quantité d'encre B sera alors utilisée ?

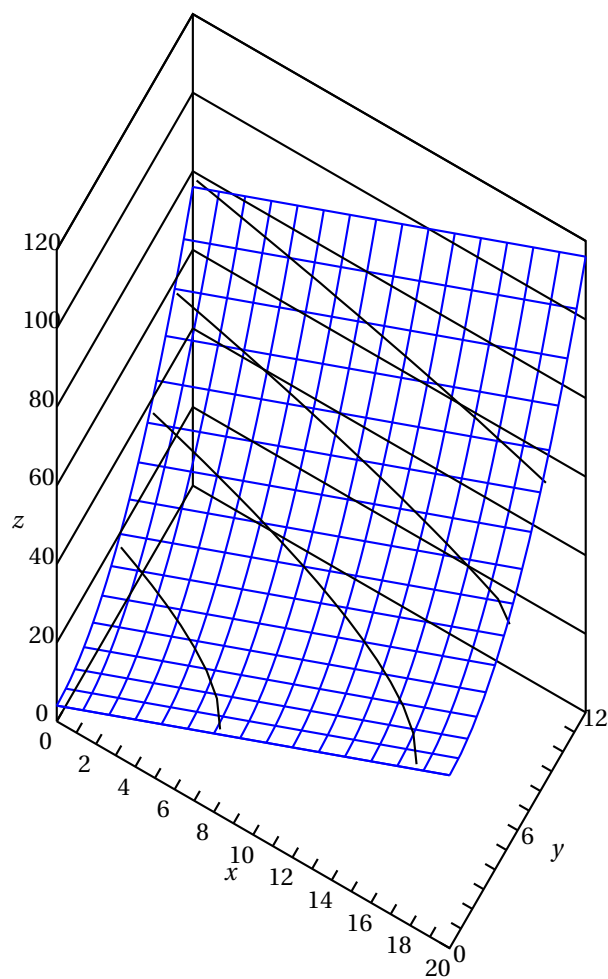
FIGURE 11.4 – Surface d'équation $z = C(x; y)$ 

FIGURE 11.5 – Courbes de niveau

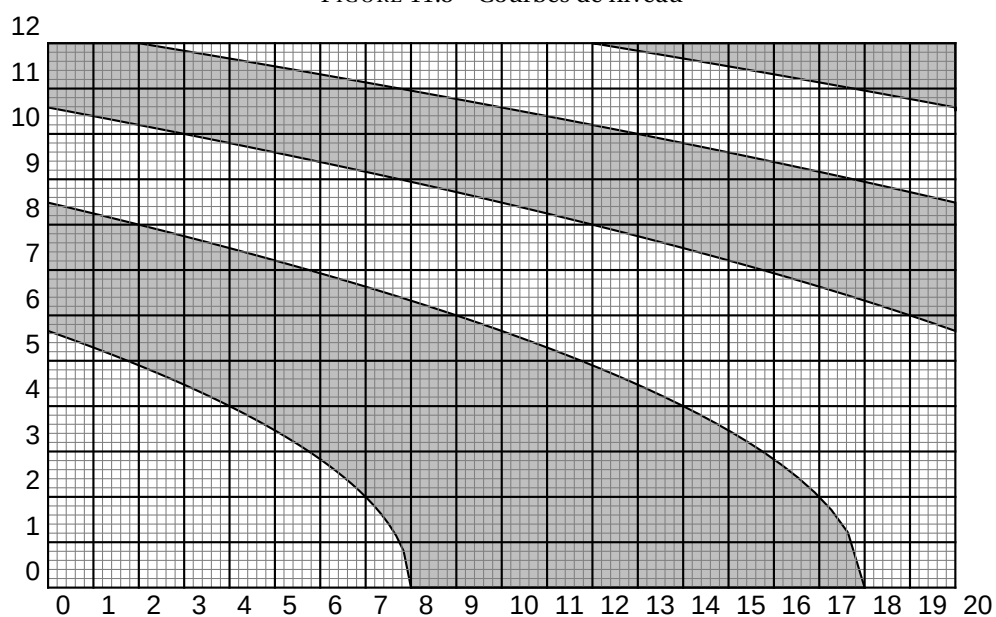
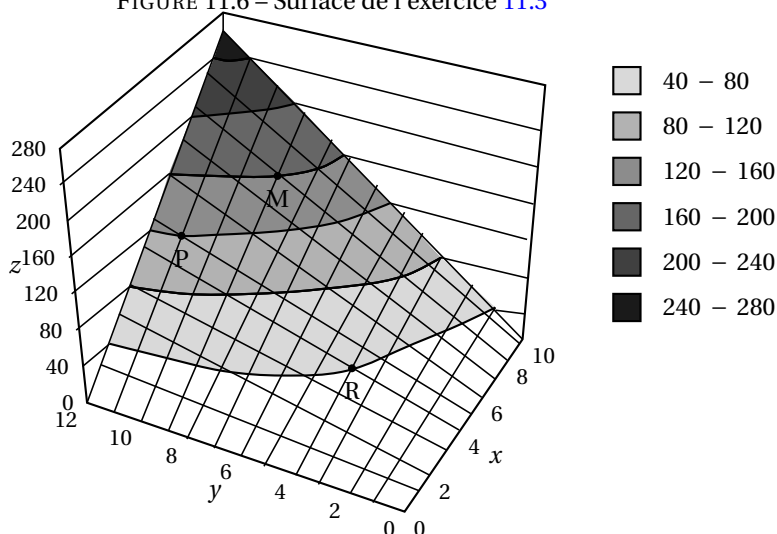


FIGURE 11.6 – Surface de l'exercice 11.3

**EXERCICE 11.4** (France – Septembre 2003).

Les questions 2 et 3 sont indépendantes.

Une entreprise fabrique deux produits E et F en quantités respectives x et y exprimées en tonnes, pour lesquelles le coût de production z est donné par

$$z = x^2 + 2y^2 - 6x - 4y + 13.$$

où z est exprimé en milliers d'euros avec $x \in [0; 7]$ et $y \in [0; 7]$.

- La surface représentant ce coût est donnée dans le repère de l'espace situé sur page ci-contre qui sera rendue avec la copie.
 - Placer sur cette surface le point A d'abscisse 4 et d'ordonnée 6.
 - Donner graphiquement un encadrement d'amplitude 10 de la cote du point A.
 - Vérifier par le calcul.
- Montrer que l'on a $z = (x - 3)^2 + 2(y - 1)^2 + 2$.
 - En déduire la production pour laquelle ce coût est minimal. Quel est ce coût en euros?
 - Placer le point B correspondant à cette production sur la surface.
- L'entreprise doit fabriquer une quantité x du produit E et une quantité y du produit F avec la contrainte $x + y = 7$.
 - Vérifier que z peut s'écrire sous la forme $z = g(x)$ avec $x \in [0; 7]$ et $g(x) = 3x^2 - 30x + 83$.
 - Déterminer la valeur de x pour laquelle g admet un minimum. Quel est alors le coût de production en euros?
 - Placer le point C correspondant à cette production sur la surface.

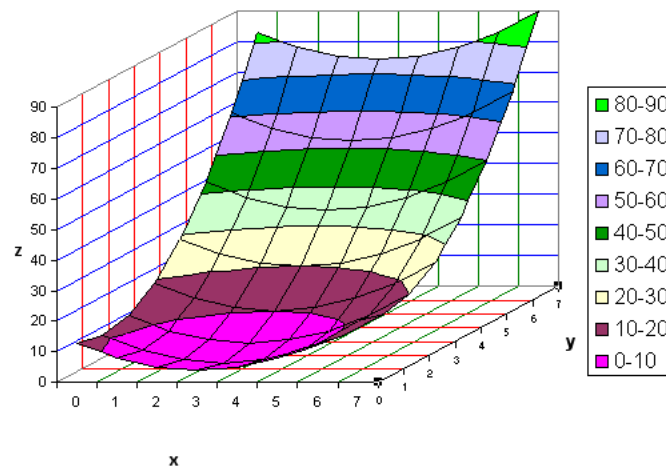
EXERCICE 11.5 (Liban – Juin 2005).

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on désigne par $\mathcal{S}$ l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tel que $z = 3xy$. On dit que $\mathcal{S}$ est la surface d'équation $z = 3xy$.

Une courbe de niveau de cote z_0 est l'intersection d'un plan d'équation $z = z_0$, parallèle au plan (xOy) , avec la surface $\mathcal{S}$. On définit de façon identique une courbe de niveau d'abscisse x_0 et une courbe de niveau d'ordonnée y_0 .

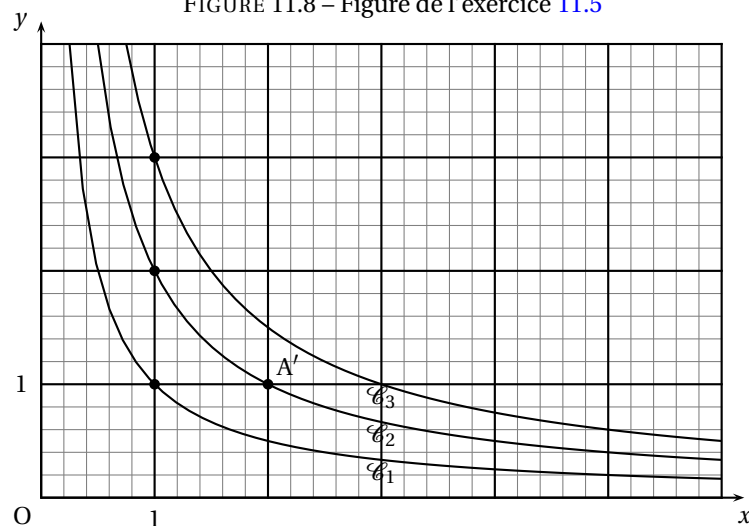
- Soient les courbes de niveau d'abscisse 1, d'abscisse $\frac{3}{2}$ et d'abscisse 2.
Tracer les projections orthogonales de ces courbes de niveau dans le plan (yOz) .
- Quelle est la nature des courbes de niveau d'abscisse constante?
 - Montrer que les courbes de niveau de cote constante non nulle sont des hyperboles.
- Sur la figure 11.8 page suivante sont représentées trois courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ représentant les projections orthogonales dans le plan (xOy) de trois courbes de niveau de cote constante k .
Préciser, en le justifiant, la valeur de k associée à chaque courbe.

FIGURE 11.7 – Figure de l'exercice 11.4



4. Le point A' représenté sur la courbe $\mathcal{C}_2$ de la figure ci-dessous est la projection orthogonale dans le plan (xOy) d'un point $A(x; y; z)$, de la surface $\mathcal{S}$.
- Déterminer les coordonnées du point A dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 - Préciser les coordonnées du point A'' , projeté orthogonal de A dans le plan (yOz) , puis placer ce point A'' sur la figure 11.8.
5. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + 6y - z - 6 = 0$.
- Montrer que le point A appartient au plan $\mathcal{P}$.
 - Montrer que le plan $\mathcal{P}$ contient la courbe de niveau d'abscisse 2.
 - Démontrer que l'intersection de la surface $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{P}$ est la réunion de deux droites : la courbe de niveau d'abscisse 2 et une autre droite que l'on déterminera par un système d'équations cartésiennes.
- On pourra utiliser la factorisation $x + 2y - xy - 2 = (x - 2)(1 - y)$.

FIGURE 11.8 – Figure de l'exercice 11.5



EXERCICE 11.6 (Nouvelle-Calédonie – Novembre 2005).

Le bénéfice B d'une entreprise dépend à la fois des investissements et de la production.

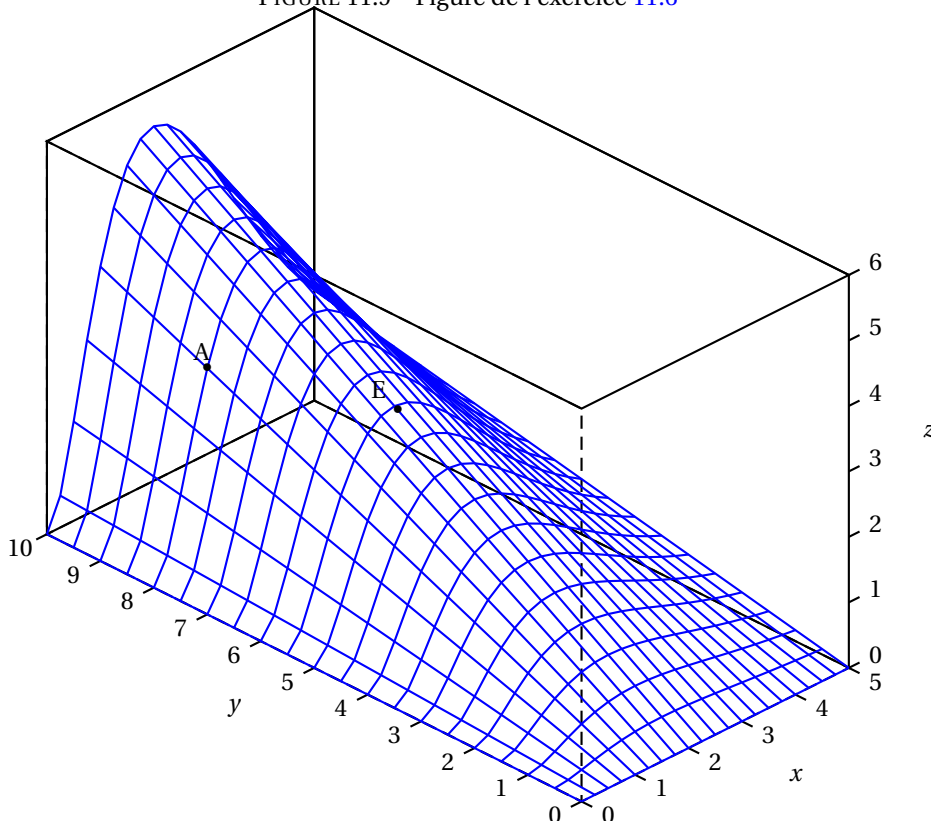
On appelle x le montant des investissements en millions d'euros et y la quantité produite en milliers d'unités. On admet que le bénéfice B de cette entreprise, exprimé en millions d'euros, est modélisé par la fonction B définie par

$$B(x; y) = x^2 y e^{-x}$$

On donne de la présente page une vue de la surface (S) d'équation $z = x^2 y e^{-x}$, avec x élément de l'intervalle $[0; 5]$ et y élément de l'intervalle $[0; 10]$, dans un repère orthogonal de l'espace.

- Déterminer par lecture graphique le montant des investissements et la valeur de la production qui permettent d'obtenir un bénéfice maximal quand x appartient à l'intervalle $[0; 5]$ et y appartient à l'intervalle $[0; 10]$. Calculer la valeur correspondante de ce bénéfice.
- Sur la figure ci-dessus, on a placé le point A appartenant à la surface (S) , ayant pour abscisse $x_A = 1$ et pour ordonnée $y_A = 8$. Calculer la troisième coordonnée z_A du point A .
 - Sur la figure ci-dessus, on a placé le point E appartenant à la surface (S) , ayant pour abscisse $x_E = 2$ et pour troisième coordonnée $z_E = z_A$. Calculer la valeur exacte y_E de l'ordonnée du point E .
- Quelle est la nature de l'intersection de la surface (S) avec le plan d'équation $x = 1$? Justifier. Tracer cette intersection dans un plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm, y appartenant à l'intervalle $[0; 10]$. Déterminer, à l'euro près, le montant en euros du bénéfice maximal réalisé par l'entreprise quand le montant des investissements est fixé à 1 million d'euros.
- Déterminer une équation de la courbe d'intersection de la surface (S) avec le plan d'équation $y = 10$. Expliquer alors comment retrouver le résultat de la question 1.

FIGURE 11.9 – Figure de l'exercice 11.6



EXERCICE 11.7 (Nouvelle-Calédonie – Novembre 2004).

Pour modéliser la production d'une entreprise les économistes utilisent des fonctions qui suivent le modèle dit de COBB-DOUGLAS : $z = Ax^\alpha y^\beta$ (A, α, β réels strictement positifs), où z désigne une quantité obtenue à partir de deux quantités variables x et y .

Partie A

On considère les fonctions f et h définies pour $x \in [0; 10]$ et $y \in [0; 10]$ respectivement par

$$f(x; y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad h(x; y) = \frac{1}{4} x^2 y.$$

1. Vérifier que f et h sont deux fonctions de COBB-DOUGLAS en donnant pour chacune d'elles les valeurs A, α, β .
2. Les représentations graphiques de f et h figurent parmi les trois représentations graphiques de la figure 11.10 de la présente page.
Associer à chaque fonction sa représentation graphique. Les choix seront justifiés.

Partie B

La fabrication d'un produit dépend des durées de fonctionnement de deux machines M et M' . Les durées de fonctionnement des machines M et M' exprimées en centaines d'heures sont respectivement égales à x et y . La quantité produite, exprimée en tonnes, est $z = h(x, y)$, où h est la fonction définie à la **partie A**.

1. Dans cette question la quantité produite est fixée à 25 tonnes.
Quelle est, parmi les trois représentations graphiques de la figure 11.11 page suivante, celle de la section du plan d'équation $z = 25$ avec la surface d'équation $z = \frac{1}{4} x^2 y$?
2. Les horaires de travail font que la somme des durées de fonctionnement des deux machines M et M' est de huit centaines d'heures.
 - (a) Montrer que $z = 2x^2 - \frac{1}{4}x^3$.
 - (b) Soit la fonction g définie par $g(x) = 2x^2 - \frac{1}{4}x^3$ pour $x \in [0; 8]$.
Étudier les variations de g et en déduire les durées de fonctionnement x et y qui assurent une production maximum.

FIGURE 11.10 – Figure de l'exercice 11.7

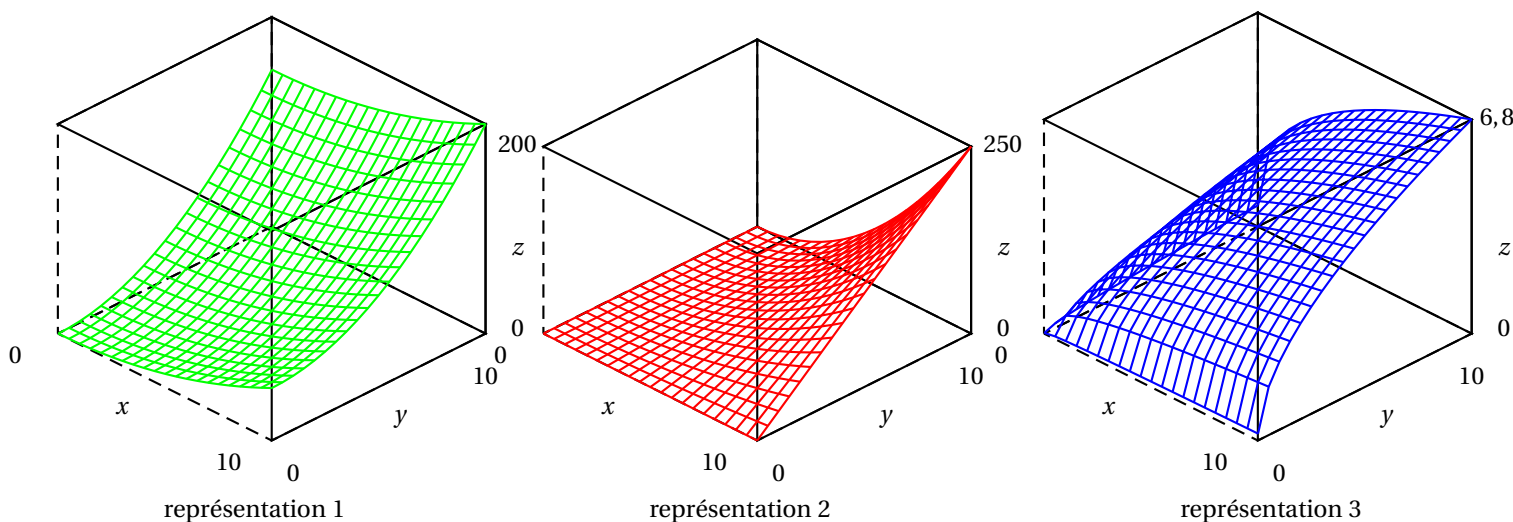


FIGURE 11.11 – Figure de l'exercice 11.7

