Correction du devoir (sujet A)

Exercice 1 :

1.$f(x) = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$ est un trinôme du second degré sous forme canonique.

De plus $2 > 0$, donc la fonction f est strictement décroissante sur $\left]-\infty ; \frac{3}{4}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{3}{4} ; +\infty\right[$.

Donc son tableau de variations est :

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

(réponse **c.**)

2.$g(x) = (x + 1)^2 + 3 = (x - (-1))^2 + 3$ est un trinôme du second degré sous forme canonique.
Sa courbe représentative est une parabole dont le sommet a pour coordonnées $(-1 ; 3)$.(réponse **c.**)

3.$h(x) = -4x + 1$. h est une fonction affine de coefficient -4.

$h(x) \geq 0$ équivaut à $-4x + 1 \geq 0$ équivaut à $-4x \geq -1$ équivaut à $x \leq \frac{1}{4}$ soit **$h(x)$ est positif sur $\left]-\infty ; \frac{1}{4}\right]$**.

D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
Signe de $-4x+1$		**+**	**0**	**−**	

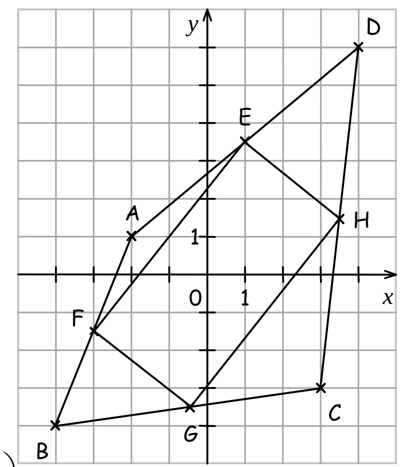
(réponse **b.**)

4.$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.
$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 + 1 = -19$.
La courbe représentative de la fonction f passe par le point $(-2 ; -19)$. (réponse **a.**)

5.On commence par ranger les 7 valeurs de la série dans l'ordre croissant : 9 ; 9 ; 9 ;10 ; 11 ; 12 ; 15.
De plus, 7 = 3 + 1 + 3. La médiane est la valeur qui occupe le 4ème rang. Donc la médiane de la série est 10. (réponse **d.**)

Exercice 2 :

1.



2.Le milieu E du segment [AD] a pour coordonnées $(x_E ; y_E)$ avec :

$x_E = \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1$ et $y_E = \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}$. Donc E a pour coordonnées $\left(1 ; \frac{7}{2}\right)$.

Le milieu H du segment [CD] a pour coordonnées $(x_H ; y_H)$ avec :

$x_H = \frac{x_C + x_D}{2} = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2}$ et $y_H = \frac{y_C + y_D}{2} = \frac{-3+6}{2} = \frac{3}{2}$. Donc H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{2} ; \frac{3}{2}\right)$.

3.Le milieu I du segment [EG] a pour coordonnées $(x_I ; y_I)$ avec :

$x_I = \frac{x_E + x_G}{2} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ et $y_I = \frac{y_E + y_G}{2} = \frac{\frac{7}{2} - \frac{7}{2}}{2} = 0$. Donc I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4} ; 0\right)$.

Le milieu J du segment [FH] a pour coordonnées $(x_J ; y_J)$ avec :

$x_J = \frac{x_F + x_H}{2} = \frac{-3 + \frac{7}{2}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ et $y_J = \frac{y_F + y_H}{2} = \frac{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 0$ Donc J a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4} ; 0\right)$.

Les points I et J ont les mêmes coordonnées, donc ils sont confondus.
Le quadrilatère EFGH est un parallélogramme car ses diagonales [EG] et [FH] se coupent en leur milieu.

ou

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-1 \\ -\dfrac{3}{2}-\dfrac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix} x_G - x_H \\ y_G - y_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2}-\dfrac{7}{2} \\ -\dfrac{7}{2}-\dfrac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$ ont les mêmes coordonnées, donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ et le quadrilatère EFGH est un parallélogramme.

<u>Remarque</u> : On peut démontrer que le quadrilatère a ses côtés opposés parallèles en utilisant le théorème des milieux dans les triangles ABC et ACD d'une part et dans les triangles ABD et BCD d'autre part.

4. $EG = \sqrt{(x_G - x_E)^2 + (y_G - y_E)^2} = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}-1\right)^2 + \left(-\dfrac{7}{2}-\dfrac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{9}{4}+49} = \sqrt{\dfrac{205}{4}}$.

$FH = \sqrt{(x_H - x_F)^2 + (y_H - y_F)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{7}{2}+3\right)^2 + \left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{169}{4}+9} = \sqrt{\dfrac{205}{4}}$.

Les diagonales [EG] et [FH] du parallélogramme EFGH ont la même longueur, donc EFGH est un rectangle.

ou

$EF^2 = (x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2 = (-4)^2 + (-5)^2 = 41$;

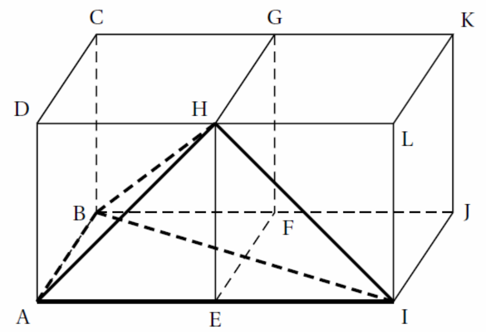
$FG^2 = (x_G - x_F)^2 + (y_G - y_F)^2 = \left(-\dfrac{1}{2}+3\right)^2 + \left(-\dfrac{7}{2}+\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{4} + 4 = \dfrac{41}{4}$;

$EG^2 = (x_G - x_E)^2 + (y_G - y_E)^2 = \left(-\dfrac{1}{2}-1\right)^2 + \left(-\dfrac{7}{2}-\dfrac{7}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4} + 49 = \dfrac{205}{4}$.

D'une part : $EF^2 + FG^2 = 41 + \dfrac{41}{4} = \dfrac{205}{4}$ et d'autre part : $EG^2 = \dfrac{205}{4}$. Donc $EF^2 + FG^2 = EG^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on peut en déduire que le triangle EFG est rectangle en F.
Le parallélogramme EFGH a un angle droit, donc EFGH est un rectangle.

<u>**Exercice 3**</u> :



1. Volume (ABIH) = $\dfrac{1}{3} \times B \times h$

avec B = Aire (ABI) = $\dfrac{AB \times AI}{2} = \dfrac{6 \times 12}{2} = 36$ cm² et h = EH = 6 cm.

Donc : Volume (ABIH) = $\dfrac{1}{3} \times 36 \times 6 = 72$ cm³.

2.a. Dans le triangle ABI rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :
$BI^2 = AB^2 + AI^2 = 6^2 + 12^2 = 180$.

Dans le triangle EHI rectangle en E, d'après le théorème de Pythagore :
$HI^2 = EH^2 + EI^2 = 6^2 + 6^2 = 72$.

Dans le triangle BEH rectangle en E, d'après le théorème de Pythagore :
$BH^2 = BE^2 + EH^2 = 72 + 6^2 = 108$. (en effet HI et BE sont des diagonales des faces d'un cube d'arête 6 cm).
$BH = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ cm.

D'une part : $BI^2 = 180$ et d'autre part : $BH^2 + HI^2 = 108 + 72 = 180$. Donc $BI^2 = BH^2 + HI^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on peut en déduire que le triangle BHI est rectangle en H.

b. Aire (BHI) = $\dfrac{BH \times IH}{2} = \dfrac{\sqrt{108} \times \sqrt{72}}{2} = \dfrac{6\sqrt{3} \times 6\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{6}$ cm².

c. Volume (ABIH) = $\dfrac{1}{3} \times B' \times h'$ avec B' = Aire (BHI) = $18\sqrt{6}$ cm² et h' hauteur de ABHI relative à BHI.

D'où : $\dfrac{1}{3} \times 18\sqrt{6} \times h' = 72$ équivaut à $h' = \dfrac{72}{6\sqrt{6}} = \dfrac{12}{\sqrt{6}} = \dfrac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$ cm.

Exercice 4 :

a.

Entrée	12	7	n	n
Si n est pair alors	12 est pair		n est pair	
C prend la valeur $n/2$	C prend la valeur 6		C prend la valeur $n/2$	
C prend la valeur $C + 1$	C prend la valeur 7		C prend la valeur $n/2 + 1$	
C prend la valeur C^2	C prend la valeur 49		C prend la valeur $(n/2 + 1)^2$	
Sinon		7 est impair		n est impair
C prend la valeur $3\,n + 1$		C prend la valeur 22		C prend la valeur $3\,n + 1$
C prend la valeur C^2		C prend la valeur 484		C prend la valeur $(3\,n + 1)^2$
Sortie	On affiche 49	On affiche 484	On affiche $(\,n/2 + 1\,)^2$	On affiche $(3\,n + 1)^2$

b. Si n est pair, on affiche en sortie : $\left(\frac{n}{2}+1\right)^2 = \frac{n^2}{4} + n + 1$.

Si n est impair, on affiche en sortie : $(\,3\,n + 1\,)^2$.

2. Si on permute les lignes 8 et 9, si n est pair, on affiche en sortie : $\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1 = \frac{n^2}{4} + 1$ et si n est impair, on affiche toujours en sortie : $(\,3\,n + 1\,)^2$.

Exercice 5 :

1. $3\,x - 5\,x^2 = 0$ équivaut à $x\,(\,3 - 5\,x\,) = 0$ (produit nul) équivaut à $x = 0$ ou $3 - 5\,x = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $x = \frac{3}{5}$.

L'ensemble des solutions est : $S = \left\{\,0\,;\,\frac{3}{5}\right\}$.

2. $(\,3 - 2\,x\,)\,(\,7 + x\,) < 0$.

On étudie le signe du produit $(\,3 - 2\,x\,)\,(\,7 + x\,)$ dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		-7		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $3 - 2\,x$		+		+	0	−	
Signe de $7 + x$		−	0	+		+	
Signe de $(\,3 - 2\,x\,)\,(\,7 + x\,)$		−	0	+	0	−	

$3 - 2\,x \geq$ **0** équivaut à **$3/2 \geq x$**

$7 + x \geq$ **0** équivaut à **$x \geq -7$**

Le produit $(\,3 - 2\,x\,)\,(\,7 + x\,)$ est **strictement négatif** sur **$]-\infty\,;\,-7\,[\,\cup\,]\,\frac{3}{2}\,;\,+\infty\,[$**.

Donc l'ensemble des solutions est : $S = \,]-\infty\,;\,-7\,[\,\cup\,]\,\frac{3}{2}\,;\,+\infty\,[$.

3. $(\,x - 3\,)\,(\,2\,x - 5\,) \leq (\,x - 3\,)^2$ équivaut à $(\,x - 3\,)\,(\,2\,x - 5\,) - (\,x - 3\,)^2 \leq 0$ (on met $(\,x - 3\,)$ en facteur)
équivaut à $(\,x - 3\,)\,[\,(\,2\,x - 5\,) - (\,x - 3\,)\,] \leq 0$ équivaut à $(\,x - 3\,)\,(\,x - 2\,) \leq$ **0**.

On étudie le signe du produit $(\,x - 3\,)\,(\,x - 2\,)$ dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
Signe de $x - 3$		−		−	0	+	
Signe de $x - 2$		−	0	+		+	
Signe de $(\,x - 3\,)\,(\,x - 2\,)$		+	**0**	−	**0**	+	

$x - 3 \geq$ **0** équivaut à **$x \geq 3$**

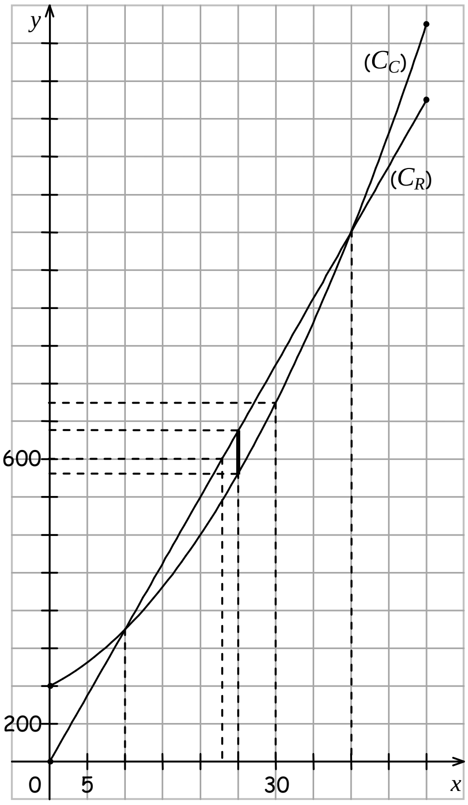
$x - 2 \geq$ **0** équivaut à **$x \geq 2$**

Le produit $(\,x - 3\,)\,(\,x - 2\,)$ est **négatif** sur **$[\,2\,;\,3\,]$**, donc l'ensemble des solutions est : $S = [\,2\,;\,3\,]$.

4. $(\,x - 5\,)^2 = 4\,x^2$ équivaut à $(\,x - 5\,)^2 - 4\,x^2 = 0$ équivaut à $(\,x - 5\,)^2 - (\,2\,x\,)^2 = 0$ (différence de deux carrés) équivaut à $[\,(\,x - 5\,) - 2\,x\,]\,[\,(\,x - 5\,) + 2\,x\,] = 0$ équivaut à $(\,-x - 5\,)\,(\,3\,x - 5\,) = 0$ (produit nul) équivaut à $x = -5$ ou $x = \frac{5}{3}$

L'ensemble des solutions est : $S = \left\{\,-5\,;\,\frac{5}{3}\right\}$.

<u>Exercice 6</u> : Partie A



1.Le coût de production de 30 kg de ce produit est d'environ 1 900 euros.
(ordonnée du point de (C_C) d'abscisse 30).

2.La recette dépasse-t-elle 1 600 euros à partir d'environ 23 kg produits.
(abscisses des points de (C_R) dont l'ordonnée est supérieure à 1 600).

3.$B(x) \geq 0$ équivaut à $R(x) - C(x) \geq 0$ équivaut à $R(x) \geq C(x)$.
L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $B(x) \geq 0$ semble être [10 ; 40].
(abscisses des points de (C_R) situées au dessus ou sur (C_C)).

4.La fonction B semble admettre un maximum pour $x = 25$.
(abscisse où la différence des ordonnées des points de (C_R) par (C_C)
est la plus grande).

Partie B :

1.Pour tout réel x appartenant à [0 ; 50],
$B(x) = R(x) - C(x) = 70x - (x^2 + 20x + 400) = -x^2 + 50x - 400$.
On développe :
$-(x-25)^2 + 225 = -(x^2 - 50x + 625) + 225 = -x^2 + 50x + 400 = B(x)$.
$(-x+10)(x-40) = -x^2 + 40x + 10x - 400 = -x^2 + 50x - 400 = B(x)$.
ou on factorise :
$-(x-25)^2 + 225 = 225 - (x-25)^2 = 15^2 - (x-25)^2 = [15 - (x-25)][15 + (x-25)] = (-x+10)(x-40) = B(x)$

2.a.$B(x) = (-x+10)(x-40)$ est un trinôme du second degré sous forme factorisée.
On résout l'inéquation : $B(x) \geq 0$ équivaut à $(-x+10)(x-40) \geq$ **0**.
On étudie le signe du produit $(-x+10)(x-40)$ dans un tableau de signes :

x	0		10		40		50
Signe de $-x+10$		+	0	-		-	
Signe de $x-40$		-		-	0	+	
Signe de $(-x+10)(x-40)$		-	**0**	+	**0**	-	

$-x + 10 \geq$ **0** équivaut à **10** $\geq x$
$x - 40 \geq$ **0** équivaut à $x \geq$ **40**

Le produit $(-x+10)(x-40)$ est **positif** sur **[10 ; 40]**, donc l'ensemble des solutions est : S = [10 ; 40].
Pour réaliser du bénéfice, l'entreprise doit produire entre 10 et 40 kg de ce produit.

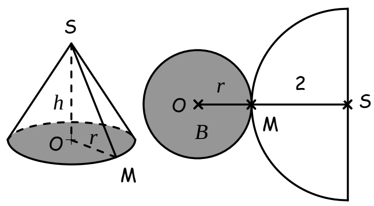
b.$B(x) = -(x-25)^2 + 225$ est un trinôme du second degré sous forme canonique.
De plus $-1 < 0$, donc la fonction B est strictement croissante sur [0 ; 25] et strictement décroissante sur [25 ; 50].
Donc son tableau de variations est :

x	0		25		50
$B(x)$	-400	↗	225	↘	-400

La fonction B admet un maximum
de 225 atteint pour $x = 25$.

Le bénéfice maximal sera 225 euros lorsqu'on produira 25 kg de ce produit.

<u>Exercice 7</u> :



Volume (cône) = $\frac{1}{3} \times B \times h$ avec B = Aire (disque base) = $\pi \times r^2$.
Comme le périmètre du disque de base est égal à la longueur du demi cercle de
départ de rayon 2 cm, le rayon du disque de base est égal à 1 cm. Donc $r = 1$ cm.
De plus, dans le triangle MOS rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore : $MS^2 = MO^2 + OS^2$
Donc $OS^2 = MS^2 - MO^2 = 2^2 - 1^2 = 3$, soit $OS = h = \sqrt{3}$ cm.
Volume (cône) = $\frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi$ cm $^3 \approx 1{,}81$ cm^3.

Correction du devoir (sujet B)

Exercice 1 :

1. $f(x) = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$ est un trinôme du second degré sous forme canonique.

De plus $2 > 0$, donc la fonction f est strictement décroissante sur $\left]-\infty ; \frac{3}{4}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{3}{4} ; +\infty\right[$.

Donc son tableau de variations est :

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

(réponse **d.**)

2. $g(x) = (x+1)^2 + 3 = (x-(-1))^2 + 3$ est un trinôme du second degré sous forme canonique.
Sa courbe représentative est une parabole dont le sommet a pour coordonnées $(-1 ; 3)$.(réponse **a.**)

3. $h(x) = -4x + 1$. h est une fonction affine de coefficient -4.

$h(x) \geq 0$ équivaut à $-4x + 1 \geq 0$ équivaut à $-4x \geq -1$ équivaut à $x \leq \frac{1}{4}$ soit **$h(x)$ est positif sur $\left]-\infty ; \frac{1}{4}\right]$**.

D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
Signe de $-4x+1$	**+**	**0**	**-**

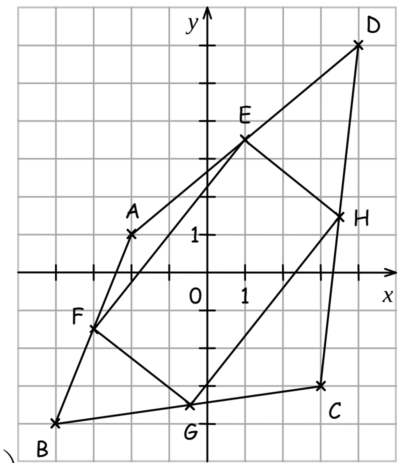
(réponse **c.**)

4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.
$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 + 1 = -19$.
La courbe représentative de la fonction f passe par le point $(-2 ; -19)$. (réponse **c.**)

5. On commence par ranger les 7 valeurs de la série dans l'ordre croissant : 9 ; 9 ; 9 ;10 ; 11 ; 12 ; 15.
De plus, 7 = 3 + 1 + 3. La médiane est la valeur qui occupe le 4ème rang. Donc la médiane de la série est 10. (réponse **a.**)

Exercice 2 :

1.



2. Le milieu E du segment [AD] a pour coordonnées $(x_E ; y_E)$ avec :

$x_E = \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1$ et $y_E = \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}$. Donc E a pour coordonnées $\left(1 ; \frac{7}{2}\right)$.

Le milieu H du segment [CD] a pour coordonnées $(x_H ; y_H)$ avec :

$x_H = \frac{x_C + x_D}{2} = \frac{3+4}{2} = \frac{7}{2}$ et $y_H = \frac{y_C + y_D}{2} = \frac{-3+6}{2} = \frac{3}{2}$. Donc H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{2} ; \frac{3}{2}\right)$.

3. Le milieu I du segment [EG] a pour coordonnées $(x_I ; y_I)$ avec :

$x_I = \frac{x_E + x_G}{2} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ et $y_I = \frac{y_E + y_G}{2} = \frac{\frac{7}{2} - \frac{7}{2}}{2} = 0$. Donc I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4} ; 0\right)$.

Le milieu J du segment [FH] a pour coordonnées $(x_J ; y_J)$ avec :

$x_J = \frac{x_F + x_H}{2} = \frac{-3 + \frac{7}{2}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ et $y_J = \frac{y_F + y_H}{2} = \frac{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 0$ Donc J a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4} ; 0\right)$.

Les points I et J ont les mêmes coordonnées, donc ils sont confondus.
Le quadrilatère EFGH est un parallélogramme car ses diagonales [EG] et [FH] se coupent en leur milieu.

ou

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-1 \\ -\frac{3}{2}-\frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix} x_G - x_H \\ y_G - y_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-\frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2}-\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$ ont les mêmes coordonnées, donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ et le quadrilatère EFGH est un parallélogramme.

<u>Remarque</u> : On peut démontrer que le quadrilatère a ses côtés opposés parallèles en utilisant le théorème des milieux dans les triangles ABC et ACD d'une part et dans les triangles ABD et BCD d'autre part.

4. $EG = \sqrt{(x_G - x_E)^2 + (y_G - y_E)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2 + \left(-\frac{7}{2}-\frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+49} = \sqrt{\frac{205}{4}}$.

$FH = \sqrt{(x_H - x_F)^2 + (y_H - y_F)^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{2}+3\right)^2 + \left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{169}{4}+9} = \sqrt{\frac{205}{4}}$.

Les diagonales [EG] et [FH] du parallélogramme EFGH ont la même longueur, donc EFGH est un rectangle.

ou

$EF^2 = (x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2 = (-4)^2 + (-5)^2 = 41$;

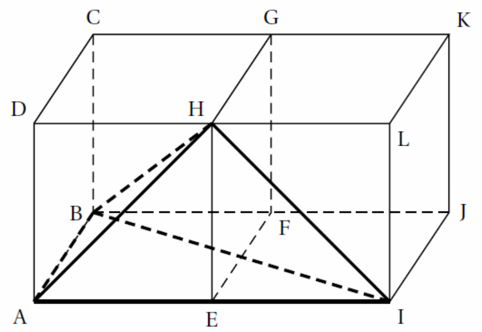
$FG^2 = (x_G - x_F)^2 + (y_G - y_F)^2 = \left(-\frac{1}{2}+3\right)^2 + \left(-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}+4 = \frac{41}{4}$;

$EG^2 = (x_G - x_E)^2 + (y_G - y_E)^2 = \left(-\frac{1}{2}-1\right)^2 + \left(-\frac{7}{2}-\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}+49 = \frac{205}{4}$.

D'une part : $EF^2 + FG^2 = 41 + \frac{41}{4} = \frac{205}{4}$ et d'autre part : $EG^2 = \frac{205}{4}$. Donc $EF^2 + FG^2 = EG^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on peut en déduire que le triangle EFG est rectangle en F.
Le parallélogramme EFGH a un angle droit, donc EFGH est un rectangle.

<u>**Exercice 3**</u> :



1. Volume (ABIH) = $\frac{1}{3} \times B \times h$

avec B = Aire (ABI) = $\frac{AB \times AI}{2} = \frac{6 \times 12}{2} = 36$ cm² et h = EH = 6 cm.

Donc : Volume (ABIH) = $\frac{1}{3} \times 36 \times 6 = 72$ cm³.

2.a. Dans le triangle ABI rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :
$BI^2 = AB^2 + AI^2 = 6^2 + 12^2 = 180$.

Dans le triangle EHI rectangle en E, d'après le théorème de Pythagore :
$HI^2 = EH^2 + EI^2 = 6^2 + 6^2 = 72$.

Dans le triangle BEH rectangle en E, d'après le théorème de Pythagore :
$BH^2 = BE^2 + EH^2 = 72 + 6^2 = 108$. (en effet HI et BE sont des diagonales des faces d'un cube d'arête 6 cm).
$BH = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ cm.

D'une part : $BI^2 = 180$ et d'autre part : $BH^2 + HI^2 = 108 + 72 = 180$. Donc $BI^2 = BH^2 + HI^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, on peut en déduire que le triangle BHI est rectangle en H.

b. Aire (BHI) = $\frac{BH \times IH}{2} = \frac{\sqrt{108} \times \sqrt{72}}{2} = \frac{6\sqrt{3} \times 6\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{6}$ cm².

c. Volume (ABIH) = $\frac{1}{3} \times B' \times h'$ avec B' = Aire (BHI) = $18\sqrt{6}$ cm² et h' hauteur de ABHI relative à BHI.

D'où : $\frac{1}{3} \times 18\sqrt{6} \times h' = 72$ équivaut à $h' = \frac{72}{6\sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$ cm.

Exercice 4 :

a.

Entrée	12	7	n	n
Si n est pair alors	12 est pair		n est pair	
C prend la valeur $n/2$	C prend la valeur 6		C prend la valeur $n/2$	
C prend la valeur $C + 1$	C prend la valeur 7		C prend la valeur $n/2 + 1$	
C prend la valeur C^2	C prend la valeur 49		C prend la valeur $(n/2 + 1)^2$	
Sinon		7 est impair		n est impair
C prend la valeur $3\,n + 1$		C prend la valeur 22		C prend la valeur $3\,n + 1$
C prend la valeur C^2		C prend la valeur 484		C prend la valeur $(3\,n + 1)^2$
Sortie	On affiche 49	On affiche 484	On affiche $(\,n/2 + 1\,)^2$	On affiche $(3\,n + 1)^2$

b. Si n est pair, on affiche en sortie : $\left(\frac{n}{2} + 1\right)^2 = \frac{n^2}{4} + n + 1$.

Si n est impair, on affiche en sortie : $(\,3\,n + 1\,)^2$.

2. Si on permute les lignes 8 et 9, si n est pair, on affiche en sortie : $\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1 = \frac{n^2}{4} + 1$ et si n est impair, on affiche toujours en sortie : $(\,3\,n + 1\,)^2$.

Exercice 5 :

1. $3\,x - 5\,x^2 = 0$ équivaut à $x\,(\,3 - 5\,x\,) = 0$ (produit nul) équivaut à $x = 0$ ou $3 - 5\,x = 0$ équivaut à $x = 0$ ou $x = \frac{3}{5}$.

L'ensemble des solutions est : $S = \left\{ 0\,;\, \frac{3}{5} \right\}$.

2. $(\,3 - 2\,x\,)\,(\,7 + x\,) < 0$.

On étudie le signe du produit $(\,3 - 2\,x\,)\,(\,7 + x\,)$ dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		-7		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $3 - 2\,x$		+		+	0	−	
Signe de $7 + x$		−	0	+		+	
Signe de $(\,3 - 2\,x\,)\,(\,7 + x\,)$		−	0	+	0	−	

$3 - 2\,x \geq 0$ équivaut à $\mathbf{3/2} \geq x$

$7 + x \geq 0$ équivaut à $x \geq -\,\mathbf{7}$

Le produit $(\,3 - 2\,x\,)\,(\,7 + x\,)$ est **strictement négatif** sur $\left]\, -\infty\,;\, -7\,\right[\cup \left]\,\frac{3}{2}\,;\, +\infty\,\right[$.

Donc l'ensemble des solutions est : $S = \left]\, -\infty\,;\, -7\,\right[\cup \left]\,\frac{3}{2}\,;\, +\infty\,\right[$.

3. $(\,x - 3\,)\,(\,2\,x - 5\,) \leq (\,x - 3\,)^2$ équivaut à $(\,x - 3\,)\,(\,2\,x - 5\,) - (\,x - 3\,)^2 \leq 0$ (on met $(\,x - 3\,)$ en facteur)
équivaut à $(\,x - 3\,)\,[\,(\,2\,x - 5\,) - (\,x - 3\,)\,] \leq 0$ équivaut à $(\,x - 3\,)\,(\,x - 2\,) \leq \mathbf{0}$.

On étudie le signe du produit $(\,x - 3\,)\,(\,x - 2\,)$ dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
Signe de $x - 3$		−		−	0	+	
Signe de $x - 2$		−	0	+		+	
Signe de $(\,x - 3\,)\,(\,x - 2\,)$		+	**0**	−	**0**	+	

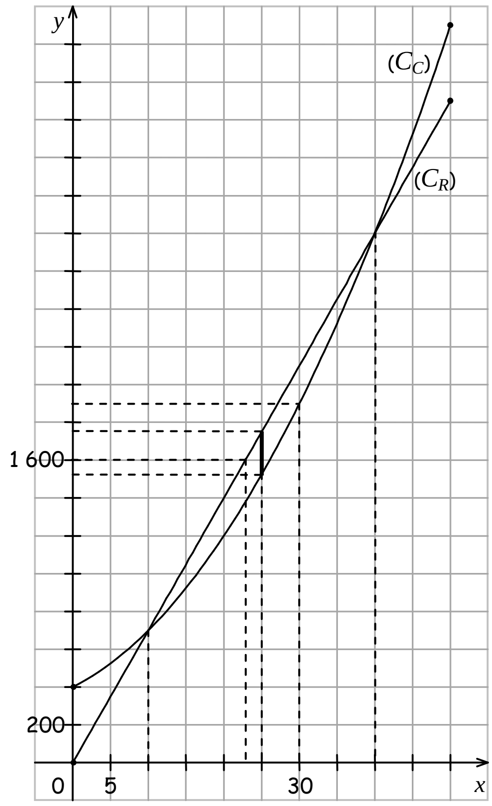
$x - 3 \geq 0$ équivaut à $x \geq \mathbf{3}$

$x - 2 \geq 0$ équivaut à $x \geq \mathbf{2}$

Le produit $(\,x - 3\,)\,(\,x - 2\,)$ est **négatif** sur $[\,\mathbf{2}\,;\,\mathbf{3}\,]$, donc l'ensemble des solutions est : $S = [\,2\,;\,3\,]$.

4. $(\,x - 5\,)^2 = 4\,x^2$ équivaut à $(\,x - 5\,)^2 - 4\,x^2 = 0$ équivaut à $(\,x - 5\,)^2 - (\,2\,x\,)^2 = 0$ (différence de deux carrés)
équivaut à $[\,(\,x - 5\,) - 2\,x\,]\,[\,(\,x - 5\,) + 2\,x\,] = 0$ équivaut à $(\,-x - 5\,)\,(\,3\,x - 5\,) = 0$ (produit nul)
équivaut à $x = -5$ ou $x = \frac{5}{3}$

L'ensemble des solutions est : $S = \left\{ -5\,;\, \frac{5}{3} \right\}$.



Exercice 6 : **Partie A**

1.Le coût de production de 30 kg de ce produit est d'environ 1 900 euros.
(ordonnée du point de (C_C) d'abscisse 30).

2.La recette dépasse-t-elle 1 600 euros à partir d'environ 23 kg produits.
(abscisses des points de (C_R) dont l'ordonnée est supérieure à 1 600).

3.$B(x) \geq 0$ équivaut à $R(x) - C(x) \geq 0$ équivaut à $R(x) \geq C(x)$.
L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $B(x) \geq 0$ semble être [10 ; 40].
(abscisses des points de (C_R) situées au dessus ou sur (C_C)).

4.La fonction B semble admettre un maximum pour $x = 25$.
(abscisse où la différence des ordonnées des points de (C_R) par (C_C) est la plus grande).

Partie B :

1.Pour tout réel x appartenant à [0 ; 50],
$B(x) = R(x) - C(x) = 70x - (x^2 + 20x + 400) = -x^2 + 50x - 400$.
On développe :
$-(x-25)^2 + 225 = -(x^2 - 50x + 625) + 225 = -x^2 + 50x + 400 = B(x)$.
$(-x+10)(x-40) = -x^2 + 40x + 10x - 400 = -x^2 + 50x - 400 = B(x)$.
ou on factorise :
$-(x-25)^2 + 225 = 225 - (x-25)^2 = 15^2 - (x-25)^2 = [15 - (x-25)][15 + (x-25)] = (-x+10)(x-40) = B(x)$

2.a.$B(x) = (-x+10)(x-40)$ est un trinôme du second degré sous forme factorisée.
On résout l'inéquation : $B(x) \geq 0$ équivaut à $(-x+10)(x-40) \geq$ **0**.
On étudie le signe du produit $(-x+10)(x-40)$ dans un tableau de signes :

x	0		10		40		50
Signe de $-x+10$		+	0	−		−	
Signe de $x-40$		−		−	0	+	
Signe de $(-x+10)(x-40)$		−	**0**	+	**0**	−	

$-x + 10 \geq$ **0** équivaut à **10** $\geq x$
$x - 40 \geq$ **0** équivaut à $x \geq$ **40**

Le produit $(-x+10)(x-40)$ est **positif** sur **[10 ; 40]**, donc l'ensemble des solutions est : S = [10 ; 40].
Pour réaliser du bénéfice, l'entreprise doit produire entre 10 et 40 kg de ce produit.

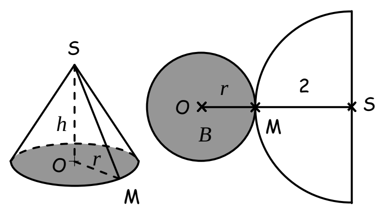
b.$B(x) = -(x-25)^2 + 225$ est un trinôme du second degré sous forme canonique.
De plus $-1 < 0$, donc la fonction B est strictement croissante sur [0 ; 25] et strictement décroissante sur [25 ; 50].
Donc son tableau de variations est :

x	0		25		50
$B(x)$	− 400	↗	225	↘	− 400

La fonction B admet un maximum de 225 atteint pour $x = 25$.

Le bénéfice maximal sera 225 euros lorsqu'on produira 25 kg de ce produit.

Exercice 7 :



Volume (cône) = $\frac{1}{3} \times B \times h$ avec B = Aire (disque base) = $\pi \times r^2$.
Comme le périmètre du disque de base est égal à la longueur du demi cercle de départ de rayon 2 cm, le rayon du disque de base est égal à 1 cm. Donc r = 1 cm.
De plus, dans le triangle MOS rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore : $MS^2 = MO^2 + OS^2$
Donc $OS^2 = MS^2 - MO^2 = 2^2 - 1^2 = 3$, soit $OS = h = \sqrt{3}$ cm.
Volume (cône) = $\frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi$ cm $^3 \approx 1{,}81$ cm^3.