Chapitre 11

Comportement asymptotique

Sommaire

11.1 Activités

ACTIVITÉ 11.1.
Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$ et h, définie sur $[0;+\infty[$, par $h(x) = \sqrt{x}$.

1. Compléter le tableau suivant :

x	10	10^2	10^6	10^{10}
$f(x)$				
$g(x)$				
$h(x)$				

2. Comment semblent se comporter ces trois fonctions quand x devient grand ?
3. Résoudre sur $[0;+\infty[$:
   - $f(x) > 10^{12}$
   - $f(x) > 10^{24}$
4. Faire de même pour g et h.

Finalement, on peut rendre $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ aussi .... que l'on veut : il suffit de prendre x suffisamment ....

On dira que leur limite, quand x tend vers $+\infty$, est $+\infty$ et on écrira : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ACTIVITÉ 11.2.
Soit f la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+2$.

1. (a) Compléter le tableau suivant :

x	10	10^2	10^6	10^{10}
$f(x)$				

   (b) Comment semble se comporter cette fonction quand x devient grand ?

   (c) Comment semble se comporter la courbe de cette fonction quand x devient grand ?
   On pourra s'aider d'une calculatrice graphique ou d'un grapheur.

   Finalement, on peut rendre $f(x)$ aussi .... que l'on veut : il suffit de prendre x suffisamment ....

   On dira que
   - la limite de f, quand x tend vers $+\infty$ est 2 et on écrira : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$;
   - la droite d'équation $y=2$ est une asymptote (horizontale) à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

2. (a) Compléter le tableau suivant :

x	1,5	1,1	1,01	1,0001
$f(x)$				

   (b) Comment semble se comporter cette fonction quand x se rapproche de 1 ?

   (c) Comment semble se comporter la courbe de cette fonction quand x se rapproche de 1 ?
   On pourra s'aider d'une calculatrice graphique ou d'un grapheur.

   Finalement, on peut rendre $f(x)$ aussi .... que l'on veut : il suffit de prendre x suffisamment ....

   On dira que
   - la limite de f, quand x tend vers 1 par valeurs supérieures à 1 est $+\infty$ et on écrira : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=+\infty$;
   - la droite d'équation $x=1$ est une asymptote (verticale) à la courbe $\mathscr{C}$ (forcément en 1).

11.2 Limite d'une fonction

11.2.1 En l'infini

Définition 11.1. Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle du type $[a\,;+\infty[$.
Lorsque x prend des valeurs *de plus en plus grandes en valeur absolue et positives*, on dit aussi *lorsque x tend vers* $+\infty$, si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus :
- grands en valeur absolue et positifs (tendent vers $+\infty$), on dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$;
- grands en valeur absolue et négatifs (tendent vers $-\infty$), on dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$;
- proches d'un réel l (tendent vers l), on dit que f a pour limite l en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.

Remarques.
- Ces définitions sont, conformément au programme, très intuitives. Il en existe de plus rigoureuses, mais elles ne sont pas exigibles.
- On utilisera parfois dans la suite les termes de « limite infinie » quand la limite d'une fonction est $+\infty$ ou $-\infty$ et de « limite finie » quand la limite d'une fonction est un nombre l.

On a des définitions équivalentes en $-\infty$:

Définition 11.2. Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle du type $]-\infty\,;a]$.
Lorsque x tend vers $-\infty$, si les nombres $f(x)$:
- tendent vers $+\infty$, on dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$;
- tendent vers $-\infty$, on dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$;
- tendent vers un réel l, on dit que f a pour limite l en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$.

Exemples 11.1. La figure 11.1 page suivante présente quatre exemples où le lien entre la limite de la fonction et l'allure de la courbe est souligné, sur la courbe, par une flèche :

Exemple 11.2. Certaines fonctions n'ont pas de limite en l'infini. C'est le cas, par exemple, de la fonction $\sin x$ (voir sa courbe représentative sur la figure 11.2 page ci-contre).

FIGURE 11.1 – Quatre exemples de limites en l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 + \dfrac{1}{x}\right) = 2$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to -\infty} -3x = +\infty$

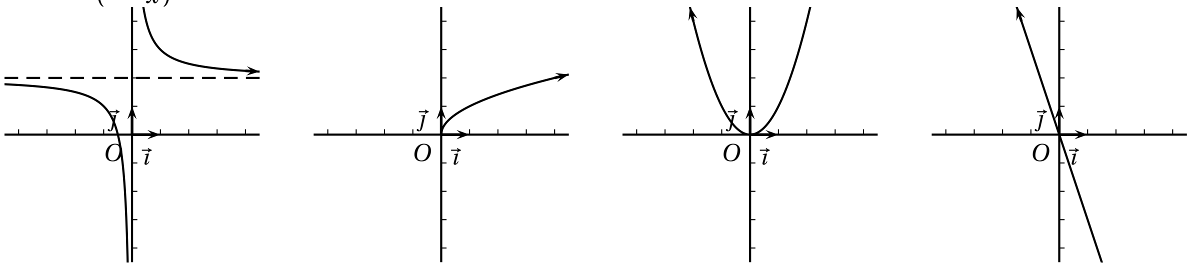
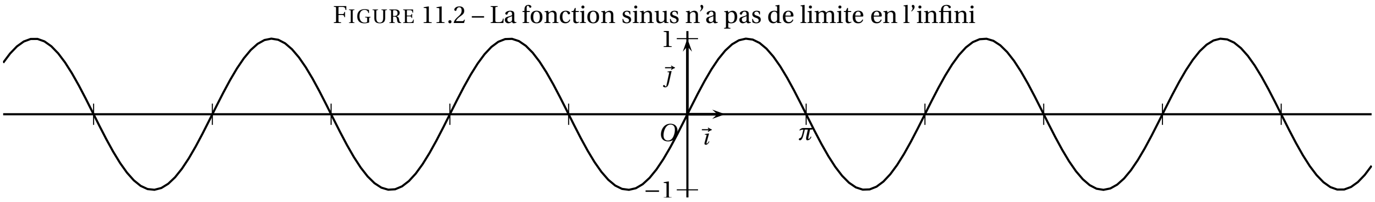


FIGURE 11.2 – La fonction sinus n'a pas de limite en l'infini



11.2.2 En un réel a

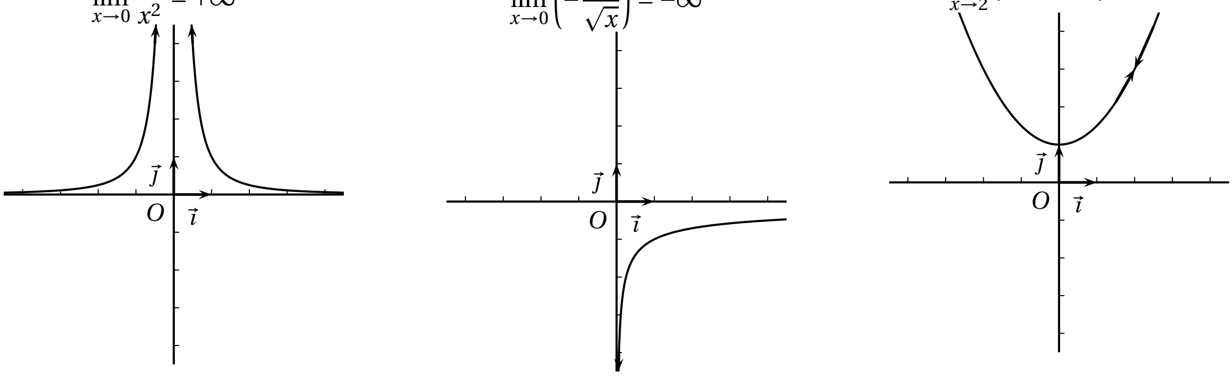
Définition 11.3. Soit f une fonction définie sur un domaine D contenant a ou tel que a soit une borne de D.
Lorsque x tend vers a, si les nombres $f(x)$:

- tendent vers $+\infty$, on dit que f a pour limite $+\infty$ en a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$;
- tendent vers $-\infty$, on dit que f a pour limite $-\infty$ en a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$;
- tendent vers un réel l, on dit que f a pour limite l en a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Exemples 11.3. La figure 11.3 de la présente page présente trois exemples où le lien entre la limite de la fonction et l'allure de la courbe est souligné, sur la courbe, par une flèche.

FIGURE 11.3 – Limites en a

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0} \left(-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to 2} \left(0{,}5x^2 + 1\right) = 3$



En un réel a, à droite ou à gauche

Certaines fonctions n'ont pas de limite en un réel a, au sens de la définition précédente. C'est le cas de la fonction inverse.
Lorsque x tend vers 0, les nombres $\frac{1}{x}$ tendent vers $+\infty$ quand x est positif, et vers $-\infty$ quand x est négatif. On parle alors de « limite à droite de 0 » et de « limite à gauche de 0 » (les x positifs et les x négatifs étant situés en général respectivement à droite de 0 et à gauche de 0 sur l'axe des abscisses).
On dit aussi que la limite de la fonction inverse en 0^+ (quand x tend vers 0 et est positif) est $+\infty$ et que la limite de la fonction inverse en 0^- (quand x tend vers 0 et est négatif) est $-\infty$.

On notera alors indifféremment : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Par abus de langage, on écrira « $x \to a^+$ » pour dire « x tend vers a et $x > a$ » et « $x \to a^-$ » pour dire « x tend vers a et $x < a$ ».

Finalement, ce n'est que lorsque la limite à droite et à gauche de a sont égales qu'on dit que f admet une limite en a, comme par exemple la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en 0. Lorsque les limites à gauche et à droite sont différentes, la fonction n'a pas de limite en a.

Ainsi, comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$, on peut écrire $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \neq \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$, la fonction inverse n'a pas de limite en 0.

11.3 Limite des fonctions usuelles

Propriété 11.1. *Soit f une des fonctions usuelles (affine, carré, cube, inverse, racine carrée, sinus et cosinus) et D_f leurs ensembles de définition respectifs.*

- *Si $a \in D_f$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$*
- *Sinon, aux bornes de leur ensemble de définition, les fonctions usuelles ont les limites résumées dans le tableau ci-dessous :*

f	D_f	*Limites*
$f(x) = mx+p$	$\mathbb{R}$	*Si* $m>0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p) = -\infty$ *Si* $m<0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p) = +\infty$ *Si* $m=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p) = \lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p) = p$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Les définitions rigoureuses des limites étant hors programme, les démonstrations de ces propriétés et des suivantes le sont aussi, mais les activités montrent comment elles peuvent se faire.

Remarques.
- Les fonctions constantes ($f(x) = k$) et linéaires ($f(x) = kx$) sont aussi des fonctions usuelles mais sont considérées comme des cas particuliers des fonctions affines $f(x) = mx+p$ avec, respectivement, $m=0$ et $p=0$.
- $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 4$ a les mêmes limites que $f(x) = x^2$ si n est pair et que $f(x) = x^3$ si n est impair (on l'admettra).
- $f(x) = \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 4$ a les mêmes limites que $f(x) = \frac{1}{x}$ si n est impair et que $f(x) = \frac{1}{x^2}$ si n est pair (on l'admettra).

11.4 Opérations sur les limites

Dans les paragraphes suivants, nous parlerons parfois de « forme indéterminée », notée F.I. Cela ne veut pas forcément dire qu'il n'y a pas de limite, mais que la règle énoncée ne permet pas de conclure dans le cas général, qu'il faut étudier chaque cas particulier.

11.4.1 Règle essentielle

On admettra que les sommes, les produits, les inverses, les quotients ou les composées des fonctions usuelles qui nous étudierons en première vérifient tous :

Si $a \in D_f$, où D_f est l'ensemble de définition de f, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Dans les autres cas, aux bornes de leur ensemble de définition, on appliquera les propriétés des paragraphes suivants.

11.4.2 Limite d'une somme

Propriété 11.2. *On note α ce vers quoi tend x, α pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f et g deux fonctions ayant en α une limite finie ou infinie.
La fonction somme $f+g$ admet une limite dans chacun des cas résumés par le tableau ci-dessous :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	*F.I.*
$-\infty$	$-\infty$	*F.I.*	$-\infty$

On l'admettra.

Exemples 11.4. • $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+\frac{1}{x}-1\right)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x-1)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(-x+\frac{1}{x}-1\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(-x-1)=-0-1=-1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x-1\right)$ est une forme indéterminée car $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$. Nous verrons plus tard comment « lever l'indétermination ».

11.4.3 Limite d'un produit

Propriété 11.3. *On note α ce vers quoi tend x, α pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f et g deux fonctions ayant en α une limite finie ou infinie.
La fonction produit $f\times g$ admet une limite dans chacun des cas résumés par le tableau ci-dessous :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$l'\neq0$	$l'=0$	$\pm\infty$
$l\neq0$	$l\times l'$	0	$\pm\infty$
$l=0$	0	0	*F.I.*
$\pm\infty$	$\pm\infty$	*F.I.*	$\pm\infty$

On l'admettra.

Remarque. Le signe, lorsque la limite du produit est $\pm\infty$, est donné par la règle des signes des produits.

Exemples 11.5. • $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-5x^2\right)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(-5)=-5$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(\frac{1}{x}-1\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}-1\right)=-1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}\left(x^2+x\right)$ est indéterminée car $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(x^2+x\right)=0+0=0$. Nous verrons plus tard comment « lever l'indétermination ».

11.4.4 Limite de l'inverse

Propriété 11.4. *On note α ce vers quoi tend x, α pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f une fonction ayant en α une limite finie ou infinie.
La fonction $\frac{1}{f}$ admet une limite dans chacun des cas résumés par le tableau ci-dessous :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$l\neq0$	$l=0^+$	$l=0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0 (0^+)	0 (0^-)

On l'admettra.

Exemples 11.6. • $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\neq0}}\frac{1}{x^2}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$ et $x^2>0$ quand $x\in\mathbb{R}^*$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{x^2+x+2} = \dfrac{1}{4}$ car $\lim\limits_{x\to1} \left(x^2+x+2\right) = 4$

11.4.5 Limite d'un quotient

Propriété 11.5. *On note α ce vers quoi tend x, α pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f et g deux fonctions ayant en α une limite finie ou infinie.
La fonction quotient $\dfrac{f}{g}$ admet une limite dans chacun des cas résumés par le tableau ci-dessous :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$l' \neq 0$	$l' = 0$	$\pm\infty$
$l \neq 0$	$\dfrac{l}{l'}$	$\pm\infty$	*0*
$l = 0$	*0*	*F.I.*	*0*
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	*F.I.*

Remarque. Le signe, lorsque la limite du quotient est $\pm\infty$, est donné par la règle des signes des produits (qui est aussi la règle des signes des quotients).

Preuve. $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{g}$ or, d'après les limites de l'inverse,

- si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = l' \neq 0$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{l'}$;
- si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{g(x)} = \pm\infty$;
- si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \pm\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{g(x)} = 0$.

En appliquant les propriétés des limites d'un produit, on obtient :

$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$l' \neq 0$	$l' = 0$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{g(x)}$	$\dfrac{1}{l'}$ $(\neq 0)$	$\pm\infty$	0
$l \neq 0$	$l \times \dfrac{1}{l'} = \dfrac{l}{l'}$	$\pm\infty$	0
$l = 0$	0	F.I.	0
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.

◊

Exemple 11.7.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3}{2x^2+3} = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} -3 = -3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^2+3) = +\infty$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{\cos x}{x^2-2x} = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to0} \cos x = \cos 0 = 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} (x^2-2x) = 0$ et $x^2-2x = x(x-2) < 0$ (négatif entre les racines 0 et 2)
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-x}{x^3+x-1}$ est une forme indéterminée car $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2-x\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3+x-1\right) = +\infty$

11.4.6 Cas des formes indéterminées

Finalement, il y a quatre cas d'indétermination qui sont, **en utilisant un abus d'écriture qui ne vous sera pas autorisé sur vos copies** :

$$« \frac{0}{0} » \qquad « 0 \times \infty » \qquad « \frac{\infty}{\infty} » \qquad « \infty - \infty »$$

Pour lever l'indétermination, on peut tenter transformer l'expression (par exemple développer s'il s'agit d'un produit). Si cela ne donne rien, il est toujours possible de mettre en facteur le terme de plus haut degré (les termes quand il s'agit d'un quotient) : cela résoud la plupart des problèmes.

Quelques exemples

1. Nous avons vu que $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x-1\right)$ était une forme indéterminée.

   Comme $x\to-\infty$, on peut considérer que $x\neq 0$, et donc écrire, en factorisant le terme de plus haut degré :
   $$x^2+x-1=x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$$
   or, comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$, on a :
   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1+0+0=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x-1\right)=+\infty$$

2. Nous avons vu que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}\left(x^2+x\right)$ est une forme indéterminée.

   Avec $x>0$, donc $x\neq0$, on peut écrire, en développant : $\frac{1}{x}\left(x^2+x\right)=x+1$

   or $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(x+1)=0+1=1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}\left(x^2+x\right)=1$

3. Nous avons vu que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{x^3+x-1}$ est une forme indéterminée.
   Comme $x\to+\infty$ on peut considérer que $x\neq0$ et, en factorisant le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur, on obtient :
   $$\frac{x^2-x}{x^3+x-1}=\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{1-\frac{1}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}$$
   or, comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$, on a :
   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1-0=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=1+0-0=1\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{x^3+x-1}=0$$

4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$ est une forme indéterminée car $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x^2}=+\infty$.
   En réduisant au même dénominateur, on obtient : $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$
   or
   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(x-1)=0-1=-1\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^2=0\text{ et }x^2>0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x-1}{x^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$$

11.4.7 Fonctions polynôme et rationelle

On peut procèder de la même manière qu'aux exemples 1 et 3 du paragraphe précédent pour toute fonction polynôme ou rationelle et démontrer ainsi les propriétés suivantes :

Propriété 11.6. *Soit f une fonction polynôme de degré n :*
$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\text{ avec }a_n\neq0$$
Alors :
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}a_nx^n=\pm\infty$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}a_nx^n=\pm\infty$.

qui s'énonce aussi de la façon suivante :

« La limite en l'infini d'une fonction polynôme est celle de son terme de plus haut degré. »

Propriété 11.7. *Soit f une fonction rationelle :*

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$. Alors :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$.

Le détail de ces deux démonstrations est laissé en exercice au lecteur.

11.5 Asymptotes

Définition 11.4. On appelle courbe asymptote une courbe simple (droite, cercle, etc.) dont une courbe plus complexe peut s'approcher.

Nous ne parlerons au lycée que de droite asymptote, en omettant le plus souvent de préciser même le terme de droite. Une asymptote sera donc une droite dont la courbe représentative d'une fonction s'approche (sans forcément l'atteindre). Nous avons vu dans les activités les trois types d'asymptote.

11.5.1 Asymptote verticale

Elle traduit, graphiquement, le fait que la fonction f admet une limite infinie en un réel a.
On a alors :

Définition 11.5. Si f une fonction admet une limite infinie à gauche ou à droite de a, réel, on dit alors que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote (verticale) à la courbe de f.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \infty \text{ ou } \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \infty \Leftrightarrow x = a \text{ asymptote à } \mathscr{C}$$

Remarque. Il suffit qu'on ait soit une limite à droite, soit une limite à gauche qui vaut $\pm\infty$ pour avoir une asymptote verticale.

11.5.2 Asymptote horizontale

Elle traduit, graphiquement, le fait que la fonction f admet une limite finie en l'infini.
On a alors :

Définition 11.6. Si f une fonction admet une limite finie b en l'infini, on dit alors que la droite d'équation $y = b$ est une asymptote (horizontale) à la courbe de f en l'infini.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \Leftrightarrow y = b \text{ asymptote à } \mathscr{C} \text{ en l'infini}$$

Remarque. Une courbe peut avoir une asymptote en $+\infty$ sans en avoir pour autant en $-\infty$: il faut faire l'étude aux deux bornes.

11.5.3 Asymptote oblique

Elle traduit, graphiquement, le fait que la fonction f se comporte de plus en plus comme une fonction affine.
On a alors :

Définition 11.7. Soit f une fonction. S'il existe une fonction affine $g(x) = mx + p$ telle que la fonction $f - g$ admet comme limite 0 en l'infini, on dit alors que la droite d'équation $y = mx + p$ est une asymptote (oblique) à la courbe de f en l'infini.

$$\lim_{x \to \infty} \big(f(x) - (mx + p)\big) = 0 \Leftrightarrow y = mx + p \text{ asymptote à} \mathscr{C} \text{ en l'infini}$$

Remarque. Même remarque que ci-dessus.

11.6 Exercices

11.6.1 Technique

Exercice 11.1.
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\dfrac{1}{2}x^3\right)$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \left(x\sqrt{x}\right)$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \left(\dfrac{-6}{x^2}\right)$

Exercice 11.2.
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}+2x+3\right)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3\sqrt{x}+x^2\right)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{-5}{x}+x^2\right)$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \left(\dfrac{1}{x}+3x^2-2\right)$
5. $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}} \left(\dfrac{3}{x-2}+5x+7\right)$
6. $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} \left(\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{2}\right)$

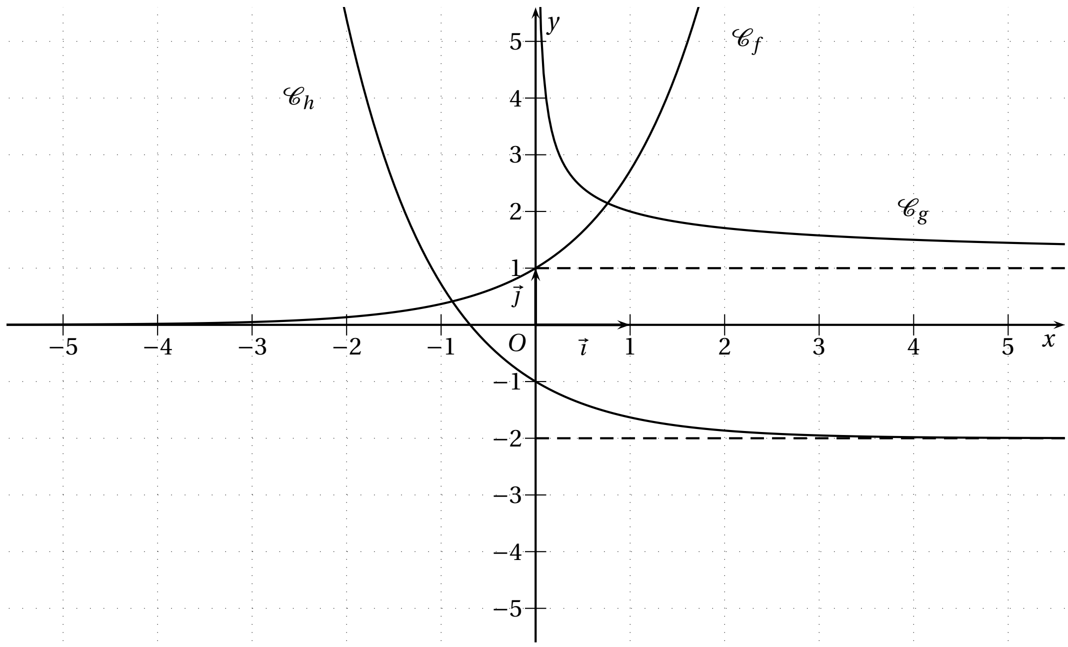
Exercice 11.3.
Déterminer les limites des fonctions polynômes suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3+x\right)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3+x\right)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^4-2x^3+5x+4\right)$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^4-2x^3+5x+4\right)$

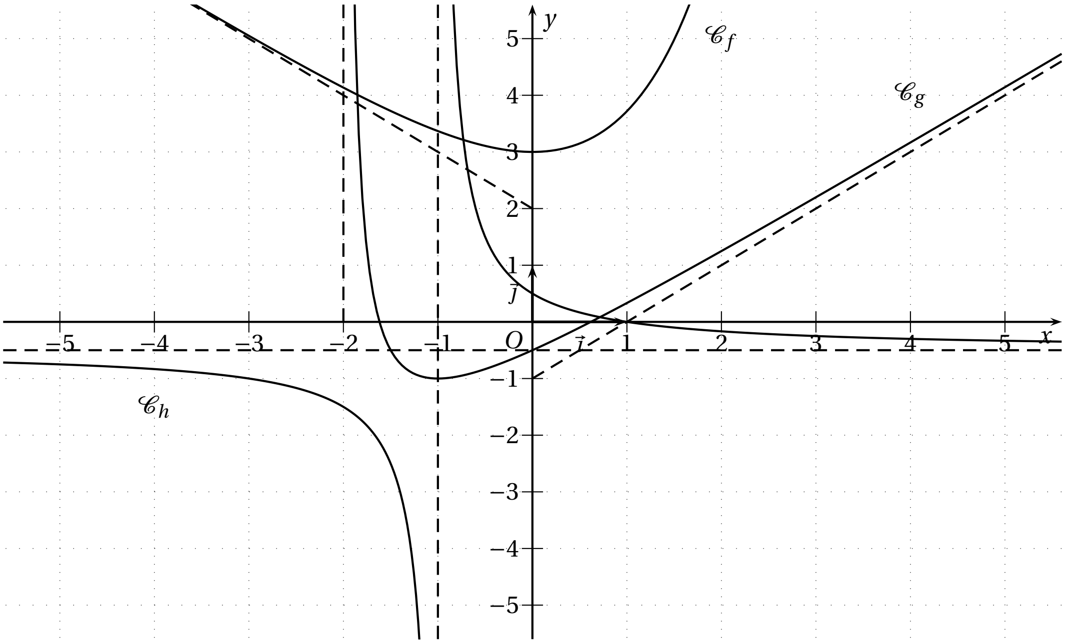
11.6.2 Lectures graphiques

Exercice 11.4.
On donne sur la figure ci-dessous les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ de trois fonctions f, g et h.
Pour chacune des trois fonctions :

1. déterminer D, son ensemble de définition ;
2. conjecturer les limites de la fonction aux bornes de cet ensemble de définition.



EXERCICE 11.5.
Même exercice que le précédent (la courbe $\mathscr{C}_h$ est en deux parties).



11.6.3 Étude de fonctions

EXERCICE 11.6.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\left(x^2-1\right)(x-2001)}{2001}$$

Étudier la limite de f en $+\infty$.

EXERCICE 11.7.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

1. Étudier les variations de f.
2. Déterminer, si elles existent, les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$ et en 0.

EXERCICE 11.8.
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{-x+1}{2x+3}$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
2. Étudier les limites aux bornes de son ensemble de définition.
   En déduire les éventuelles asymptotes de $\mathscr{C}$.
3. Étudier les variations de f.
4. Dresser le tableau des variations de f en y faisant apparaître les limites aux bornes.

EXERCICE 11.9.
Le but de cet exercice est de déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition de la fonction :

$$f(x) = \frac{x^2-4x+2}{3-x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que :

$$f(x) = ax+b+\frac{c}{3-x}$$

3. Étude en l'infini.
   (a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.
   (b) $\mathscr{C}$ admet-elle une asymptote horizontale en l'infini ?
   (c) Montrer que la droite d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.
4. Étude au voisinage de 3.
   (a) Déterminer la limite du numérateur lorsque x tend vers 3.
   (b) Étudier le signe du dénominateur.
   (c) Déterminer la limite du dénominateur lorsque x tend vers 3 par valeurs supérieures.
   (d) En déduire $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x)$.
   (e) Procéder de même pour déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} f(x)$
   (f) $\mathscr{C}$ admet-elle une asymptote verticale ?

EXERCICE 11.10.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 9x + 2}{x^2 + 1}$$

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que :
$$f(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2 + 1}$$
2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 2$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.
4. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.

EXERCICE 11.11.
Soit f la fonction qui a x associe

$$f(x) = \frac{1 - 2x}{-x^2 + 2x + 3}$$

1. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   On commencera par étudier le signe de $-x^2 + 2x + 3$ *selon les valeurs de* x.
3. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe représentative de f.

EXERCICE 11.12.
Soit f la fonction définie pour $x \in [1\,; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la limite de f en $+\infty$.

1. Étudier $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x + 1}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x - 1}$. Que peut-on en conclure ?
2. Montrer que, pour tous réels A et B strictement positifs, on a : $\sqrt{A} - \sqrt{B} = \dfrac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$
3. En déduire que, pour tout $x \in [1\,; +\infty[$, on a : $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1}}$
4. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

EXERCICE 11.13.
Soit f, u et v les fonctions définies sur $[1\,; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x + \sin x}{x} \qquad u(x) = \frac{2x - 1}{x} \qquad v(x) = \frac{2x + 1}{x}$$

1. Montrer que, pour tout $x \in [1\,; +\infty[: u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$.
2. Étudier les limites en $+\infty$ de u et de v.
3. En déduire la limite de f en $+\infty$.