Chapitre 8

Probabilités

Sommaire

8.1 Activités

ACTIVITÉ 8.1 (Arbres pondérés)**.**
On dispose :

- d'une urne contenant quatre boules insdiscernables au toucher dont trois boules bleues portant respectivement les numéros 1, 2 et 3, notées b_1, b_2 et b_3, et une boule rouge unique, notée r ;
- d'un jeu de six cartes identiques portant chacun un chiffre en couleur : une carte avec un chiffre 1 en vert, une carte avec un chiffre 2 en rouge, une carte avec un chiffre 2 en bleu, une carte avec un chiffre 2 en vert, une carte avec un chiffre 3 en rouge et une carte avec un chiffre 3 en bleu.

On considère l'expérience aléatoire suivante : « On prélève de façon équiprobable une boule dans l'urne puis une carte du jeu. On note, dans l'ordre, la couleur de la boule extraite et le numéro inscrit sur la carte ».

On note Ω l'ensemble de toutes issues possibles et $p(A)$ la probabilité d'un évènement A.

1. Construire l'arbre des possibles et en déduire Ω. Est-on dans une situation qu'équiprobabilité ?

2. (a) Construire un arbre, que nous appelerons « modèle intermédiaire », qui prenne en compte, pour la boule extraite, non seulement sa couleur mais aussi son numéro et, pour la carte, non seulement le numéro mais aussi sa couleur.
   (b) A-t-on équiprobabilité entre chacun des chemins ?
   (c) En déduire les probabilités de chacun des évènements élémentaires de Ω.
   O*n présentera les résultats sous forme de tableau du type :*

ω_i	ω_1	ω_2	$\ldots$
$p(\omega_i)$	$p(\omega_1)$	$p(\omega_2)$	$\ldots$

   Remarque. Lorsqu'on détermine pour chaque évènement élémentaire sa probabilité, on dit qu'on décrit la loi de probabilité.

3. L'arbre du modèle intermédiaire, nous ramenant à une situation d'équiprobabilité, nous a permis de décrire la loi de probabilité. Cependant il est un peu lourd. Essayons de l'alléger.
   (a) Refaire l'arbre des possibles en ajoutant devant chaque éventualité des branches multiples : autant qu'on en peut trouver sur le modèle intermédiaire qui mènent à cette éventualité.
   (b) Refaire l'arbre des possibles de la manière suivante :
      i. Remplacer ces branches multiples par des branches simples mais en indiquant le nombre de branches qu'il devrait y avoir. On obtient alors un arbre pondéré (chaque branche ayant un poids).
      ii. Combien de chemins du modèle intermédiaire terminaient sur l'évènement élémentaire $(r,2)$? Comment pourrait-on retrouver ce nombre à partir de l'arbre précédent ?
   (c) Refaire l'arbre des possibles de la manière suivante :
      i. Pondérer chaque branche, non plus avec le nombre de branches multiples qu'il devrait y avoir, mais avec le quotient de ce nombre par le nombre total de branches qu'il devrait y avoir à ce même niveau.
      ii. Quelle est la probabilité de l'évènement élémentaire $(r,2)$? Comment pourrait-on retrouver cette probabilité à partir de l'arbre précédent ?

ACTIVITÉ 8.2 (Loi des grands nombres)**.**
On donne l'algorithme suivant, écrit en langage courant :

```
ENTREES
  FACE, LANCERS : Nombres entiers naturels
INITIALISATION
  EFFECTIF prend la valeur 0
INSTRUCTIONS
  Pour K variant de 1 a Lancers faire :
    DE prend la valeur nombre_aleatoire_entre_1_et_6
    Si DE = FACE alors EFFECTIF prend la valeur EFFECTIF +1
  Fin Pour
  FREQUENCE = EFFECTIF / LANCERS
SORTIE
  FREQUENCE
```

On se propose de l'étudier puis de l'étoffer et enfin de le modifier pour qu'il fasse autre chose.

Partie A : Étude de l'algorithme

1. Que fait cet algorithme ?
2. Le programmer sur Algobox et le faire fonctionner pour la face de votre choix, en faisant plusieurs essais à chaque fois, avec :
   - $Lancers = 10$
   - $Lancers = 100$
   - $Lancers = 1\,000$
   - $Lancers = 10\,000$

   Qu'observe-t-on ?
3. (a) Le modifier pour qu'il calcule la *fréquence* d'apparition de la *face* à chaque valeur de k et affiche dans un repère le point d'abscisse k et d'ordonnée la *fréquence* nouvellement calculée.

   (b) Le faire fonctionner pour un certain nombre de lancers, comme à la question 2. Qu'observe-t-on ?

Partie B : Modification de l'algorithme
Modifier l'algorithme pour qu'il affiche :

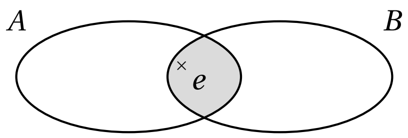
1. D'abord, en seule sortie, à la place de la *fréquence* de l'algorithme originel, la *moyenne* des résultats obtenus après un certain nombre de *lancers*; le faire fonctionner pour un certain nombre de lancers, comme à la question 2 ; qu'observe-t-on ?
2. Ensuite, comme dans la partie précédente, dans un repère, pour chaque valeur de k, le point d'abscisse k et d'ordonnée la *moyenne* nouvellement calculée ; le faire fonctionner pour un certain nombre de lancers, comme à la question 2 ; qu'observe-t-on ?

8.2 Rappels

Ce paragraphe ne comportant que des rappels de Seconde, les exemples seront limités et les preuves des théorèmes et propriétés ne seront pas refaites.

8.2.1 Vocabulaire des ensembles

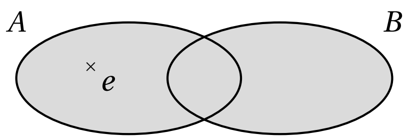
Définition 8.1 (Intersection)**.** L'*intersection* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A et B.
On la note $A \cap B$.



Ainsi $e \in A \cap B$ signifie $e \in A$ **et** $e \in B$.

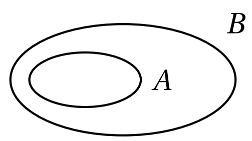
Remarque. Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

Définition 8.2 (Réunion)**.** La *réunion* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B.
On la note $A \cup B$.



Ainsi $e \in A \cup B$ signifie $e \in A$ **ou** $e \in B$.

Définition 8.3 (Inclusion)**.** On dit qu'un ensemble A est *inclus* dans un ensemble B si tous les éléments de A sont des éléments de B.
On note alors $A \subset B$ (« A inclus dans B ») ou $B \supset A$ (« B contient A »).

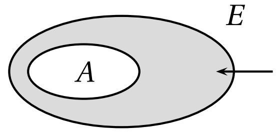


On dit alors que A est une *partie* de B ou que A est un *sous-ensemble* de B.

Remarque. $\varnothing$ et E sont toujours des parties de E (partie vide et partie pleine).

On notera $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

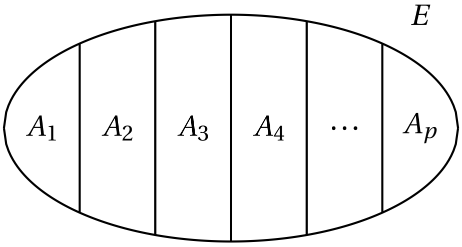
Définition 8.4 (Complémentaire)**.** Soit E un ensemble et A une partie de E. Le *complémentaire* de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On le note $\overline{A}$.



Remarque. $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Définition 8.5. Des parties A_1, A_2, ..., A_p d'un ensemble E constituent une *partition* de E si elles sont deux à deux disjointes et si leur réunion est E.
Ainsi :

- Pour tous i et j de $\{1\,;\ldots;\,p\}$: $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$;
- $\coprod_{i=1}^{p} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p = E$.



Propriété 8.1. *Soit A une partie d'un ensemble E et $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. Alors A et $\overline{A}$ constituent une partition de E.*

Définition 8.6 (Cardinal)**.** Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé *cardinal de E*. Ce nombre est noté $\text{Card}(E)$. On convient que $\text{Card}(\varnothing) = 0$.

Remarque. La notion de cardinal ne s'applique pas aux ensembles infinis (comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc.).

8.2.2 Expériences aléatoires

Issues, univers

Définition 8.7. L'ensemble de toutes les *issues* d'une *expérience aléatoire* est appelé *univers* (ou univers des possibles). On note généralement cet ensemble Ω.

Dans ce chapitre, Ω sera toujours un ensemble fini.

Évènements

Exemple : on lance deux dés et on considère la somme S obtenue. L'ensemble de toutes les issues possibles (univers) est $\Omega = \{2\,;3\,;\cdots;11\,;12\}$.
Le tableau 8.1 page suivante définit le vocabulaire relatif aux *évènements* (en probabilité).

TABLE 8.1: Vocabulaire relatif aux évènements en probabilité

Vocabulaire	Signification	Illustration
Évènement (notation quelconque)	Ensemble de plusieurs issues	Obtenir un nombre pair : $A = \{2;4;6;8;10;12\}$ Obtenir un multiple de trois : $B = \{3;6;9;12\}$ Obtenir une somme supérieure à 10 : $C = \{10;11;12\}$ Obtenir une somme inférieure à 6 : $D = \{2;3;4;5;6\}$
Évènement élémentaire (noté ω)	L'une des issues de la situation étudiée (un élément de Ω)	Obtenir 7 : $\omega = \{7\}$
Évènement impossible (noté $\varnothing$)	C'est un évènement qui ne peut pas se produire	« Obtenir 13 » est un évènement impossible.
Évènement certain (noté Ω)	C'est un évènement qui se produira obligatoirement	« Obtenir entre 2 et 12 » est un évènement certain.
Évènement « A et B » (noté $A \cap B$)	Évènement constitué des issues communes aux 2 évènements	$A \cap B = \{6;12\}$
Évènement « A ou B » (noté $A \cup B$)	Évènement constitué de toutes les issues des deux évènements	$A \cup B = \{2;3;4;6;8;9;10;12\}$
Évènements incompatibles (on note alors $A \cap B = \varnothing$)	Ce sont des évènements qui n'ont pas d'éléments en commun	$C \cap D = \varnothing$ donc C et D sont incompatibles. Par contre, A et B ne le sont pas.
Évènements contraires (l'évènement contraire de A se note $\overline{A}$)	Ce sont deux évènements incompatibles dont la réunion forme la totalité des issues (Ω)	Ici, $\overline{A}$ représente l'évènement « obtenir une somme impaire ». On a alors : • $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (ensembles disjoints) • $A \cup \overline{A} = \Omega$

8.2.3 Probabilités

Loi de probabilité sur un univers Ω

Définition 8.8. Soit $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \cdots ; \omega_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire.
Définir une loi de probabilité P sur Ω, c'est associer, à chaque évènement élémentaire w_i, des nombres $p_i \in [0;1]$, appelés *probabilités*, tels que :

- $\sum_i p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$;
- la probabilité d'un évènement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités p_i des évènements élémentaires ω_i qui constituent A.

Remarque. On note aussi : $p_i = p(\{\omega_i\}) = p(\omega_i)$.

Propriété 8.2. *Soit A et B deux évènements de Ω, alors :*
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$;
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Remarque. Comme, par définition, la probabilité de l'évènement certain est 1 alors la probabilité de l'évènement impossible, qui est son contraire, est 0.

Une situation fondamentale : l'équiprobabilité

Définition 8.9. Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont même probabilité, on dit qu'il y a *équiprobabilité* ou que la loi de probabilité est *équirépartie*.

Dans ce cas, la règle de calcul de la probabilité d'un évènement A est la suivante :

Propriété 8.3. *Dans une situation d'équiprobabilité sur un univers Ω, pour tout évènement élémentaire ω et tout évènement A on a :*

$$p(\omega) = \frac{1}{Card(\Omega)} \qquad p(A) = \frac{\textit{nombre d'issues favorables}}{\textit{nombre d'issues possibles}} = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

Certaines expériences ne sont pas des situations d'équiprobabilité, mais on peut parfois s'y ramener tout de même, comme par exemple dans l'activité 8.1.

8.3 Loi des grands nombres

Définition 8.10. Lorsque qu'on répète une expérience aléatoire, on appelle *fréquence d'apparition* d'une éventualité ω_i donnée le nombre : $f_i = \frac{\text{nombre de fois où l'éventualité } \omega_i \text{ apparaît}}{\text{nombre de fois où l'expérience est répétée}}$

On constate que si l'on répète un grand nombre de fois l'expérience donnée, les différentes fréquences d'apparition ont tendance à se stabiliser. Ce constat est un résultat mathématique appelé *La loi des grands nombres*; il se démontre, mais la démonstration est largement hors de nos compétences :

Théorème 8.4 (Loi des grands nombres)**.** *Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de la loi de probabilité quand n devient grand.*

Remarques.

- Dans certains cas, on utilise ce résultat pour valider ou rejeter un modèle (une loi de probabilité) choisi à priori.
- Dans d'autres cas, lorsqu'on ne connaît pas de loi de propabibilité relativement à une expérience aléatoire, on peut ainsi en introduire une à partir des fréquences déterminées lors d'un grand nombre d'expériences

8.4 Variables aléatoires

8.4.1 La situation

On illustrera toute cette section par la situation suivante : « On tourne une roue dans une fête foraine qui est partagée en 8 secteurs égaux : 1 de couleur rouge, 3 de couleur verte et 4 de couleur bleue. »

8.4.2 Définition

Définition 8.11. Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

- On appelle *variable aléatoire* toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément de Ω, fait correspondre un nombre réel k.
- L'évènement noté $\{X = k\}$ est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image k par X.
- L'ensemble image de Ω par X est l'ensemble de toutes les images des éléments de Ω par X. Cet ensemble est noté Ω'.

Avec notre situation de départ on peut imaginer la variable aléatoire suivante : « La partie de roue à la fête foraine coûte 1 € et l'on gagne :

- 0 € si le bleu sort;
- 2 € si le vert sort;
- 5 € si le rouge sort. »

Lorsqu'on lance la roue, l'univers est donc $\Omega = \{\text{bleu}; \text{vert}; \text{rouge}\}$ et l'on peut définir la variable aléatoire qui à chaque couleur associe le gain engendré.
Ainsi, en enlevant la mise (1 € pour pouvoir jouer), on a :

- X : bleu $\mapsto -1$
- X : vert $\mapsto 1$
- X : rouge $\mapsto 4$

Remarques.

- Une variable aléatoire n'est pas un nombre, mais une fonction.
- Les valeurs d'une variable aléatoire sont toujours des nombres.
- En général, une variable aléatoire est notée X, Y, Z.

8.4.3 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 8.12. Soit $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \cdots ; \omega_n\}$ un univers associé à une expérience aléatoire sur lequel a été définie une loi de probabilité et $\Omega' = \{x_1 ; x_2 ; \cdots ; x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.
La loi de probabilité de X est la fonction définie sur Ω', qui à chaque x_i fait correspondre le nombre $p'_i = p(X = x_i)$.

On démontre facilement que $\sum\limits_i p'_i = 1$.
En reprenant la situation de départ, on a :

$k = \omega_i$	-1	1	4
$p(X = k) = p_i$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

8.4.4 Espérance, variance, écart type

Définition 8.13. L'espérance mathématique, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X, dont les notations respectives sont $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ sont respectivement les nombres :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i w_i \qquad V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (\omega_i - E(X))^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \omega_i^2\right) - (E(X))^2 \qquad \sigma(X) = \sqrt{V}$$

Toujours avec l'exemple de la situation de départ : (X est le gain à la roue de la fête foraine)

- $E(X) = \frac{4}{8} \times (-1) + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{1}{8} \times 4 = \frac{3}{8}$
  (le gain qu'on peut espérer à chaque partie est en moyenne de 0,375 €)
- $V(X) = \frac{4}{8} \times (-1)^2 + \frac{3}{8} \times 1^2 + \frac{1}{8} \times 4^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{175}{64}$
- $\sigma(X) = \sqrt{\frac{175}{64}} \approx 1{,}654$

8.5 Exercices

EXERCICE 8.1.
On jette trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée et on appelle « tirage »le résultat obtenu. Ainsi (Face; Face; Pile) est un tirage (qu'on notera FFP).

1. Faire un arbre décrivant l'ensemble des issues possibles de cette expérience aléatoire et donner le cardinal de Ω, l'univers des possibles.
2. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de « Pile »obtenues.
   (a) Décrire Ω', l'univers des possibles pour X.
   (b) Déterminer la loi de probabilité associée à X (on la présentera sous forme de tableau).
   (c) Déterminer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ respectivement l'espérance, la variance et l'écart type de X.

EXERCICE 8.2.
Pour se rendre à son travail, un automobiliste rencontre trois feux tricolores. On suppose que les feux fonctionnent de manière indépendante, que l'automobiliste passe si le feu est vert, sinon il s'arrête. On suppose de plus que chaque feu est vert durant les deux tiers du temps. On dit que l'automobiliste a obtenu le feu au vert quand il est passé sans s'arrêter.

1. Faire un arbre représentant toutes les situations possibles.
2. Quelle est la probabilité que l'automobiliste ait les trois feux verts ? deux des trois feux verts ?
3. Combien de feux au vert l'automobiliste peut-il espérer ?

EXERCICE 8.3.
On reprend la roue de la situation de départ (paragraphe 8.4.1). L'organisateur du jeu se trouve vite sans le sou et décide de passer la partie à 2 euros au lieu d'un. Gagnera-t-il de l'argent sur le long terme ?

EXERCICE 8.4.
On considère une roue partagée en 15 secteurs égaux tels que :

- il y a un secteur de couleur rouge (R)
- il y a cinq secteurs de couleur bleue (B)
- il y a neuf secteurs de couleur verte (V)

La roue tourne sur son axe central et s'arrête sur l'une des couleurs, chaque secteur ayant la même probabilité.

Pour pouvoir faire tourner la roue, un joueur doit payer 1 € et, selon la couleur sur laquelle elle s'arrête, il gagne :

- 0 € si le vert sort ;
- 1 € si le bleu sort ;
- x € si le rouge sort ;

On appelle X la variable aléatoire associée au gain final (gain − mise de départ) du joueur.

1. Décrire l'univers $X(\Omega)$ associé à X.
2. Décrire la loi de probabilité associée à X (on la présentera sous forme de tableau).
3. Exprimer en fonction de x l'espérance de gain du joueur.
4. On suppose que $x = 2$ € .
   (a) Quelle est l'espérance de gain du joueur ?
   (b) Qui est le plus avantagé : l'organisateur du jeu ou le joueur ?
5. Mêmes questions pour $x = 15$ € .
6. On dit que le jeu est équitable lorsque l'espérance de gain est égale à zéro, car alors ni l'organisateur du jeu ni le joueur ne sont avantagés. Combien doit valoir x pour que le jeu soit équitable ?

EXERCICE 8.5.
On considère le jeu suivant : Le joueur lance deux dés à six faces ; s'il fait un double 6, il gagne un million d'euros, sinon il perd dix mille euros. Faut-il lui conseiller le jeu ?

EXERCICE 8.6.
On dispose d'une roue qui comporte dix secteurs identiques, neuf verts et un rouge.
On propose les deux jeux suivants :

Jeu 1 : si la roue s'arrête sur un secteur vert, le joueur gagne 2 000 euros, sinon il perd 8 000 euros.

Jeu 2 : si la roue s'arrête sur un secteur vert, le joueur ne gagne ni ne perd rien, sinon, il gagne 10 000 euros.

1. Intuitivement, quel jeu semble le plus avantageux ?
2. Calculer, pour chaque jeu, l'espérance et la variance de gain du joueur. Que constate-t-on ?

EXERCICE 8.7.
Un sac contient quatre jetons rouges et trois jetons verts. On tire des jetons, avec remise après tirage, jusqu'à obtention d'un jeton de même couleur qu'un des jetons précédemment tirés. Calculer la probabilité que les deux jetons de même couleur soient bleus.

EXERCICE 8.8.
Deux roues de fête foraine sont disponibles, chacune comportant des secteurs identiques et équiprobables.
La roue A est conçue de la manière suivante :

- 1 secteur rapporte 6 € (mise comprise) ;
- 6 secteurs rapportent 0 € ;
- 1 secteur rapporte −6 €.

La roue B est conçue de la manière suivante :

- 1 secteur rapporte 4 € ;
- 1 secteur rapportent 0 € ;
- 4 secteurs rapportent −1 €.

1. Décrire les lois de probabilités pour chacune des roues.
2. Déterminer leurs espérances respectives et les comparer.
3. Déterminer leurs écarts-types respectifs et les comparer.
4. Résumer les différences entre ces deux roues.

EXERCICE 8.9.
On lance deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note la différence (en valeur absolue) entre ces deux dés.

1. Définir la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.
2. Calculer l'espérance et l'écart-type de cette expérience aléatoire.

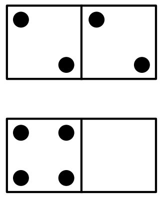
Exercice 8.10.
On jette trois fois de suite, de manière totalement indépendante une pièce de monnaie parfaitement équilibrée et on appelle « tirage » le résultat obtenu. Ainsi (Face; Face; Pile) est un tirage (qu'on notera FFP).

1. Faire un arbre décrivant l'ensemble des issues possibles de cette expérience aléatoire et donner le cardinal de Ω, l'univers des possibles.
2. On appelle X le nombre de « Pile »obtenues à chaque tirage.
   (a) Décrire Ω', l'univers des possibles pour X.
   (b) Déterminer la loi de probabilité associée à X (on la présentera sous forme de tableau).
   (c) Déterminer E et σ respectivement l'espérance et l'écart type de cette loi.

Exercice 8.11.
Pour se rendre à son travail, un automobiliste rencontre trois feux tricolores. On suppose que les feux fonctionnent de manière indépendante, que l'automobiliste passe quand le feu est vert et s'arrête sinon. On suppose de plus que chaque feu est vert les deux tiers du temps. Enfin on dit que l'automobiliste a eu le feu au vert quand il n'a pas eu à s'arrêter à ce feu.

1. Faire un arbre représentant toutes les situations possibles.
2. Quelle est la probabilité que l'automobiliste ait :
   (a) les trois feux au vert?
   (b) deux des trois feux au vert?
   (c) au moins un des feux au vert?
   (d) à s'arrêter au plus une fois?
3. On note X le nombre de feux verts obtenus.
   (a) Décrire la loi de probabilité de X.
   (b) Déterminer l'espérance de cette loi.

Exercice 8.12 (La Réunion juin 2 007)**.**
Un domino est une petite plaque partagée en deux parties. Sur chacune des parties figure une série de points. Il peut y avoir de zéro à six points dans une série. Un jeu de dominos comporte 28 dominos, tous différents.



Lors d'une fête, on propose le jeu suivant :

- le joueur tire au hasard un domino parmi les 28 dominos du jeu,
- il gagne, en euros, la somme des points figurant sur le domino tiré.

On suppose que tous les dominos du jeu ont la même probabilité d'être tirés.

1. Établir la loi de probabilité des gains possibles.
2. Le joueur doit miser 7 € avant de tirer un domino. En se fondant sur le calcul des probabilités, peut-il espérer récupérer ses mises à l'issue d'un grand nombre de parties?

Exercice 8.13 (D'après Liban juin 2 007)**.**
Les places d'une salle de cinéma sont toutes occupées. Le film proposé est une rediffusion d'une comédie à grand succès. À la fin de la projection, on interroge au hasard une personne sortant de la salle.
On appelle V l'événement : « la personne interrogée avait déjà vu le film avant cette projection ».
On donne : la probabilité que l'événement V soit réalisé est égale à 0,345.

1. On interroge au hasard et successivement quatre personnes sortant de la salle. On suppose que le nombre de spectateurs est suffisamment grand pour assimiler l'interrogation au hasard d'un spectateur à un tirage avec remise. Quelle est la probabilité arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins une personne ait déjà vu le film avant cette projection?

2. À la fin de l'année, une étude nationale a été réalisée sur le nombre de fois qu'un spectateur sortant de la salle est allé voir ce film. Le tableau ci-dessous, pour lequel il manque une valeur notée q représente la loi de probabilité du nombre de fois que le spectateur est allé voir ce film.

Nombre de fois	1	2	3	4	5	6
probabilité	0,55	0,15	0,15	0,05	q	0,05

   (a) Déterminer q.

   (b) En déduire l'espérance mathématique, arrondie à l'unité de cette loi de probabilité et interpréter le résultat obtenu.

EXERCICE 8.14 (Polynésie septembre 2 006)**.**
On suppose qu'un indice, calculé quotidiennement, n'évolue d'un jour à l'autre que de trois façons possibles soit il diminue de 10 %, soit il est stable, soit il augmente de 10 %. On note $i_0 = 100$ l'indice de départ et i_n l'indice au bout de n jours.

1. (a) Si pendant dix jours consécutifs il y avait trois jours de hausse, puis quatre jours de stabilité, puis trois jours de baisse, quel serait, arrondi au centième, l'indice final i_{10} ?
   Quelle serait l'évolution en pourcentage par rapport à i_0 ?

   (b) On suppose que l'indice augmente tous les jours. Montrer que la suite (i_n) des indices est une suite géométrique, dont on précisera le terme initial et la raison.
   Dans ce cas déterminer au bout de combien de jours cet indice dépassera la valeur 1 000.

2. Une étude a montré que, chaque jour, l'indice augmente de 10 % avec une probabilité égale à 0,3, diminue de 10 % avec une probabilité égale à 0,2 et reste stable avec une probabilité égale à 0,5.
   L'évolution d'un jour à l'autre est indépendante de l'évolution des jours précédents.
   On s'intéresse maintenant à l'évolution de cet indice sur deux jours. On note X la valeur de l'indice i_2 au bout de deux jours.

   (a) Construire un arbre de probabilités illustrant l'évolution de cet indice sur deux jours.

   (b) Recopier et compléter le tableau suivant, donnant la loi de probabilité de X où les x_i sont les valeurs possibles de X et p_i la probabilité que X soit égale à x_i.

x_i	81	90		100	110	121
p_i		0,2	0,12	0,25		

   (c) Calculer l'espérance mathématique de X.