Corrigé du devoir maison n°2

Suites

EXERCICE 2.1.
On considère la suite (u_n) définie pour $n > 0$ par $u_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

1. (a) Montrer que (u_n) est majorée par 0.

Quelques essais à la calculatrice montrent que u_n est négatif pour tout $n > 0$ car $\frac{n}{n+1}$ est toujours inférieur à 1. Démontrons que c'est toujours le cas.

$$\begin{aligned} n < n+1 &\Leftrightarrow \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+1} \text{ car } n \text{ positif} \\ &\Leftrightarrow \frac{n}{n+1} < 1 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) < \ln(1) \text{ car la fonction logarithme est croissante} \\ &\Leftrightarrow u_n < 0 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est majorée par 0.

(b) Étudier la monotonie de (u_n).

Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$.
$u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n+1+1}\right) - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n+2} \times \frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)(n+1)}{(n+2)n}\right) = \ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)$.
Or $n^2+2n+1 > n^2+2n$ donc $\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1$ donc $\ln\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right) > \ln(1) = 0$.
On a donc $u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$ donc (u_n) est croissante.

(c) Étudier la convergence de (u_n).

La suite étant définie de manière explicite, elle aura la même limite que celle de la fonction $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.
Or :

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{X\to 1} \ln(X) = 0 \end{array}\right\} \text{donc, par composition, } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
La suite (u_n) converge vers 0.

2. On pose $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$.
Calculer S_n en fonction de n, puis étudier sa convergence.

Regardons les premiers termes :
$S_1 = u_1 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(1) - \ln(2) = -\ln(2)$.
$S_2 = u_1 + u_2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln(1) - \ln(2) + \ln(2) - \ln(3) = -\ln(3)$.
$S_3 = u_1 + u_2 + u_3 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln(1) - \ln(2) + \ln(2) - \ln(3) + \ln(3) - \ln(4) = -\ln(4)$.
Il semble que $S_n = -\ln(n+1)$. Démontrons-le par récurrence.

- C'est vrai pour $n = 1$.
- Supposons que jusqu'au rang p, $S_p = -\ln(p+1)$.
  $S_{p+1} = S_p + u_{p+1} = -\ln(p+1) + \ln\left(\frac{p+1}{p+2}\right) = -\ln(p+1) + \ln(p+1) - \ln(p+2) = -\ln(p+2)$
- Donc, par récurrence, pour tout $n > 0$, $S_n = -\ln(n+1)$.

Pour étudier sa convergence, étudions $\lim\limits_{x\to+\infty} -\ln(x+1)$.

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} -\ln(X) = -\infty \end{array}\right\} \text{donc, par composition, } \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\infty$.
La suite (S_n) diverge.

EXERCICE 2.2.
Cet exercice n'ayant été traité par aucun élève, il n'y aura pas de corrigé.