Corrigé du devoir maison n°3

- La fonction d'offre des fournisseurs est la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x^2+100x+400}{1000}$ où $f(x)$ est le prix que les fournisseurs comptent vendre la console (en centaines d'euros) pour x consoles (en milliers) mises sur le marché ;
- La fonction de demande des consommateurs est la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\ln\left(\frac{200}{x}\right)$ où $g(x)$ est le prix que sont prêts à payer les consommateurs (en centaines d'euros) pour x consoles (en milliers) mises sur le marché.

Partie A

Les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g sont tracées dans le repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ orthogonal fourni par la figure 3.1 page 117.

1. Identifier les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur la figure. Expliquez votre choix.

   Plusieurs explication sont possibles. Par exemple : $f(10)=\frac{10^2+100\times10+400}{1000}=1{,}5$ or seule la courbe croissante passe par $(10\,;1{,}5)$, c'est donc celle de f. La courbe de g est donc la la courbe décroissante.

2. (a) Calculer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0. Comment interpréter ce résultat ?

   Plusieurs méthodes possibles là encore. Par exemple :

   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}\frac{200}{x}=+\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty\end{array}\right\}\text{ donc, par composition, }\lim_{x\to0}g(x)=+\infty$$

   g étant la fonction de la demande, on peut interpréter ce résultat de la manière suivante : quand la quantité de consoles (x) mises sur le marché est proche de zéro, les consommateurs sont prêts à payer cher pour en avoir une.

   (b) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Comment interpréter ce résultat ?

   $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+100x+400}{1000}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1000}=+\infty$

   f étant la fonction de l'offre, une première interprétation de ce résultat est : plus il y a de consoles (x) plus les fournisseurs sont prêts à les vendre chers, ce qui n'a pas grand sens. En inversant la phrase on obtient quelque chose de plus logique : plus le prix des consoles est élevé, plus les fournisseurs sont prêts à en mettre sur le marché.

3. (a) Que représente le point A d'un point de vue économique ? Lire ses coordonnées $\left(x_0\,;y_0\right)$ sur le graphique.

   C'est l'intersection de la fonction de l'offre et de la fonction de la demande, cela correspond au moment où l'offre est égale à la demande. Son abscisse est donc la quantité idéale à mettre sur le marché pour que l'offre soit égale à la demande et son ordonnée est le prix d'équilibre du marché.

   Graphiquement $A(17{,}5\,;2{,}45)$.

   (b) Pour déterminer les coordonnées de A de façon précise, on est amené à résoudre l'équation $f(x)=g(x)$. On pose, pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty[$, $h(x)=f(x)-g(x)$.

   i. Exprimer $g(x)$ en fonction de $\ln(x)$.

   $g(x)=\ln\left(\frac{200}{x}\right)=\ln(200)-\ln(x)$.

   ii. Étudier le signe de la dérivée h' et en déduire le sens de variations de h.

   $h(x)=f(x)-g(x)=\frac{x^2+100x+400}{1000}-(\ln(200)-\ln(x))=\frac{x^2+100x+400}{1000}-\ln(200)+\ln(x)$.

   Donc $h'(x)=\frac{2x+100}{1000}+\frac{1}{x}$.

   Comme $x\in]0\,;+\infty[$, $h'(x)$ est une somme de termes tous positifs, donc $h'(x)$ positif.

   Sur $]0\,;+\infty[$ la fonction h est donc strictement croissante.

   iii. Démontrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique x_0 sur l'intervalle $[10\,;20]$. Déterminer alors la valeur arrondie au millième de x_0 à l'aide de la calculatrice.

   Sur $[10\,;20]$, h est continue et strictement croissante.

   $h(10)\approx-1{,}5<0<h(20)\approx0{,}50$.

   Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in[10\,;20]$.

   Pour avoir une valeur approchée de α au millième, il faut aller chercher la quatrième décimale à la calculatrice :

x	17,3952	α	17,3953
$h(x)$	$-0{,}00001$	0	0,000001

   Donc α est plus proche de 17,395 que de 17,396.

   $\alpha\approx17{,}395$.

   iv. En déduire la quantité de consoles disponibles (à l'unité) lorsqu'on est au prix d'équilibre ainsi que la valeur de ce prix d'équilibre (à l'euro).

Lorsqu'on est au prix d'équilibre, $f(x) = g(x)$ donc $h(x) = 0$.
Le nombre de consoles doit donc être $\alpha \approx 17{,}395$ milliers de consoles = 17395 consoles.
Le prix d'équilibre est $f(\alpha) = g(\alpha) = 2{,}44$ centaines d'euros = 244 €.

Pour la suite on prendra $x_0 = 17{,}4$ milliers et $y_0 = 2{,}4$ centaines d'euros.

Partie B : Surplus des consommateurs

Certains individus étaient près à payer plus cher cette console que le prix d'équilibre. Ils réalisent donc une économie. La différence entre le prix qu'ils étaient prêts à payer et le prix payé, c'est-à-dire le prix d'équilibre, représente le surplus du consommateur. Graphiquement, le surplus du consommateur est donc donné par la surface sous la courbe de demande au-dessus du prix d'équilibre (surface grisée).

1. Montrer que la fonction $j(x) = x\ln(x) - x$, définie sur $]0\,;\,+\infty[$, est une primitive de la fonction logarithme népérien.

   $j'(x) = (1)\times(\ln(x)) + (x)\times\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$
   Donc j est bien une primitive de la fonction logarithme népérien.

2. En déduire une primitive G de la fonction g sur $]0\,;\,+\infty[$.

   $g(x) = \ln(200) - \ln(x)$.
   $G(x) = \ln(200)\times x - (x\ln(x) - x) = x\ln(200) - x\ln(x) + x$.

3. Déterminer la limite de G lorsque x tend vers 0.
   Pour la suite, on prendra $G(0) = \lim\limits_{x\to 0} G(x)$.

   D'après le cours, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$. Par ailleurs $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(200) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$. Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to 0} G(x) = 0$.

4. Déterminer la valeur exacte du surplus des consommateurs.
   En quelle unité est cette valeur ? En donner la valeur arrondie à l'euro.

   L'aire C de la surface grisée est l'aire sous la courbe de g dont on a soustrait un rectangle de base x_0 et de hauteur y_0.
   Donc $C = \displaystyle\int_0^{x_0} g(x)\mathrm{d}x - x_0 y_0 = G(x_0) - G(0) - x_0 y_0 = G(17{,}4) - 17{,}4\times 2{,}4 = 17{,}4\ln(200) - 17{,}4\ln(17{,}4) + 17{,}4 - 17{,}4\times 2{,}4$ unités d'aire.
   Chaque unité en abscisse est un millier, chaque unité en ordonnée est une centaine d'euros, donc une unité d'aire vaut 1000×100 € = 100000 €.
   $C \approx 18{,}12814$ u.a. = 1812814 €.

Partie C : Surplus des fournisseurs

Certains fournisseurs étaient près à vendre moins cher cette console que le prix d'équilibre. Ils réalisent donc un bénéfice. La différence entre le prix qu'ils étaient prêts à vendre et le prix vendu, c'est-à-dire le prix d'équilibre représente le surplus des fournisseurs.

1. Déterminer une primitive F de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

   $f(x) = \frac{x^2+100x+400}{1000}$.
   $F(x) = \frac{\frac{1}{3}x^3+100\times\frac{1}{2}x^2+400x}{1000} = \frac{1}{1000}\left(\frac{1}{3}x^3 + 50x^2 + 400x\right)$.

2. On admet que le surplus des fournisseurs est le nombre $S = x_0 y_0 - \displaystyle\int_0^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   Ce nombre représente une aire.
   Représenter cette aire sur la figure 3.1 page suivante.
   Déterminer la valeur exacte de S en unités d'aire puis sa valeur arrondi à l'euro.

   $x_0 y_0$ peut correspondre à l'aire du rectangle de base x_0 et de hauteur y_0 qu'on a déjà vu dans la partie B.
   $\displaystyle\int_0^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x$ correspond à l'aire sous la courbe de f entre 0 et x_0.
   Donc l'aire est celle du rectangle dont on a soustrait celle sous la courbe de f. Soit l'aire hachurée sur la figure.
   $x_0 y_0 - \displaystyle\int_0^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x = 17{,}4\times 2{,}4 - (F(17{,}4) - F(0)) = 17{,}4\times 2{,}4 - \frac{1}{1000}\left(\frac{1}{3}17{,}4^3 + 50\times 17{,}4^2 + 400\times 17{,}4\right)$
   Soit environ 17,90599 unités d'aire, donc 1790599 €.

FIGURE 3.1 – Courbes de l'offre et de la demande