

Devoir surveillé n°6

Généralités sur les suites – Dérivation

EXERCICE 6.1 (5 points).

Compléter par l'expression de la fonction dérivée pour chacune des fonctions suivantes :

- Pour tout x réel et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = x^n$, alors $f'(x) = \dots\dots\dots$
- Pour x réel strictement positif, $f(x) = \sqrt{x}$, alors $f'(x) = \dots\dots\dots$
- Soient u et v deux fonctions dérivables et $f = u + v$, alors $f' = \dots\dots\dots$
- Soient u et v deux fonctions dérivables et $f = u \times v$, alors $f' = \dots\dots\dots$
- Soit v une fonction dérivable telle que $v \neq 0$ et $f = \frac{1}{v}$, alors $f' = \dots\dots\dots$

EXERCICE 6.2 (9 points).

On donne trois suites, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $(u_n) : \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^3 + u_n^2 - 2u_n + 8}{4} \end{cases}$
- $(v_n) : \begin{cases} v_0 = -3 \\ v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n + 1} \end{cases}$
- $(w_n) : \begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n+1} = -w_n^2 + 4w_n + 1 \end{cases}$

On donne par ailleurs sur les figures page suivante les courbes représentatives de trois fonctions :

- $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x + 8}{4}$
- $g(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$
- $h(x) = -x^2 + 4x + 1$

1. En justifiant brièvement indiquer quelles sont les courbes respectives de f , g et h .
2. Construire sur la figure adaptée la représentation en chemin de chacune des suites.
3. Pour chacune des trois suites, conjecturer :
 - (a) sa monotonie ;
 - (b) le comportement de la suite lorsque n devient grand.

EXERCICE 6.3 (6 points).

Étudier la monotonie de chacune des suites suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $u_n = 2 + \frac{1}{n+1}$;
2. $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$;
3. $w_n = n + (-2)^n$.

FIGURE 6.1 – Courbe 1 de l'exercice 6.2

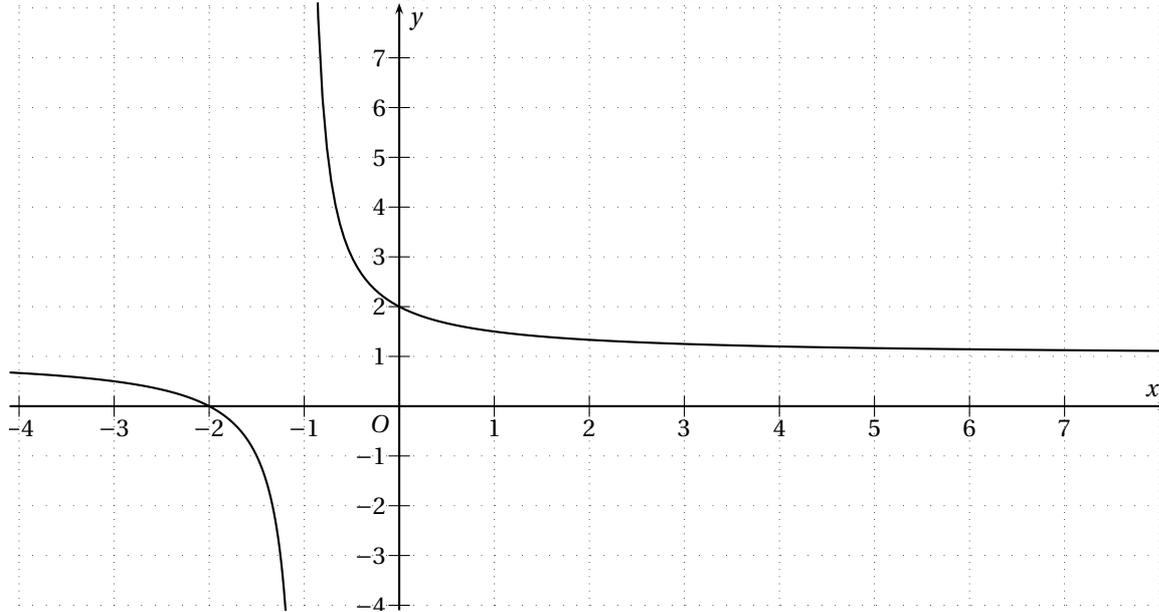


FIGURE 6.2 – Courbe 2 de l'exercice 6.2

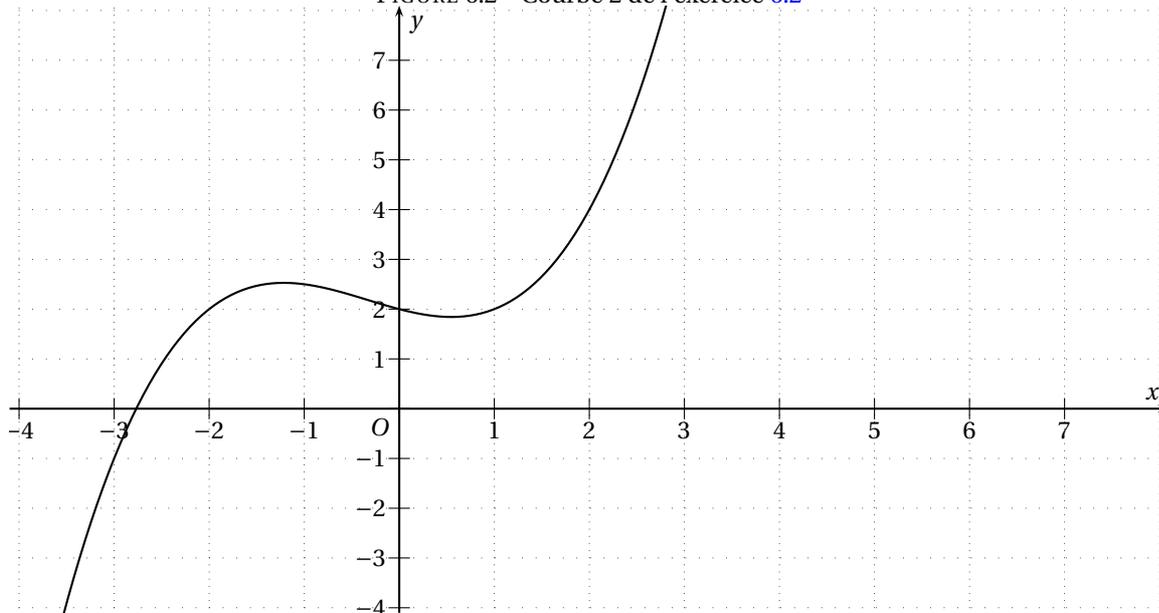


FIGURE 6.3 – Courbe 3 de l'exercice 6.2

