Devoir maison n°2

Suites

EXERCICE 2.1.
On considère la suite (u_n) définie pour $n > 0$ par $u_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

1. (a) Montrer que (u_n) est majorée par 0.
   (b) Étudier la monotonie de (u_n).
   (c) Étudier la convergence de (u_n).
2. On pose $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$.
   Calculer S_n en fonction de n, puis étudier sa convergence.

EXERCICE 2.2.
Le but de cet exercice est de démontrer la propriété suivante :

> **PROPRIÉTÉ.** *Soit (u_n) une suite telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = mx + p$ où $m \neq 1$ et $p \neq 0$.*
> *Alors il existe α tel que $f(\alpha) = \alpha$ et la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique.*

Ainsi que de compléter la propriété suivante :

> **PROPRIÉTÉ.** *Soit (u_n) une suite telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = mx + p$ où $m \neq 1$ et $p \neq 0$.*
> - *Si ……… alors (u_n) converge vers ……….*
> - *Si ……… alors (u_n) diverge.*

1. (a) On pose $f(x) = mx + p$.
   À quelle condition existe-t-il un réel α tel que $f(\alpha) = \alpha$?
   Justifier.
   (b) Soit (u_n) une suite telle que $u_{n+1} = mu_n + p$ où $m \neq 1$.
   Soit la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \alpha$.
   Montrer que (v_n) est géométrique.
   On précisera son premier terme et sa raison en fonction de u_0, m, p ou α.
   (c) Conclure.
2. (a) Exprimer v_n en fonction de n, u_0, m, p ou α.
   (b) Exprimer u_n en fonction de n, u_0, m, p ou α.
   (c) Étudier la convergence de la suite (u_n) selon les valeurs de u_0, m, p ou α.
   (d) Recopier et compléter la seconde propriété.
   On listera tous les cas possibles.