Corrigé du Baccalauréat blanc

EXERCICE 1 (4 points)**.**

Partie A

1. $f'(0)$?

$f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0, c'est-à-dire au point B.
Cette tangente est la droite T qui passe par les points $(-1;0)$ et $B(0;4)$. On a donc : $f'(0) = \frac{0-4}{-1-0} = 4$.
Soit la **réponse b**.

2. $f'\left(\frac{1}{2}\right)$?

$f'\left(\frac{1}{2}\right)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0, c'est-à-dire au point C.
Cette tangente est la droite T' qui est parallèle à l'axe des abscisses. On a donc : $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.
Soit la **réponse a**.

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$?

Il est dit que $\mathscr{C}_f$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$. On a donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
Soit la **réponse c**.

Partie B

1. L'équation $f(x) = 2$ admet exactement une solution dans $\mathbb{R}$.

La courbe passe deux fois à l'ordonnée 2, donc $f(x) = 2$ admet deux solutions. La phrase est donc **fausse**.

2. f est décroissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

La phrase est **vraie**.

3. f' est strictement positive sur $\left]-\frac{1}{2}; 1\right[$.

Les variations de f permettent d'en déduire le signe de $f'(x)$. Ici :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f		$\nearrow$		$\searrow$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Donc f' n'est pas positive sur $\left]-\frac{1}{2}; 1\right[$ car elle est négative pour $x \geqslant \frac{1}{2}$.
La phrase est donc **fausse**.

Partie C Indiquer, à l'aide d'un tableau, les variations de la primitive F sur $\mathbb{R}$ en justifiant précisément les variations indiquées.

F étant une primitive de f, on a $F' = f$. Donc le signe de $f(x)$, qu'on obtient graphiquement, nous permet d'obtenir les variations de F. Ici :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$F'(x) = f(x)$		$-$	0	$+$	
F		$\searrow$		$\nearrow$	

EXERCICE 2 (5 points).
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

1. Quel est l'ordre de G ?

L'ordre d'un graphe est le nombre de ses sommets. La matrice d'adjacence A du graphe étant carrée d'ordre 6, le graphe est d'ordre 6.

2. G est-il un graphe orienté ?

La matrice d'adjacence A du graphe étant symétrique par rapport à sa diagonale, le graphe n'est pas orienté.

3. (a) Quel est le degré du sommet 4 ?

La matrice d'adjacence A du graphe indique les chaînes de longueur 1, c'est-à-dire les arêtes, entre les différents sommets du graphe. La ligne 4 (ou la colonne 4) indique qu'il y a $0+1+1+0+1+1=4$ arêtes reliant le sommet 4 aux autres sommets du graphe, le sommet 4 est donc de degré 4.

(b) Le graphe est-il eulérien ?

En procédant de la même manière que dans la question précédente pour chacun des sommets du graphe, on obtient :

Sommet	1	2	3	4	5	6
Degré	2	2	3	4	3	2

Le graphe a donc exactement deux sommets impairs, or un graphe ayant 0 ou 2 sommets impairs est eulérien. Le graphe est donc eulérien.

4. Combien de chaînes de longueur 4 relient les sommets 2 et 5 ?

La matrice A^4 indique les chaînes de longueur 4 entre les différents sommets du graphe. Dans cette matrice, le coefficient de la ligne 2, colonne 5 (ou de la ligne 5, colonne 2) est 8. Il y a donc 8 chaînes de longueur 4 entre les sommets 2 et 5.

5. (a) Quelle est la distance entre les sommets 3 et 6 ?

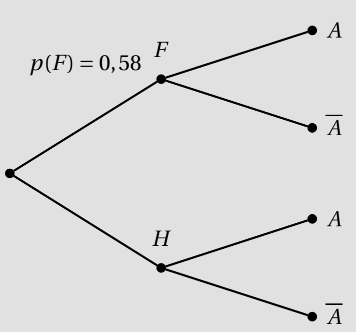
La distance entre deux sommets est la longueur de la plus courte chaîne entre ces deux sommets.
La matrice A indique qu'il n'y a pas de chaîne de longueur 1 entre les sommets 3 et 6, car le coefficient de la ligne 3, colonne 6 (ou de la ligne 6, colonne 3) est 0. La plus courte chaîne entre ces deux sommets est donc de longueur strictement supérieure à 1.
La matrice A^2 indique qu'il y a des chaînes de longueur 2 entre les sommets 3 et 6, car le coefficient de la ligne 3, colonne 6 (ou de la ligne 6, colonne 3) est différent de 0. La plus courte chaîne entre ces deux sommets est donc de longueur 2.
La distance entre les sommets 3 et 6 est donc 2.

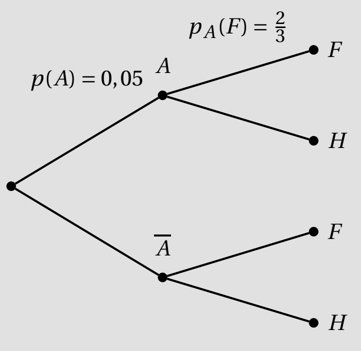
(b) Quel est le diamètre de G ?

Le diamètre d'un graphe est la plus longue des distances entre deux sommets.
Les matrices A et A^2 indiquent qu'il y a des sommets entre lesquels la distance est supérieure à 2, par exemple les sommets 1 et 6 n'ont aucune chaîne de longueur 1 ou de longueur 2 qui les relit. La matrice A^3 indique que tous les sommets distincts ont au moins une chaîne de longueur 3 qui les relit car tous ses coefficients (en dehors de ceux sur la diagonale) sont différents de 0. La plus grande distance entre deux sommets quelconque du graphe est donc 3, donc le diamètre du graphe est 3.

EXERCICE 2 (5 points).
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Même si aucun arbre n'est demandé, il est toujours utile d'en avoir un sous la main pour pouvoir raisonner. De l'énoncé on peut déduire les deux arbres suivants :





1. (a) Donner la probabilité de l'évènement F et celle de l'évènement A.
Donner la probabilité de l'évènement F sachant que l'évènement A est réalisé, notée $p_A(F)$.

Il s'agit ici de transcrire en langage des probabilités les données de l'énoncé.
- $p(F) = 0,58$;
- $p(A) = 0,05$;
- $p_A(F) = \frac{2}{3} \approx 0,667$.

(b) Définir par une phrase l'évènement $A \cap F$ puis calculer sa probabilité.

$A \cap F$ est l'événement « A et F sont réalisés », c'est-à-dire « la personne choisie est atteinte de la maladie $\mathscr{A}$ et est une femme ». On sait que $p(A \cap F) = p(A) \times p_A(F) = 0,05 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{30} \approx 0,033$.

(c) Montrer que la probabilité de l'évènement A sachant que F est réalisé est égale à $0,057$ à 10^{-3} près.

On cherche $p_F(A)$. On sait que $p_F(A) = \frac{p(A \cap F)}{p(F)} = \frac{\frac{1}{30}}{0,58} = \frac{5}{87} \approx 0,057$.

2. La personne choisie est un homme. Démontrer que la probabilité que cet homme soit atteint de la maladie $\mathscr{A}$ est égale à $0,040$ à 10^{-3} près.

On cherche $p_H(A)$. On sait que $p_H(A) = \frac{p(A \cap H)}{p(H)}$.
- $p(H) = 1 - p(F) = 0,42$.
- D'après la formule des probabilités totales :
$p(A) = p(A \cap H) + p(A \cap F) \Leftrightarrow 0,05 = p(A \cap H) + \frac{1}{30} \Leftrightarrow p(A \cap H) = 0,05 - \frac{1}{30} = \frac{1}{60} \approx 0,017$.

Donc $p_H(A) = \frac{p(A \cap H)}{p(H)} = \frac{\frac{1}{60}}{0,42} = \frac{5}{126} \approx 0,040$

3. Peut-on affirmer que, dans ce pays en 2006, dans la population des personnes âgées de plus de 65 ans, une femme risquait davantage de développer la maladie $\mathscr{A}$ qu'un homme ? Justifier.

La probabilité de développer la maladie quand on est une femme est $p_F(A) \approx 0,057$.
La probabilité de développer la maladie quand on est un homme est $p_H(A) \approx 0,040$.
$p_F(A) > p_H(A)$, une femme risquait donc davantage de développer la maladie d'ALZHEIMER qu'un homme.

EXERCICE 3 (4 points).
Le tableau ci-dessous donne l'évolution de l'indice des prix de vente des appartements anciens à Paris au quatrième trimestre des années 2000 à 2007.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Indice : y_i	100	108,5	120,7	134,9	154,8	176,4	193,5	213,6

Source : INSEE

1. Calculer le pourcentage d'augmentation de cet indice de l'année 2000 à l'année 2007.

Soit t le taux de ce pourcentage. L'année de départ étant d'indice 100, $t = 213,6 - 100 = 113,6$.
Le pourcentage d'augmentation est donc de 113,6 %.

2. Construire le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans le plan (P) muni d'un repère orthogonal défini de la manière suivante :

Voir la figure 1 page 5.

3. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage. Placer le point G dans le plan (P).

$G\left(\overline{x}; \overline{y}\right) = (3,5; 150,3)$. Voir la figure 1 page 5.

4. L'allure de ce nuage permet de penser qu'un ajustement affine est adapté.

(a) À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite (d) d'ajustement de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis au centième.

D'après la calculatrice $a \approx 16,75$ et $b \approx 91,67$ donc $y = 16,75x + 91,67$.

(b) Tracer la droite (d) dans le plan (P).

Voir la figure 1 page 5.

5. En supposant que cet ajustement affine reste valable pour les deux années suivantes, estimer l'indice du prix de vente des appartements anciens de Paris au quatrième trimestre 2009. Justifier la réponse.

2009 est l'année de rang $x = 9$ donc $y = 16,75 \times 9 + 91,67 = 242,42$.
L'indice du prix de vente des appartements anciens de Paris au quatrième trimestre 2009 est donc 242,42.

EXERCICE 4 (7 points)**.**
Le plan est rapporté à un repère orthogonal. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 2x(1-\ln x)$.
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

1. (a) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 0.

- $\left.\begin{array}{r}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} 1-\ln x = -\infty\end{array}\right\}$ donc, par produit, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
- $f(x) = 2x(1-\ln x) = 2x - 2x\ln x$.
$\left.\begin{array}{r}\displaystyle\lim_{x\to 0} 2x = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x = 0 \text{ donc } \lim_{x\to 0} -2x\ln x = 0\end{array}\right\}$ donc, par somme, $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

(b) Déterminer $f'(x)$ pour $x \in]0\,;\,+\infty[$ (où f' est la fonction dérivée de f).

$f = u \times v$ donc $f' = u'v + uv'$. D'où : $f'(x) = (2)(1-\ln x) + (2x)\left(-\frac{1}{x}\right) = 2 - 2\ln x - 2 = -2\ln x$.

(c) Étudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in]0\,;\,+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Cherchons, par exemple, les valeurs de x telles que $-2\ln x \geqslant 0$.
$x \in]0\,;\,+\infty[$: $-2\ln x \geqslant 0 \Leftrightarrow 0 \geqslant 2\ln x \Leftrightarrow 0 \geqslant \ln x \Leftrightarrow \ln 1 \geqslant \ln x \Leftrightarrow 1 \geqslant x$. Donc :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ 0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

$f(1) = 2 \times 1 \times (1-\ln 1) = 2(1-0) = 2$.

2. Résoudre sur $]0\,;\,+\infty[$ l'équation $f(x) = 0$. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'intersection A avec l'axe des abscisses et donner les coordonnées du point A.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow 2x(1-\ln x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \text{ ou } 1-\ln x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 1 = \ln x \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \ln \mathrm{e} = \ln x \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \mathrm{e} = x \end{aligned}$$

Comme $x \in]0;+\infty[$ on ne peut avoir $x = 0$. Donc la seule solution possible est $x = \mathrm{e}$.
On a donc $A(\mathrm{e};0)$.

3. (a) Résoudre, par un calcul, l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

$$\begin{aligned} f(x) \geqslant 0 &\Leftrightarrow 2x(1-\ln x) \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow 1-\ln x \geqslant 0 \text{ car } x \in]0;+\infty[\text{ donc } 2x \text{ est strictement positif} \\ &\Leftrightarrow 1 \geqslant \ln x \Leftrightarrow \mathrm{e} \geqslant x \end{aligned}$$

Donc $f(x) \geqslant 0$ pour $x \in]0;\mathrm{e}]$.
$\mathscr{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses pour $x \in]0;\mathrm{e}]$.

(b) Montrer que la fonction F définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = x^2\left(\dfrac{3}{2} - \ln x\right)$ est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

$F = u \times v$ donc $F' = u'v + uv'$.
D'où : $F'(x) = (2x)\left(\dfrac{3}{2} - \ln x\right) + \left(x^2\right)\left(-\frac{1}{x}\right) = 3x - 2x\ln x - x = 2x - 2x\ln x = 2x(1-\ln x) = f(x)$.
Donc F est bien une primitive de f.

(c) On désigne par $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire de $\mathscr{D}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

Nommons $\mathscr{A}$ cette aire.

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = F(\mathrm{e}) - F(1)\\ &= \mathrm{e}^2\left(\frac{3}{2} - \ln \mathrm{e}\right) - 1^2\left(\frac{3}{2} - \ln 1\right) = \mathrm{e}^2\left(\frac{3}{2} - 1\right) - \left(\frac{3}{2} - 0\right)\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{3}{2} \text{ unités d'aire} \approx 2,19 \text{ unités d'aire}\end{aligned}$$

FIGURE 1 – Figure de la question 2 de l'exercice 3