BACCALAURÉAT GÉNÉRAL
Hiver 2011

Épreuve :
MATHÉMATIQUES

Série
SCIENCES ÉCONOMIQUES ET SOCIALES

Spécialités :

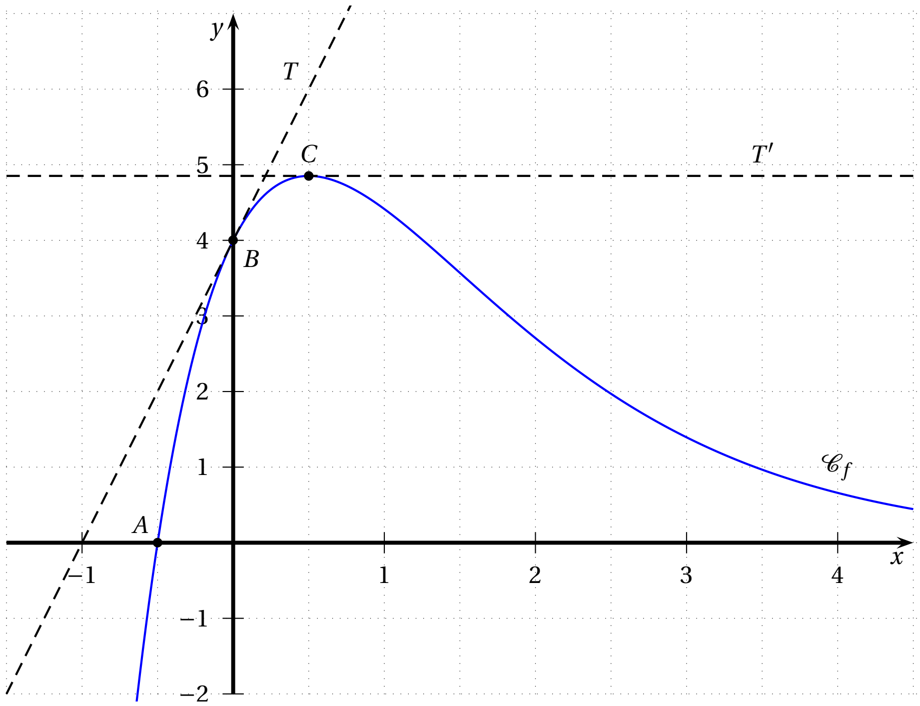
Sciences économiques et sociales (coefficient : 5)
Anglais renforcé (coefficient : 5)
Mathématiques (coefficient : 7)

Durée de l'épreuve : 3 heures.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le sujet comporte 4 pages.

EXERCICE 1 (4 points).
Commun à tous les candidats
Le graphique ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note f' sa dérivée et F une de ses primitives.
La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points : $A\left(-\frac{1}{2}\,;0\right)$, $B\,(0\,;4)$ et $C\left(\frac{1}{2}\,;\frac{8}{\sqrt{e}}\right)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.
Les droites T et T' sont les tangentes respectives en B et en C à la courbe $\mathscr{C}_f$.



Pour les parties A et B
Chaque bonne réponse rapporte 0,5 point ; chaque réponse inexacte est pénalisée de 0,25 point ; l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de points.
En cas de total négatif, la note de la partie d'exercice est ramenée à 0.

Partie A Cette partie est un questionnaire à choix multiples. Dans chaque cas il n'y a qu'une bonne réponse. On recopiera sur sa copie le numéro de la question et on indiquera la lettre correspondant à la réponse choisie sans justification.

1. (a) $f'(0) = 0$; (b) $f'(0) = 4$; (c) $f'(0) = 2$.
2. (a) $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$; (b) $f'\left(\frac{1}{2}\right) \approx 4,85$; (c) $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{\sqrt{e}}$.
3. (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Partie B Pour chacune des questions suivantes, on recopiera l'affirmation proposée et on répondra pas **VRAI** ou **FAUX**.

1. L'équation $f(x) = 2$ admet exactement une solution dans $\mathbb{R}$.
2. f est décroissante sur $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.
3. f' est strictement positive sur $\left]-\frac{1}{2}\,;1\right[$.

Partie C Indiquer, à l'aide d'un tableau, les variations de la primitive F sur $\mathbb{R}$ en justifiant précisément les variations indiquées.

EXERCICE 2 (5 points).
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

On donne A la matrice d'adjacence d'un graphe G ainsi que quelques-unes de ses puissances ci-dessous.
On justifiera soigneusement chaque réponse. La justification devra s'appuyer sur les matrices proposées.

1. Quel est l'ordre de G ?
2. G est-il un graphe orienté ?
3. (a) Quel est le degré du sommet 4 ?
   (b) Le graphe est-il eulérien ?
4. Combien de chaînes de longueur 4 relient les sommets 2 et 5 ?
5. (a) Quelle est la distance entre les sommets 3 et 6 ?
   (b) Quel est le diamètre de G ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 6 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 8 & 6 & 2 \\ 1 & 6 & 8 & 4 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^4 = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 & 14 & 9 & 3 \\ 1 & 10 & 13 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 13 & 19 & 11 & 12 & 14 \\ 14 & 5 & 11 & 26 & 18 & 10 \\ 9 & 8 & 12 & 18 & 17 & 10 \\ 3 & 9 & 14 & 10 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 2 (5 points).
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

On s'intéresse à la population des personnes âgées de plus de 65 ans d'un certain pays en 2006.
Dans cette population :
- 58 % sont des femmes ;
- 5 % des personnes sont atteintes d'une maladie incurable appelée maladie $\mathscr{A}$ et parmi celles-ci les deux tiers sont des femmes.

On choisit au hasard une personne dans cette population.
On note :

F l'évènement : « la personne choisie est une femme » ;

H l'évènement : « la personne choisie est un homme » ;

A l'évènement : « la personne choisie est atteinte de la maladie $\mathscr{A}$ » ;

$\overline{A}$ l'évènement : « la personne choisie n'est pas atteinte de la maladie $\mathscr{A}$ ».

Les résultats seront arrondis au millième.

1. (a) Donner la probabilité de l'évènement F et celle de l'évènement A.
   Donner la probabilité de l'évènement F sachant que l'évènement A est réalisé, notée $p_A(F)$.
   (b) Définir par une phrase l'évènement $A \cap F$ puis calculer sa probabilité.
   (c) Montrer que la probabilité de l'évènement A sachant que F est réalisé est égale à $0,057$ à 10^{-3} près.
2. La personne choisie est un homme. Démontrer que la probabilité que cet homme soit atteint de la maladie $\mathscr{A}$ est égale à $0,040$ à 10^{-3} près.
3. Peut-on affirmer que, dans ce pays en 2006, dans la population des personnes âgées de plus de 65 ans, une femme risquait davantage de développer la maladie $\mathscr{A}$ qu'un homme ? Justifier.

EXERCICE 3 (4 points).
Commun à tous les candidats.
Le tableau ci-dessous donne l'évolution de l'indice des prix de vente des appartements anciens à Paris au quatrième trimestre des années 2000 à 2007.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Indice : y_i	100	108,5	120,7	134,9	154,8	176,4	193,5	213 ,6

Source : INSEE

1. Calculer le pourcentage d'augmentation de cet indice de l'année 2000 à l' année 2007.
2. Construire le nuage de points $M_i\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans le plan (P) muni d'un repère orthogonal défini de la manière suivante :
   - sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 2 cm pour représenter une année.
   - sur l'axe des ordonnées, on placera 100 à l'origine et on choisira 1 cm pour représenter 10 unités.
3. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage. Placer le point G dans le plan (P).
4. L'allure de ce nuage permet de penser qu'un ajustement affine est adapté.
   (a) À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite (d) d'ajustement de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis au centième.
   (b) Tracer la droite (d) dans le plan (P).
5. En supposant que cet ajustement affine reste valable pour les deux années suivantes, estimer l'indice du prix de vente des appartements anciens de Paris au quatrième trimestre 2009. Justifier la réponse.

EXERCICE 4 (7 points).
Commun à tous les candidats.
Une entreprise produit et vend un modèle de pièces pour hélicoptères. Pour des raisons techniques et de stockage, sa production mensuelle est comprise entre 100 et 600 pièces. Elle vend tout ce qui est produit.
On considère la fonction f défmie sur l'intervalle $[1\,;6]$ par

$$f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8\ln(x).$$

$f(x)$ représente le bénéfice mensuel, exprimé en dizaines de milliers d'euros, obtenu pour la vente de x centaines de pièces.
La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1\,;6]$. On note f' sa fonction dérivée.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. (a) Montrer que pour tout nombre reel x appartenant à l'intervalle $[1\,;6]$,

$$f'(x) = \frac{-2(x-1)(x-4)}{x}$$

   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;6]$.
   (c) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;6]$.
   (d) Quelle est la quantité de pièces à produire pour obtenir un bénéfice mensuel maximal ?
   Calculer ce bénéfice arrondi à l'euro près.
2. (a) Prouver que la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   (b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;6]$.
   (c) Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;6]$ (donner la valeur décimale arrondie au dixième).

Rappel : Soit f une fonction et $[a\,;\,b]$ un intervalle sur lequel f est définie et dérivable.
La valeur moyenne m de f sur un l'intervalle $[a\,;\,b]$, est le nombre m tel que :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$