Chapitre 7

Dérivation

Sommaire

7.1 Activités **79**

7.1.1 Fonction dérivée 79

7.1.2 Opérations sur les fonctions 80

7.1.3 Applications de la fonction dérivée 80

7.2 Bilan et compléments **81**

7.2.1 Fonction dérivée 81

7.2.2 Opérations sur les fonctions 81

7.2.3 Applications de la fonction dérivée 81

7.3 Exercices et problèmes **82**

7.3.1 Exercices 82

7.3.2 Problèmes 87

7.1 Activités

7.1.1 Fonction dérivée

Activité 7.1 (Plusieurs nombres dérivés)**.**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4$.
Déterminer, en fonction de a, la valeur du nombre dérivé.

On obtient ainsi une fonction, qui dépend de f, qui à tout réel x associe le nombre dérivé de f en x. Une telle fonction est appelée *fonction dérivée de* f et est notée f'. Ainsi, pour $f(x) = -x^2 + 4$, $f'(x) = \ldots\ldots$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Activité 7.2 (Fonctions dérivées de quelques fonctions usuelles)**.**
Déterminer les fonctions dérivées des fonctions usuelles suivantes :

- $f(x) = k$;
- $f(x) = mx + p$;
- $f(x) = x^2$;
- $f(x) = x^3$.

On pourra utiliser les résultats de cette activité dans les activités suivantes.

7.1.2 Opérations sur les fonctions

ACTIVITÉ 7.3 (Produit d'une fonction par une constante)**.**
On pose $f(x) = x^2$ et $g(x) = 3f(x) = 3x^2$, toutes deux définies sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer la fonction dérivée de chacune de ces fonctions.
2. Que constate-t-on ?

ACTIVITÉ 7.4 (Fonction dérivée d'une somme de fonctions et d'un produit de fonctions)**.**
Soient u, v et f trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3$, $v(x) = -2x^2$ et $f(x) = u(x) + v(x)$.

1. (a) Déterminer $f'(x)$, $u'(x)$ et $v'(x)$.
   (b) Que constate-t-on ?
2. (a) Montrer que $f(x) = g(x) \times h(x)$ où g et h sont deux fonctions non constantes à déterminer.
   (b) Déterminer $g'(x)$ et $h'(x)$.
   (c) A-t-on $f'(x) = g'(x) \times h'(x)$?

7.1.3 Applications de la fonction dérivée

ACTIVITÉ 7.5 (Variations d'une fonction)**.**
Reprenons la fonction de l'activité 7.1 page précédente : $f(x) = -x^2 + 4$ et rappelons que le nombre dérivé en x est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse x.

1. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice graphique et par lecture graphique, les variations de f en fonction de x.
2. Comment cela se traduit-il pour les coefficients directeurs des tangentes à la courbe ?
3. En déduire un lien entre les variations de f et une caractéristique de la fonction dérivée f'.

ACTIVITÉ 7.6 (Extremum local)**.**
On s'intéresse à la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$

1. Montrer que $f'(x) = 3x^2 - 3$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
3. Dresser le tableau des variations de f, en faisant apparaître une ligne indiquant le signe de f'.
4. Qu'observe-t-on en -1 et en 1 pour f ? Comment cela se traduit-il pour f' ?

On dit que f admet en -1 et en 1 des extremums locaux.

7.2 Bilan et compléments

7.2.1 Fonction dérivée

Définition 7.1. On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I lorsqu'elle est dérivable en tout nombre de cet intervalle et on note f' la fonction qui a tout nombre x de cet intervalle associe le nombre dérivé de f en x. Cette fonction s'appelle la *fonction dérivée de f*.

On admettra [1] que les fonctions usuelles ont les fonctions dérivées suivantes :

Propriété 7.1. *Les fonctions dérivées des fonctions usuelles sont données par le tableau suivant :*

Fonction f	*définie sur*	*Fonction dérivée f'*	*définie sur*
$f(x) = k$ *(constante)*	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*} =]0;+\infty[$

Remarque. Si l'on remarque que $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ et que $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$, on a alors : $f(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$ a pour fonction dérivée $f'(x) = nx^{n-1}$.

7.2.2 Opérations sur les fonctions

Propriété 7.2. *Soient u et v définies et dérivables sur un même intervalle I.*

Fonction	*Fonction dérivée*	*Exemple*
ku *avec* $k \in \mathbb{R}$	ku'	*Si* $f(x) = 4x^3$ *alors* $f'(x) = 4 \times \left(3x^2\right) = 12x^2$
$u + v$	$u' + v'$	*Si* $f(x) = x + \frac{1}{x}$ *alors* $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$
$u \times v$	$u'v + uv'$	*Si* $f(x) = x\sqrt{x}$ *alors* $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ *avec* $x \neq 0$
$\dfrac{1}{u}$ *avec* $u(x) \neq 0$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	*Si* $f(x) = \frac{1}{3x^2+2x+1}$ *alors* $f'(x) = -\frac{6x+2}{\left(3x^2+2x+1\right)^2}$
$\dfrac{u}{v}$ *avec* $v(x) \neq 0$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	*Si* $f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$ *alors* $f'(x) = \frac{(2)(3x+2)-(2x-1)(3)}{(3x+2)^2} = \frac{7}{(3x+2)^2}$

Certaines preuves seront faites en classe.

7.2.3 Applications de la fonction dérivée

On a vu que la tangente à la courbe au point d'abscisse x est la droite la plus proche de la courbe au voisinage du point de la courbe d'abscisse x. Il est *naturel* de penser que lorsque la tangente *monte*, la courbe *monte* et que lorsque la tangente *descend*, la courbe *descend*, et réciproquement ou, plus mathématiquement, que lorsque la fonction affine dont la tangente est la représentation graphique est croissante (respectivement décroissante), f est aussi croissante (respectivement décroissante) et réciproquement. Or la croissance et la décroissance d'une fonction affine dépendent du signe de

1. Certaines démonstrations ont été faites en activité ou seront faites en exercice

son coefficient directeur, ici $f'(x)$. Ainsi, étudier les variations de f revient donc à étudier le signe de sa fonction dérivée selon les valeurs de x.
On admettra donc le résultat suivant :

Théorème 7.3. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée*

- $f'(x) \geqslant 0$ *pour tout* $x \in I \Leftrightarrow f$ *croissante sur* I
- $f'(x) \leqslant 0$ *pour tout* $x \in I \Leftrightarrow f$ *décroissante sur* I
- $f'(x) = 0$ *pour tout* $x \in I \Leftrightarrow f$ *constante sur* I

On admettra aussi la propriété suivante :

Propriété 7.4. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée*
Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ (respectivement $f'(x) < 0$), alors f est strictement croissante sur I (resp. strictement décroissante)

Remarque. On notera qu'on n'a pas l'équivalence ($\Leftrightarrow$) dans ce cas, une fonction pouvant être strictement croissante avec une dérivée qui s'annule seulement en quelques valeurs. C'est le cas, par exemple, de la fonction cube, dont la dérivée s'annule seulement en 0.

Par ailleurs, lorsque la fonction change de sens de variation en a, on dit qu'elle admet un extremum local en a (minimum ou maximum). On a donc :

Propriété 7.5. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I contenant a et f' sa fonction dérivée.*
f' s'annule et change de signe en $a \Leftrightarrow f$ admet un extremum local en a

On l'admettra.
On a un maximum lorsque $f'(x)$ est positive avant a et négative après, et un minimum lorsque $f'(x)$ est négative avant a et positive après.

Remarque. Local signifie qu'aux alentours de a ce sera un extremum mais, qu'ailleurs, il se peut que f prenne des valeurs supérieures ou inférieures à cet extremum comme on a pu le voir dans l'activité 7.6 page 80.

7.3 Exercices et problèmes

7.3.1 Exercices

Technique

Exercice 7.1.
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 4$
2. $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$
3. $f(x) = (2x+3)(3x-7)$
4. $f(x) = \frac{2x+4}{3x-1}$ pour $x \neq \frac{1}{3}$
5. $f(x) = \frac{x+5}{x^2+1}$
6. $f(x) = x^3\left(1+\sqrt{x}\right)$
7. $f(x) = 4x^2\sqrt{x}$

Lectures graphiques

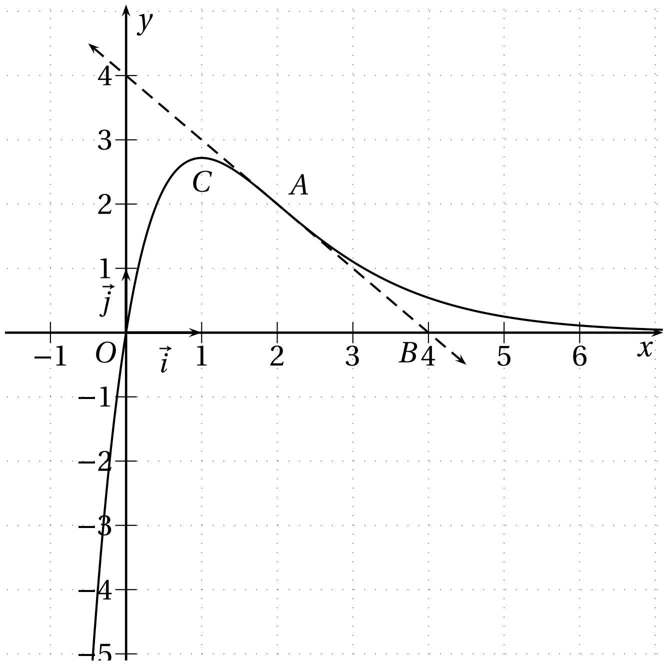
EXERCICE 7.2.

On a représenté sur la figure ci-dessous dans un repère orthonormal, la courbe représentative Γ d'une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La courbe Γ passe par les points $O(0;0)$ et $A(2;2)$.

La droite (AB) est la tangente en A à la courbe Γ.

La tangente à Γ au point C d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Déterminer graphiquement les valeurs de $g(0)$, $g(2)$, $g'(1)$ et $g'(2)$.

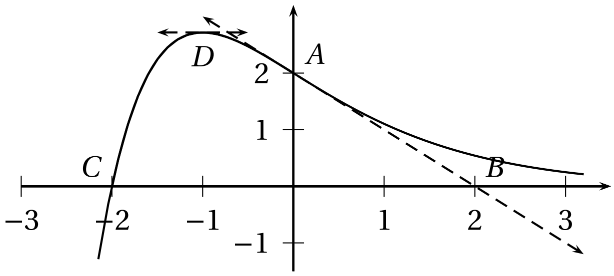
2. Une des représentations graphiques de la figure 7.1 page suivante, représente la fonction dérivée g' de g. Déterminer laquelle.

3. Une des représentations graphiques de la figure 7.1 page suivante, représente une fonction h telle que $h' = g$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer laquelle.

Vous justifierez vos choix à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques.

EXERCICE 7.3.

On a représenté ci-dessous la courbe représentative Γ, dans un repère orthonornal, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La courbe Γ passe par les points $A(0\ ;\ 2)$ et $C(-2\ ;\ 0)$ et la droite (AB) est la tangente en A à Γ. La tangente à Γ en son point D d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

2. Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction dérivée f' de f et une autre représente une fonction h telle que $h' = f$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction h.

   Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix

Courbe 1 | *Courbe 2* | *Courbe 3*

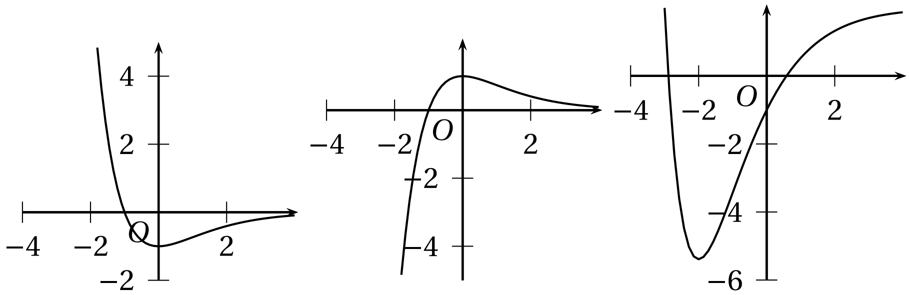
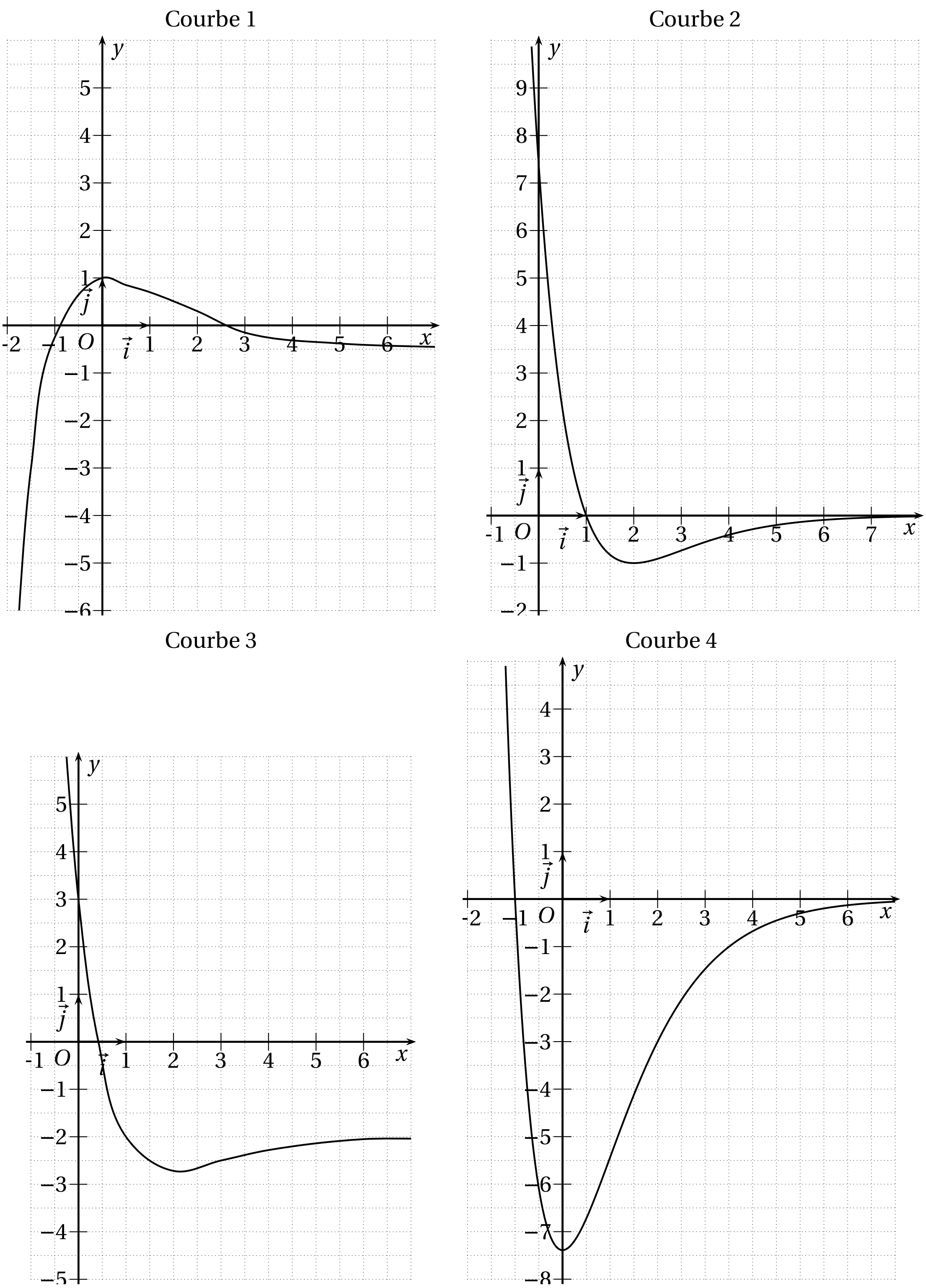


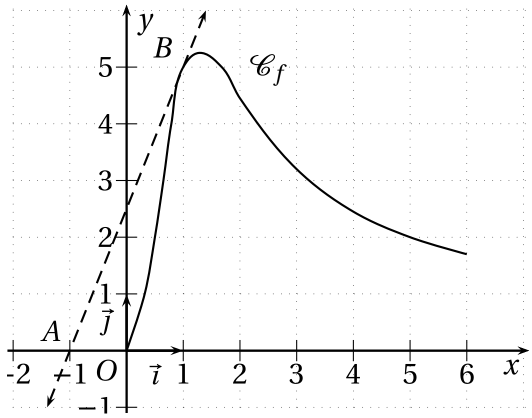
FIGURE 7.1: Courbes de l'exercice 7.2



EXERCICE 7.4.

La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;6]$.

Soit A le point du plan de coordonnées $(-1;0)$ et B le point du plan de coordonnées $(1;5)$. Le point B appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.



1. Déterminer $f'(1)$, où f' est la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0;6]$.
2. L'une des trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, et $\mathscr{C}_3$ représentées sur les figures 1, 2 et 3 de la présente page représente la fonction f'. Laquelle? *Justifier votre réponse.*

FIGURE 7.2: Courbes de l'exercice 7.4

Figure 1

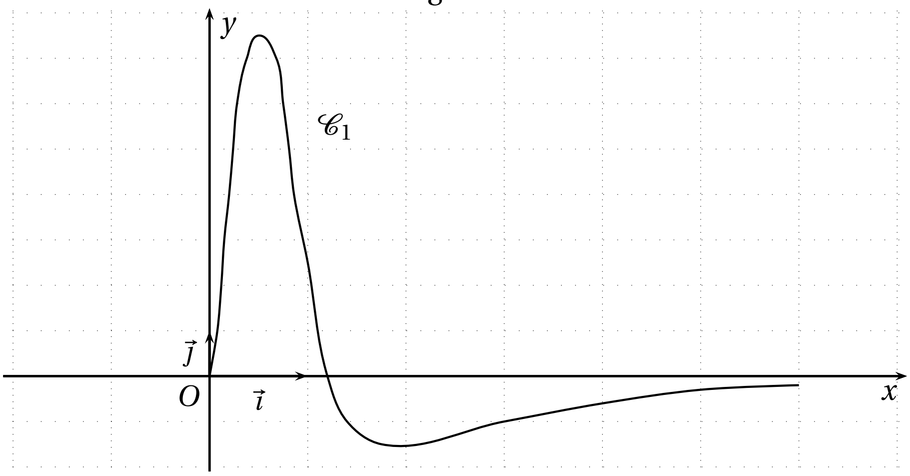


Figure 2

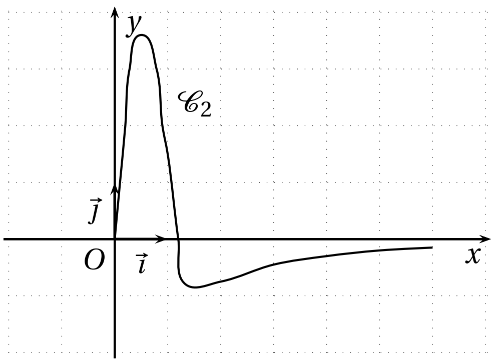
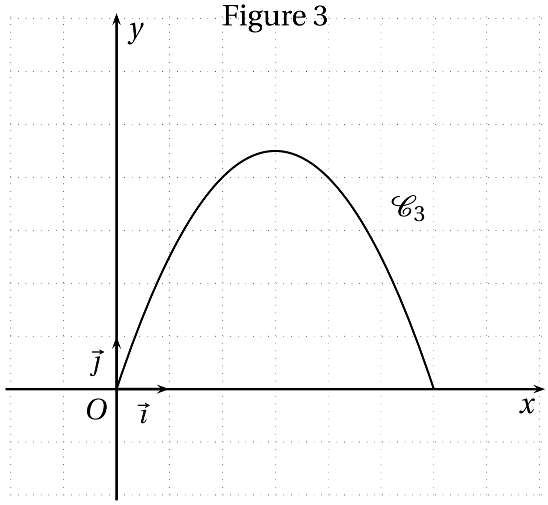


Figure 3



Études de fonctions

EXERCICE 7.5.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

1. Calculer la dérivée f' de f. Étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f en précisant les éventuels extremums.
2. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-1; 3]$.
3. Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

EXERCICE 7.6.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$ On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f. Étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
3. Tracer T, les tangentes parallèles à l'axe des abscisses puis $\mathscr{C}$.

EXERCICE 7.7.
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \frac{1}{x} + x$

1. Déterminer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
2. Étudier le signe de la dérivée g'.
3. Dresser le tableau des variations de g.
4. Déterminer si g admet des extremums locaux.
5. Tracer la représentation graphique de la fonction g

EXERCICE 7.8.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$.
On note $\mathscr{C}$ sa représentation grahique.

1. Calculer la dérivée f' de f.
2. Soit A le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées de A, puis une équation de la tangente T_A à la courbe $\mathscr{C}$ en A.
3. Soit B le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées. Calculer les coordonnées de B, puis une équation de la tangente T_B à la courbe $\mathscr{C}$ en B.
4. Tracer dans un même repère T_A, T_B et $\mathscr{C}$.

EXERCICE 7.9.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f et étudier son signe.
2. Dresser le tableau des variations de f en précisant la valeur M de son maximum et la valeur m de son minimum.
3. Tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-4; 4]$.

EXERCICE 7.10.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Étudier le sens de variation de f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.
4. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
5. Peut-on trouver des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$?
6. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente a pour coefficient directeur -3.

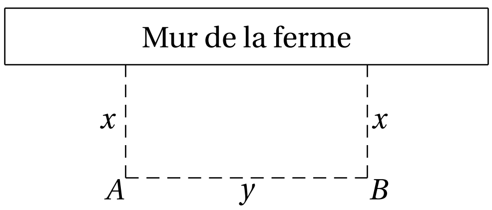
7.3.2 Problèmes

PROBLÈME 7.1.
On considère un rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm.

1. Déterminer ses dimensions (Longueur L et largeur l) sachant que son aire S est égale à $\frac{3}{4}$ cm^2
2. On recherche maintenant les dimensions du rectangle de façon que son aire S soit maximale.
   (a) Exprimer S en fonction de l
   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2-x)$.
   Calculer la dérivée f' et étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f. Tracer sa représentation graphique $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0;2]$.
   (c) En déduire les dimensions du rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm et l'aire S est maximale.

PROBLÈME 7.2.
Un fermier décide de réaliser un poulailler (de forme rectangulaire) le long du mur de sa maison. Ce poulailler devra avoir une aire de 392 m^2. Où doit-on placer les piquets A et B pour que la longueur de la clôture soit minimale ?
La figure ci-dessous représente le poulailler accolé à la ferme en *vue de dessus*. On appelle x la distance séparant chaque piquet au mur et y la distace entre les deux piquets A et B. (On a donc $x > 0$ et $y > 0$).

1. Sachant que l'aire du poulailler est de 392 m^2, exprimer y en fonction de x.
2. Démontrer que la longueur $l(x)$ du grillage est : $l(x) = \frac{2x^2+392}{x}$
3. Calculer la dérivée l' de l. en déduire le tableau des variations de l.
4. En déduire les dimensions x et y pour lesquelle la clôture a une longueur minimale. Préciser cette longueur.



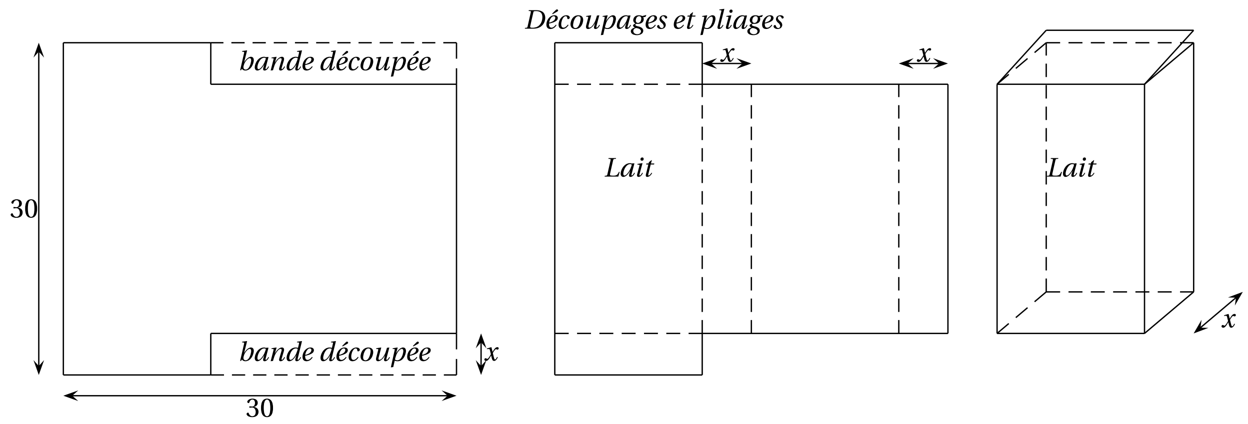
PROBLÈME 7.3. 1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$

   (a) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;20]$. Dresser le tableau des variations de f.
   (b) Déterminer une équation de la tangente Δ à la représentation graphique de f au point d'abscisse 0.
   (c) Déterminer, par calcul, les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
   (d) Tracer Δ et la représentation graphique de f pour $x \in [0;20]$.

2. Un fabricant envisage la production de briques de lait en carton obtenues en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille carrée (voir la figure page suivante). Le côté de la feuille carrée mesure 30 cm et on désigne par x la mesure (en centimètres) de la largeur des bandes découpées. On suppose que $0 < x < 15$.

(a) Démontrer que le volume (en cm^3) de la boîte est $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.

(b) Pour quelle valeur de x le volume $V(x)$ est-il maximal ? Préciser la valeur de ce volume maximal en litres.



PROBLÈME 7.4.
On dispose d'une feuille de dimensions 21 cm × 29,7 cm avec laquelle on veut fabriquer une boite sans couvercle. Pour cela on découpe aux quatre coins de la feuille un carré de côté x. On obtient le patron de la boite. On se propose d'étudier le volume de la boite en fonction de x.

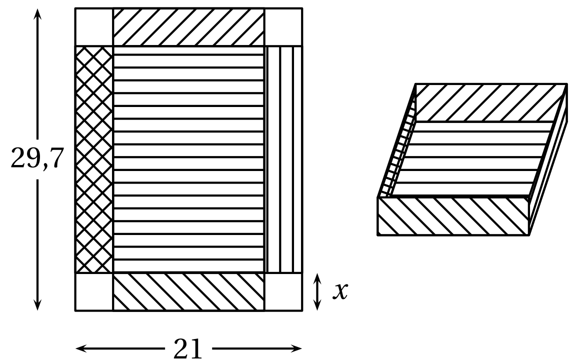
1. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?

2. On appelle $V(x)$ le volume de la boite.

   (a) Montrer que $V(x) = x(29{,}7 - 2x)(21 - 2x)$.

   (b) Étudier les variations de V.

   (c) En déduire la (ou les) valeur(s) de x pour laquelle (lesquelles) le volume de la boite est maximum. *On donnera le(s) résultat(s) au millimètre.*



PROBLÈME 7.5.
Quel doit être le format (hauteur, rayon) d'une boite de conserve cylindrique pour que, pour un volume donné, la quantité de métal pour la concevoir, qu'on supposera proportionnelle à sa surface, soit minimale.