Devoir surveillé n°4

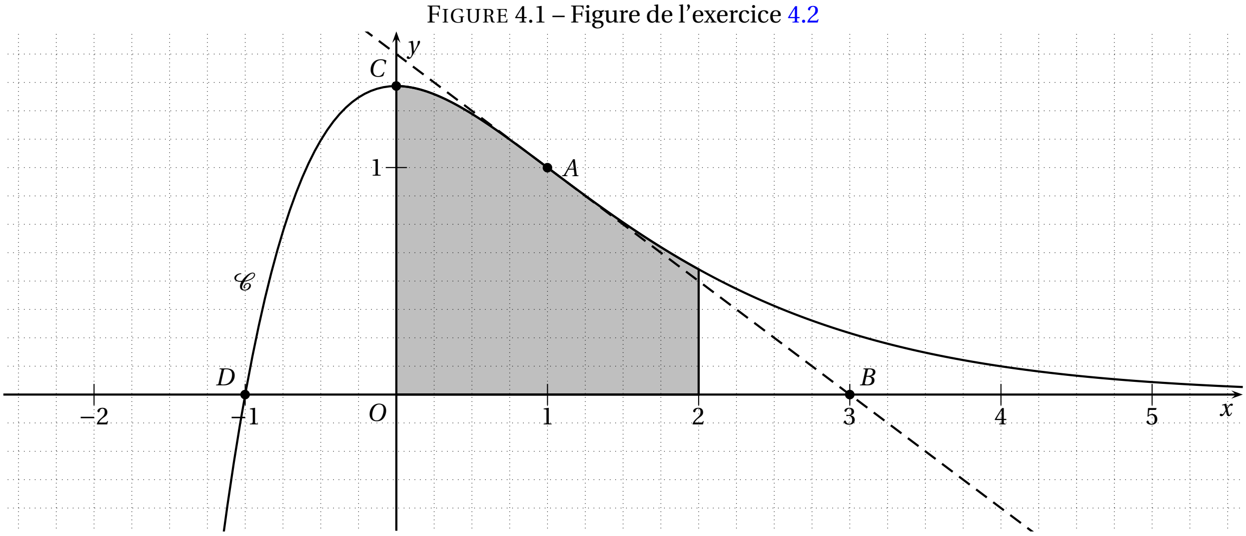
Calcul intégral – Géométrie dans l'espace

EXERCICE 4.1 (6 points)**.**
Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- $f(x) = -2(5x-1)^3$ pour $x \in \mathbb{R}$
- $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ pour $x \in [0\,;+\infty[$
- $h(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+3)^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$

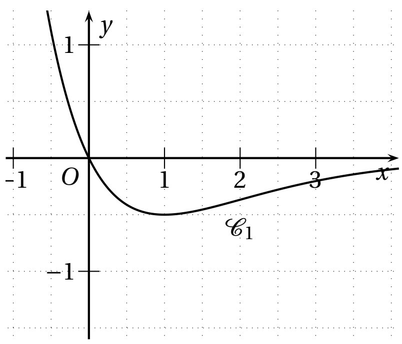
EXERCICE 4.2 (9 points)**.**
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ relativement à un repère orthogonal (1 unité = 2 cm sur l'axe des abscisses ; 1 unité = 3 cm sur l'axe des ordonnées) est donnée sur la figure 4.1 page 71.
La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points $A(1\,;1)$ et $D(-1\,;0)$. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en A passe par le point $B(3\,;0)$ et la tangente à la courbe en C, d'abscisse 0, est horizontale. L'axe des abscisses est asymptote à la courbe en $+\infty$.
Le domaine grisé $\mathscr{D}$ est délimité par la courbe $\mathscr{C}$, par l'axe des abscisses, par l'axe des ordonnées et par la droite d'équation $x = 2$.

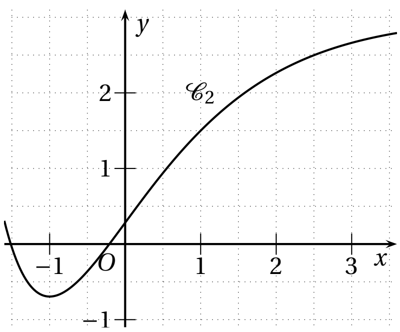
FIGURE 4.1 – Figure de l'exercice 4.2

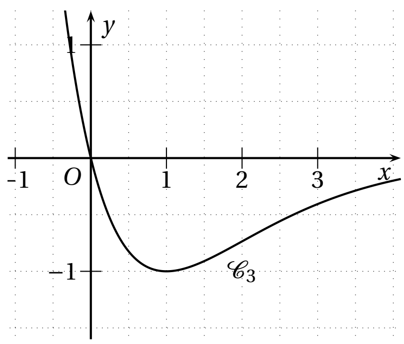


1. Avec les informations fournies par l'énoncé, déterminer, sans justifier $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(0)$.
2. On appelle $\mathscr{A}$ l'aire du domaine grisé $\mathscr{D}$. Sans justifier et avec la précision permise par le graphique, déterminer laquelle de ces trois inégalités est correcte :
   - $0 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 1$;
   - $1 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 3$;
   - $3 \leqslant \mathscr{A}$.
3. L'une des trois courbes ci-dessous est celle de f', fonction dérivée de f. Déterminer laquelle en justifiant votre choix.
4. L'une des trois courbes ci-dessous est celle de F, une primitive de f.
   (a) Déterminer laquelle en justifiant votre choix.
   (b) En déduire l'aire du domaine $\mathscr{D}$, en cm^2.
   (c) En déduire la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[-1\,;3]$ et la représenter sur la figure 4.1.
   On rappelle que la valeur moyenne $\overline{f}$ d'une fonction f sur un intervalle $[a\,;b]$ est donnée par la formule :

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$







EXERCICE 4.3 (5 points).

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

On considère les points $A(-1\,;2\,;1)$ et $B(1\,;-1\,;0)$.

1. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de la droite (AB).
2. Soit $M(x\,;\,y\,;\,z)$ un point de la droite (AB).
   Expliquer pourquoi les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires si et seulement si $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-1}{-1}$.
3. En déduire un système d'équations cartésiennes de (AB).
4. *Question bonus (hors barème)*
   Dans le repère ci-dessous, représenter la trace correspondant aux plans du système d'équations cartésiennes de la droite (AB), puis représenter la droite (AB).

FIGURE 4.2 – Figure de l'exercice 4.3