

Correction du Devoir commun

Exercice 1 :

1.

2. $D = (A + 3)^2 - 4$.

A (entrée)	a. 0	b. - 2
B	3	1
C	9	1
D (sortie)	5	- 3

Exercice 2 :

1. a. L'image de 1 par f est $f(1) = 3$.

b. $f(-2) = -1$.

c. Les antécédent(s) de 0 par f sont : -4 ; -1 ; 5 .

2. a. Le minimum de f sur I est -3 , atteint en $x = -3$.

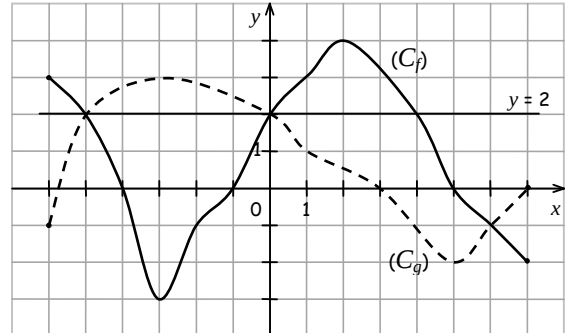
b. Le maximum de f sur I est 4 , atteint en $x = 2$.

3. a. Tableau de variations de f .

x	- 6	- 3	2	7
$f(x)$	3		4	
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		- 3		- 2

b. Tableau de signes de f .

x	-6	-4	-1	5	7		
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	-



5. a. Graphiquement les solutions de l'inéquation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) et (C_g) .
 $S = \{-5 ; 0 ; 5\}$.

b. Graphiquement les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 2$ sont les abscisses des points de (C_f) situés en dessous de la droite qui a pour équation $y = 2$.
 $S = [-5 ; 0] \cup [4 ; 6]$.

Exercice 3 :

x	- 3	0	4	6
$f(x)$		4		- 2
	2	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
			- 5	

1. L'image de 4 par f est -5 (réponse c.).

2. L'équation $f(x) = 3$ admet 2 solutions, une dans $[-3 ; 0]$ et l'autre dans $[0 ; 4]$.

3. On a : $f(-2) \leq f(-1)$ car f est strictement croissante sur $[-3 ; 0]$.

4. On a : $f(2) \geq f(3)$ car f est strictement décroissante sur $[0 ; 4]$.

5. On a : $-5 \leq f(3) \leq 0$ et $-5 \leq f(5) \leq -2$, donc je ne peux pas comparer $f(3)$ et $f(5)$.

Exercice 4 :

1. $f(x) = (x - 2)^2 - 9 = (x - 2)^2 - 3^2 = (x - 2 - 3)(x - 2 + 3) = (x - 5)(x + 1)$.

2. a. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - 5\right)\left(\frac{1}{2} + 1\right) = -\frac{9}{2} \times \frac{3}{2} = -\frac{27}{2}$.

b. $f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3} - 2)^2 - 9 = 3 - 4\sqrt{3} + 4 - 9 = -4\sqrt{3} - 2$.

c. Les antécédents de 0 par f vérifient : $f(x) = 0$ équivaut à $(x - 5)(x + 1) = 0$ (Produit nul)
équivaut à $x = 5$ ou $x = -1$.

Les antécédents de 0 par f sont : -1 ; 5 .

Exercice 5 :

1. M appartient à [AB], donc : $0 \leq AM \leq AB$ soit $0 \leq x \leq 8$.

Les valeurs possibles de x sont celles comprises entre 0 et 8. Ainsi x appartient à l'intervalle $[0 ; 8]$

2. Aire (AMIJ) = $AM^2 = x^2$; Aire (CKIH) = $CK \times CH = (8 - x)(10 - x)$.

Donc : $S(x) = x^2 + (8 - x)(10 - x)$.

3. $S(x) = x^2 + 80 - 8x - 10x + x^2 = 2x^2 - 18x + 80$.

4. a. Aire (ABCD) = $AB \times AD = 80$.

Aire (AMIJ) + Aire (CKIH) = $\frac{1}{2}$ Aire (ABCD) équivaut à $S(x) = 40$ équivaut à $2x^2 - 18x + 80 = 40$.

b. $2x^2 - 18x + 80 = 40$ équivaut à $2x^2 - 18x + 40 = 0$ équivaut à $x^2 - 9x + 20 = 0$ (en divisant les deux membres par 2).

c. $(x - 4)(x - 5) = x^2 - 5x - 4x + 20 = x^2 - 9x + 20$.

d. Donc : $x^2 - 9x + 20 = 0$ équivaut à $(x - 4)(x - 5) = 0$ (produit nul) équivaut à $x = 4$ ou $x = 5$.

La somme des aires des quadrilatères AMIJ et CKIH est égale à la moitié de l'aire du rectangle ABCD lorsque $AM = 4$ ou $AM = 5$.

Exercice 6 :

1.

2. a. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
 $AB = \sqrt{(2 + 2)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$
 $AC = \sqrt{(5 + 2)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{65}$;

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$
 $BC = \sqrt{(5 - 2)^2 + (-1 - 5)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

b. D'une part : $AC^2 = 45$.

D'autre part : $AB^2 + BC^2 = 20 + 65$.

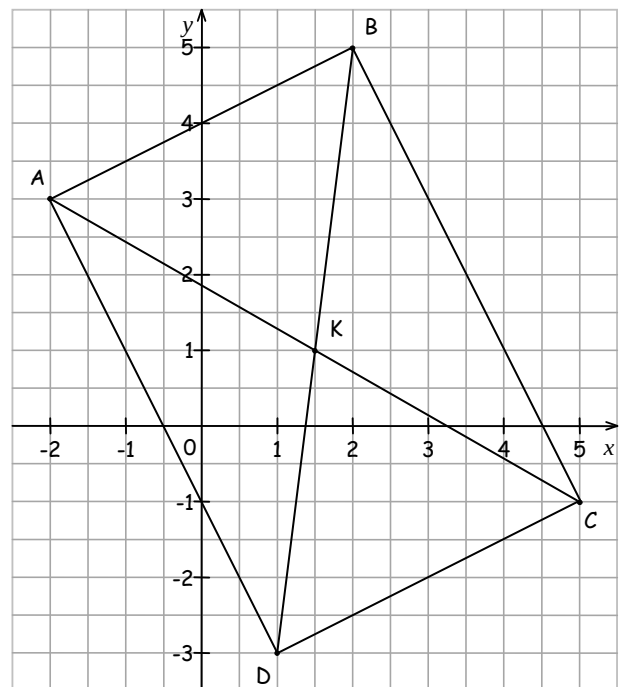
Donc : $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

3. a. Le milieu K du segment [AC] a pour coordonnées $(x_K ; y_K)$ avec :

$$x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2 + 5}{2} = \frac{3}{2} \text{ et } y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1.$$

Donc K $\left(\frac{3}{2} ; 1\right)$



4. a. Comme D est tel que K est le milieu de [BD], alors $x_K = \frac{x_B + x_D}{2}$ et $y_K = \frac{y_B + y_D}{2}$ équivaut à $\frac{3}{2} = \frac{2 + x_D}{2}$ et $1 = \frac{5 + y_D}{2}$

équivaut à $3 = 2 + x_D$ et $2 = 5 + y_D$ équivaut à $x_D = 3 - 2 = 1$ et $y_D = 2 - 5 = -3$.

Donc D $(1 ; -3)$.

5. K est le milieu de [AC] et de [BD], donc le quadrilatère ABCD a ses diagonales [AC] et de [BD] qui se coupent en leur milieu K, donc ABCD est un parallélogramme.

De plus, il a un angle droit, l'angle $\widehat{ABC}$, donc le parallélogramme ABCD est un rectangle.

Correction du Devoir commun

Exercice 1 :

1.

2. $D = (A + 3)^2 - 4$.

A (entrée)	a. 0	b. - 2
B	3	1
C	9	1
D (sortie)	5	- 3

Exercice 2 :

1. a. L'image de 1 par f est $f(1) = 3$.

b. $f(-2) = -1$.

c. Les antécédent(s) de 0 par f sont : -4 ; -1 ; 5 .

2. a. Le minimum de f sur I est -3 , atteint en $x = -3$.

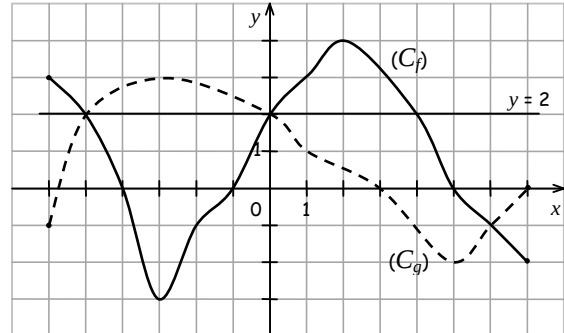
b. Le maximum de f sur I est 4 , atteint en $x = 2$.

3. a. Tableau de variations de f .

x	- 6	- 3	2	7
$f(x)$	3		4	
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		- 3		- 2

b. Tableau de signes de f .

x	-6	-4	-1	5	7		
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	-



5. a. Graphiquement les solutions de l'inéquation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) et (C_g) .
 $S = \{-5 ; 0 ; 5\}$.

b. Graphiquement les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 2$ sont les abscisses des points de (C_f) situés en dessous de la droite qui a pour équation $y = 2$.
 $S = [-5 ; 0] \cup [4 ; 6]$.

Exercice 3 :

x	- 3	0	4	6
$f(x)$		4		- 2
	$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$
	2		- 5	

1. L'image de 4 par f est -5 (réponse c.).

2. L'équation $f(x) = 3$ admet 2 solutions, une dans $[-3 ; 0]$ et l'autre dans $[0 ; 4]$.

3. On a : $f(-2) \leq f(-1)$ car f est strictement croissante sur $[-3 ; 0]$.

4. On a : $f(2) \geq f(3)$ car f est strictement décroissante sur $[0 ; 4]$.

5. On a : $-5 \leq f(3) \leq 0$ et $-5 \leq f(5) \leq -2$, donc je ne peux pas comparer $f(3)$ et $f(5)$.

Exercice 4 :

1. $f(x) = (x - 2)^2 - 9 = (x - 2)^2 - 3^2 = (x - 2 - 3)(x - 2 + 3) = (x - 5)(x + 1)$.

2. a. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - 5\right)\left(\frac{1}{2} + 1\right) = -\frac{9}{2} \times \frac{3}{2} = -\frac{27}{2}$.

b. $f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3} - 2)^2 - 9 = 3 - 4\sqrt{3} + 4 - 9 = -4\sqrt{3} - 2$.

c. Les antécédents de 0 par f vérifient : $f(x) = 0$ équivaut à $(x - 5)(x + 1) = 0$ (Produit nul)
équivaut à $x = 5$ ou $x = -1$.

Les antécédents de 0 par f sont : -1 ; 5 .

Exercice 5 :

1. M appartient à [AB], donc : $0 \leq AM \leq AB$ soit $0 \leq x \leq 8$.

Les valeurs possibles de x sont celles comprises entre 0 et 8. Ainsi x appartient à l'intervalle $[0 ; 8]$

2. Aire (AMIJ) = $AM^2 = x^2$; Aire (CKIH) = $CK \times CH = (8 - x)(10 - x)$.

Donc : $S(x) = x^2 + (8 - x)(10 - x)$.

3. $S(x) = x^2 + 80 - 8x - 10x + x^2 = 2x^2 - 18x + 80$.

4. a. Aire (ABCD) = $AB \times AD = 80$.

Aire (AMIJ) + Aire (CKIH) = $\frac{1}{2}$ Aire (ABCD) équivaut à $S(x) = 40$ équivaut à $2x^2 - 18x + 80 = 40$.

b. $2x^2 - 18x + 80 = 40$ équivaut à $2x^2 - 18x + 40 = 0$ équivaut à $x^2 - 9x + 20 = 0$ (en divisant les deux membres par 2).

c. $(x - 4)(x - 5) = x^2 - 5x - 4x + 20 = x^2 - 9x + 20$.

d. Donc : $x^2 - 9x + 20 = 0$ équivaut à $(x - 4)(x - 5) = 0$ (produit nul) équivaut à $x = 4$ ou $x = 5$.

La somme des aires des quadrilatères AMIJ et CKIH est égale à la moitié de l'aire du rectangle ABCD lorsque $AM = 4$ ou $AM = 5$.

Exercice 6 :

1.

2. a. $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
 $AB = \sqrt{(2 + 2)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$
 $AC = \sqrt{(5 + 2)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{65}$;

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$
 $BC = \sqrt{(5 - 2)^2 + (-1 - 5)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

b. D'une part : $AC^2 = 45$.

D'autre part : $AB^2 + BC^2 = 20 + 65$.

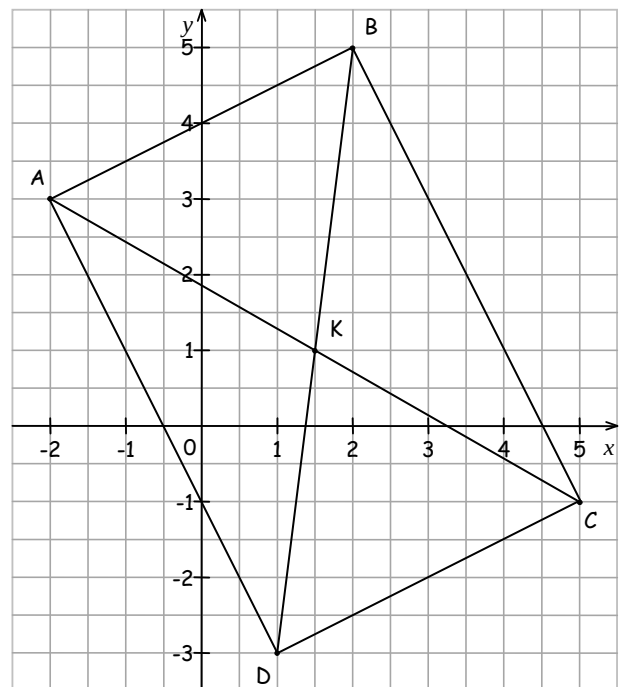
Donc : $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

3. a. Le milieu K du segment [AC] a pour coordonnées $(x_K ; y_K)$ avec :

$$x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2 + 5}{2} = \frac{3}{2} \text{ et } y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1.$$

Donc K $\left(\frac{3}{2} ; 1\right)$



4. a. Comme D est tel que K est le milieu de [BD], alors $x_K = \frac{x_B + x_D}{2}$ et $y_K = \frac{y_B + y_D}{2}$ équivaut à $\frac{3}{2} = \frac{2 + x_D}{2}$ et $1 = \frac{5 + y_D}{2}$

équivaut à $3 = 2 + x_D$ et $2 = 5 + y_D$ équivaut à $x_D = 3 - 2 = 1$ et $y_D = 2 - 5 = -3$.

Donc D $(1 ; -3)$.

5. K est le milieu de [AC] et de [BD], donc le quadrilatère ABCD a ses diagonales [AC] et de [BD] qui se coupent en leur milieu K, donc ABCD est un parallélogramme.

De plus, il a un angle droit, l'angle $\widehat{ABC}$, donc le parallélogramme ABCD est un rectangle.