Devoir surveillé n°1

Généralités sur les fonctions – Dérivation – Graphes

EXERCICE 1.1 (3 points).

La fonction f est définie sur $[-3\,;3]$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2+2x+1 & \text{sur } [-3\,;1] \\ mx+2 & \text{sur } [1\,;3] \end{cases}$

On appelle $\mathscr{C}_m$ sa représentation graphique.

1. Dans le repère de la figure 1.1 page 29 tracer **en bleu** $\mathscr{C}_{-1}$, la représentation graphique de f pour $m=-1$ et **en vert** $\mathscr{C}_1$, la représentation graphique de f pour $m=1$.
2. Déterminer m pour que f soit continue sur $[-3\,;3]$. Tracer alors sa représentation **en rouge** dans le même repère.

EXERCICE 1.2 (6 points).

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par, respectivement, $f(x) = -x^4 + \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - 2$ et $g(x) = -4x^3 + x^2 + 2x + 3$

1. (a) Étudier les variations de la fonction g.
   (b) Calculer $g(1)$ et $g(2)$.
   (c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [1\,;2]$.
   (d) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
   (e) Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

EXERCICE 1.3 (6 points).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par : $f(x) = \frac{x^2+x+4}{x-3}$

On appelle f' sa fonction dérivée et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. (a) Montrer que, pour tout $x \neq 3$, $f'(x) = \frac{x^2-6x-7}{(x-3)^2}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
   (c) Dresser le tableau des variations de f en indiquant les extremums locaux.
2. Déterminer, s'il y en a, les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
3. Déterminer, s'il y en a :
   (a) les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses ;
   (b) une équation de T_0, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
4. Dans le repère de la figure 1.4 page 30 :
   (a) placer les points de $\mathscr{C}$ correspondant aux extremums locaux ;
   (b) placer les éventuelles intersections de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées ;
   (c) tracer les tangentes de la question 3 ;
   (d) tracer la courbe $\mathscr{C}$

EXERCICE 1.4 (5 points).

*Pour les élèves **ne suivant pas** l'enseignement de spécialité.*

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\,;5]$, croissante sur chacun des intervalles $[-2\,;0]$ et $[2\,;5]$ et décroissante sur l'intervalle $[0\,;2]$.

On note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[-2\,;5]$.

La courbe Γ représentative de la fonction f est tracée sur la figure 1.2 page 29 dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Elle passe par les points A$(-2\,;-9)$, B$(0\,;-4)$, C$(1\,;-4,5)$, D$(2\,;-5)$ et E$(4\,;\,0)$.

En chacun des points B et D la tangente à la courbe Γ est parallèle à l'axe des abscisses.

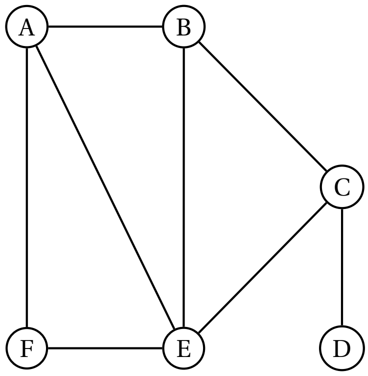
On note F le point de coordonnées $(3\,;-6)$.

La droite (CF) est la tangente à la courbe Γ au point C.

1. À l'aide des informations précédentes et de la figure, préciser sans justifier :
   (a) les valeurs de $f(0)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
   (b) le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[-2\,;5]$.
   (c) le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[-2\,;5]$.
2. Parmi les trois représentations graphiques 1.3 page 30, une représente la fonction dérivée f' de f et une autre représente une fonction h telle que $h' = f$ sur $[-2\,;5]$.
   Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction h.
   Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix

EXERCICE 1.4 (5 points).
*Pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité.*
Les questions sont indépendantes.

1. La figure ci-contre propose un graphe.
   (a) Citer deux sommets non adjacents (*justifier brièvement*).
   (b) Ce graphe est-il connexe (*justifier brièvement*) ?
   (c) Ce graphe contient-il un sous-graphe d'ordre 3 qui soit complet ? Et d'ordre 4 ? *Si oui le(les) citer.*
   (d) Ce graphe contient-il un sous-graphe stable d'ordre 3 ? *Si oui le citer.*
   (e) Déterminer graphiquement la distance entre chacun des sommets (*on pourra faire un tableau*).
   (f) Déterminer le diamètre de ce graphe.



2. Est-il possible que dans un groupe de six personnes (*on justifiera chaque réponse*) :
   (a) quatre d'entre elles aient 4 amis, une d'entre elles 2 amis et la dernière 6 amis ?
   (b) trois d'entre elles aient 5 amis, deux d'entre elles 3 amis et la dernière 2 amis ?
   (c) deux d'entre elles aient 3 amis, deux d'entre elles 2 amis et les deux dernières 1 ami ?
3. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Montrer que dans un graphe simple (sans boucle et sans arête parallèle) complet d'ordre n, le nombre d'arêtes est égal à $\frac{n(n-1)}{2}$.

Annexes

FIGURE 1.1 – Repère de l'exercice 1.1

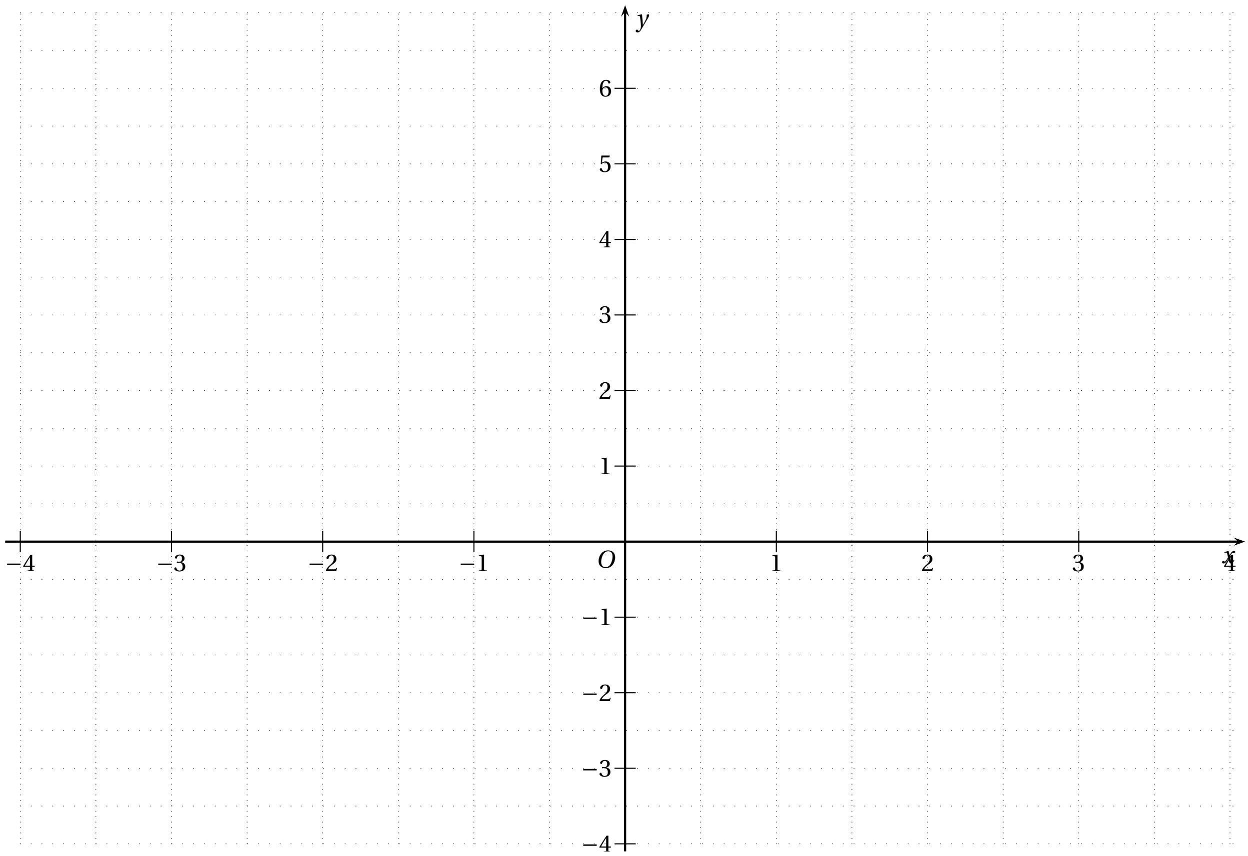


FIGURE 1.2 – Repère de l'exercice 1.4 (non spécialistes)

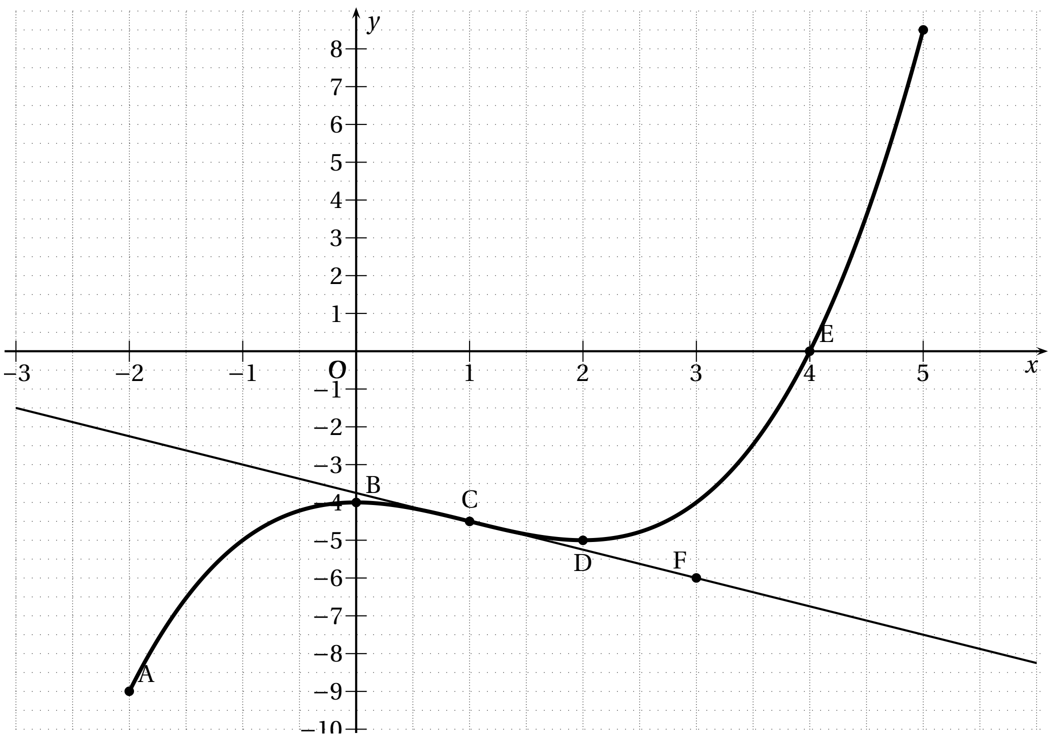


FIGURE 1.3 – Les trois courbes possibles de l'exercice 1.4 (non spécialistes)

Courbe 1 Courbe 2 Courbe 3

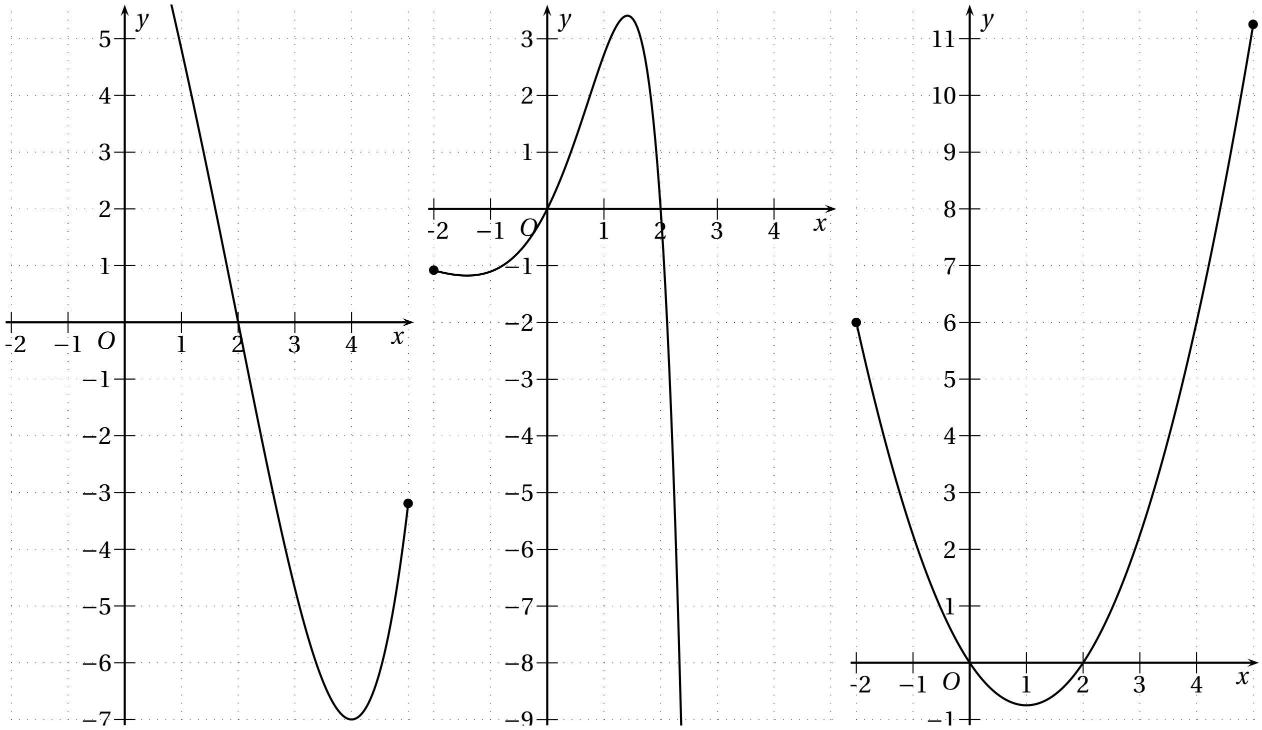


FIGURE 1.4 – Figure de l'exercice 1.3