Chapitre 3

Généralités sur les fonctions

Sommaire

3.1 Rappels sur les fonctions

Les définitions et propriétés suivantes ont été vues en Seconde aussi les exemples, remarques, illustrations seront limités et les propriétés ne seront pas démontrées.

Définition 3.1 (Notion de fonction)**.** Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.
Définir une fonction f sur un ensemble D, c'est associer, à chaque réel $x \in D$, *au plus* un réel noté $f(x)$.
On dit que $f(x)$ est . . . . de x par f et que x est . . . . de $f(x)$.
On note :

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

et on lit « f, la fonction de D dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(x)$ ».

Remarque. f désigne la fonction, $f(x)$ désigne le réel qui est l'image de x par f.

Définition 3.2 (Ensemble de définition)**.** L'ensemble des réels possédant une image par une fonction est appelé *ensemble de définition* de la fonction. On le note en général D_f.

Définition 3.3 (Courbe représentative)**.** Soit f une fonction. On appelle courbe représentative de f, notée en général $\mathscr{C}_f$, l'ensemble des points M de coordonnées . . . .
On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation . . . .

On veillera à ne pas confondre la fonction et sa représentation graphique.

Définition 3.4 (Variations d'une fonction)**.** Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que

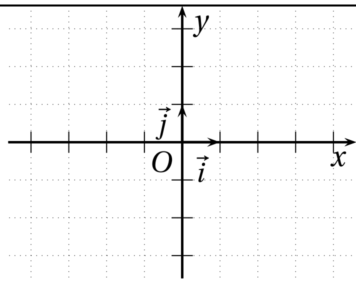
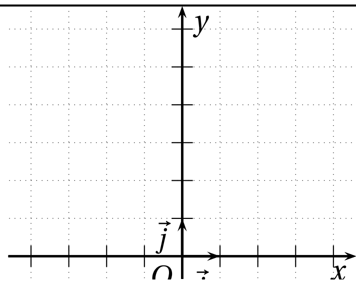
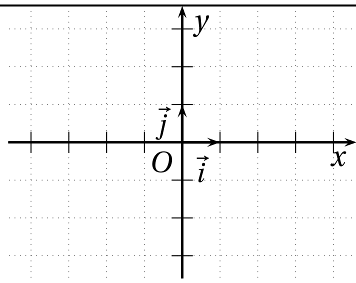
- f est *croissante sur* I si pour tous réels a et b de I on a : .... ;
- f est *décroissante sur* I si pour tous réels a et b de I on a : .... ;
- f est *monotone sur* I si ....

3.2 Fonctions de référence

3.2.1 Fonctions de référence déjà connues

Compléter le tableau 3.2.1 de la présente page.

TABLE 3.1: Fonctions de référence

Fonction Définie sur	Variations	Allure de la courbe représentative
Affine $f(x) =$ $D_f =$		
Carré $f(x) = x^2$ $D_f =$		
Inverse $f(x) =$ $D_f =$		

3.2.2 Nouvelles fonctions de référence

Activité 3.1 (La fonction racine)**.**
On appelle *fonction racine* la fonction qui à un réel x associe, s'il existe, le réel positif noté $\sqrt{x}$ tel que $(\sqrt{x})^2 = x$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction racine.
2. À l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un grapheur, représenter la courbe de la fonction racine.
3. Que peut-on conjecturer quant aux variations de la fonction racine ?
   Prouvons-le.
   Soit $0 \leqslant a < b$.
   (a) Que peut-on dire alors de $b - a$?
   (b) Montrer que $b - a = (\sqrt{b} + \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{a})$.
   (c) Que peut-on dire du signe de $\sqrt{b} + \sqrt{a}$? En déduire le signe de $\sqrt{b} - \sqrt{a}$.
   (d) En déduire alors le sens de variation de la fonction racine.

Activité 3.2 (La fonction cube)**.**
On appelle *fonction cube* la fonction qui à un réel x associe, s'il existe, le réel positif x^3.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction cube.
2. À l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un grapheur, représenter la courbe de la fonction cube.
3. Que peut-on conjecturer quant aux variations de la fonction cube ?
   Prouvons-le.
   Soit $a < b$.
   (a) Que peut-on dire alors de $a - b$?
   (b) Montrer que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
   (c) Si a et b sont positifs, que peut-on alors dire du signe de $a^3 - b^3$? En déduire alors le sens de variation de la fonction cube sur $\mathbb{R}^+$.
   (d) Si a et b sont négatifs, que peut-on alors dire du signe de $a^3 - b^3$? En déduire alors le sens de variation de la fonction cube sur $\mathbb{R}^-$.

3.3 Autres fonctions

3.3.1 Fonctions polynômes de degré 2 (rappel)

Ces fonctions ont déjà été revues dans le chapitre 1.
Rappelons ce qui va nous servir essentiellement dans ce chapitre :

Théorème 3.1. *Tout trinôme $ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $\alpha(x - \beta)^2 + \gamma$ où α, β et γ sont des réels. Cette forme s'appelle la* forme canonique *du trinôme.*

On a déjà vu que $\alpha = a$, $\beta = -\frac{b}{2a}$ et $\gamma = -\frac{\Delta}{4a}$. On a donc :

Propriété 3.2. *Si $a \neq 0$ alors $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ où $\Delta = b^2 - 4ac$.*

3.3.2 Fonctions homographiques (rappel)

Définition 3.5. On appelle *fonction homographique* toute fonction f pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ où $(c;d) \neq (0;0)$.
La courbe représentative d'une telle fonction est ....

Propriété 3.3. *Soit f une fonction homographique telle que $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Alors f est définie sur ....*

Propriété 3.4. *Soit f une fonction homographique de la forme $x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$. Alors peut s'écrire sous la forme $x \longmapsto \alpha + \frac{\beta}{cx+d}$*

On l'admettra.
On déterminera cette forme au cas par cas dans les exercices.
Cette forme est l'équivalent de la forme canonique même si on ne lui donne pas ce nom.

3.3.3 Opérations algébriques sur les fonctions

De la même manière qu'on peut ajouter, multiplier, diviser, etc. des nombres, on peut ajouter, multiplier, diviser, etc. des fonctions.

Définition 3.6. Soit f et g deux fonctions définies au moins sur D et k un réel. Le tableau suivant regroupe les opérations sur les fonctions f et g :

Opération	Notation	Définition	Définie pour
Somme de la fonction f et du réel k	$f+k$	$(f+k)(x) = f(x)+k$	$x \in D_f$
Produit de la fonction f et du réel k	kf	$(kf)(x) = kf(x)$	
Somme des fonctions f et g	$f+g$	$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$	$x \in D_f \cap D_g$
Différence des fonctions f et g	$f-g$	$(f-g)(x) = f(x)-g(x)$	
Produit des fonctions f et g	fg	$(fg)(x) = f(x) \times g(x)$	
Quotient des fonctions f et g	$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$x \in D_f \cap D_g$ et $g(x) \neq 0$

Propriété 3.5 (Variations de $f+g$)**.** *Soit deux fonctions f et g définies au moins sur un ensemble D.*

- *Si f et g sont deux fonctions croissantes sur D, alors la fonction $f+g$ est croissante sur D.*
- *Si f et g sont deux fonctions décroissantes sur D, alors la fonction $f+g$ est décroissante sur D.*

Preuve. Voir l'exercice 3.2. ◇

Propriété 3.6 (Variations de $f+k$)**.** *Soit f une fonction définie et monotone sur un intervalle I et k un réel. Les fonctions f et $f+k$ ont même sens de variation sur I.*

Preuve. Si f est croissante et $a < b$, alors $f(a) \leqslant f(b)$. Donc $f(a) + k \leqslant f(b) + k$ donc $f + k$ est aussi croissante.
On démontre de la même manière si f est décroissante. ♢

Exemple. La fonction $f : x \longmapsto x^2 + 2$ a les mêmes variations que la fonction carrée.

Propriété 3.7 (Variations de kf). *Soit f une fonction définie et monotone sur D.*

- *Si $k > 0$ alors les fonctions f et kf ont le même sens de variation sur D.*
- *Si $k < 0$ alors les fonctions f et kf ont des sens de variation opposés sur D.*

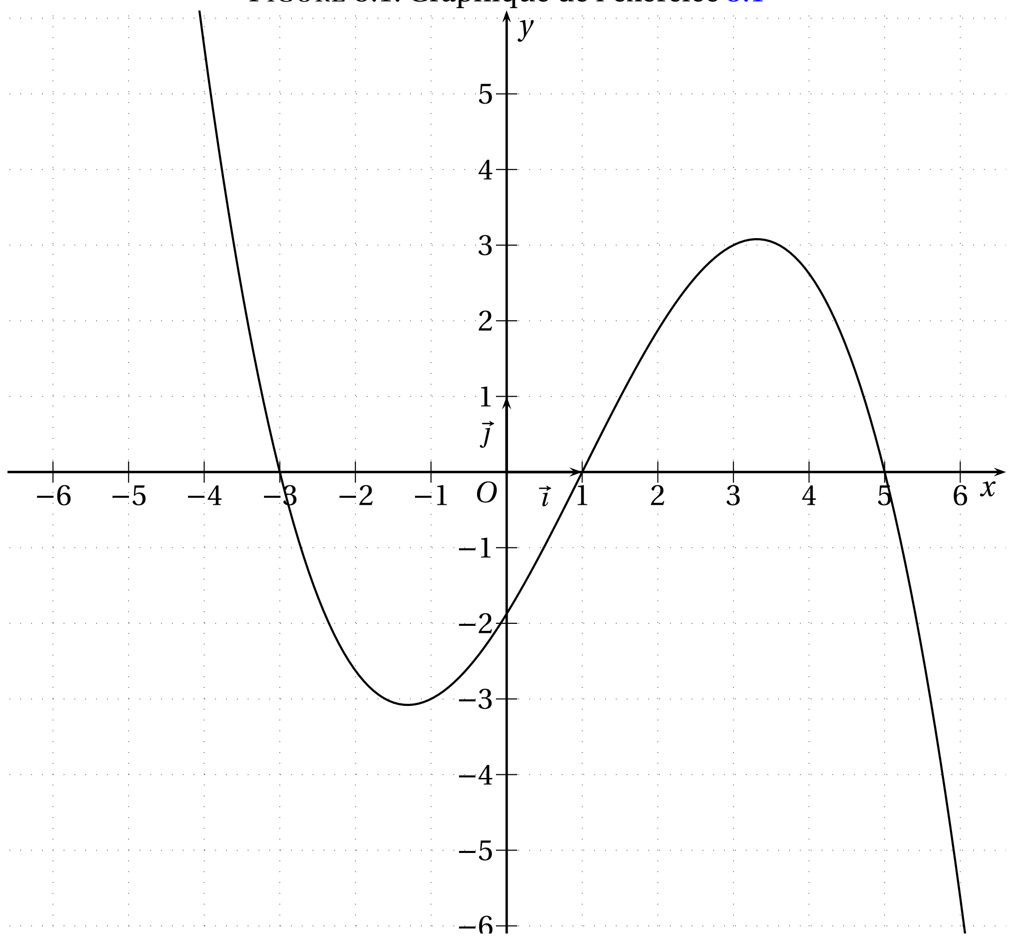
Preuve. Voir l'exercice 3.3. ♢

3.4 Exercices

EXERCICE 3.1.
On a représenté sur la figure ci-dessous la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Tracer sur cette même figure les courbes des fonctions suivantes :

- $u = f + 2$;
- $v = -2f$;
- $w(x) = 0,5f$.

FIGURE 3.1: Graphique de l'exercice 3.1



EXERCICE 3.2 (Preuve de la propriété 3.5).
Montrer que si a et b sont deux nombres d'un intervalle I tels que $a < b$ et que f et g sont croissantes sur I, alors $(f+g)(a) \leqslant (f+g)(b)$. Conclure.
Même question lorsque f et g sont décroissantes sur I.

EXERCICE 3.3 (Preuve de la propriété 3.7).
Montrer que si a et b sont deux nombres d'un intervalle I tels que $a<b$, si f croissante sur I et si $k<0$ alors $kf(a) \geqslant kf(b)$. Conclure.

EXERCICE 3.4.
On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $[-5;10]$:

x	-5		3		5		7		10
f	3	↘	0	↗	2	↘	0	↘	-3

Pour chacune des fonctions suivantes, dresser son tableau des variations en justifiant brièvement :

1. $g = f - 1$
2. $h = 2f$
3. $i = -f$
4. $j = -3f$

EXERCICE 3.5.
Soit f la fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 11$.

1. Donner la forme canonique de f.
2. (a) Compléter les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{ccccc}
3 & \leqslant & a & < & b \\
3-3 & \dots & a-3 & \dots & b-3 \\
\dots & \dots & (a-3)^2 & \dots & (b-3)^2 \\
\dots & \dots & (a-3)^2+2 & \dots & (b-3)^2+2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

   (b) Que peut-on en conclure ?
3. Faire le même travail en partant de : $a < b \leqslant 3$ et conclure.

EXERCICE 3.6.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2x + 4$.

1. Donner la forme canonique de f.
2. Déterminer par le calcul les variations de f.

EXERCICE 3.7.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^2 - 4x + 1$.

1. Donner la forme canonique de f.
2. Déterminer par le calcul les variations de f.

EXERCICE 3.8.
Soit f la fonction homographique définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \frac{2}{x-1}$.

1. (a) Compléter les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{ccccc}
1 & < & a & < & b \\
1-1 & \dots & a-1 & \dots & b-1 \\
\dots & \dots & \frac{1}{a-1} & \dots & \frac{1}{b-1} \\
\dots & \dots & \frac{2}{a-1} & \dots & \frac{2}{b-1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

   (b) Que peut-on en conclure ?
2. Faire le même travail en partant de $a < b < 1$ et conclure.

EXERCICE 3.9.
Soit f la fonction homographique définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ par
$$f : x \longmapsto \frac{3x+7}{x+2}$$

1. Montrer que $f(x) = 3 + \frac{1}{x+2}$.
2. Étudier les variations de f sur $]-2\,;+\infty[$.
3. Étudier les variations de f sur $]-\infty\,;-2[$.

EXERCICE 3.10.
Soit f la fonction homographique définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par
$$f : x \longmapsto \frac{x-3}{x-2}$$

1. Montrer que $f(x) = 1 - \frac{1}{x-2}$.
2. Étudier les variations de f sur $]2\,;+\infty[$.
3. Étudier les variations de f sur $]-\infty\,;2[$.

EXERCICE 3.11.
Soit f la fonction homographique telle que
$$f : x \longmapsto \frac{-4x-1}{2x-1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que $f(x) = -2 - \frac{3}{2x-1}$.
3. Étudier les variations de f sur $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$.
4. Étudier les variations de f sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}[$.

EXERCICE 3.12.
L'objectif de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par :
$$f : x \longmapsto \frac{x^2+2x-3}{x+1}$$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire.
On considère la fonction g définie par : $g(x) = -\frac{4}{x+1}$.
Étudier les variations de g sur $]-1\,;+\infty$ et sur $]-\infty\,;-1[$.
Partie B.

1. Montrer que : $f(x) = x + 1 - \frac{4}{x+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
2. Justifier que f est la somme de deux fonctions croissantes sur chacun des intervalles où elle est définie.
3. En déduire les variations de f sur chacun des intervalles où elle est définie.
4. On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
   Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec chacun des axes du repère.

EXERCICE 3.13.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par :
$$f : x \longmapsto \frac{-x^2+5x-4}{x-2}$$

1. Montrer que : $f(x) = -x + 3 + \frac{2}{x-2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$.
2. En déduire les variations de f sur chacun des intervalles où elle est définie.
3. On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
   Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec chacun des axes du repère.