Mathématiques en Terminale STG

David ROBERT

2009–2010

Sommaire

Chapitre 1

Taux d'évolution

Sommaire

1.1 Activités

ACTIVITÉ 1.1.
Le tableau ci-contre donne la fréquentation à midi de la cantine d'un lycée du lundi au mercredi :

Lundi	Mardi	Mercredi
1200	1340	520

1. (a) Calculer la variation absolue entre lundi et mardi.
   (b) Calculer la variation relative entre lundi et mardi. Cette variation est appelée taux d'évolution entre lundi et mardi.
   L'exprimer sous forme décimale, puis en pourcentage.
   (c) Calculer le taux d'évolution entre mardi et mercredi.
2. (a) Le taux d'évolution entre lundi et jeudi est $-3,5\,\%$.
   Calculer la fréquentation de la cantine le jeudi.
   (b) Le taux d'évolution entre mardi et vendredi est $+0,012$.
   Calculer la fréquentation de la cantine le vendredi.

ACTIVITÉ 1.2.
En 2 004, il y avait 250 adhérents dans un club de tennis. Ce nombre a augmenté de 4 % en 2 005 et ensuite a baissé de 5 % en 2 006.

1. Compléter le tableau 1.1 de la présente page.

TABLE 1.1 – Tableau de l'activité 1.2, question 1

Année	Effectif	Variation en %	Taux d'évolution	Coefficient multiplicateur
2 004	250			
2 005		hausse de 4 %	$t_1 = \ldots\ldots$	$k_1 = \ldots\ldots$
2 006		baisse de 5 %	$t_2 = \ldots\ldots$	$k_2 = \ldots\ldots$
Résumé des deux évolutions		.... de ...... %	$T = \ldots\ldots$	$K = \ldots\ldots$

2. (a) Déterminer la valeur arrondie au millième du nombre k tel que : $k^2 = K$.
   (b) En déduire la valeur arrondie au millième du nombre t tel que : $(1+t)^2 = K$.
   (c) Si le taux d'évolution du nombre d'adhérents de ce club avait été t % par an sur ces deux années, quel serait le taux global d'évolution ?
3. (a) Compléter le tableau 1.2 de la présente page où l'on remplacera la valeur de t par celle trouvée précédemment.

TABLE 1.2 – Tableau de l'activité 1.2, question 3a

Année	Effectif	Variation en %	Taux d'évolution	Coefficient multiplicateur
2 004	250			
2 005		.... de ...... %	$t = \ldots\ldots$	$k = \ldots\ldots$
2 006		.... de ...... %	$t = \ldots\ldots$	$k = \ldots\ldots$
Résumé des deux évolutions		.... de ...... %	$T = \ldots\ldots$	$K = \ldots\ldots$

   (b) Quel résultat le tableau permet-il de vérifier ?

ACTIVITÉ 1.3.
Le tableau ci-dessous donne le nombre d'animaux dans un zoo.

Année	2 000	2 001	2 002	2 003	2 004	2 005
Population	1 250	1 200	1 000	1 250	1 500	2 000
Indice	100					

1. (a) Quel est le taux d'évolution du nombre d'animaux entre 2 000 et 2 001 ?
   (b) Interpréter ce résultat en terme d'augmentation ou de diminution en pourcentage.
2. (a) Si la population avait été de 100 animaux en 2 000, quel aurait été le nombre d'animaux en 2 001 avec le taux d'évolution trouvé en 1a ?
   (b) Compléter la case correspondante dans le tableau.
   Cette valeur trouvée est appelé indice de la population en 2 001 avec pour base 100 en 2 000.
   (c) Compléter la troisième ligne du tableau selon le même principe qu'en 2b.
   (d) Donner la signification des indices trouvés en 2 002, en 2 003 et en 2 005.

ACTIVITÉ 1.4.
La population A d'une ville a augmenté de 1 % par an pendant deux ans entre 2 004 et 2 006.
La population d'une ville B a augmenté de 30 % pendant cette même période.
Anne habite la ville A et dit que la population de sa ville a augmenté de 2 % sur cette période (2 × 1 % = 2 %).
Blanche habite la ville B et dit que la population de sa ville a augmenté de 60 % sur cette période (2 × 30 % = 60 %).

1. (a) Pour chacune des deux villes, quel est le coefficient multiplicateur correspondant à l'augmentation entre 2 004 et 2 006 ? En déduire le taux d'évolution correspondant.
   (b) Qui, de Anne ou de Blanche, est la plus proche de la réalité ?
2. (a) Compléter le tableau 1.3 page ci-contre.
   (b) Expliquer pourquoi les résultats des deux dernières colonnes sont identiques.

TABLE 1.3 – Tableau de l'activité 1.4, question 2a

Taux t	$(1+t)^2$	$1+2t$	$(1+t)^2-(1+2t)$	t^2
0,2				
0,1				
0,01				
0,005				

TABLE 1.4 – Tableau de l'activité 1.4, question 3a

Taux d'évolution t	k	k'	différence $k-k'$	différence en %
+40 %	1,96	1,8	0,16	16 %
+10 %				
+5 %				
+1 %				

(c) Compléter la phrase suivante pour la rendre correcte : $(1+t)^2 \approx 1+2t$ si ....

3. (a) Compléter le tableau 1.4 de la présente page.

   (b) Que peut-on dire à la lecture de ce tableau ?

   (c) Quel est le lien avec ce tableau et celui du 2a ?

ACTIVITÉ 1.5.

Pour une évolution au taux t, on multiplie par .... : $x \longrightarrow y$

Pour retrouver la valeur de départ, on divise par .... : $x \longleftarrow y$

1. Un prix a subit une évolution au taux t, le nouveau prix est y.
   Parmi les propositions suivantes, choisir celle(s) qui convient (conviennent) :
   - $y = tx$;
   - $y = x + t$;
   - $y = (1+t)x$;
   - $x = \frac{1}{1+t}y$;
   - $x = y - tx$;
   - $x = \frac{y}{t}$;

2. (a) Compléter le tableau ci-dessous :

Taux t	$\frac{1}{(1+t)}$	$1-t$	Différence
+20 %	$\approx 0,83$	0,80	0,03
+10 %			
+5 %			
+1 %			

   (b) Compléter la phrase suivante pour la rendre correcte :

$$\frac{1}{(1+t)} \approx 1-t \text{ si } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3. Dans quels cas, une hausse de t % est-elle à peu près compensée par une baisse de t % ?

ACTIVITÉ 1.6.

En 2 004, le prix d'un article était 150 €. Ce prix augmente de 20 % entre 2 004 et 2 006.

1. (a) Calculer le prix de cet article.

   (b) Assia affirme « puisque le prix a augmenté de 20 % sur deux ans, cela revient au même que s'il avait augmenté de 10 % chaque année ». A-t-elle raison ?

2. (a) En notant k le coefficient multiplicateur correspondant à l'évolution au taux t et k' le coefficient multiplicateur correspondant à deux évolutions successives au taux $\frac{t}{2}$, compléter le tableau ci-dessous :

Taux t	k	Prix correspondant	k'	Prix correspondant	Différence de prix
+0,40	1,40	$150 \times 1,40 = 210$	$1,20^2 = 1,44$	$150 \times 1,44 = 216$	$216 - 210 = 6$
+0,10					
+0,05					
+0,01					

   (b) Que peut-on dire à la lecture du tableau ?

1.2 Taux d'évolution et coefficient multiplicateur (rappels)

1.2.1 Calculs

Calcul d'un pourcentage

Propriété 1.1. *Le pourcentage d'une quantité A par rapport à une quantité B est :* ....

Exemple 1.1. 36 élèves sur 250 sont internes. Quel pourcentage des élèves, les internes représentent-ils ?

Pourcentage d'une quantité

Propriété 1.2. *t % d'une quantité B est égal à :* ....

Exemples 1.2.
- 75 % de 1 200 est égal à : ....
- Dans un lycée, les 76 élèves de TSTG représentent 12 % des élèves. Combien y a-t-il d'élèves dans le lycée ?

1.2.2 Taux d'évolution et coefficient multiplicateur

Propriété 1.3. *Si une quantité varie de y_1 à y_2, alors le taux d'évolution de y_1 à y_2 est le nombre t tel que :*

$$\frac{y_2}{y_1} = \ldots\ldots\ldots = k \text{ ou encore } t = \ldots\ldots\ldots$$

$k =$ .... est le coefficient multiplicateur.

Remarques. t est aussi appelé la variation relative de y_1 par rapport à y_2.
- Si t est positif, l'évolution est une ....
- Si t est négatif, l'évolution est une ....

Exemples 1.3.
- Un produit coûtant 50 € en 2 004 a coûté 55 € en 2 005.
  Le coefficient multiplicateur permettant de passer de 50 à 55 est : $k =$ .... donc $t =$ .... soit une ....de ....%.
- Ce produit a ensuite coûté 49,5 € en 2 006.
  Le coefficient multiplicateur permettant de passer de 55 à 49,5 est : $k =$ .... donc $t =$ .... soit une ....de ....%.

1.2.3 Augmenter en pourcentage

Propriété 1.4. *Une quantité y_1 augmente de t %. Sa nouvelle valeur est égale à $y_2 =$ ....*
$k =$ .... est le coefficient multiplicateur permettant de passer de y_1 à y_2.

Exemple 1.4. Un prix de 520 € augmente de 24 %. Quel est le nouveau prix ?
Augmenter un prix de 24 % revient à le multiplier par : ....
Le coefficient multiplicateur permettant de trouver le nouveau prix est : $k =$ ....
Le nouveau prix est : ....

1.2.4 Diminuer en pourcentage

Propriété 1.5. *Une quantité y_1 diminue de t %. Sa nouvelle valeur est égale à $y_2 =$ ....*
$k =$ .... est le coefficient multiplicateur permettant de passer de y_1 à y_2.

Exemple 1.5. Un ordinateur 865 € baisse de 20 %. Quel est le nouveau prix ?
Augmenter un prix de 20 % revient à le multiplier par : ....
Le coefficient multiplicateur permettant de trouver le nouveau prix est : $k =$ ....
Le nouveau prix est : ....

EXERCICE 1.1.
Compléter le tableau suivant :

Évolution en %	Augmentation de 35 %	Diminution de 12 %		
Taux d'évolution t	$+0,35$		$-0,54$	
Coefficient multiplicateur k	1,35			2,3

1.2.5 Évolutions successives

Propriété 1.6. *Une quantité x subit une évolution au taux t_1 ; le coefficient multiplicateur est : k_1 = ...*
Cette quantité subit ensuite une seconde évolution t_2 ; le coefficient multiplicateur est : k_2 = ...
Le coefficient multiplicateur global est : k = ... = ...

Exemple 1.6. Un article augmente de 20 %, puis baisse 15 %. Quel est le taux d'évolution global ?

- Augmenter un prix de 20 % revient à le multiplier par : ....
  Le coefficient multiplicateur est : k_1 = ...
- Diminuer un prix de 15 % revient à le multiplier par : ....
  Le coefficient multiplicateur est : k_2 = ...
- Le coefficient multiplicateur global est : k = ...
  Il a donc finalement subit une évolution globale au taux : t = ... soit une .... de .... %.

Conclusion : Augmenter un nombre de 20 %, puis diminuer de 15 %, revient à .... de .... %.

1.2.6 Évolutions réciproques

Propriété 1.7. *Si le coefficient multiplicateur permettant de passer de y_1 à y_2 est k, le coefficient multiplicateur permettant de passer de y_2 à y_1 est ....*

Exemple 1.7. Un article valant 50 € augmente de 25 %.
Le coefficient multiplicateur permettant de trouver le nouveau prix est : k = ...
Le coefficient multiplicateur permettant de passer de .... à 50 est : ....
Ce qui correspond à une .... de .... %.
Conclusion : Pour compenser une augmentation de 25 %, il faut effectuer une .... de .... %.
On dit que l'évolution réciproque d'une augmentation de 25 % est une .... de .... %.

1.3 Taux d'évolution moyen et moyenne géométrique

Propriété 1.8. *Si une quantité subit deux évolutions successives à des taux respectifs t_1 et t_2, le taux global est T qui vérifie : $1+T$ = ...*
On appelle taux moyen d'évolution, le taux unique t qui, répété deux fois, fournit le même résultat que les évolutions successives, c'est-à-dire que : $1+T$ = ...
Autrement dit : $(1+t)^2$ = ... ou encore : $1+t$ = ...
On dit que : $1+t$ est la moyenne .... de .... et ....
t est le taux moyen d'évolution : il s'interprète en terme de hausse et de baisse en pourcentage.

Exemple 1.8. En 2 004, le taux d'évolution du prix du livre était de $+0,10$ et en 2 005, pour le même livre, le taux d'évolution était de $-0,05$.

1. Calculer le taux global T correspondant à ces deux évolutions successives. Interpréter ce taux en terme de hausse ou de baisse en pourcentage.
2. Calculer le taux moyen annuel t d'évolution durant cette période (arrondir au centième) et interpréter ensuite en terme de hausse ou de baisse en pourcentage.

1.4 Indices

Les indices sont essentiellement utilisés dans des séries chronologies.

La valeur d'une grandeur observée une année ou un mois sert de référence (indice 100) et toutes les autres données (antérieures ou ultérieures) sont exprimées sous forme de pourcentage par rapport à cette année de référence.

Indices et grandeurs sont alors proportionnels.

Les indices sont particulièrement utiles pour comparer des évolutions de deux grandeurs quand les grandeurs ne sont pas du même ordre ou n'ont pas les mêmes unités (comparer PIB et population par exemple).

EXERCICE 1.2.
On veut connaître l'évolution du PIB par habitant en France depuis 1 990 qui servira d'année de référence.
On dispose du tableau suivant qu'on complètera au fur et à mesure par les réponses aux questions :

Année	1 990	1 991	1 992	1 993	1 994	1 995	1 996	1 997	1 998	1 999
PIB (en $)	1 195	1 201	1 322	1 250	1 331	1 535	1 554	1 406	1 447	1 432
Indice										

1. Calculer l'indice des années 1 991, 1 995, 1 996 et 1 999 (arrondis à 0,1).
2. En déduire le pourcentage d'évolution du PIB par habitant entre :
   - 1 990 et 1 991 ;
   - 1 990 et 1 995 ;
   - 1 990 et 1 999 ;
3. Quelle est l'unité de l'indice ?

EXERCICE 1.3.
Le tableau ci-dessous donne les montants, en millairds d'euros, des cotisations sociales versées par les non-salariés en France, de 1 994 à 1 999 (*source : INSEE*) :

Année	1 994	1 995	1 996	1 997	1 998	1 999
Montant	16,66	17,33	19,03	19,25	15,23	15,99

1. En prenant 100 pour base en 1 994, calculer les indices des autres années.
2. En déduire les pourcentages d'évolution de ces montants de 1 994 à 1 996, de 1 994 à 1 998, 1 994 à 1 999.
3. En utilisant ces indices, calculer les pourcentages d'évolution de ces montants de 1 997 à 1 999.

EXERCICE 1.4.
Le tableau ci-dessous done l'évolution de l'indice des prix à la consommation en France entre 1 998 et 2 004 en prenant pour année de base l'année 1 998 (indice 100) (*source : INSEE*) :

Année	1 998	1 999	2 000	2 001	2 002	2 003	2 004
Indice	100	100,5	102	103,5	105,6	107,6	109,3

1. Donner l'évolution globale des prix consommés par les ménages entre :
   - 1 998 et 1 999 ?
   - 1 998 et 2 001 ?
   - 1 998 et 2 004 ?
   - 2 000 et 2 002 ?
   - 2 000 et 2 004 ?
2. Reconstruire un tableau donnant l'évolution de l'indice des prix entre 2 000 et 2 004, en prenant 2 000 come année de référence (indice 100).

EXERCICE 1.5.
Le tableau suivant indique l'évolution du PIB base 100 en 1 980 aux États-Unis (EU), au Japon et dans l'Union Européenne (UE) :

Année	1 980	1 990	1 999
EU	100	132,6	172,3
Japon	100	155,2	166,0
UE	100	126,8	146,8

1. Donner le pourcentage d'évolution du PIB aux EU entre 1 980 et 1 990 puis entre 1 980 et 1 999. Faire de même pour le PIB du Japon et dans l'UE.
2. Pour les EU, calculer l'indice du PIB en 1 999 base 100 en 1 990. faire de même pour le Japon et l'UE (valeurs arrondies à 0,1 près).
3. Si le PIB aux EU était de 5 554 milliards de dollars en 1 990, calculer le PIB en 1 980 et en 1 999 (valeurs arrondies au milliard de dollars).
4. Peut-on dire que le PIB du Japon est supérieur à celui de l'UE ?

EXERCICE 1.6.
Les quatre premiers pays producteurs de gaz naturel et leur production en millions de m^3 sont donnés dans le tableau ci-dessous :

	1 990	2 002	2 003
Russie	641 000	595 300	616 500
États-unis	504 900	537 000	541 000
Canada	106 800	187 800	180 500
Royaume-Uni	49 600	102 600	102 800

Source : Comité professionnel du pétrole Cédigaz.

1. Reproduire ce tableau en affectant pour chaque année l'indice 100 à la Russie. Quelle évolution étudie-t-on dans ce cas ?
2. Reproduire ce tableau en affectant pour chaque pays l'indice 100 à l'année 2 002. Quelle évolution étudie-t-on dans ce cas ?

1.5 Approximation d'un taux d'évolution

1.5.1 Formule d'approximation locale

Propriété 1.9. *Pour t proche de 0,* $(1+t)^2 \approx \ldots\ldots\ldots$ *et* $\frac{1}{1+t} \approx\approx \ldots\ldots\ldots$

1.5.2 Application aux petits taux

Propriété 1.10. *Pour t proche de 0 :*
- *Deux évolutions successives aux taux t correspondent approximativement à une évolution au taux de :* ....
- *Le taux réciproque d'une évolution au taux de t est approximativement de :* ....

Attention ! : Ces approximations sont vraies seulement si t est très proche de 0.

Exemple 1.9. Un CD coûte 15 €. Son prix augmente deux fois de suite de 0,5 %.

1. Donner l'ordre de grandeur de l'augmentation en pourcentage, et à l'aide de cette approximation, calculer le nouveau prix du CD.
2. Calculer la valeur exacte du prix du CD.
3. Comparer les résultats des deux questions.

Devoir surveillé n°1

Taux d'évolution

EXERCICE 1.1 (8 points).

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chaque question, trois réponses sont proposées. Une seule des réponses proposées est correcte.
On demande de cocher celle que vous pensez être correcte sachant qu'une réponse juste rapporte 1 point, une réponse fausse enlève 0,5 point et qu'une absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point.

1. Le nombre de clients de téléphonie mobile en France en 2 008 est estimé à 58,1 millions, ce qui représente 89,1 % de la population française (*source : Wikipédia*). Quelle est la meilleure approximation de l'effectif de la population française ?
   ❒ 109,9 millions ❒ 51,8 millions ❒ 65,2 millions
2. Sur les 58,1 millions de clients de téléphonie mobile, Orange France en compte 24,238 millions (*source : Wikipédia*) soit environ :
   ❒ 58,3 % ❒ 41,7 % ❒ 39,7 %
3. En 2 008, la moyenne tarifaire des forfaits mobiles en Europe était de 20 € alors que la moyenne française est de 29,77 € (*source : Commission Européenne*). Les forfaits mobiles sont donc en moyenne environ :
   ❒ 32,8 % plus élevés en France qu'en Europe ❒ 67,2 % plus élevés en France qu'en Europe ❒ 48,9 % plus élevés en France qu'en Europe
4. Fin janvier 2 009 le nombre de demandeurs d'emploi inscrits en catégorie 1 [1] a augmenté, par rapport à décembre 2 008, de 4,3 % (*source : AFP*). Le nombre de demandeurs d'emploi de cette catégorie a donc été multiplié par :
   ❒ 0,043 ❒ 1,43 ❒ 1,043
5. Fin janvier 2 009 le nombre de demandeurs d'emploi inscrits en catégorie 1 a augmenté, par rapport à janvier 2 008 de 15,4 % (*source : AFP*). Sachant qu'en janvier 2 009 cette catégorie comportait 2 204 500 demandeurs d'emploi, leur effectif en janvier 2 008 était d'environ :
   ❒ 1 865 007 ❒ 1 910 311 ❒ 2 543 993
6. De janvier 2 008 à janvier 2 009 le nombre de demandeurs d'emploi de catégorie a augmenté de 15,4 % et il a augmenté de 4,3 % de décembre 2008 à janvier 2 009. Entre janvier 2 008 et décembre 2 008, ce nombre a donc augmenté d'environ :
   ❒ 9,6 % ❒ 10,6 % ❒ 11,1 %
7. De fin janvier 2 008 à fin janvier 2 009, le nombre d'offres d'emploi déposées à Pôle emploi a diminué de 29,3 % (*source : ministère de l'économie*). Pour annuler une telle baisse il faudrait que le nombre d'offres d'emploi augmente d'environ :
   ❒ 22,7 % ❒ 29,3 % ❒ 41,4 %
8. Le prix du gaz a subi deux évolutions successives : $-9\,\%$ en novembre 2 003 ; $+5,2\,\%$ en novembre 2 004. Globalement, le prix du gaz a évolué environ de :
   ❒ $-4,3\,\%$ ❒ $-3,8\,\%$ ❒ $4,3\,\%$

EXERCICE 1.2 (5 points).

On arrondira les résultats à 0,01 %.

Du site l'Expansion.com on peut obtenir les informations suivantes sur l'évolution de l'impôt sur le revenu (IR) pendant le second quinquennat de Jacques CHIRAC :

En	2 002	2 007
Évolution de l'IR	−5 %	−6 %

1. (a) Sachant que sur le quinquennat la diminution de l'IR a atteint 15,8 %, déterminer l'évolution de l'impôt sur le revenu sur la période 2 003-2 006.
   (b) L'article nous apprend que l'impôt sur le revenu n'a baissé ni en 2 005, ni en 2 006. En supposant que la baisse a été la même en 2 003 et en 2 004, quelle a été la baisse moyenne chacune de ces deux années ?
2. (a) Sachant que Jacques Chirac avait promis une baisse de 33 % sur le quinquennat, qu'elle aurait du être l'évolution de l'impôt sur la période 2 003-2 006. ?
   (b) En supposant une baisse constante en 2 003, 2 004, 2 005 et 2 006, quelle aurait du être la baisse moyenne chacune de ces quatre années ?

1. Cette catégorie, qui sert de baromètre de référence, ne retient que les personnes à la recherche d'un emploi à temps plein et à durée indéterminée.

EXERCICE 1.3 (7 points)**.**
Le tableau ci-dessous donne les indices de production de deux entreprises (base 100 le 31/12/1 992).

Année	1 992	1 993	1 994	1 995	1 996	1 997	1 998	1 999
Entreprise A	100	105	110	110	98	95	100	110
Entreprise B	100	96	97	101	110	106	110	112

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier brièvement votre réponse.
   (a) Les deux entreprises ont eu la même production au cours de l'année 1 992.
   (b) L'entreprise B n'a connu que deux années de baisse de sa production.
   (c) L'évolution en pourcentage de l'entreprise A a été la même en 1 993 et en 1 994.
2. Pour chacune des deux entreprises, en indiquant les calculs effectués, déterminer :
   - le taux d'évolution de la production sur la période 1 992-1 997 ;
   - le taux d'évolution de la production sur la période 1 997-1 999.

Chapitre 2

Dérivation

Sommaire

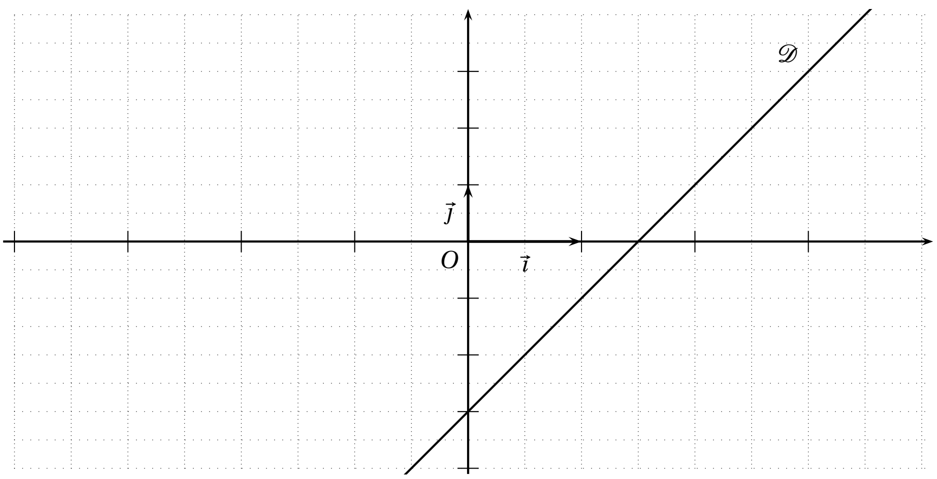
2.1 Nombre dérivé (rappels)

2.1.1 Activités

ACTIVITÉ 2.1.
On se place dans le plan muni du repère orthogonal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (voir la figure 2.1 de la présente page).

1. On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation : $y = 2x - 3$.
   (a) Déterminer l'ordonnée du point A de $\mathscr{D}$ dont l'abscisse est 0.
   (b) Déterminer l'abscisse du point B de $\mathscr{D}$ dont l'ordonnée est 0.
   (c) Déterminer l'abscisse du point D de $\mathscr{D}$ dont l'ordonnée est 3.
   (d) Le point $E\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$ appartient-il à la droite $\mathscr{D}$?
2. (a) Placer dans le repère le point $F(-2; 1)$.
   (b) Tracer dans les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$ et $\mathscr{D}_4$ passant par F et de coefficients directeurs respectifs 0, -2, $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$.

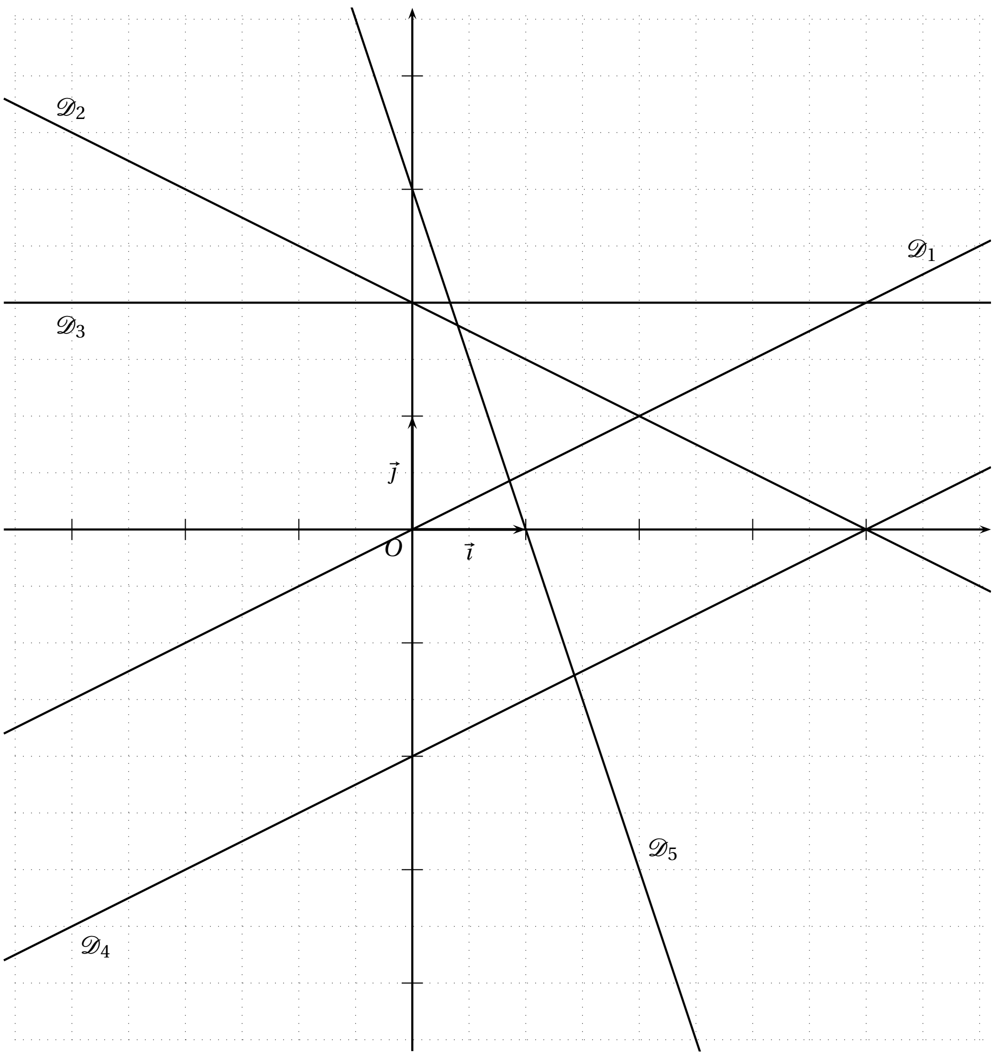
FIGURE 2.1 – Figure de l'activité 2.1



ACTIVITÉ 2.2.
On considère le repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de la figure 2.2 de la présente page dans lequel on a représenté les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_4$ et $\mathcal{D}_5$. Ces droites coupent l'axe des abscisses et des ordonnées en des points dont les coordonnées sont des nombres entiers.

1. (a) Indiquer, sans calcul, le signe des coefficients directeurs m_1, m_2, m_3, m_4 et m_5 respectifs de chacune des droites
   (b) Classer ces droites par ordre croissant de leur coefficient directeur.
2. (a) En utilisant les coordonnées de deux points d'une droite, déterminer, par le calcul, la valeur exacte du coefficient directeur de chacune de ces cinq droites.
   (b) Les résultats des questions 1 et 2 sont-ils en accord ?
3. Déterminer l'équation réduite de chacune des droites.
4. Déterminer algébriquement, puis graphiquement les coordonnées des points d'intersection des droites :
   (a) $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ (b) $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ (c) $\mathcal{D}_4$ et $\mathcal{D}_5$

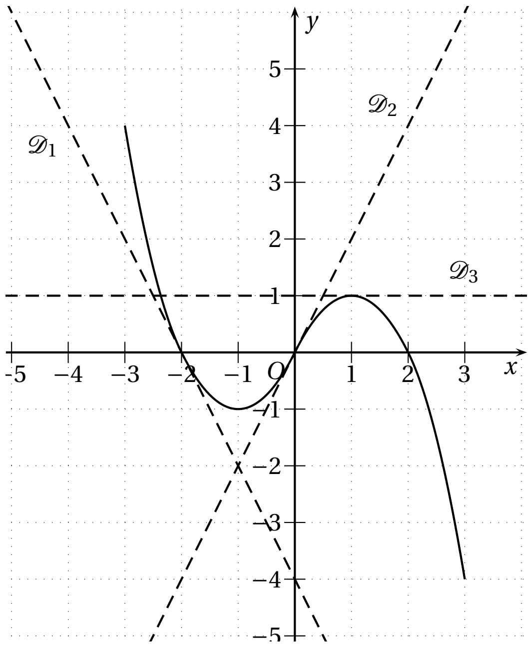
FIGURE 2.2 – Figure de l'activité 2.2



ACTIVITÉ 2.3.
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure 2.3 de la présente page représente graphiquement une fonction f.

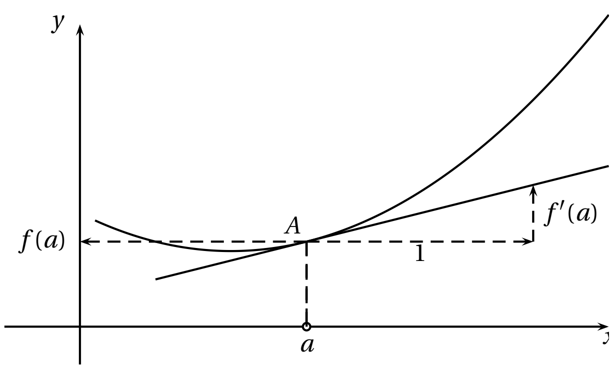
1. Les trois droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$ sont des tangentes à la courbe.
   En quels points les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$ sont-elles tangentes à la courbe $\mathscr{C}$? (indiquer leurs coordonnées)
2. Compléter la phrase : On peut interpréter graphiquement $f'(-2)$ comme ....
   Donc $f'(-2) = \dots\dots\dots$
3. Donner par lecture graphique :
   - $f'(0) = \dots\dots\dots$
   - $f'(1) = \dots\dots\dots$

FIGURE 2.3 – Figure de l'activité 2.3



2.1.2 Bilan

Définition 2.1. Le *nombre dérivé* d'une fonction f en a est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point de coordonnées $(a; f(a))$. Il se note $f'(a)$. On dit alors que f est dérivable en a.



Propriété 2.1. *Par définition, la tangente au point A $(a; f(a))$ a une équation de la forme $y = f'(a)x + p$.*

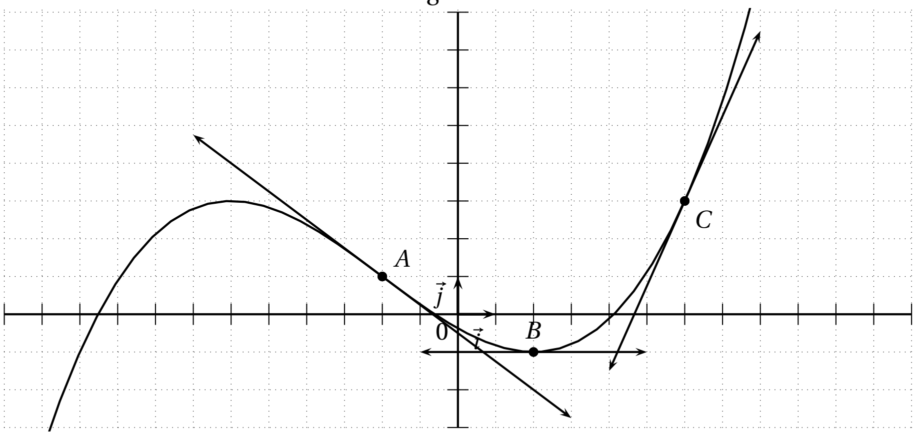
Remarque. Pour trouver p on remplace x et y par les coordonnées de A.

2.1.3 Exercices

EXERCICE 2.1.
On donne sur la figure 2.4 de la présente page la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f en y indiquant les droites tangentes aux points A, B et C.

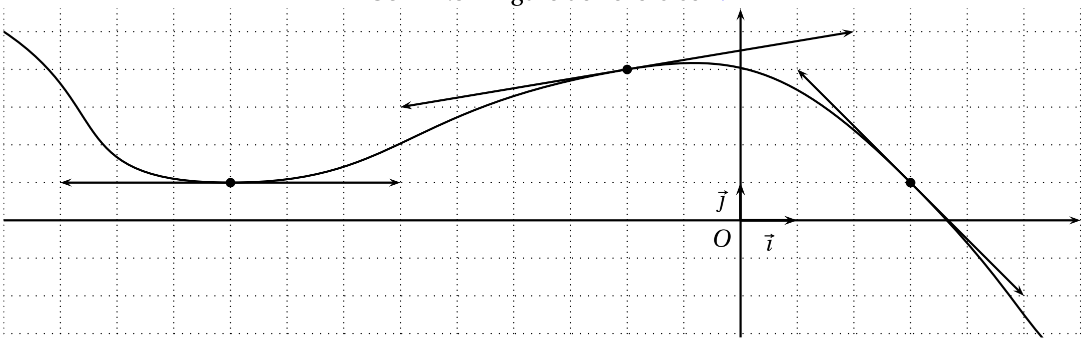
1. Donner par lecture graphique $f(-2)$ et $f(6)$
2. Donner par lecture graphique $f'(-2)$, $f'(6)$ et $f'(2)$
3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2.

FIGURE 2.4 – Figure de l'exercice 2.1



EXERCICE 2.2.
On donne sur la figure 2.5 de la présente page la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction définie f sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à cette courbe en certains points.

FIGURE 2.5 – Figure de l'exercice 2.2

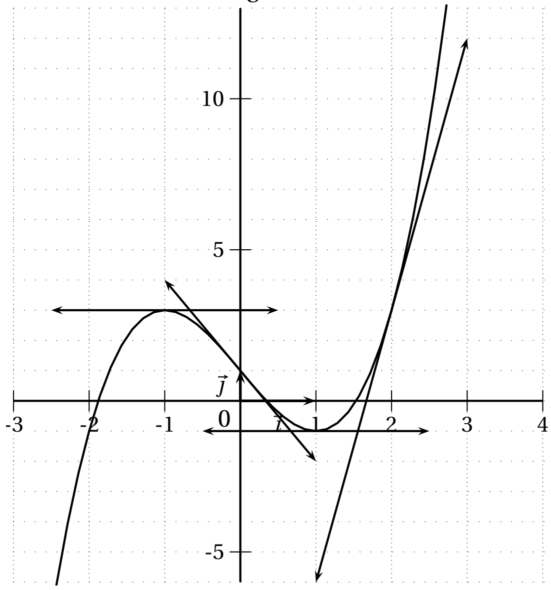


1. Donner par lecture graphique $f(3)$, $f(-2)$ et $f(-9)$.
2. Donner par lecture graphique $f'(3)$, $f'(-2)$ et $f'(-9)$.
3. Déterminer l'équation réduite de T, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.

EXERCICE 2.3.
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure 2.6 page suivante est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthogonal.

1. Déterminer graphiquement :
   (a) $f(0)$ et $f'(0)$;
   (b) $f(-1)$ et $f'(-1)$;
   (c) $f(2)$ et $f'(2)$;
   (d) L'équation de la tangente T_{-1} au point d'abscisse -1 ;
   (e) L'équation de la tangente T_0 au point d'abscisse 0.
2. La droite T tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2 et d'ordonnée -1 passe par le point A de coordonnées $(1 ; 26)$

FIGURE 2.6 – Figure de l'exercice 2.3



(a) Déterminer par le calcul une équation de T.

(b) En déduire $f'(-2)$.

EXERCICE 2.4.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-3;3]$ ayant les propriétés suivantes :

- f est décroissante sur $[-3;0]$;
- $f(0) = -2$ et $f'(0) = 0$;
- $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;
- $f(3) = 9$.

EXERCICE 2.5.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0;9]$ ayant les popriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 3$ et $f'(1) = 2$;
- $f(3) = 6$ et $f'(3) = 1$;
- $f(5) = 7$ et $f'(5) = 0$;
- $f(6) = 6$ et $f'(6) = -4$.

EXERCICE 2.6.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0;5]$ ayant les popriétés suivantes :

- $f(0) = 1$;
- f est décroissante sur l'intervalle $[0;2]$;
- f admet en 2 un minimum égal à -3 ;
- $f(3) = -1$ et $f(5) = -1$;
- $f'(2) = 0$, $f'(3) = 1$ et $f'(5) = -1$;
- pour tout $x \in [2;5]$, $f(x) < 0$.

EXERCICE 2.7.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-5;5]$ ayant les popriétés suivantes :

- $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;
- $f(0) = 3$, $f(2) = 1$ et $f(4) = 2$;
- $f'(0) = 0$, $f'(2) = -\frac{1}{2}$ et $f'(4) = 3$.

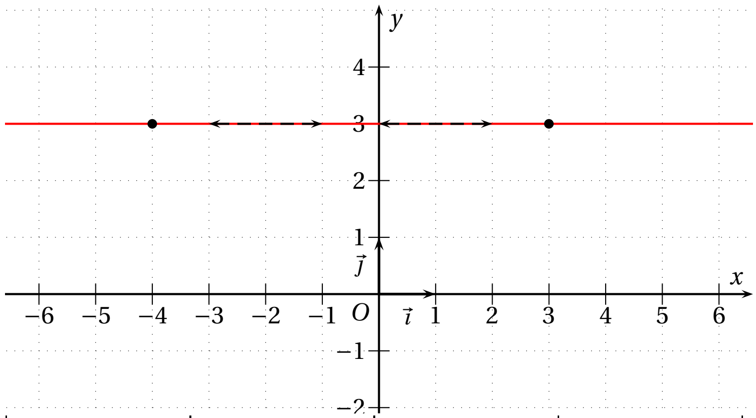
On fera apparaître toutes les tangentes qu'on peut déduire de l'énoncé.

2.2 Fonction dérivée

2.2.1 Activités

ACTIVITÉ 2.4 (Fonctions dérivées des fonctions usuelles)**.**
Dans chacun des cas suivants, compléter le tableau et conjecturer l'expression de $f'(x)$.

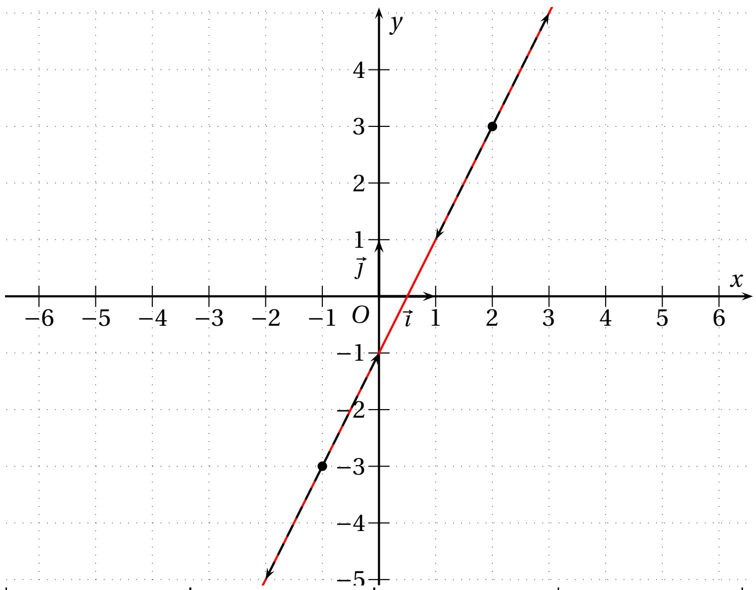
FIGURE 2.7 – Fonction constante : $f(x) = 3$



x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$					

$f'(x) = \ldots\ldots$

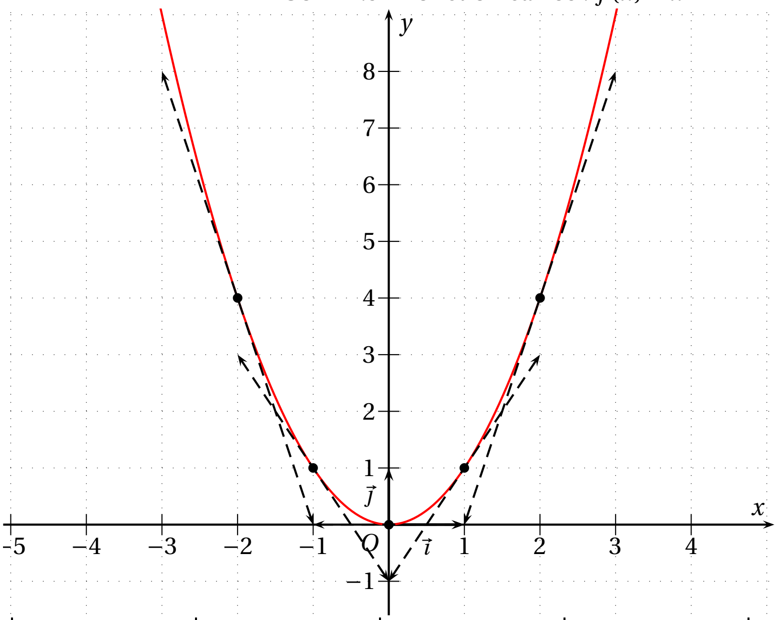
FIGURE 2.8 – Fonction affine : $f(x) = 2x - 1$



x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$					

$f'(x) = \ldots\ldots$

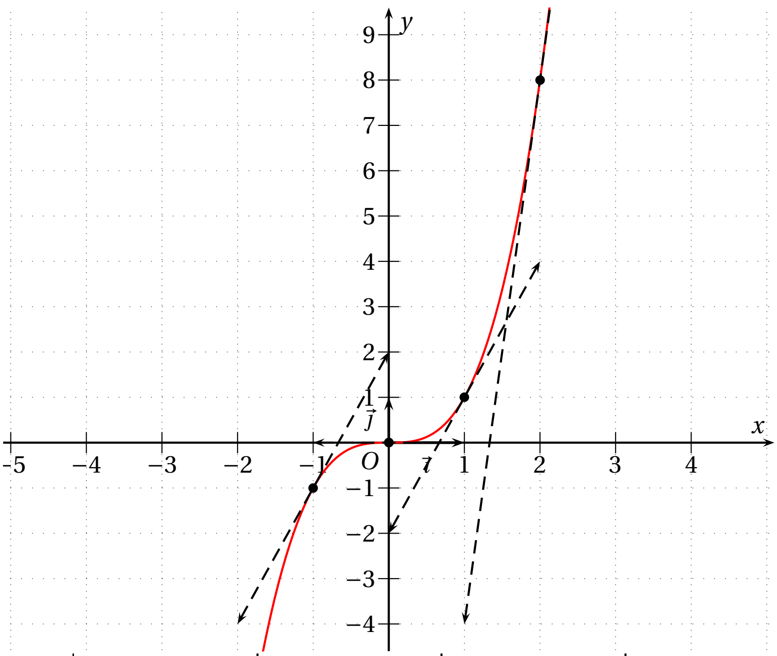
FIGURE 2.9 – Fonction carrée : $f(x) = x^2$



x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$					

$f'(x) = \ldots\ldots$

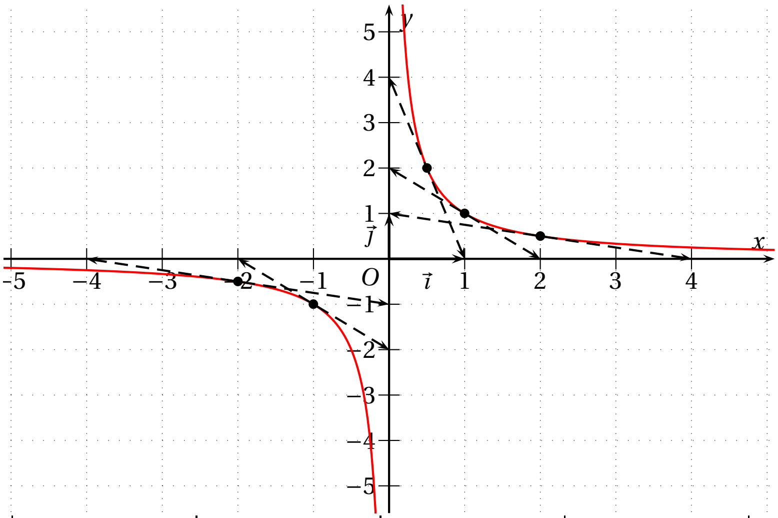
FIGURE 2.10 – Fonction cube : $f(x) = x^3$



x	-1	0	1	2
$f'(x)$				

$f'(x) = \ldots\ldots$

FIGURE 2.11 – Fonction inverse : $f(x) = \dfrac{1}{x}$



x	-2	-1	$0,5$	1	2
$f'(x)$					

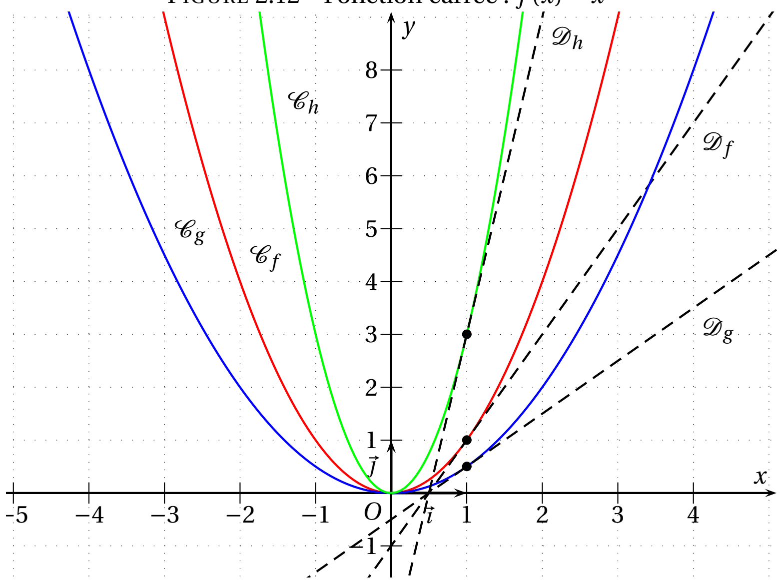
$$\boxed{f'(x) = \ldots\ldots}$$

ACTIVITÉ 2.5 (Fonction dérivée du produit d'une fonction par une constante)**.**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $\mathscr{D}_f$ sa tangente au point d'abscisse 1.

Soient g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\dfrac{f(x)}{2}$ et $h(x) = 3f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On nomme $\mathscr{D}_g$ et $\mathscr{D}_h$ leurs tangentes respectives au point d'abscisse 1.
On nomme enfin $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ les courbes respectives de f, g et h.

1. Déterminer par lecture graphique $f'(1)$, $g'(1)$ et $h'(1)$.
2. Conjecturer l'expression de $g'(x)$ et de $h'(x)$ en fonction de $f'(x)$.

FIGURE 2.12 – Fonction carrée : $f(x) = x^2$



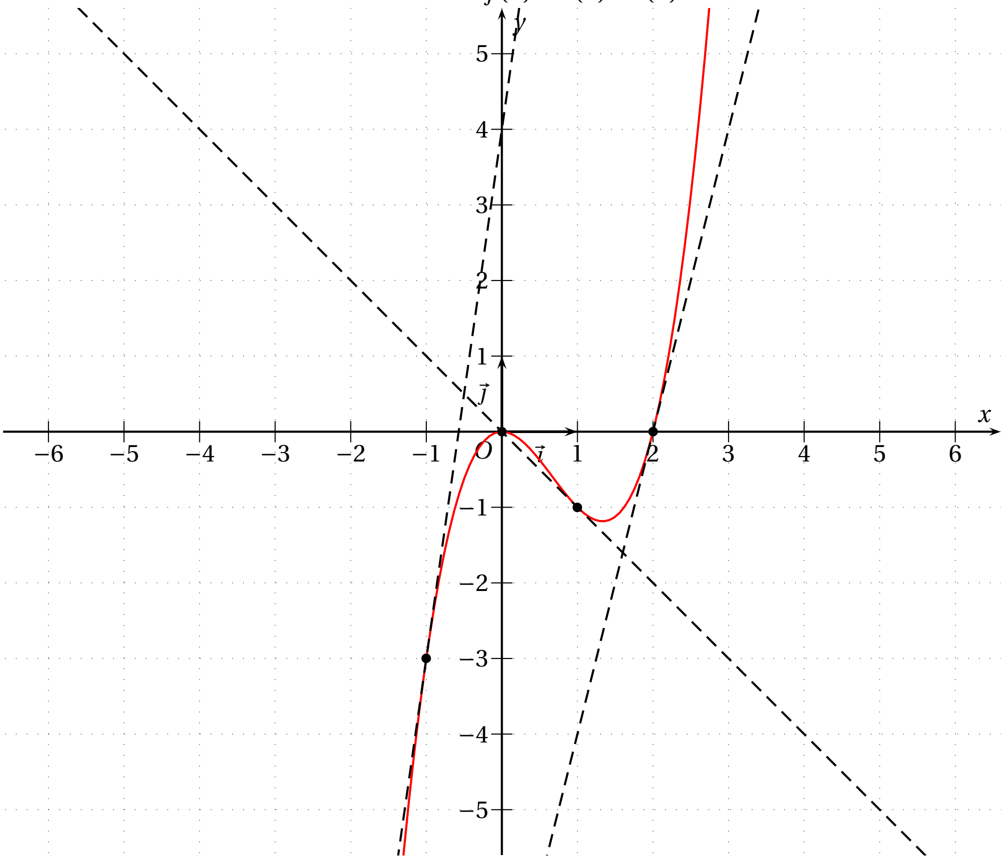
ACTIVITÉ 2.6 (Fonction dérivée d'une somme de fonction)**.**

1. Soient u, v et f trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3$, $v(x) = -2x^2$ et $f(x) = u(x) + v(x)$.

   (a) Déterminer $u'(x)$ et $v'(x)$.

   (b) On donne sur la figure 2.13 de la présente page la courbe représentative de f ainsi que quelques tangentes. À l'aide de la question précédente et de la figure, compléter le tableau suivant :

FIGURE 2.13 – $f(x) = u(x) + v(x)$



x	-1	0	1	2
$u'(x)$				
$v'(x)$				
$f'(x)$				

   (c) Conjecturer l'expression de $f'(x)$ en fonction de $u'(x)$ et de $v'(x)$.

2. Soient l, m et g trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $l(x) = x^2$, $m(x) = x - 2$ et $g(x) = l(x) \times m(x)$.

   (a) Déterminer $l'(x)$ et $m'(x)$.

   (b) Montrer que $g(x) = f(x)$.

   (c) Compléter alors le tableau suivant :

x	-1	0	1	2
$l'(x)$				
$m'(x)$				
$g'(x)$				

(d) Quelle formule « intuitive » est fausse ?

2.2.2 Bilan et compléments

Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Compléter le tableau 2.1 de la présente page.

TABLE 2.1 – Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	**définie sur**	**Fonction dérivée f'**	**définie sur**
$f(x) = k$ (constante)	$\mathbb{R}$	$f'(x) =$	
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) =$	
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) =$	
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) =$	
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+ = [0;+\infty[$	$f'(x) =$	

Opérations algébriques et dérivation

Soient u et v définies et dérivables sur un même intervalle I. Compléter le tableau 2.2 de la présente page.

TABLE 2.2 – Opérations sur les fonctions dérivées

Fonction	**Fonction dérivée**
ku avec $k \in \mathbb{R}$	
$u + v$	
$u \times v$	
u^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	
$\dfrac{1}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	
$\dfrac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	

2.2.3 Exercices

Déterminer des fonctions dérivées

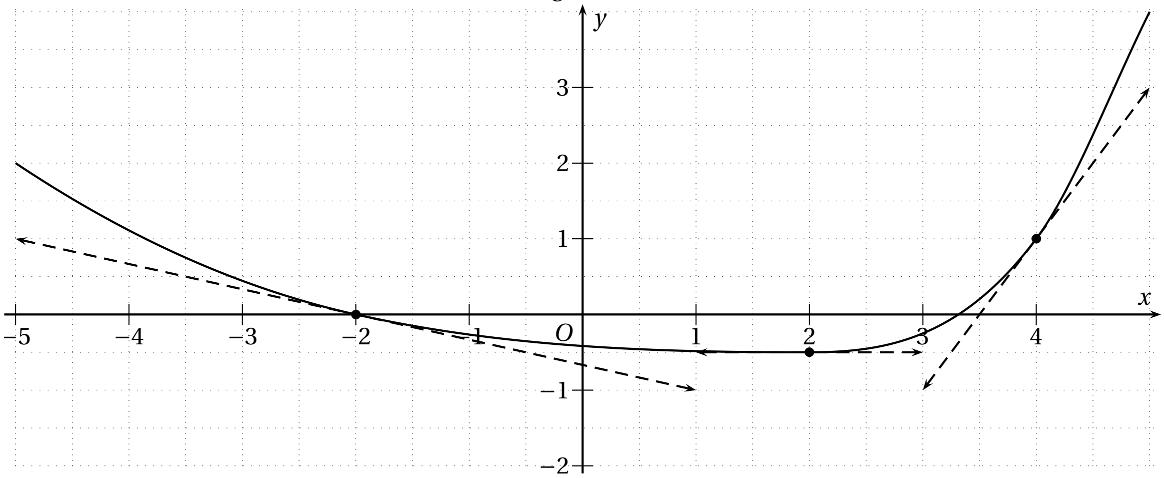
- Sommes : 30 à 33 page 71
- Produits : 35 à 37 page 71
- Puissances : 39 et 41 page 73
- Inverses : 44 et 46 page 73
- Quotients : 55, 56 et 58 page 74
- Problèmes : 83 à 88 page 82

Devoir surveillé n°2

Dérivation

EXERCICE 2.1 (6 points)**.**
On donne sur la figure 2.1 de la présente page la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

FIGURE 2.1 – Figure de l'exercice 2.1



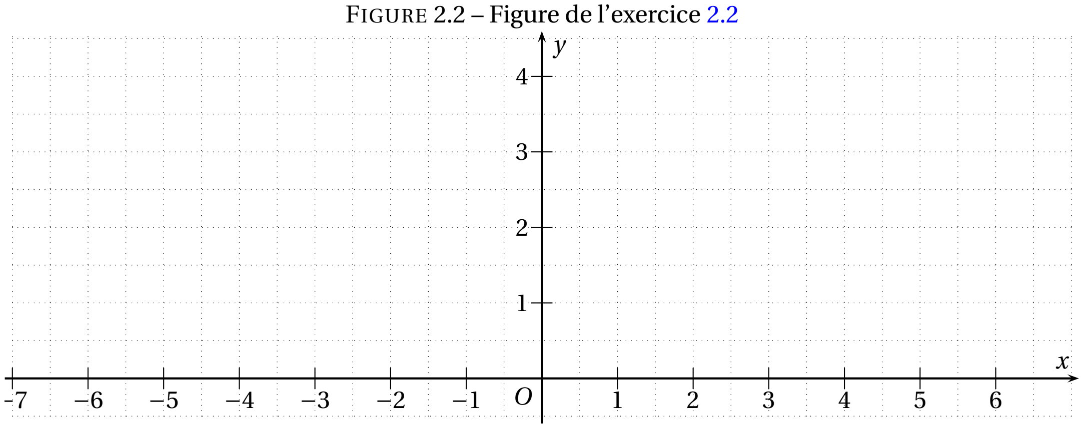
1. Déterminer $f(-2)$, $f(2)$ et $f(4)$.
2. Déterminer $f'(-2)$, $f'(2)$ et $f(4)$.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse 4.

EXERCICE 2.2 (4 points)**.**
Dans le repère de la figure 2.2 de la présente page, tracer la courbe représentative d'une fonction f telle que :

- la courbe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;
- la fonction f est définie sur $[-6;6]$;
- $f(0)=3$ et $f'(0)=0$;
- $f(2)=1$ et $f'(2)=-\frac{1}{2}$;
- $f(5)=2$ et $f'(5)=3$;
- Le maximum de $f(x)$ est 4 et le minimum de $f(x)$ est 0.

On tracera toutes les tangentes qu'on peut déduire de l'énoncé.

FIGURE 2.2 – Figure de l'exercice 2.2



EXERCICE 2.3 (4 points)**.**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-2x^2+3x+2$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Déterminer $f(1)$ et $f'(1)$
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.

EXERCICE 2.4 (6 points).
Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = (x^2 + x + 1)^4$$

$$g(x) = \frac{1}{2x^2 + 1}$$

$$h(x) = (x^3 + 2x)(6x + 2)$$

$$\ell(x) = \frac{x^2 + 3x + 7}{x - 1}$$

Chapitre 3

Statistiques à deux variables

Sommaire

3.1 Activités

Activité 3.1 (Ajustement affine par une méthode graphique)**.**
A la suite d'une visite médicale dans dix entreprises de services informatiques, on a constaté qu'une certaine proportion du personnel travaillant devant un ordinateur souffrait régulièrement de maux de tête ou de troubles de la vision. Ces résultats figurent, par entreprise, dans le tableau ci-dessous dans lequel l'horaire est donné en heures et centièmes d'heures.

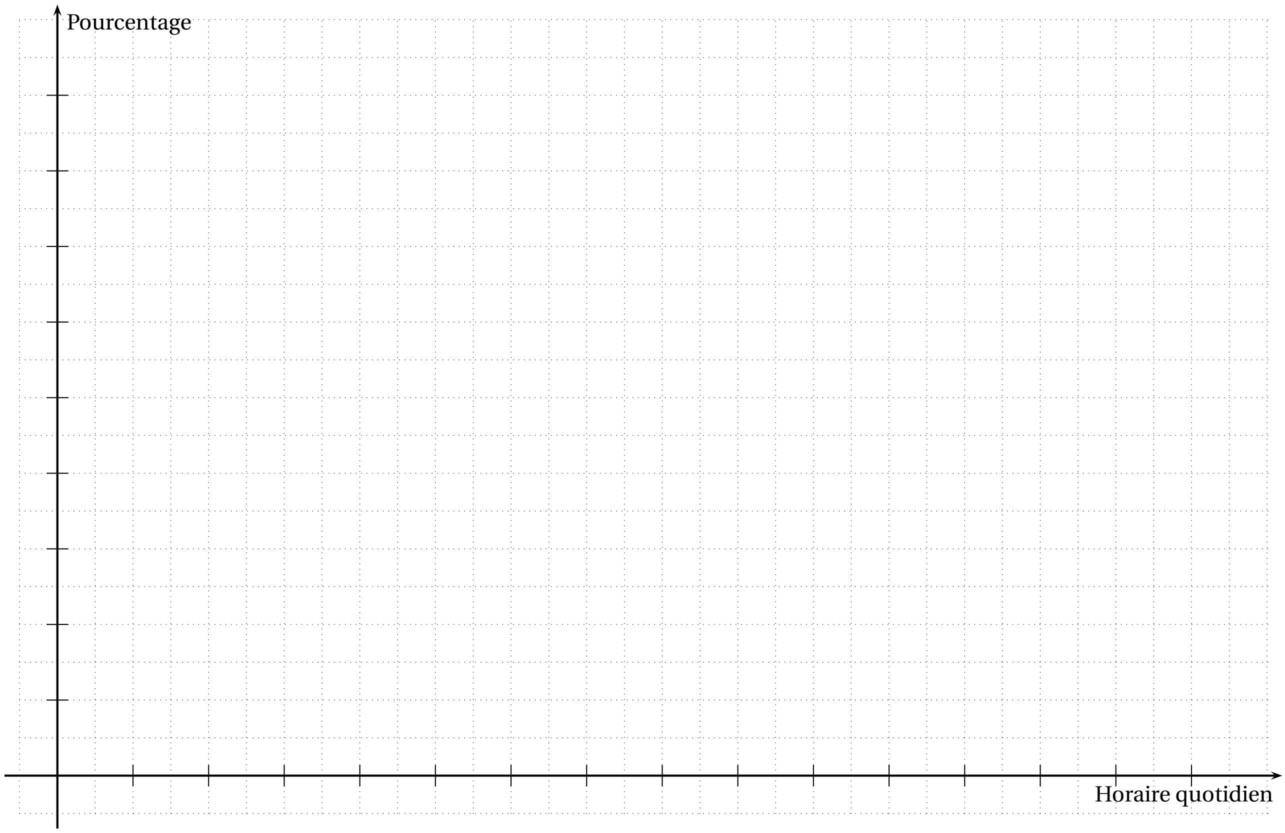
Entreprises	n°1	n°2	n°3	n°4	n°5	n°6	n°7	n°8	n°9	n°10
Horaire quotidien devant un ordinateur x_i	5,5	5,5	6	6,5	6,5	6,5	6,75	7,25	7,25	7,25
Pourcentage du personnel atteint y_i	30	40	45	40	45	50	55	55	60	55

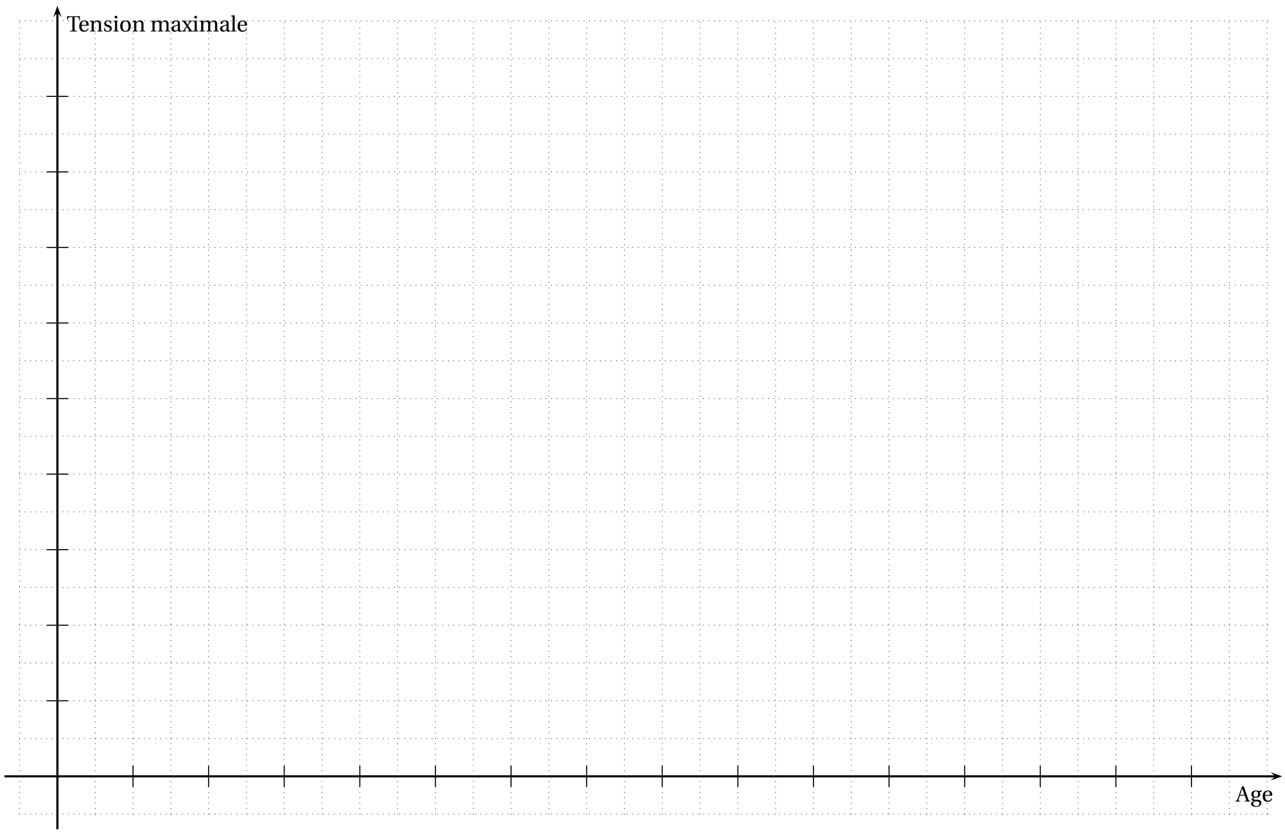
1. Construire dans le repère orthogonal de la figure page 25 le nuage de points associé à ce tableau statistique. On prendra les unités suivantes : en abscisse 1 cm pour 0,25 heure et en ordonnées 1 cm pour 10 %. On graduera l'axe des abscisses à partir de la valeur 5.
2. (a) On note respectivement $\overline{x}$ et $\overline{y}$ les moyennes des séries (x_i) et (y_i). Calculer $\overline{x}$ et $\overline{y}$.
   (b) On note G le point de coordonnées $(\overline{x}\,;\overline{y})$. G est le point moyen du nuage. Placer le point G sur le graphique.
3. On considère les points $A\,(8\,;70)$ et $B\,(8\,;55)$. Construire les droites (GA) et (GB) sur le graphique précédent.
   (a) On se propose de faire un ajustement du nuage par l'une de ces droites. Quelle droite vous semble la plus appropriée ? Expliquer votre choix.
   (b) Déterminer une équation de la droite choisie.
4. En utilisant l'ajustement que vous avez choisi, estimer le pourcentage de personnes atteintes de maux de têtes pour une utilisation moyenne de 7 heures.

ACTIVITÉ 3.2 (Ajustement par la méthode de MAYER et la méthode des moindres carrés)**.**
Le tableau suivant donne dans une population féminine, la moyenne de la tension artérielle maximale en fonction de l'âge.

Rang de l'âge	1	2	3	4	5	6
Age en années : x_i	36	42	48	54	60	66
Tension maximale : y_i	11,8	13,2	14	14,4	15,5	15,1

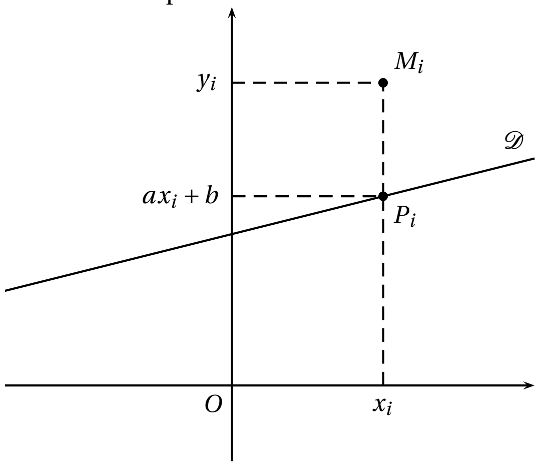
1. Droite de MAYER
   (a) Représenter graphiquement le nuage de points de coordonnées $(x_i\,;\,y_i)$ de cette série statistique dans le repère orthogonal de la figure page ci-contre. On graduera l'axe des abscisses à partir de 36 et l'axe des ordonnées à partir de 11. De plus, on prendra comme unités 0,5 cm pour une année en abscisse et 2 cm pour une unité de tension en ordonnée.
   (b) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et placer G sur le graphique.
   (c) On fractionne le nuage précédent en deux parties constituées respectivement par les points numérotés de 1 à 3 et ceux numérotés de 4 à 6. On note G_1 et G_2 les points moyens respectifs de ces deux parties du nuage de points.
      i. Calculer les coordonnées de G_1 et G_2.
      ii. Tracer la droite (G_1G_2).
      La droite (G_1G_2) s'appelle droite de MAYER. On admet qu'elle constitue une bonne droite d'ajustement pour un nuage de points « étiré ».
      iii. Vérifier que la droite (G_1G_2) a pour équation : $y = 19x + 253$.
      iv. Vérifier que le point G appartient à la droite (G_1G_2).
      C'est un résultat général : le point moyen G appartient dans tous les cas à la droite de MAYER (G_1G_2).
   (d) On admet que la droite de MAYER constitue un ajustement convenable du nuage de points précédent.
      i. Déterminer graphiquement, en faisant apparaître les traits de construction utiles, la tension artérielle maximale prévisible pour une personne de 70 ans.
      ii. Vérifier le résultat précédent par le calcul en utilisant l'équation de la droite (G_1G_2).
2. Méthode des moindres carrés
   (a) i. On décide de faire un ajustement affine de cette série à l'aide de la calculatrice. Pour trouver la droite qui passe « au plus près » de tous les points, les calculatrices utilisent une méthode de calcul appelée méthode des moindres carrés. Avec le menu *stat* de la calculatrice (voir le paragraphe 3.2.5 page 30 pour des informations sur les calculatrices), écrire les deux séries et donner l'équation de la droite $\mathscr{D}$.
      ii. Tracer la droite $\mathscr{D}$ dans le repère.
   (b) A l'aide de l'équation de $\mathscr{D}$, déterminer par le calcul une estimation de l'âge d'une personne dont la tension est 16.


Pourcentage
Horaire quotidien


Tension maximale
Age

ACTIVITÉ 3.3 (Principe de la méthode des moindres carrés)**.**
On peut mesurer la distance d'une droite $\mathscr{D}$ à un nuage de points en calculant la somme des carrés des distances M_iP_i où pour chaque i, le point M_i est un point du nuage et le point P_i est le point de la droite $\mathscr{D}$ ayant la même abscisse que M_i (voir la figure 3.1 de la présente page).

FIGURE 3.1 – Principe de la méthode des moindres carrés



Plus cette somme sera petite et plus la droite sera proche du nuage de points.
On procédera suivant la démarche :

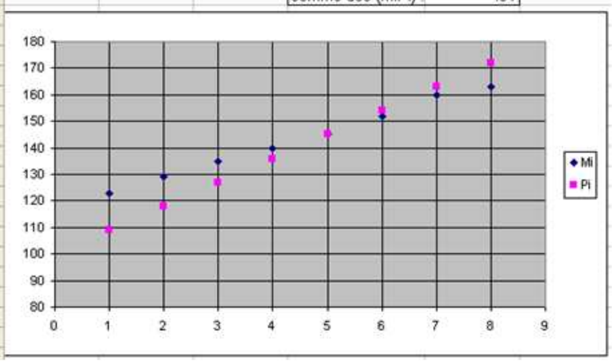
- Première étape : Chercher une équation de droite ($y = ax + b$) qui passe au plus près des points du nuage.
- Deuxième étape : Calculer pour chaque M_i la valeur $M_iP_i^2 = (y_i - ax_i - b)^2$.
- Troisième étape : Chercher à minimiser la somme des $M_iP_i^2$.

Voici la série statistique étudiée :

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	123	129	135	140	145	152	160	163

1. Saisir la feuille de calcul
   A l'aide d'un tableur, reproduire la feuille de calcul sur le modèle de la figure de la présente page.

	A	B	C	D	E	F
1	a		b			
2	9		100			
3						
4	xi	yi	axi+b		(MiPi)²	
5	1	123	109		196	
6	2	129	118		121	
7	3	135	127		64	
8	4	140	136		16	
9	5	145	145		0	
10	6	152	154		4	
11	7	160	163		9	
12	8	163	172		81	
13						
14				somme des (MiPi)²	491	



- En A2 est inscrit le coefficient directeur et en C2 est inscrit l'ordonnée à l'origine de la droite d'ajustement.
- Pour les lignes 5 à 12, on trouve :
  - dans la colonne A, la série (x_i) des abscisses des points du nuage
  - dans la colonne B, la série (y_i) des ordonnées des points du nuage
  - dans la colonne C, les ordonnées des points P_i de la droite

- · dans la colonne E, $M_iP_i^2 = (\ldots\ldots\ldots)^2$
- Pour la cellule C5, il faut écrire = ……… puis copier-coller cette formule de C6 à C12.

2. Modifier l'ordonnée à l'origine
   D'après le graphique, il semble que la droite d'équation $y = 9x+100$ ne soit pas le meilleur ajustement : l'ordonnée à l'origine n'est pas assez grande.
   (a) Remplacer le contenu de la cellule C2 par 115.
   (b) Essayer par tâtonnement de trouver la valeur de a (au dixième près) qui minimise la somme des $M_iP_i^2$.
   $a \approx \ldots\ldots\ldots$
   (c) Quelle est la somme des $M_iP_i^2$ avec cet ajustement ?
   somme des $M_iP_i^2 \approx \ldots\ldots\ldots$
3. Modifier le coefficient directeur
   (a) Remplacer le coefficient directeur de l'ajustement par 6 (cellule A2).
   (b) Essayer par tâtonnement de trouver la valeur de b (au dixième près) qui minimise la somme des $M_iP_i^2$.
   $b \approx \ldots\ldots\ldots$
   (c) Quelle est la somme des $M_iP_i^2$ avec cet ajustement ?
   somme des $M_iP_i^2 \approx \ldots\ldots\ldots$
4. En appliquant la méthode de MAYER
   (a) En prenant les quatre premiers points du nuage, puis les quatre derniers, déterminer avec le tableur, les coordonnées des deux points moyens G_1 et G_2 des deux sous-séries.
   G_1 (…… ; ……) et G_2 (…… ; ……)
   (b) Déterminer l'équation réduite de la droite (G_1G_2) de MAYER.
   $y = \ldots\ldots x + \ldots\ldots$
   (c) Avec le tableur, quelle est la somme des $M_iP_i^2$ avec cet ajustement ?
   somme des $M_iP_i^2 \approx \ldots\ldots\ldots$
5. En utilisant la méthode des moindres carrés
   (a) A l'aide du tableur, donner l'ajustement affine par la méthode des moindres carrés.
   $y = \ldots\ldots x + \ldots\ldots$
   (b) Quelle est la somme des $M_iP_i^2$ avec cet ajustement ?
   somme des $M_iP_i^2 \approx \ldots\ldots\ldots$

   Remarque. Avec le tableur, on utilisera les fonctions DROITEREG pour déterminer le coefficient directeur et COEFFICIENT.DIRECTEUR pour déterminer le coefficient directeur de la droite d'ajustement.

3.2 Bilan et compléments

3.2.1 Série statistique à deux variables

Définition 3.1. On appelle série statistique à deux variables, l'étude simultanée de deux variables statistiques définies sur une même population.

Exemples.
- Le poids et la taille de nouveaux nés dans une maternité.
- Le volume des ventes et le montant alloué à la publicité dans une entreprise.
- La consommation d'un véhicule et sa vitesse.

En notant $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ les p valeurs prises par les deux variables statistiques, les données sont données à l'aide d'un tableau d'effectif :

Variable X	x_1	x_2	$\dots$	x_p
Variable Y	y_1	y_2	$\dots$	y_p

On note $(x_i\,;\,y_i)$ la série statistique double ainsi définie.

Exemple 3.1. Dans toute la suite du chapitre, on se référera à la série statistique suivante : On mesure l'allongement Y d'un ressort en fonction de la masse suspendue X.

Masse (en g)	30	40	50	60	70	80	90	100
Allongement (en mm)	12	19	24	30	37	42	48	55

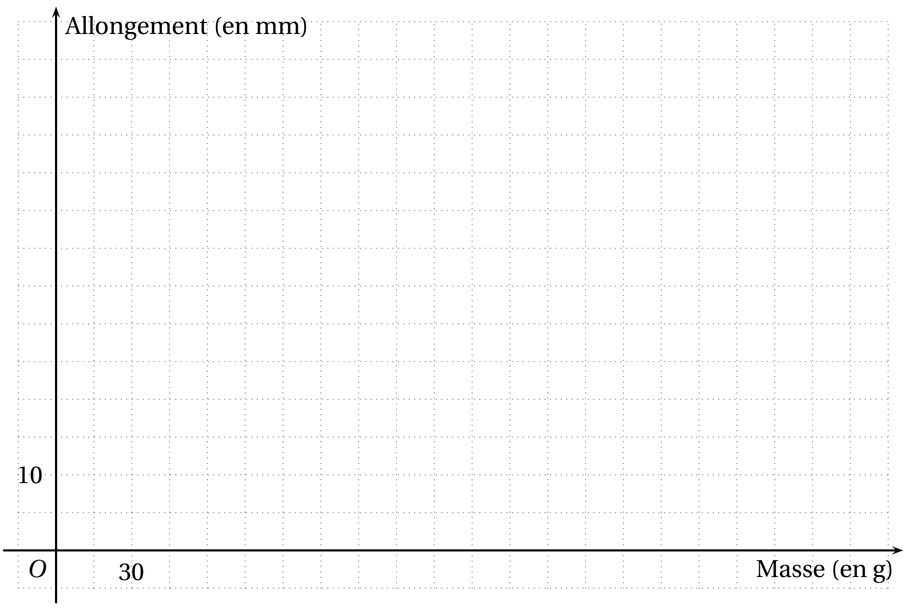
3.2.2 Nuage de points

Définition 3.2. Le plan étant muni d'un repère orthogonal, on peut associer à chaque couple $(x_i\,;\,y_i)$ de la série statistique le point M_i de coordonnées $(x_i\,;\,y_i)$. Le graphique ainsi obtenu constitue un nuage de points.

Exemple. Les points du nuage ont pour coordonnées $M_1\,(30\,;12)$, $M_2\,(40\,;19)$, $M_3\,(50\,;24)$, …, $M_8\,(100\,;55)$.

Placer ces points dans le repère de la figure 3.2 de la présente page (Unités graphiques : 1 cm pour 10 g en abscisses et 1 cm pour 10 mm en ordonnées, on graduera l'axe des abscisses à partir de 30).

FIGURE 3.2 – Nuage de points



Définition 3.3. On appelle point moyen du nuage de N points M_i de coordonnées $(x_i\,;\,y_i)$ le point G de coordonnées :

$$x_G = \overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad \text{et } y_G = \overline{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$$

Exemple. Dans la série précédente, le point moyen G a pour coordonnées :

$$x_G = \dots\dots\dots \text{ et } y_G = \dots\dots\dots \quad \text{donc } G(\dots\dots\dots\,;\dots\dots\dots)$$

3.2.3 Corrélation

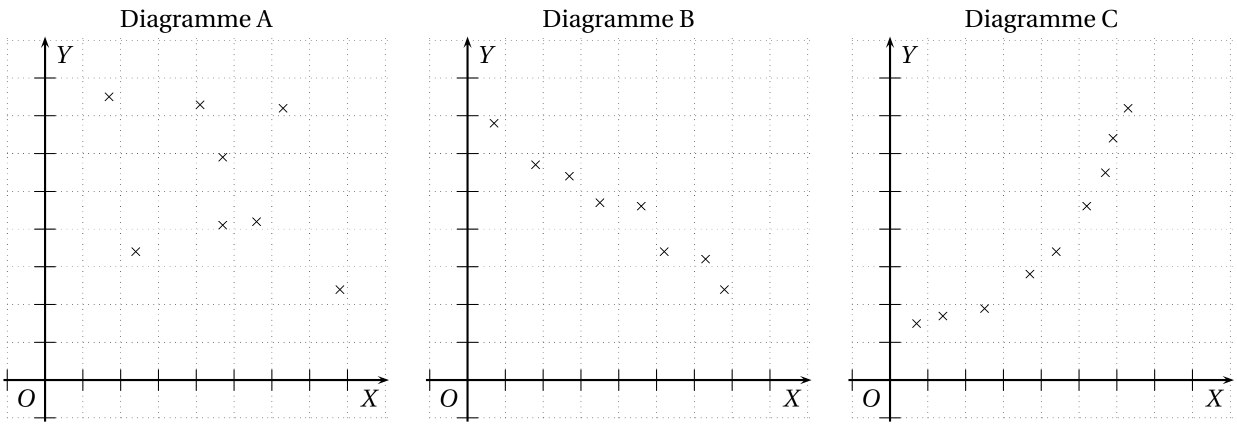
Soient X et Y deux variables statistiques définies sur une même population. Dans certains cas, on peut soupçonner l'existence d'un lien entre ces deux variables. Par exemple, l'allongement du ressort est fonction de la masse suspendue, la taille des enfants peut dépendre de la taille des parents, etc.

Définition 3.4. Il y a corrélation entre deux variables X et Y observées sur les individus d'une même population lorsque X et Y varient dans le même sens ou en sens contraire.

Remarque. L'existence d'une corrélation entre deux variables peut être décelée à l'aide d'un nuage de points.

Exemples. Considérons les diagrammes de la figure 3.3 de la présente page

FIGURE 3.3 – Corrélation



Aucune liaison apparente ; absence de corrélation entre les deux variables — Corrélation négative — Corrélation positive

Lorsque les points du nuage ont tendance à s'aligner comme pour le diagramme B, on parle alors de corrélation linéaire entre les deux variables. On essaye alors d'effectuer un ajustement affine, ce qui consiste à trouver une droite qui rend compte de la forme alignée du nuage en approchant « au mieux » les points qui le constituent.

3.2.4 Ajustement affine

Ajustement à la règle

Exemple. La droite $\mathscr{D}$ contenant les points $M_1\,(30\,;\,12)$ et $M_8\,(100\,;\,55)$ approche de façon satisfaisante les points du nuage. Déterminer une équation de cette droite $\mathscr{D}$.
En utilisant l'équation de la droite d'ajustement, déterminer quel serait l'allongement du ressort correspondant à une masse de 110 grammes.

Méthode de MAYER

On fractionne le nuage de points en deux nuages partiels de même effectif (à un près si l'effectif de la série est impair) : le premier nuage comprend les points ayant les abscisses les plus petites, et l'autre, les plus grandes.
On détermine ensuite les points moyens G_1 et G_2 des deux nuages partiels.
La droite de MAYER du nuage est la droite (G_1G_2).

Exemple. Le premier nuage comprend les points M_1, M_2, M_3 et M_4. Son point moyen G_1 a pour coordonnées :

$$x_{G_1} = \dots\dots\dots \quad y_{G_1} = \dots\dots\dots \quad \text{d'où } G_1\,(\dots\dots\dots\,;\dots\dots\dots)$$

Avec les points restants, on obtient un second nuage dont le point moyen G_2 a pour coordonnées :

$$x_{G_2} = \dots\dots\dots \quad y_{G_2} = \dots\dots\dots \quad \text{d'où } G_2\,(\dots\dots\dots\,;\dots\dots\dots)$$

Placer les points G_1 et G_2 et tracer la droite de MAYER.
Déterminer l'équation de la droite (G_1G_2).

On admettra la propriété suivante :

Propriété 3.1. *La droite de* MAYER *d'un nuage de points passe par le point moyen du nuage.*

Vérifier ce résultat sur le graphique et par le calcul.
En utilisant l'équation de la droite de MAYER, déterminer par le calcul la masse correspondant à un allongement de 60 mm. Retrouver ensuite ce résultat sur le graphique.

Méthode des moindres carrés

L'ajustement affine effectué avec la calculatrice est obtenu par une méthode appelée des moindres carrés qui consiste à trouver une droite qui passe « au plus près » des points du nuage. La calculatrice donne le coefficient directeur m et l'ordonnée à l'origine p.

Avec la calculatrice, déterminer l'équation de la droite d'ajustement et tracer dans le repère.

3.2.5 Utilisation de la calculatrice

On peut retrouver tous ces paramètres statistiques en utilisant les listes d'une calculatrice.

<table>
<tr><th></th><th>TI-82</th><th>Casio Graph 25</th></tr>
<tr><td>Effacer les anciennes données</td><td>$\boxed{\text{STAT}}$
4 : ClrList $\boxed{4}$
$\boxed{2^{nd}}$ $\boxed{\text{L1}}$
$\boxed{,}$
$\boxed{2^{nd}}$ $\boxed{\text{L2}}$
$\boxed{\text{ENTER}}$</td><td>Sélectionner le menu STAT
$\boxed{\text{F6}}$
DEL-A $\boxed{\text{F4}}$
YES $\boxed{\text{F1}}$
$\boxed{\triangleright}$
DEL-A $\boxed{\text{F4}}$
YES $\boxed{\text{F1}}$</td></tr>
<tr><td>Entrer les nouvelles données.
On entre les valeurs des x_i dans la première colonne (L1 ou list 1) et les valeurs des y_i dans la deuxième colonne (L2 ou list 2) ;</td><td>$\boxed{\text{STAT}}$
1 : Edit $\boxed{\text{ENTER}}$
A l'écran :<table><tr><th>L1</th><th>L2</th><th>L3</th></tr><tr><td>30</td><td>12</td><td></td></tr><tr><td>40</td><td>19</td><td></td></tr><tr><td>50</td><td>24</td><td></td></tr><tr><td>60</td><td>30</td><td></td></tr><tr><td>…</td><td>…</td><td></td></tr></table></td><td>A l'écran<table><tr><th></th><th>List 1</th><th>List 2</th><th>List 3</th></tr><tr><td>1</td><td>30</td><td>12</td><td></td></tr><tr><td>2</td><td>40</td><td>19</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>50</td><td>24</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>60</td><td>30</td><td></td></tr><tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Calculer les paramètres statistiques</td><td>CALC $\boxed{\triangleright}$
4 : Linreg $(ax+b)$ $\boxed{\text{ENTER}}$
A l'écran :
Linreg $(ax+b)$
$y=ax+b$
$a=$
$b=$
$r=$</td><td>CALC $\boxed{\text{F2}}$
REG $\boxed{\text{F3}}$
X $\boxed{\text{F1}}$
A l'écran :
Linreg
$a=$
$b=$
$r=$
$r^2=$
$y=ax+b$</td></tr>
</table>

3.3 Exercices

11 p 90, 15 p 91, 26 et 29 p 96, 36 et 40 p 101

Devoir surveillé n°3

Statistiques à deux variables

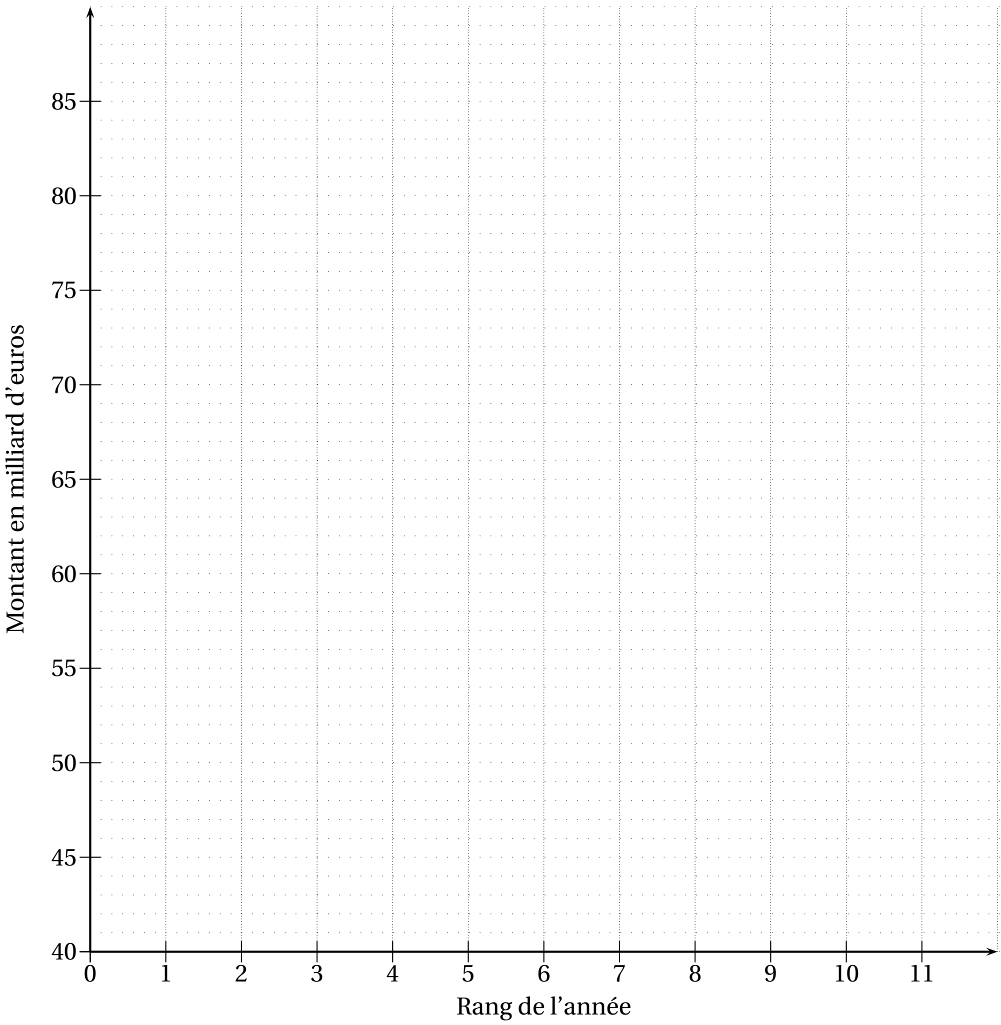
EXERCICE 3.1 (10 points).
Le tableau ci-dessous donne la dépense médicale en soins hospitaliers, en France, en milliards d'euros.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang x_i	0	1	2	3	4	5
Dépense en soins hospitaliers en milliards d' euros y_i	47,6	52,7	54,8	58	64,3	67,1

Source : France, portrait social, édition 2005-2006

1. Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i\,;\,y_i)$ avec $0 \leqslant i \leqslant 5$ dans le repère de la figure 3.1 de la présente page.
2. Déterminer les coordonnées, arrondies au dixième, du point moyen G.
   Placer le point G sur le graphique.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement $\mathscr{D}$ obtenue par la méthode des moindres carrés. (Arrondir les coefficients au centième).
4. Tracer la droite sur le graphique.
5. En supposant que le modèle reste valable dans les trois années suivantes, prévoir la dépense en soins hospitaliers en 2008. Indiquer la méthode utilisée.

FIGURE 3.1 – Figure de l'exercice 3.1

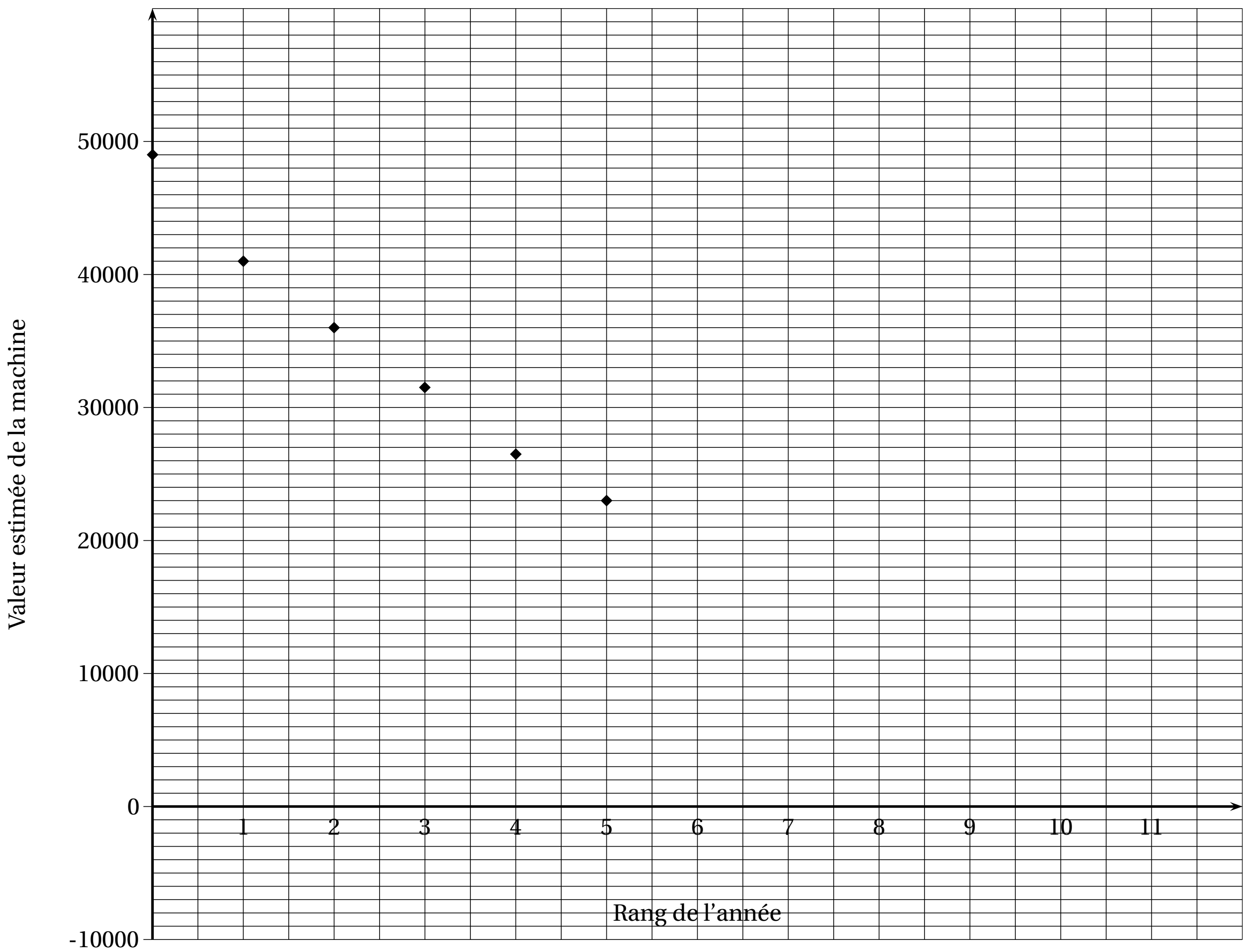


EXERCICE 3.2 (10 points)**.**
Une entreprise a acheté une machine en 2 000 pour une valeur de 49 000 € et a noté la valeur de cette machine sur le marché de l'occasion jusqu'en 2 005. Les résultats sont notés dans le tableau suivant :

Année	2 000	2 001	2 002	2 003	2 004	2 005
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
Valeur de la machine (en €) y_i	49 000	41 000	36 000	31 500	26 500	23 000

Une représentation du nuage de points $(x_i\,;\,y_i)$ est donnée ci-dessous.

1. Déterminer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.
2. On partage le nuage en deux sous-nuages N_1 et N_2 constitués respectivement des trois premiers points et des trois derniers points du nuage.
   (a) Déterminer les coordonnées de G_1 et G_2 les points moyens respectifs des sous-nuages N_1 et N_2 et les placer sur le graphique.
   (b) Déterminer une équation de la droite (G_1G_2) de la forme $y = mx + p$.
   (c) Vérifier que le point G appartient à la droite (G_1G_2).
   (d) En supposant que ce modèle reste valable pour les cinq années à venir, prévoir une estimation de la valeur de cette machine en 2 007, puis en 2 010.
   (e) Commenter le dernier résultat.
3. Le service comptable de cette entreprise remarque que pendant les années 2 000 à 2 005 la machine s'est dépréciée d'environ 15 % par an. Il suppose alors qu'à partir de 2 005 la baisse annuelle sera de 15 %.
   (a) Prévoir une estimation de la valeur de cette machine en 2 010.
   (b) Comparer ce résultat au précédent.



Chapitre 4

Suites

Sommaire

4.1 Activités

Activité 4.1 (Définir une suite).

1. Compléter les listes de termes suivantes et expliquer comment on passe d'un terme au suivant :
   (a) $1\,;3\,;5\,;7\,;\dots\dots;\dots\dots;\dots\dots$
   (b) $0\,;4\,;8\,;12\,;16\,;\dots\dots;\dots\dots;\dots\dots$
   (c) $1\,;-3\,;9\,;-27\,;\dots\dots;\dots\dots;\dots\dots$
   (d) $2\,;3\,;7\,;11\,;\dots\dots;\dots\dots;\dots\dots$
   (e) $1\,;1\,;2\,;3\,;5\,;8\,;\dots\dots;\dots\dots;\dots\dots$
   (f) $1\,;2\,;4\,;7\,;11\,;16\,;\dots\dots;\dots\dots;\dots\dots$
2. On considère la fonction u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u(n) = 3 - 5n$.
   (a) Calculer $u(0)$; $u(1)$; $u(2)$ et $u(3)$.
   (b) Quand il s'agit d'une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou sur une partie de $\mathbb{N}$), on dit que u est une suite et on note $u(n)$ sous la forme u_n.
   Avec cette nouvelle notation, réécrire les résultats précédents.
3. Le terme général d'une suite se note souvent u_n et l'entier naturel n est appelé *indice*.
   (a) Quel est le terme qui précède u_1 ? u_{10} ? u_n ?
   (b) Quel est le terme qui suit u_1 ? u_{10} ? u_n ?
   (c) Quel est l'indice du terme situé trois rangs après u_n ? deux rangs avant u_{n+1} ?
4. A_n désigne le nombre d'habitants de la ville A en l'an $2000 + n$.
   (a) Que représente A_0 ?
   (b) Comment désigne-t-on le nombre d'habitants de la ville A en 2 010 ? en 2 017 ?
5. Le nombre d'habitants de la ville B a été recensé tous les 10 ans depuis 1 950.
   On désigne par B_n le nombre d'habitants de la ville B l'année du $n^{\text{ième}}$ recensement.
   (a) Que représente B_1 ? B_2 ?

   (b) Comment désigne-t-on le nombre d'habitants de la ville B en 2 010 ?

6. (a) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = 3u_n - 4$ et $u_0 = 4$.
   Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

   (b) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ par : $u_n = 3u_{n-1} - 4$ et $u_0 = 4$.
   Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.

   (c) Que remarque-t-on ?

Remarque. Vous avez pu constater qu'on retrouve la même suite dans plusieurs exemples. On pourra retenir qu'une suite peut s'écrire sous des formes différentes.

ACTIVITÉ 4.2 (Suite arithmétique)**.**
On dit d'une suite qu'elle est *arithmétique*, si chaque terme est obtenu à partir du précédent en ajoutant toujours un même nombre que l'on appelle la *raison*.

1. On donne ci-dessous les premiers termes d'une suite arithmétique. Calculer les cinq suivants :

   (a) -2 ; -5 ; -8 ; (b) -10 ; -8 ; -6 ; (c) 2 ; 2,4 ; 2,8 ;

2. (a) Zoé possède un aquarium qui ne peut contenir plus de 500 poissons. Le 1er janvier, elle a trois poissons dans son aquarium. Elle ajoute cinq poissons tous les jours. Dans combien de jours son aquarium sera-t-il complet ?

   (b) Arthur a travaillé pendant les vacances. Il possède 1 000 € sur un compte en banque. Il n'ajoute plus d'argent sur son compte mais il retire 20 € toutes les semaines. Dans combien de semaines ne lui restera-t-il que 500 € ?

3. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $r = 4$.

   (a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

   (b) Calculer u_1, u_2 et u_3.

   (c) Compléter :

   $$\begin{array}{llll} & u_1 = 1+\dots & u_2 = \dots+\dots = 1+\dots & u_3 = \dots+\dots = 1+\dots \\ \text{donc} & u_1 = u_0+\dots & u_2 = u_0+\dots & u_3 = u_0+\dots \end{array}$$

   (d) En déduire : $u_{10} = u_0 + \dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ $\quad u_n = u_0 + \dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

4. (a) On considère la suite définie par : $u_n = 2n + 5$.

      i. Exprimer u_{n+1} en fonction de n.

      ii. Calculer $u_{n+1} - u_n$.

      iii. En déduire que la nature de la suite (u_n). On précisera le premier terme u_0 et la raison r de cette suite.

   (b) On considère la suite arithmétique définie par : $u_{n+1} = u_n - 3$ et $u_0 = 10$.
   Déterminer sa raison r et écrire u_n sous la forme : $u_n = u_0 + nr$.

5. Parmi les suites suivantes, indiquer celles qui sont arithmétiques et préciser leur raison.

   (a) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n - 2$ (c) $u_n = 5 \times 2n$ (e) $u_n = n^2 - 1$

   (b) $u_n = 5n - 1$ (d) $u_n = 2n + 3$ (f) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$

6. (a) On considère la suite (u_n) telle que : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = un + 3$.

      i. Expliquer pourquoi c'est une suite arithmétique.

      ii. Calculer :

         • u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 et u_6 • $\frac{u_1+u_3}{2}$, $\frac{u_2+u_4}{2}$, $\frac{u_3+u_5}{2}$ et $\frac{u_4+u_6}{2}$.

   (b) Mêmes questions avec la suite (u_n) telle que $u_n = -2n + 5$

   (c) Que remarque-t-on dans les deux cas ?

ACTIVITÉ 4.3 (Suite géométrique)**.**
On dit d'une suite qu'elle est *géométrique*, si chaque terme est obtenu à partir du précédent en multipliant toujours un même nombre que l'on appelle la *raison*.

1. On donne ci-dessous les premiers termes d'une suite géométrique. Calculer les cinq suivants :

   (a) 2 ; 12 ; 72 ; (b) 10 ; 5 ; $\frac{5}{2}$; (c) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{6}$;

2. (a) Dans un jeu télévisé, un candidat répond à des questions. S'il répond correctement à la première question il gagne 10 €. S'il répond correctement à la deuxième, il gagne le double, et ainsi de suite. S'il ne répond pas correctement à une question, il perd tout.
   À combien de questions doit-il répondre juste pour gagner au moins 10 000 € ?

(b) Dans un laboratoire, on teste des insecticides qui détruisent tous les jours la moitié d'une population de mouches. On dispose de 1 024 mouches au départ.
Dans combien de jours restera-t-il une seule mouche ?

3. Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $q = 4$.
   (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   (b) Calculer v_1, v_2 et v_3.
   (c) Compléter :

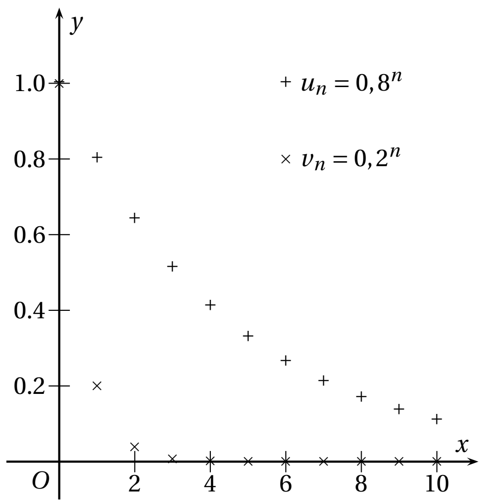
$$\begin{array}{llll} & v_1 = 2\times\ldots & v_2 = \ldots\times\ldots = 2\times\ldots & v_3 = \ldots\times\ldots = 2\times\ldots \\ \text{donc} & v_1 = v_0\times\ldots & v_2 = v_0\times\ldots & v_3 = v_0\times\ldots \end{array}$$

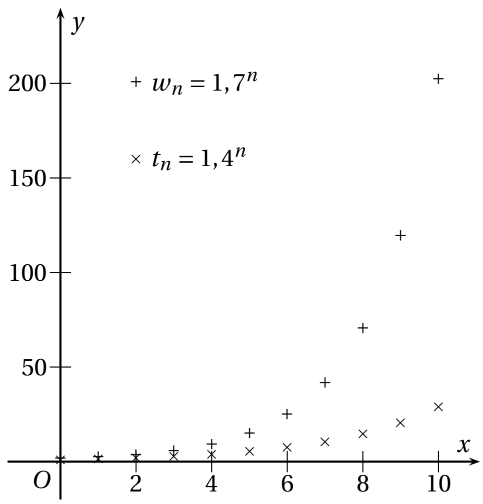
   (d) En déduire : $v_{10} = v_0 \times \ldots = \ldots \times \ldots = \ldots\ldots$ $\quad v_n = v_0 \times \ldots = \ldots\ldots$
4. (a) On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = 5\times 2^n$.
      i. Exprimer v_{n+1} en fonction de n.
      ii. Calculer $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.
      iii. En déduire que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme v_0 et la raison q.
   (b) On considère la suite géométrique définie par : $v_{n+1} = \frac{5}{2}v_n$ et $v_0 = 10$.
   Déterminer sa raison q et écrire v_n sous la forme : $v_n = v_0 \times q^n$.
5. Parmi les suites suivantes, indiquer celles qui sont géométriques et préciser leur raison.
   (a) $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 5v_n$
   (b) $v_n = 5n$
   (c) $v_n = 5\times 2n$
   (d) $v_n = 5\times 2^n$
   (e) $v_n = 3\times 5^n - 1$
   (f) $v_0 = -3$ et $v_{n+1} = \frac{v_n}{5}$
6. (a) On considère la suite (v_n) telle que : $v_0 = 0{,}5$ et $v_{n+1} = 2v_n$;
      i. Expliquer pourquoi c'est une suite géométrique.
      ii. Calculer :
         - v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 et v_6
         - $\sqrt{v_1v_3}$, $\sqrt{v_2v_4}$, $\sqrt{v_3v_5}$ et $\sqrt{v_4v_6}$.
   (b) Mêmes questions avec la suite (v_n) telle que $v_n = 0{,}25\times 3^n$.
   (c) Que remarque-t-on dans les deux cas ?

ACTIVITÉ 4.4.
On donne, sur la figure 4.1 de la présente page, la représentation graphique de quatre suites géométriques (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) dont le premier terme et la raison sont strictement positifs telles que :

- $u_n = 0{,}8^n$;
- $v_n = 0{,}2^n$;
- $w_n = 1{,}7^n$;
- $t_n = 1{,}4^n$.

FIGURE 4.1 – Figure de l'activité 4.4





En observant chacune de ces représentations graphiques :

1. Indiquer le sens de variation de ces suites.
2. Que peut-on dire des termes de chaque suite lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes ?

ACTIVITÉ 4.5 (Somme de termes consécutifs).
Partie A : Suites arithmétiques

1. (a) Calculer : $1+2+3+4+5$ d'une part et $\frac{5\times 6}{2}$ d'autre part.
   (b) Calculer : $1+2+3+4+5+6+\ldots+12$ d'une part et $\frac{12\times 13}{2}$.
   (c) Proposer une formule permettant de calculer : $1+2+3+\ldots+(n-1)+n$.
2. On considère la suite arithmétique (u_n) telle que : $u_n = u_0 + nr$.
   (a) Exprimer en fonction de r et u_0 : u_0+u_1 ; $u_0+u_1+u_2$; $u_0+u_1+u_2+u_3$.
   (b) Vérifier que dans chacun des cas précédents, la somme obtenue est égale à :

$$(\text{nombre de termes}) \times \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

Partie B : Suites géométriques

1. (a) Calculer : $1+2+4+8+16$ d'une part et $\frac{1-2^5}{1-2}$ d'autre part.
   (b) Calculer : $1+3+9+27+81$ d'une part et $\frac{1-3^5}{1-3}$ d'autre part.
   (c) Proposer une formule permettant de calculer : $1+x^2+x^3+\ldots+x^n$.
2. On considère la suite géométrique (v_n) telle que : $v_n = v_0 + q^n$ avec $u_0 > 0$ et $q > 0$.
   (a) Exprimer en fonction de q et v_0 : v_0+v_1 ; $v_0+v_1+v_2$; $v_0+v_1+v_2+v_3$.
   (b) Vérifier que dans chacun des cas précédents, la somme obtenue est égale à :

$$\text{premier terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$$

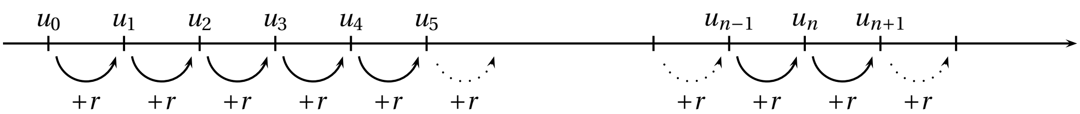
Partie C : Application
Un employé se voit proposer deux types de contrats d'embauche.
Dans le cas du contrat A, on lui propose un salaire mensuel de 1 400 € et une augmentation de annuelle de 50 €.
Dans le cas du contrat B, on lui propose un salaire mensuel de 1 350 € et une augmentation annuelle de 4 %.
Cet employé sait qu'il voudra abandonner ce travail dans quelques années, pour retrouver sa région natale.

1. S'il doit rester cinq ans dans l'entreprise, quelle somme percevra-t-il avec chacun des contrats ?
   Quel contrat doit-il choisir ?
2. Même question s'il doit rester quinze ans.

4.2 Suites arithmétiques

4.2.1 Définition

Définition 4.1. La suite (u_n) est *arithmétique*, si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$, où r est un réel.
Le réel r s'appelle *raison* de la suite arithmétique.



Remarque. Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de vérifier que $u_{n+1} - u_n$ est constant.
Cette constante est alors la raison r.

Exemple 4.1. La suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$ est arithmétique de raison $r = \ldots$.

4.2.2 Terme général est fonction de n

Propriété 4.1. *Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors pour tout entier naturel n, on a :*

$$u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 4.2. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 9$ et de raison -5. Calculer u_{15}.

Remarque. Dans le cas d'une suite arithmétique (u_n), le terme u_n est la moyenne arithmétique des deux termes qui l'encadrent : $u_n = \frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}$.

Propriété 4.2. *Si (u_n) est une suite définie pour tout entier naturel n par le terme général $u_n = an+b$, avec a et b deux réels, alors (u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = \ldots\ldots$ et de raison $r = \ldots\ldots$.*

Exemple 4.3. La suite (v_n) définie par : $v_n = 2n-5$ est arithmétique de premier terme $v_0 = \ldots\ldots$ et de raison $r = \ldots\ldots$.

4.2.3 Représentation graphique

Exemple 4.4. On considère la suite (u_n) arithmétique définie par : $u_0 = 0,5$ et $r = 0,7$.

1. Calculer les termes u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. (a) Placer dans un repère les points M_n de coordonnées $(n\,;\,u_n)$.
   (b) Que constate-t-on ?

Propriété 4.3. *La représentation graphique d'une suite arithmétique est constituée de points alignés.*

4.2.4 Sens de variation

Propriété 4.4. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.*
- *Si $r > 0$, alors (u_n) est ....*
- *Si $r < 0$, alors (u_n) est ....*
- *Si $r = 0$, alors (u_n) est ....*

Exemple 4.5. On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = -5n+7$.
(u_n) est une suite arithmétique de raison $r = \ldots\ldots$.
Donc la suite (u_n) est ....

4.2.5 Limite

Propriété 4.5. *Soit la suite arithmétique (u_n) telle que : $u_n = u_0 + n \times r$.*
- *Si $r < 0$, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ldots\ldots$
- *Si $r > 0$, alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ldots\ldots$

Exemple 4.6. On considère la suite (u_n) telle que : $u_n = 4n-7$.
(u_n) est une suite arithmétique de raison $r = \ldots\ldots$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ldots\ldots$.

4.2.6 Somme des termes

Propriété 4.6. *Soit s_n la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de raison r, alors on a :*

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)\frac{(u_0+u_n)}{2}$$

Exemple 4.7. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 2n-3$. $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$

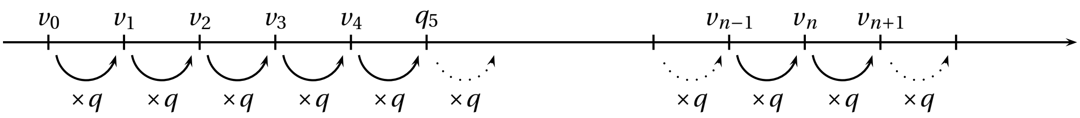
Remarque. La somme s des termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par la formule :

$$s = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

4.3 Suites géométriques

4.3.1 Définition

Définition 4.2. La suite (v_n) est *géométrique*, si pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = q \times v_n$, où q est un réel non nul. Le réel q s'appelle *raison* de la suite géométrique.



Remarque. Pour démontrer qu'une suite (v_n) est géométrique, il suffit de vérifier que $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ est constant. Cette constante est la raison q.

Exemple 4.8. Soit (v_n) la suite définie par $\begin{cases} v_0 = -3 \\ v_{n+1} = 2v_n \end{cases}$ est une suite géométrique de raison $q = \ldots\ldots.$

4.3.2 Terme général en fonction de n

Propriété 4.7. *Si (v_n) est une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q, alors pour tout entier naturel n, on a :*

$$v_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple 4.9. Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme $v_0 = 9$ et de raison 3. Calculer v_5.

Remarque. Dans le cas d'une suite géométrique (v_n), le terme v_n est la moyenne géométrique des deux termes qui l'encadrent : $v_n = \sqrt{v_{n-1} \times v_{n+1}}$.

Propriété 4.8. *Si (v_n) est une suite définie pour tout entier naturel n par le terme général $v_n = a \times b^n$, avec a et b deux réels, alors (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = \ldots\ldots$ et de raison $q = \ldots\ldots.$*

Exemple 4.10. La suite (v_n) définie par : $v_n = 5 \times 2^n$ est géométrique de raison $q = \ldots\ldots.$

4.3.3 Représentation graphique

Exemple 4.11. On considère la suite géométrique (v_n) définie par : $v_0 = 1$ et la raison $q = 0,5$.

1. Calculer les termes v_1, v_2, v_3, v_4 et v_5.
2. (a) Placer dans un repère les points M_n de coordonnées $(n\,;\,v_n)$.
   Unités graphiques : 1 cm pour une unité en abscisses et 4 cm pour une unité en ordonnées.

   (b) Que constate-t-on ?

La représentation graphique d'une suite géométrique (v_n) est constituée de points situés sur une courbe qui n'a pas été étudiée en seconde ni en première.

4.3.4 Sens de variation

Propriété 4.9. *Soit la suite géométrique (v_n) telle que : $v_n = v_0 \times q^n$ avec $v_0 > 0$ et $q > 0$.*
- *Si $0 < q < 1$, alors la suite (v_n) ....*
- *Si $q = 1$, alors la suite (v_n) est ....*
- *Si $q > 1$, alors la suite (v_n) est ....*

Exemple 4.12. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = 3 \times 0,8^n$. Déterminer le sens de variation de la suite (v_n).

4.3.5 Limite

Propriété 4.10. *Soit la suite géométrique (v_n) telle que : $v_n = v_0 \times q^n$ avec $v_0 > 0$ et $q > 0$.*
- *Si $0 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ldots\ldots$*
- *Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ldots\ldots$*

Exemple 4.13. On considère la suite (v_n) telle que : $v_n = 4 \times 0,7^n$.
(v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = \ldots\ldots$ et de raison $q = \ldots\ldots.$
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ldots\ldots.$

4.3.6 Somme des termes

Propriété 4.11. *Soit s_n la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique (v_n) de raison q $(\neq 1)$, alors on a :*

$$s_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = \frac{v_0 - v_{n+1}}{1-q} = v_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exemple 4.14. Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme 5 et de raison 3.

$$s_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque. La somme s des termes consécutifs d'une suite géométrique est donnée par la formule :

$$s = \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

Devoir surveillé n°4

Statistiques – Suites numériques

EXERCICE 4.1 (6 points)**.**
Selon l'institut national de la statistique et des études économiques (INSEE) un indice des prix a suivi, en France, l'évolution suivante entre les années 2000 et 2006.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Indice y_i	100	101,5	102,8	104,0	107,1	109,4	113,5

INSEE : formation brute de capital fixe

L'exercice a pour objet d'étudier l'évolution de cet indice en utilisant deux modèles mathématiques.

1. Représenter graphiquement le nuage de points M_i de coordonnées $(x_i\,;\,y_i)$ sur la figure 4.1 page suivante.
2. Ajustement affine.
   (a) À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients au centième).
   (b) À partir des calculs effectués ci-dessus, on retient comme ajustement affine du nuage de points la droite d'équation $y = 2{,}2x + 96{,}8$.
   Tracer la droite $\mathscr{D}$ sur le graphique donné en annexe sur la figure 4.1 page suivante.
   Le tracé de la droite devra être justifié par un calcul approprié.
   (c) En supposant que ce modèle reste valable pour l'année 2 007, donner une prévision de la valeur de l'indice pour 2 007. Indiquer la méthode utilisée.
3. Ajustement à l'aide d'un logiciel.
   Un logiciel de calcul propose d'ajuster le nuage de points à l'aide d'une partie de la courbe d'équation :
   $$y = 0{,}3x^2 + 0{,}1x + 99{,}9.$$
   La courbe $\mathscr{C}$ est tracée sur la figure 4.1 page suivante.
   (a) Déterminer l'ordonnée du point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse 8.
   (b) On suppose que le modèle défini par la courbe $\mathscr{C}$ reste valable pour l'année 2 007.
   Donner, selon ce modèle, la valeur de l'indice pour 2007.

EXERCICE 4.2 (14 points)**.**
Marc postule pour un emploi dans deux entreprises.
La société ALLCAUR propose à compter du 1$^{\text{er}}$janvier 2 008, un contrat à durée déterminée (CDD) de 2 ans avec un salaire net de 1 800 € le premier mois, puis une augmentation de 0,7 % chaque mois sur la période de 2 ans.
La société CAURALL propose un salaire de départ de 1 750 € augmenté de 20 € chaque mois.

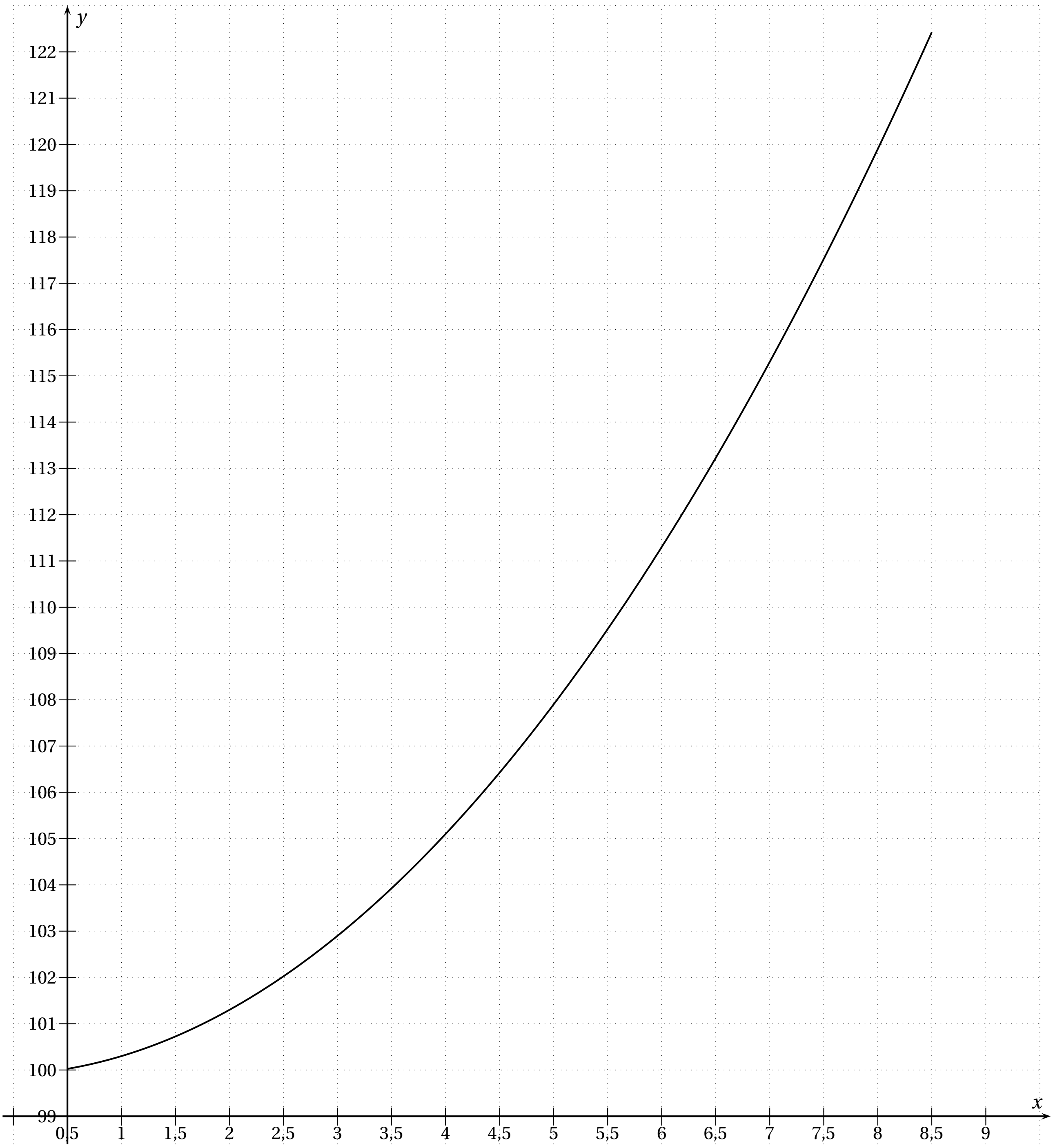
Partie A. Étude de la rémunération proposée par ALLCAUR.
On note U_0 le salaire du mois de janvier 2 008, U_1 celui du mois de février 2 008, ..., U_{23} celui de décembre 2 009 proposé à Marc par la société ALLCAUR.

1. Déterminer U_0, U_1, U_2 et U_3 arrondis à 10^{-2}.
2. (a) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.
   (b) En déduire la nature de la suite U_n, en précisant son premier terme et sa raison.
   (c) Exprimer U_n en fonction de n.
3. Déterminer le salaire que percevrait Marc, au centime près, au dernier mois de son CDD.
4. Calculer le montant total S des salaires qui seraient versés à Marc sur les 2 ans, arrondi au centime.

Partie B. Étude de la rémunération proposée par CAURALL.
On note V_0 le salaire du mois de janvier 2 008, V_1 celui du mois de février 2 008, ..., V_{23} celui de décembre 2 009 proposé à Marc par la société CAURALL.

1. Déterminer V_0, V_1, V_2 et V_3.
2. (a) Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n.
   (b) En déduire la nature de la suite V_n, en précisant son premier terme et sa raison.
   (c) Exprimer V_n en fonction de n.
3. Déterminer le salaire que percevrait Marc au dernier mois de son CDD.
4. Calculer le montant total S' des salaires qui seraient versés à Marc sur les 2 ans.
5. Lequel des deux contrats est le plus avantageux ?

FIGURE 4.1 – Figure de l'exercice 4.1



Chapitre 5

Exposants réels

Sommaire

5.1 Activités

ACTIVITÉ 5.1.

Max a placé le 1er janvier 2 000 un capital de 100 € à intérêts composés à un taux annuel de 20 %.[1] Il peut à tout moment retirer le capital augmenté des intérêts produits.

On appelle C_n le capital disponible le 1er janvier de l'année $2000+n$. Ainsi $C_0 = 100$.

1. (a) Déterminer C_1, C_2, C_3 et C_4. De quelle nature est la suite (C_n) ? On précisera ses caractéristiques.

   (b) Représenter la suite dans le repère de la figure 5.1 page suivante.
   On rappelle que la représentation graphique d'une suite (u_n) est le nuage constitué des points $(n\,;\,u_n)$.
   Les points sont-ils alignés ?

2. Le 1er juin 2 003, un imprévu oblige Max à retirer l'intégralité de son capital. La banque lui reverse alors sur son compte 189,29 €. Max est surpris car ce montant ne lui semble correspondre à rien. Après renseignement, il apprend que la banque a transformé son taux annuel de 20 % en un taux mensuel équivalent. Max n'a pas bien compris mais n'a pas osé insister et il vous demande d'essayer de déterminer ce taux.

   (a) Soit t un taux mensuel quelconque.

      i. Que devient un capital C placé à ce taux mensuel au bout d'un an ?

      ii. En déduire que le taux mensuel t appliqué par la banque est solution de l'équation :

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)^{12} = 1,2$$

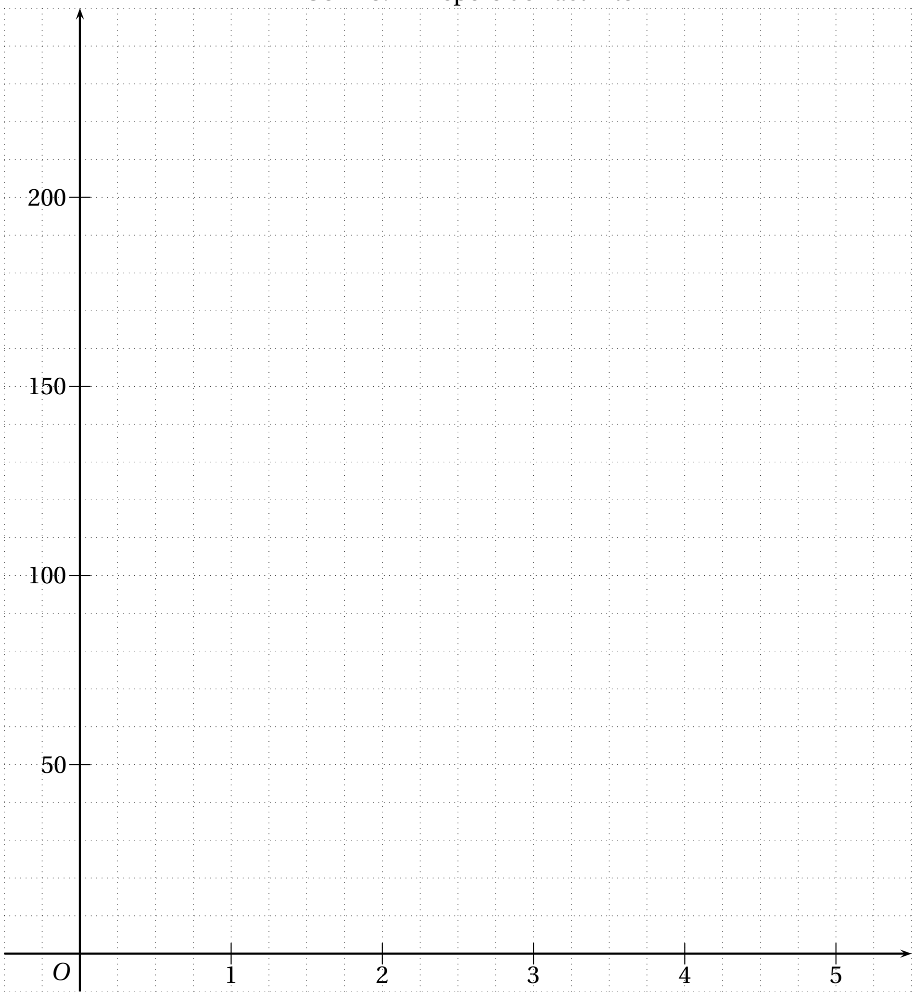
      iii. Déterminer alors, par tatonnement à la calculatrice, une valeur approchée de t à 10^{-3} près

      iv. Vérifier que ce taux donne bien la somme versée par la banque.

   (b) Étienne, un ami de Max, après avoir pris connaissance de votre travail, vous demande s'il n'y a pas plus simple. « En effet, regarde : au bout de trois ans, le capital de Max est $100 \times 1,2^3$, au bout de quatre ans, il est de $100 \times 1,2^4$ et bien au bout de trois ans et demi, il doit être de $100 \times 1,2^{3,5}$. Non ? »
   Regarder, à la calculatrice, si le calcul proposé par Étienne donne la somme versée par la banque.

1. Les taux d'intérêts sont en général plutôt de l'ordre de 3 à 4 %, la situation de l'activité est donc purement fictive.

FIGURE 5.1 – Repère de l'activité



ACTIVITÉ 5.2.
Donner à l'aide d'une calculatrice la valeur arrondie au millième des nombres suivants :

1. $2^{1,2} \approx \ldots\ldots$
2. $3^{6,4} \approx \ldots\ldots$
3. $1,05^{\frac{1}{12}} \approx \ldots\ldots$
4. $0,92^{\frac{5}{4}} \approx \ldots\ldots$
5. $5^{\sqrt{2}} \approx \ldots\ldots$
6. $8^{-1,5} \approx \ldots\ldots$

ACTIVITÉ 5.3.
1. Compléter à l'aide d'une calculatrice :
   (a) $2^{1,3} \times 2^{0,7} = \ldots\ldots$ et $2^{1,3+0,7} = \ldots\ldots$
   (b) $0,5^{0,2} \times 0,5^{0,8} = \ldots\ldots$ et $0,5^{0,2+0,8} = \ldots\ldots$
2. Proposer une formule permettant de calculer $a^x a^y$ avec x et y réels.

ACTIVITÉ 5.4.
1. Compléter à l'aide d'une calculatrice :
   (a) $1,02^{-1,5} \approx \ldots\ldots$ et $\frac{1}{1,02^{1,5}} \approx \ldots\ldots$
   (b) $0,5^{-2,3} \approx \ldots\ldots$ et $\frac{1}{0,5^{2,3}} \approx \ldots\ldots$
2. Proposer une formule permettant de calculer a^{-x} avec x réel.

ACTIVITÉ 5.5.
1. Compléter à l'aide d'une calculatrice :
   (a) $(1,02^{1,5})^4 \approx \ldots\ldots$ et $1,02^6 \approx \ldots\ldots$
   (b) $(12,54^{0,5})^{1,2} \approx \ldots\ldots$ et $12,54^{0,6} \approx \ldots\ldots$
2. Proposer une formule proposant de calculer $(a^x)^y$ avec x et y réels puis simplifier $(a^x)^{\frac{1}{x}}$.

ACTIVITÉ 5.6.
On cherche a tel que $a^{1,3} = 1,25$.
Compléter à l'aide d'une calculatrice : $(a^{1,3})^{\frac{1}{1,3}} = 1,25^{\cdots\cdots}$ donc $a = 1,25^{\cdots\cdots}$ ce qui donne $a \approx \ldots\ldots$.

5.2 Calculs sur les puissances

5.2.1 Règles de calcul

Propriété 5.1. *Pour tous nombres réels strictement positifs a, b et pour tous réels x et y, on a :*
- $a^x \times a^y = \ldots\ldots\ldots$
- $\frac{a^x}{a^y} = \ldots\ldots\ldots$
- $(a^x)^y = \ldots\ldots\ldots$
- $(a \times b)^x = \ldots\ldots\ldots$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \ldots\ldots\ldots$

Exemples 5.1. Simplifier au maximum en utilisant les règles de calculs sur les puissances :
- $3^{0,2} \times 3^5 = \ldots\ldots\ldots$
- $10^4 \times 10^{-1,2} = \ldots\ldots\ldots$
- $x^{0,5} \times x^{-3} = \ldots\ldots\ldots$
- $\frac{2^4}{2^5} = \ldots\ldots\ldots$
- $\frac{y^4}{y^{-0,1}} = \ldots\ldots\ldots$
- $(5^2)^{1,3} = \ldots\ldots\ldots$
- $(z^2)^{-3} = \ldots\ldots\ldots$
- $(5a)^2 = \ldots\ldots\ldots$
- $\left(\frac{5}{4}\right)^3 = \ldots\ldots\ldots$
- $\left(\frac{t}{8}\right)^4 = \ldots\ldots\ldots$

Propriété 5.2. *Pour tout réel strictement positif a et tout réel x, on a :* $(a^x)^{\frac{1}{x}} = \ldots\ldots\ldots$

Exemple 5.2. $\left(2^{\frac{1}{0,2}}\right)^{0,2} = \ldots\ldots\ldots$

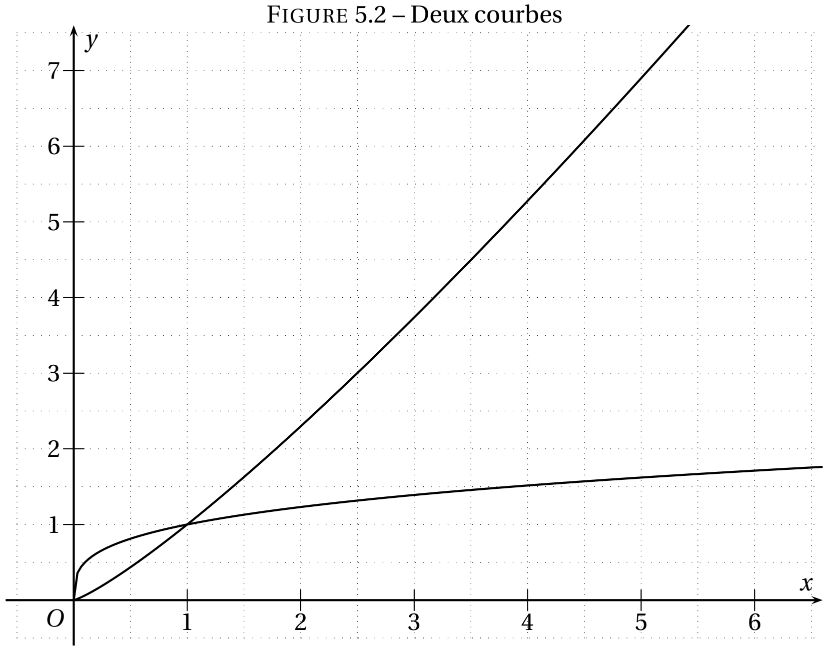
5.2.2 Résoudre une équation

Propriété 5.3. *Pour tout réel x positif et tout réel y, on a :*
- *Si* $x^y = a$, *alors* $x = \ldots\ldots\ldots$
- *Si* $x = a^{\frac{1}{y}}$, *alors* $x^y = \ldots\ldots\ldots$

Exemple 5.3. On donne sur la figure 5.2 page suivante les courbes représentatives des fonctions f et g définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x^{1,2}$ et $g(x) = x^{0,3}$.

1. Reconnaître les courbes représentant la fonction f et la fonction g. et donner leur équation.
2. (a) Résoudre graphiquement l'équation : $x^{1,2} = 5$.
   (b) Retrouver le résultat par le calcul et donner la valeur arrondie de la solution à 0,01 près.
3. (a) Résoudre graphiquement l'équation : $g(x) = 1,5$.
   (b) Trouver la valeur exacte du réel x tel que : $g(x) = 1,5$, puis en donner la valeur arrondie au millième.

FIGURE 5.2 – Deux courbes



5.3 Applications

5.3.1 Taux de variations

Intérêts composés

On a placé un capital de 1 000 € à un taux annuel t à intérêts composés sur une période de 3,5 ans. A l'issue de cette période, le nouveau capital est 1 186,21 €. Déterminer le taux annuel.

Taux moyen

Un prix augmente de 4 % en janvier, de 2 % en février et de 3 % en mars. Calculer le taux moyen t d'augmentation mensuel sur cette période de trois mois (*donner la valeur arrondie à 0,001 près*).

Placement

Luc place 1 500 € le 1er janvier 2 006 à un taux annuel de 3 %. Il effectue le calcul suivant : $1500 \times 1,03^{\frac{1}{4}}$.

1. Quel résultat trouve-t-il ?
2. À quoi correspond ce calcul ?

5.3.2 Suites géométriques

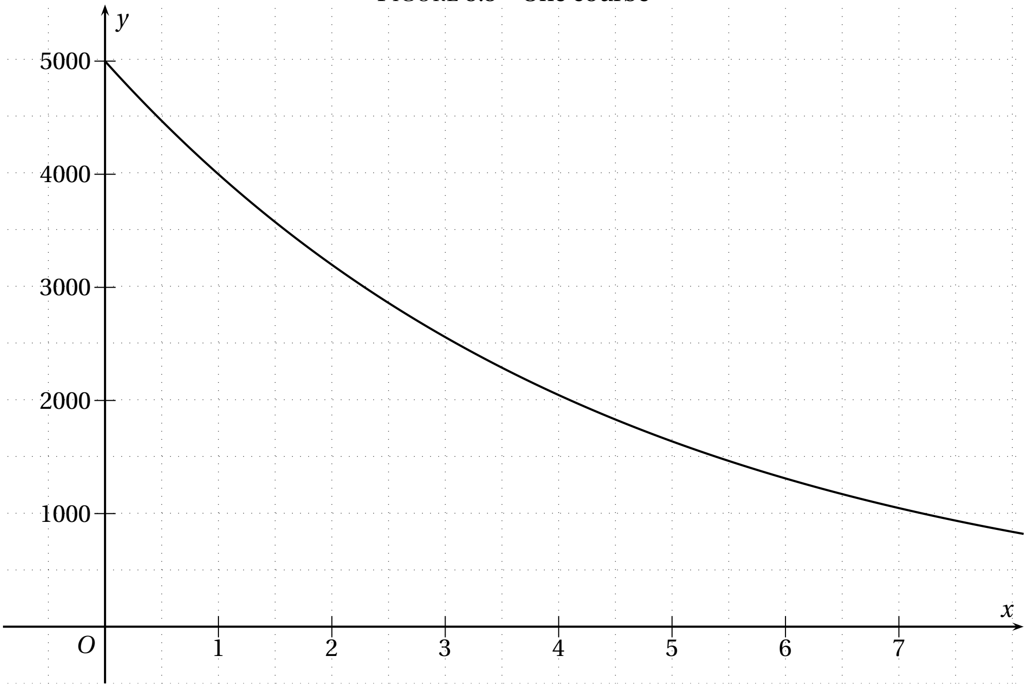
On considère la suite géométrique (u_n) de raison q, de premier terme $u_0 = 2$, telle que : $u_5 = 4$. Calculer la valeur arrondie à 0,001 près de q.

5.3.3 Modelisation

On donne sur la figure 5.3 page suivante la représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = 5000 \times 0,8^x$.

1. (a) Expliquer pourquoi cette fonction modélise la valeur d'une machine dont le prix diminue de 20 % tous les ans.
   (b) Quel est le prix initial de cette machine ?
2. À l'aide du graphique, indiquer :
   (a) le moment où la machine ne vaut plus que 2 000 € ;
   (b) le moment où la valeur de la machine a diminué de 75 %.
   (c) Retrouver ces résultats avec la calculatrice.

FIGURE 5.3 – Une courbe



Devoir surveillé n°5

Exposants réels

EXERCICE 5.1 (4 points)**.**
Julie place 1 500 € le 1er janvier 2 006 à un taux annuel de 4 %.

1. Calculer la valeur de son capital :
   (a) le 1er janvier 2 007 ;
   (b) le 1er juin 2 007 ;
   (c) le 1er octobre 2 007.
2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'année et le mois où son capital dépasse 1 650 €.

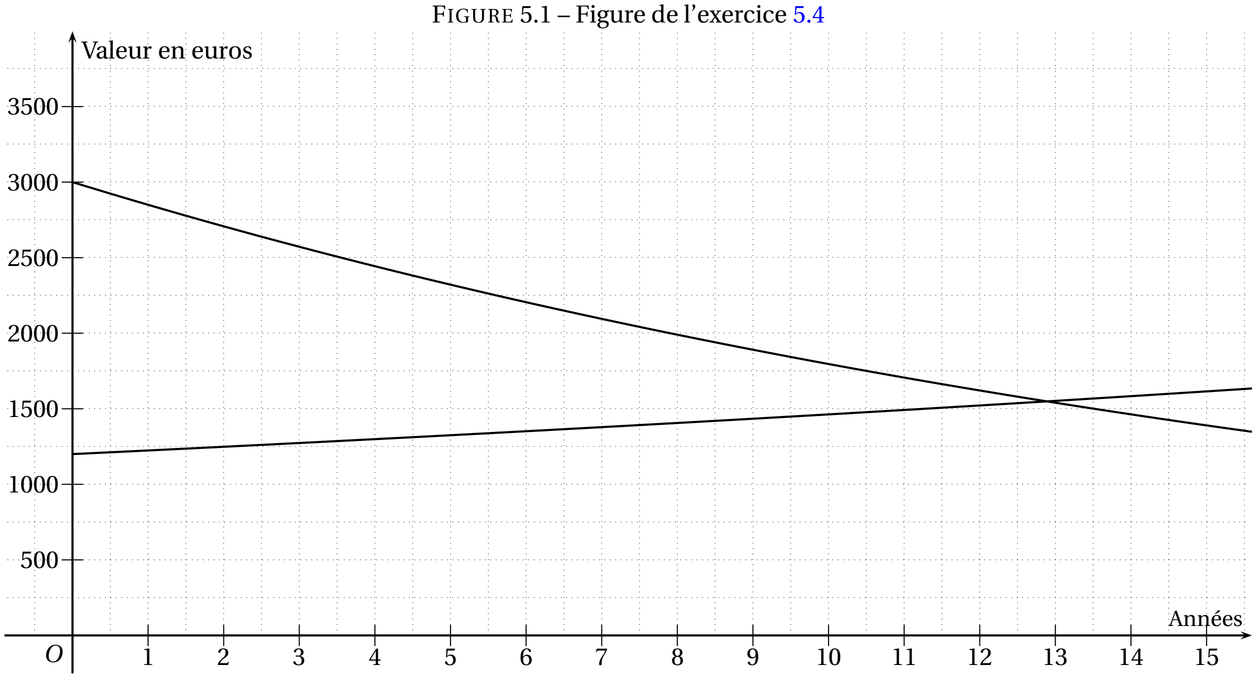
EXERCICE 5.2 (5 points)**.**
Un particulier possède deux comptes rémunérés dans une banque. Dans chacun des comptes, il a placé 1 000€.
Le compte A a été ouvert il y a 2 ans et son capital sur ce compte est maintenant de 1 050 €, le compte B a été ouvert il y a 4 ans et 7 mois et son capital sur ce compte est maintenant de 1 110 €.

1. Quel est le taux d'intérêt annuel, à 0,01 près, du compte A ?
2. Quel est le taux d'intérêt annuel, à 0,01 près, du compte B ?
3. En déduire le compte le plus avantageux.

EXERCICE 5.3 (3 points)**.**
On considère la suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme $u_0 = 5000$ telle que $u_8 = 5414,28$.
Déterminer la valeur arrondie à 0,01 de q.

EXERCICE 5.4 (8 points)**.**
Éric a acheté une aquarelle et elle gagne 2 % de sa valeur tous les ans.
Stéphane a acheté un tableau qui perd 5 % de sa valeur tous les ans.
Les deux courbes de la figure 5.1 modélisent cette situation.

FIGURE 5.1 – Figure de l'exercice 5.4



1. (a) Déterminer quelle courbe modélise l'évolution de la valeur de chacun des deux objets en justifiant brièvement.
   (b) Déterminer par lecture graphique les valeurs initiales de l'aquarelle et du tableau.
   (c) En déduire l'équation de chaque courbe.
2. Déterminer au bout de combien d'années les deux achats auront la même valeur :
   (a) à l'aide du graphique ;
   (b) en s'aidant de la table des valeurs de la calculatrice.

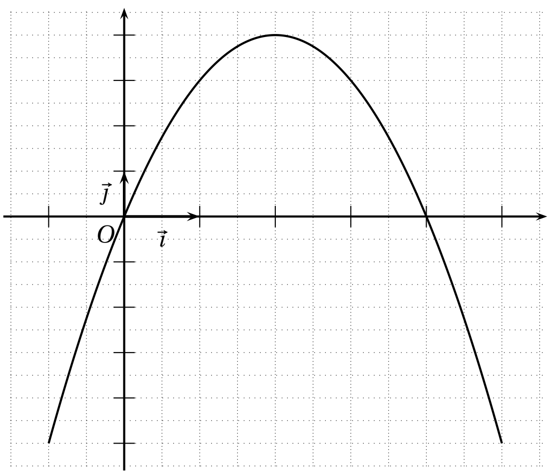
Chapitre 6

Applications de la dérivation

Sommaire

6.1 Activités

ACTIVITÉ 6.1.
Le plan est muni du repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1;5]$ dont on donne la courbe représentative $\mathscr{C}$ sur la figure ci-dessous.



1. Lire sur le graphique :
   (a) l'image de 1 par f : . . . .
   (b) $f(-1) =$ . . . .
2. Déterminer le (ou les) antécédent(s) éventuel(s) de :
   (a) 3 par la fonction f : . . . .
   (b) -2 par la fonction f : . . . .
3. (a) Compléter les phrases suivantes :
   La fonction f admet un maximum atteint en $x =$ . . . .
   Ce maximum est f(. . . . .) = ...
   La fonction f admet un minimum atteint en $x =$ . . . . et $x =$ . . . .
   Ce minimum est f(. . . . .) = ...
   (b) Compléter alors :
   Si $x \in [-1;5]$,alors
   . . . . $\leqslant f(x) \leqslant$ . . . .
4. Résoudre graphiquement les équations suivantes :
   (a) $f(x) = 0$ $\quad S =$ . . . .
   (b) $f(x) = 4$ $\quad S =$ . . . .
5. (a) Déterminer pour quelles valeurs de x de $[-1;5]$, $f(x)$ est positif.
   (b) En déduire le tableau de signe de $f(x)$ sur $[-1;5]$.

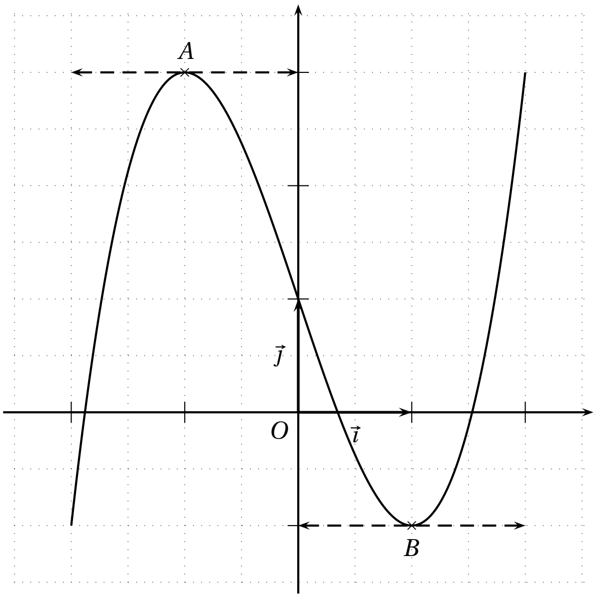
x	
Signes de $f(x)$	

6. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant 3$.
   $S =$ . . . .
7. (a) On admet que la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente Δ au point A de coordonnées $(3;3)$ et que $f'(3) = -2$.
   Construire la tangente Δ.
   (b) On admet que la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point $S(2;4)$.
   En déduire le nombre dérivé $f'(2)$.
8. Soit B le point de coordonnées $(1;4)$. On admet que la courbe $\mathscr{C}$ admet (OB) comme tangente au point O.
   (a) Construire la droite (OB).
   (b) Déterminer le nombre dérivé $f'(0)$.
9. (a) Compléter le tableau de variation de f :

x	
Variations de f	

   (b) Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :
   i. $f'(x) \leqslant 0$ $\quad S =$ . . . .
   ii. $f'(x) \geqslant 0$ $\quad S =$ . . . .

ACTIVITÉ 6.2.
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $I = [-2;2]$ par : $f(x) = x^3 - 3x + 1$.
Aux points A et B de la courbe $\mathscr{C}$, les tangentes sont parallèles à l'axe des abscisses.



1. **Approche graphique**
   (a) Donner le tableau de variation de f à partir du graphique.

x	
Variations de f	

   (b) En traçant à main levée des tangentes à la courbe $\mathscr{C}$, dresser un tableau donnant le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

x	
Signe de $f(x)$	

   Préciser le lien constaté entre le signe de $f'(x)$ et les variations de f.
2. **Étude algébrique**
   (a) Déterminer $f'(x)$.
   (b) Factoriser $f'(x)$.
   (c) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

x	
Signe de $f(x)$	

   (d) Comparer au résultat obtenu dans l'approche graphique.
   (e) Quel semble être le lien entre le signe de $f'(x)$ et les variations de f ?

6.2 Variation de fonctions et signe de la dérivée

Propriété 6.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*
- *Si f est croissante sur I, alors, pour tout $x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.*
- *Si f est décroissante sur I, alors, pour tout $x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.*

Réciproquement :

Propriété 6.2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I.*
- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.*
- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.*
- *Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.*

Propriété 6.3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\alpha \in I$.*
Si $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en α, alors $f(x)$ admet un extremum local (minimum ou maximum) atteint en α.

On l'admettra.

6.3 Exercices

- 2 page 139
- 17 à 20 page 143
- 27 et 30 page 148
- 34 et 38 page 149
- 42 page 150
- Problèmes : 45 à 49 page 154 à 156

Baccalauréat blanc

EXERCICE 1 (4,5 points)**.**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est correcte.

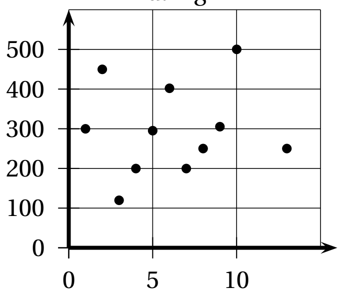
Relever sur votre copie le numéro de la question ainsi que la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse juste aux questions 1, 2 et 3 rapporte 0,5 point, une réponse fausse, ou l'abscence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

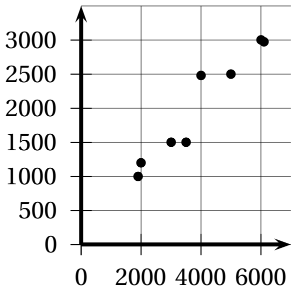
Une réponse juste aux questions 4a, 4b et 4c rapporte 1 point, une réponse fausse, ou l'abscence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Question 1. Parmi les trois, graphiques de nuages de points suivants, indiquer celui pour lequel un ajustement affine semble judicieux.

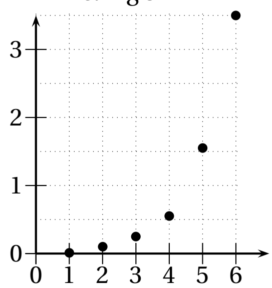
a. fig 1



b. fig 2

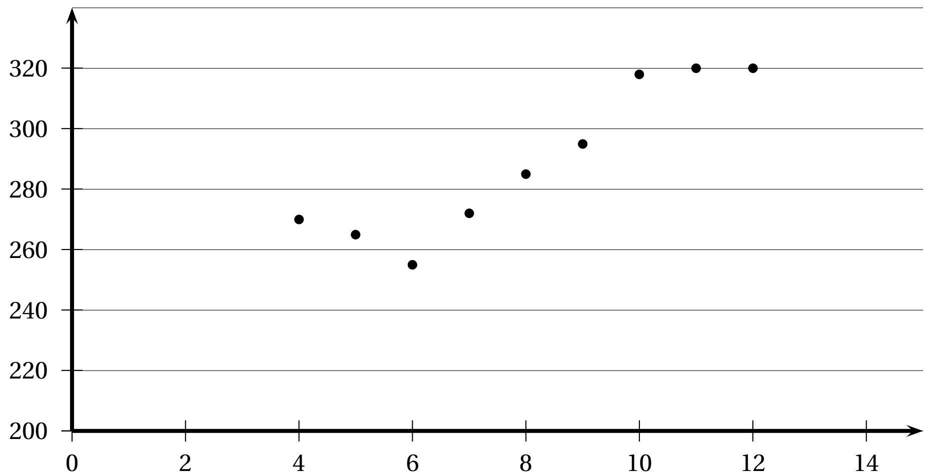


c. fig 3



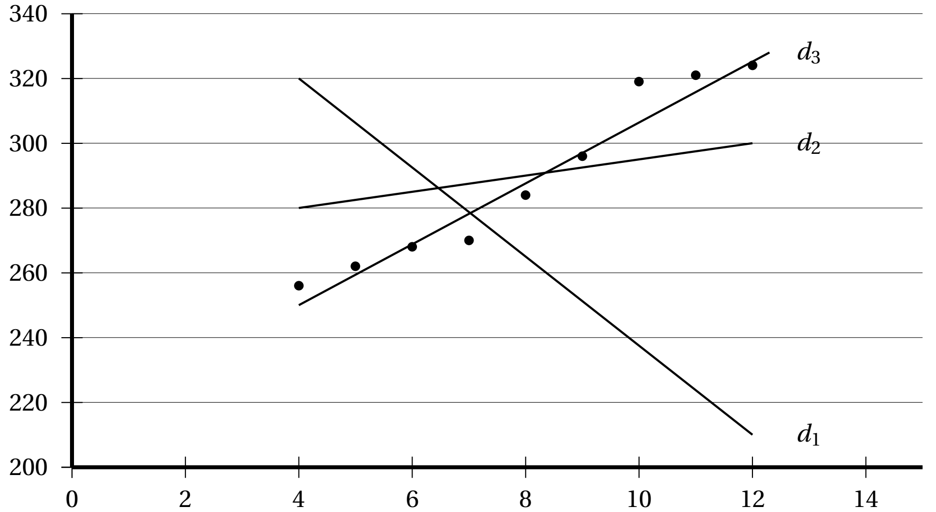
Question 2. Le point moyen du nuage ci-dessous est le point G de coordonnées :

a. G (12 ; 290) **b.** G (5 ; 260) **c.** G (8 ; 290)



Question 3. Parmi les trois droites suivantes, quelle est celle qui réalise le meilleur ajustement affine du nuage ci-dessous ?

a. La droite d_1 **b.** La droite d_2 **c.** La droite d_3



Question 4. (a) Un particulier décide de changer, d'ici deux ou trois ans, son véhicule acheté en 2002. Souhaitant connaître le prix auquel il pourra le revendre, il consulte l'Argus afin de connaître la cote de son véhicule et obtient le tableau suivant :

Année	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6
Cote y_i en euros	16000	13500	11 200	9000	7400	5900

On précise que la cote est la valeur de revente du véhicule en fonction de l'année choisie pour la revente ; par exemple, en 2005, la valeur de son véhicule était 11200 €.
Pour estimer la cote de sa voiture en 2010, il procède à un ajustement affine par la méthode des moindres carrés à l'aide d'une calculatrice.
Après avoir arrondi les valeurs approchées à la centaine d'euros la plus proche, une équation de la droite de régression de y en x est :

a. $y = -2100x + 17600$ **b.** $y = -2000x + 17600$ **c.** $y = -2100x + 17000$

(b) L'estimation du prix de son véhicule en 2010, selon le modèle précédent, est alors :

a. 1600 € **b.** 800 € **c.** 200 €

(c) En moyenne, sur la période 2003-2008, ce véhicule perd par an à 100 €près :

a. 1000 € **b.** 2000 € **c.** 3000 €

EXERCICE 2 (7,5 points).
Une entreprise produit des appareils électroménagers. Le coût horaire de production de x appareils est donné en euros par :

$$C(x) = x^2 + 50x + 100 \quad \text{pour} \quad 5 \leqslant x \leqslant 40.$$

1. L'entreprise vend chaque appareil 100 euros.
   (a) Expliquer pourquoi le bénéfice horaire réalisé par la fabrication et la vente de x objets est égal à : $B(x) = -x^2 + 50x - 100$ pour x appartenant à $[5; 40]$.
   (b) B' étant la fonction dérivée de B sur $[5; 40]$, calculer $B'(x)$ et étudier son signe.
   (c) Dresser le tableau de variations de B.
   (d) Quel est le nombre d'appareils à produire pour que le bénéfice horaire de l'entreprise soit maximal ?
2. Le coût moyen de production d'un objet est égal à $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$ pour x appartenant à $[5; 40]$.
   (a) Montrer que $f(x) = x + 50 + \dfrac{100}{x}$.
   (b) f' étant la dérivée de la fonction f sur $[5; 40]$, montrer que :
   $$f'(x) = \frac{(x-10)(x+10)}{x^2} \text{ pour tout } x \text{ appartenant à } [5; 40].$$
   (c) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
   (d) Pour quelle valeur de x le coût moyen est-il minimal ? Préciser alors sa valeur.
   (e) Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant (on arrondira au centime d'euro) :

x	5	10	15	20	30	40
$f(x)$		70				

   (f) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.
   Unités graphiques : 1 cm pour cinq appareils en abscisse, 1 cm pour 10 euros en ordonnée.

EXERCICE 3 (8 points).

On rappelle qu'un capital produit :

- *des **intérêts simples** si les intérêts sont uniquement calculés sur ce capital ;*
- *des **intérêts composés** si à la fin de chaque période, les intérêts générés sont ajoutés au capital pour produire de nouveaux intérêts.*

À la naissance de leur fils en 2007, des parents bloquent une somme d'argent afin de pouvoir financer d'éventuelles études à sa majorité.
La banque B leur propose un placement à ***intérêts simples*** à 5 % par an.
La banque C leur propose un placement à ***intérêts composés*** à 4,5 % par an.
Ils décident de simuler un placement de 5000 € dans chacune des deux banques.
On note B_n la somme disponible l'année $(2007+n)$ suite au placement dans la banque B et C_n la somme disponible l'année $(2007+n)$ suite au placement dans la banque C.

1. Dans le tableau ci-dessous, on donne la copie de la simulation réalisée sur un tableur. Quatre nombres ont été effacés. Déterminer, sur votre copie, les valeurs manquantes en indiquant les calculs effectués.
2. (a) Exprimer B_{n+1} en fonction de B_n. Quelle est la nature de la suite (B_n) ? Préciser sa raison.
   (b) Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n. Quelle est la nature de la suite (C_n) ? Préciser sa raison.
3. (a) Calculer pour chaque placement le taux d'évolution exprimé en pourcentage, arrondi au centième, du capital à la fin des dix-huit années.
   (b) Quel est le placement le plus avantageux ?
   (c) Suite à ce constat, les parents déposent 10000 € sur le placement le plus avantageux, au lieu de 5000 €. Quelle sera la somme disponible à la majorité de leur fils (c'est-à-dire pour ses 18 ans) ?
4. **Question hors barème :** Dans le tableau, quelles formules a-t-on entrées dans les cellules B3 et C3 et recopiées vers le bas ?

	A	B	C
1	année	banque B	banque C
2	2007	5000	5000
3	2008		
4	2009		
5	2010	5750,00	5705,83
6	2011	6000,00	5962,59
7	2012	6250,00	6230,91
8	2013	6500,00	6511,30
9	2014	6750,00	6804,31
10	2015	7000,00	7110,50
11	2016	7250,00	7430,48
12	2017	7500,00	7764,85
13	2018	7750,00	8114,27
14	2019	8000,00	8479,41
15	2020	8250,00	8860,98
16	2021	8500,00	9259,72
17	2022	8750,00	9676,41
18	2023	9000,00	10111,85
19	2024	9250,00	10566,88
20	2025	9500,00	11042,39

Chapitre 7

Fonction logarithme népérien

Sommaire

7.1 Vers une nouvelle fonction

7.1.1 Tableau de valeurs

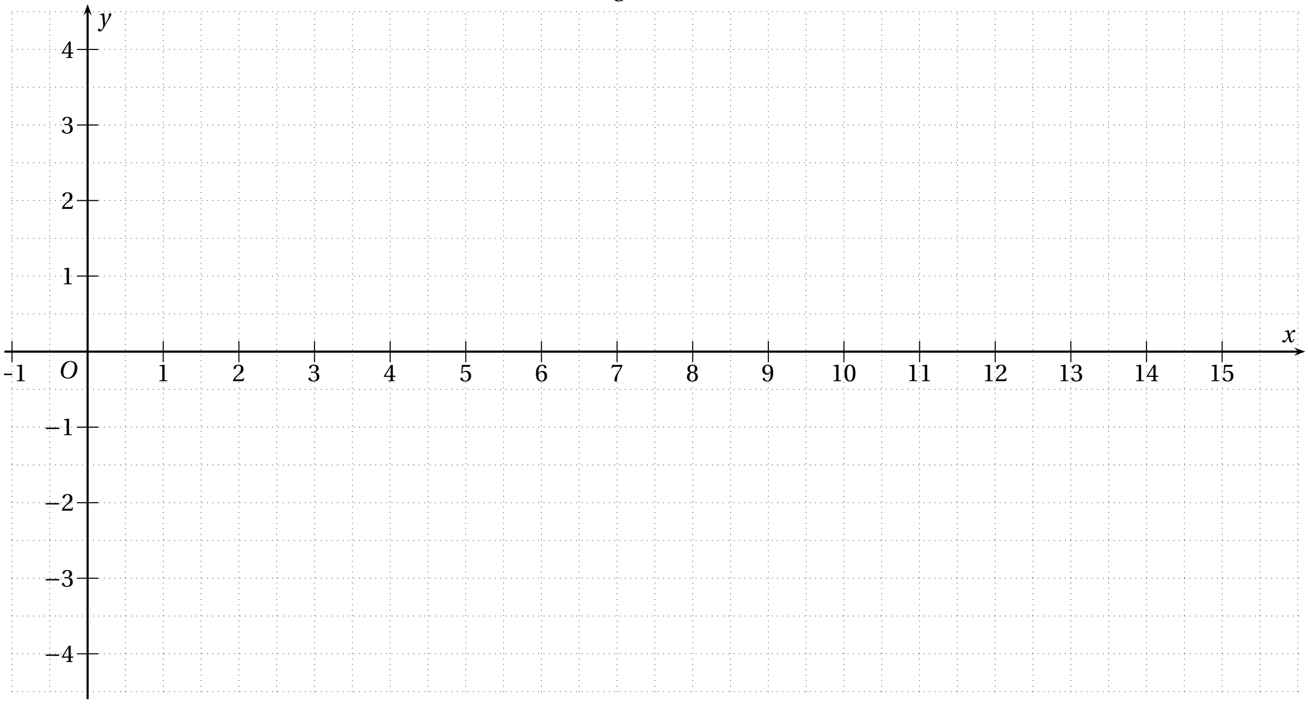
Compléter le tableau de valeurs de la fonction logarithme népérien suivant (*ln* en abrégé) en utilisant la touche $\boxed{\ln}$ de votre calculatrice. Vous donnerez les valeurs approchées à 10^{-2} près.

x	-2	0	0,1	0,2	0,3	0,5	1	2	2,7	3	4	5	10	15
$\ln x$														

7.1.2 Courbe représentative

Dans le repère de la figure 7.1, placer les points de coordonnées $(x; \ln x)$ obtenus avec le tableau de valeurs et représenter graphiquement la fonction $\ln : x \longmapsto \ln x$.

FIGURE 7.1 – Figure de la section 7.1.2



Lire graphiquement la valeur de x pour laquelle $\ln x = 1$. On note e cette valeur.

$$\boxed{\mathrm{e} \approx \ldots\ldots\ldots\ldots}$$

Avec la calculatrice, compléter les tableaux de valeurs :

x	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
$\ln x$					
x	2,70	2,71	2,72	2,73	2,74
$\ln x$					

En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la valeur e de x pour laquelle $\ln x = 1$.

$$\boxed{\ln e = 1 \quad \text{avec} \quad \ldots\ldots\ldots \leqslant \mathrm{e} \leqslant \ldots\ldots\ldots}$$

7.1.3 Ensemble de définition

La fonction logarithme népérien ln est une nouvelle fonction définie sur l'intervalle …………

7.1.4 Signe

On remarque que
- $\ln 1 = \ldots\ldots\ldots$
- sur l'intervalle $]0\,;\,1[$, $\ln x$ ………
- sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$, $\ln x$ ………

D'où le tableau de signes de la fonction ln :

x	
$\ln x$	

7.1.5 Sens de variation

Sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la fonction ln est …………………
D'où le tableau de variation de la fonction ln :

x	
$\ln x$	

7.2 Relations algébriques

À l'aide de la calculatrice, compléter les tableaux suivants en donnant les valeurs approchées à 10^{-2} près :

7.2.1 Logarithme d'un produit

a	b	$\ln a$	$\ln b$	$\ln a + \ln b$	$a \times b$	$\ln(a \times b)$
2	3					
4	5					
0,2	15					

Propriété 7.1. *Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, on a :*

$$\ln(a \times b) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

7.2.2 Logarithme d'un inverse

b	$\ln b$	$\frac{1}{b}$	$\ln\left(\frac{1}{b}\right)$
2			
4			
0,2			

Propriété 7.2. *Pour tout nombre réel b strictement positif, on a :*

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

7.2.3 Logarithme d'un quotient

a	b	$\ln a$	$\ln b$	$\ln a - \ln b$	$\frac{a}{b}$	$\ln\left(\frac{a}{b}\right)$
2	3					
4	5					
0,2	15					

Propriété 7.3. *Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, on a :*

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

7.2.4 Logarithme d'une puissance

a	n	$\ln a$	$n \ln a$	a^n	$\ln\left(a^n\right)$
2	3				
4	-2				
0,2	2				

Propriété 7.4. *Pour tout nombre réel a strictement positif et tout nombre entier relatif n, on a :*

$$\ln\left(a^n\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque. $\ln\left(\mathrm{e}^n\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

7.2.5 logarithme d'une racine carrée

a	$\frac{1}{2}\ln a$	$\sqrt{a}$	$\ln(\sqrt{a})$
2	3		
4	5		
0,2	15		

Propriété 7.5. *Pour tout nombre réel a strictement positif, on a :*

$$\ln\left(\sqrt{a}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque. $\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

EXERCICE 7.1. 1. Simplifier le nombre $A = 2\ln(\mathrm{e}^2) - 3\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) + \ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$.

2. Calculer en fonction de $\ln(3)$ le nombre $B = \ln\left(\sqrt{3}\right) - \ln(81) + \ln(3\mathrm{e})$.

7.3 Équations et inéquations

On déduit du sens de variation de la fonction ln, les équivalences suivantes :

Propriété 7.6. *Pour tous nombres a et b strictement positifs, on a :*
- $\ln a = \ln b$ *si et seulement si* ....
- $\ln a \leqslant \ln b$ *si et seulement si* ....
- $\ln a > \ln b$ *si et seulement si* ....

Exercice 7.2.
Résoudre sur l'intervalle $I =]0\,;+\infty[$, les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln x = 2$
2. $\frac{1}{2}\ln x \geqslant \ln 4$
3. $\ln(3x) < \ln 4$

Exercice 7.3 (Exercice corrigé)**.**
Un capital de 10 000 € est placé à intérêts composés à un taux de 2,5 % par an.
En combien d'années doublera-t-il ?

Notons $C(x)$ la valeur atteinte par le capital au bout de x années.
On a $C(x) = 10000\left(1+\frac{2,5}{100}\right)^x$.
On cherche x tel que $C(x) = 2\times 10000 = 20000$. Or :

$$\begin{aligned} C(x) = 20000 &\Leftrightarrow 10000\left(1+\frac{2,5}{100}\right)^x = 20000\\ &\Leftrightarrow \left(1+\frac{2,5}{100}\right)^x = \frac{20000}{10000} = 2\\ &\Leftrightarrow 1,025^x = 2\\ &\Leftrightarrow \ln\left(1,025^x\right) = \ln 2\\ &\Leftrightarrow x\ln 1,025 = \ln 2\\ &\Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{\ln 1,025}\\ &\Leftrightarrow x \approx 28,1 \end{aligned}$$

Il faudra donc environ 28,1 ans pour que ce capital double.

Exercice 7.4 (Exercice corrigé)**.**
Une voiture est achetée, neuve, 12 000 €. On estime que, sur le marché de l'occasion, elle perd 20 % de sa valeur par an.
À partir de combien d'années sa valeur sera-t-elle inférieure à 40 % de sa valeur initiale ?

Notons $V(x)$ la valeur atteinte par la voiture au bout de x années. On a $V(x) = 12000\left(1-\frac{20}{100}\right)^x$.
On cherche x tel que $V(x) \leqslant 12000\times\frac{40}{100} = 4800$. Or :

$$\begin{aligned} V(x) \leqslant 4800 &\Leftrightarrow 12000\left(1-\frac{20}{100}\right)^x \leqslant 4800\\ &\Leftrightarrow \left(1-\frac{20}{100}\right)^x \leqslant \frac{4800}{12000} = 0,4\\ &\Leftrightarrow 0,8^x \leqslant 0,4\\ &\Leftrightarrow \ln\left(0,8^x\right) \leqslant \ln 0,4\\ &\Leftrightarrow x\ln 0,8 \leqslant \ln 0,4\\ &\Leftrightarrow x \geqslant \frac{\ln 0,4}{\ln 0,8} \text{ car } \ln 0,8 \text{ est négatif} \end{aligned}$$

Or $\frac{\ln 0,4}{\ln 0,8} \approx 4,1$, donc la valeur de la voiture sera inférieure à 40 % de sa valeur initiale après environ 4,1 ans.

7.4 Dérivées

7.4.1 Dérivée de la fonction ln

Propriété 7.7. *La fonction* ln *est dérivable sur* $]0\,;+\infty[$*, et pour tout* $x \in]0\,;+\infty[$,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Remarque. Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$. D'où le tableau de variation de la fonction ln.

x	
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	
$\ln x$	

On retrouve bien le sens de variation de la fonction ln sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

7.4.2 Dérivée d'une fonction de la forme $\ln(u)$

Théorème 7.8. *Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.*
La fonction f définie sur I par $f(x) = \ln[u(x)]$ est dérivable sur I et pour tout x de I, on a :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Remarque. Pour simplifier, on écrit : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

EXERCICE 7.5.
Soit f la fonction définie sur $]-\frac{1}{3}\,; +\infty[$ par $f(x)=\ln(3x+1)$. Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f.

7.5 Exercices

7.5.1 Propriétés algébriques

EXERCICE 7.6.
Simplifier les expressions suivantes :

1. $\ln 6-\ln 2$
2. $\ln 2+\ln\left(\frac{1}{2}\right)$
3. $\ln 3-\ln 9$
4. $\ln 2+\ln 4-\ln 8$
5. $\frac{1}{4}\ln 81$
6. $\ln\left(\frac{1}{3}\right)+2\ln\sqrt{3}$
7. $\ln(2+\sqrt{3})+\ln(2-\sqrt{3})$
8. $\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}\right)-\ln(\sqrt{3}-1)$

EXERCICE 7.7.
Donner, en fonction de $\ln 2$ et de $\ln 5$ les valeurs de :

1. $\ln 10$
2. $\ln 25$
3. $\ln 16$
4. $\ln 400$
5. $\ln\left(\frac{2}{25}\right)$
6. $\ln\left(\frac{1}{100}\right)$
7. $\ln\left(\frac{5}{8}\right)$
8. $\ln 0,4$
9. $\ln\sqrt{5}$
10. $\ln\left(2\sqrt{2}\right)$
11. $\ln\left(5\sqrt{10}\right)$
12. $\ln\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

EXERCICE 7.8.
a et b étant deux réels strictements positifs, donner en fonction de $\ln a$ et de $\ln b$ les valeurs de :

1. $\ln\left(\dfrac{a}{b^2}\right)$
2. $\ln\left(a^3\times b^5\right)$
3. $\ln\left(ab^3\right)$
4. $\ln\left(\dfrac{b^2}{a^3}\right)$
5. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)^3$
6. $\dfrac{\ln a}{\ln\left(ab^2\right)}$
7. $\dfrac{\ln\left(ab^4\right)}{\ln b}$

+ Exercices 35 à 38 p 201.

7.5.2 Résolutions

EXERCICE 7.9.
Dans chacun des cas suivants, déterminer les valeurs interdites pour x puis résoudre sur l'intervalle indiqué :

1. $\ln x>1$ pour $x\in\,]0\,;+\infty[$.
2. $\ln x=2$ pour $x\in\,]0\,;+\infty[$.
3. $\ln x<-1$ pour $x\in\,]0\,;+\infty[$.
4. $3-\ln x\leq 0$ pour $x\in\,]0\,;+\infty[$.
5. $\ln x=-3$ pour $x\in\,]0\,;+\infty[$.
6. $2\ln(x+1)=0$ pour $x\in\,]-1\,;+\infty[$.
7. $\dfrac{1}{\ln x+1}>0$ pour $x\in\,]0\,;+\infty[$.
8. $\ln(2x+1)=1$ pour $x\in\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.
9. $\ln\left(x^2\right)=-1$ pour $x\in\mathbb{R}^*$.
10. $\ln\left[x(x+1)\right]=0$ pour $x\in\,]-\infty\,;-1[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.
11. $\ln x+\ln(x+1)=0$ pour $x\in\,]0\,;+\infty[$.
12. $2\ln x-1=0$ pour $x\in\,]0\,;+\infty[$.
13. $2x\ln x+x=0$ pour $x\in\,]0\,;+\infty[$.
14. $(x-1)(1+\ln x)=0$ pour $x\in\,]0\,;+\infty[$.
15. $x\ln(x+2)=0$ pour $x\in\,]-2\,;+\infty[$.

+ Exercices 78 et 80 p 206

7.5.3 Fonctions comportant $\ln x$

Exercices 10 et 11 p 193, 33 et 34 p 201, 48 à 56 p 202

7.5.4 Fonctions comportant $\ln u$

Exercices 22 et 23 p 198, 60 p 203

7.5.5 Exercices de synthèse

91 et 92 p 211, 94 p 212

Devoir surveillé n°7

Logarithme népérien

EXERCICE 7.1 (4 points)**.**
Les questions sont indépendantes.

1. Écrire les nombres suivants sous la forme $\ln a$ (où a est un nombre réel) :
   - $A = \ln 7 - \ln 2$
   - $B = 2\ln 3 + \ln 5$
   - $C = -\ln 5$
   - $D = 2\ln 7 - 1$
2. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \ln x + 2^2 + x$
   (a) Calculer $f(1)$, $f(\mathrm{e})$ et $f(\mathrm{e}^3)$. On donnera les valeurs exactes.
   (b) Calculer $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$

EXERCICE 7.2 (4 points)**.**
Résoudre les équations dans l'intervalle demandé :

1. $\ln(x-1) = \ln(2x-3)$ sur $I =]1,5\,;+\infty[$
2. $\ln(x+2) = 3$ sur $I =]-2\,;+\infty[$
3. $\ln(x-2) = 0$ sur $I =]2\,;+\infty[$
4. $\ln x - \ln(x+1) = 0$ sur $I =]0\,;+\infty[$

EXERCICE 7.3 (4 points)**.**
Tous les résultats devront être justifiés.
Une personne place 5 000 €, à intérêts composés, au taux de 7 % par an.

1. De quel capital cette personne disposera-t-elle au bout d'un an ? De cinq ans ?
2. Dans combien d'années le capital disponible sera-t-il supérieur ou égal à 8 000 € ?
3. Combien faut-il d'années pour que le capital double ?

EXERCICE 7.4 (8 points)**.**
On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1\,;7]$ par :

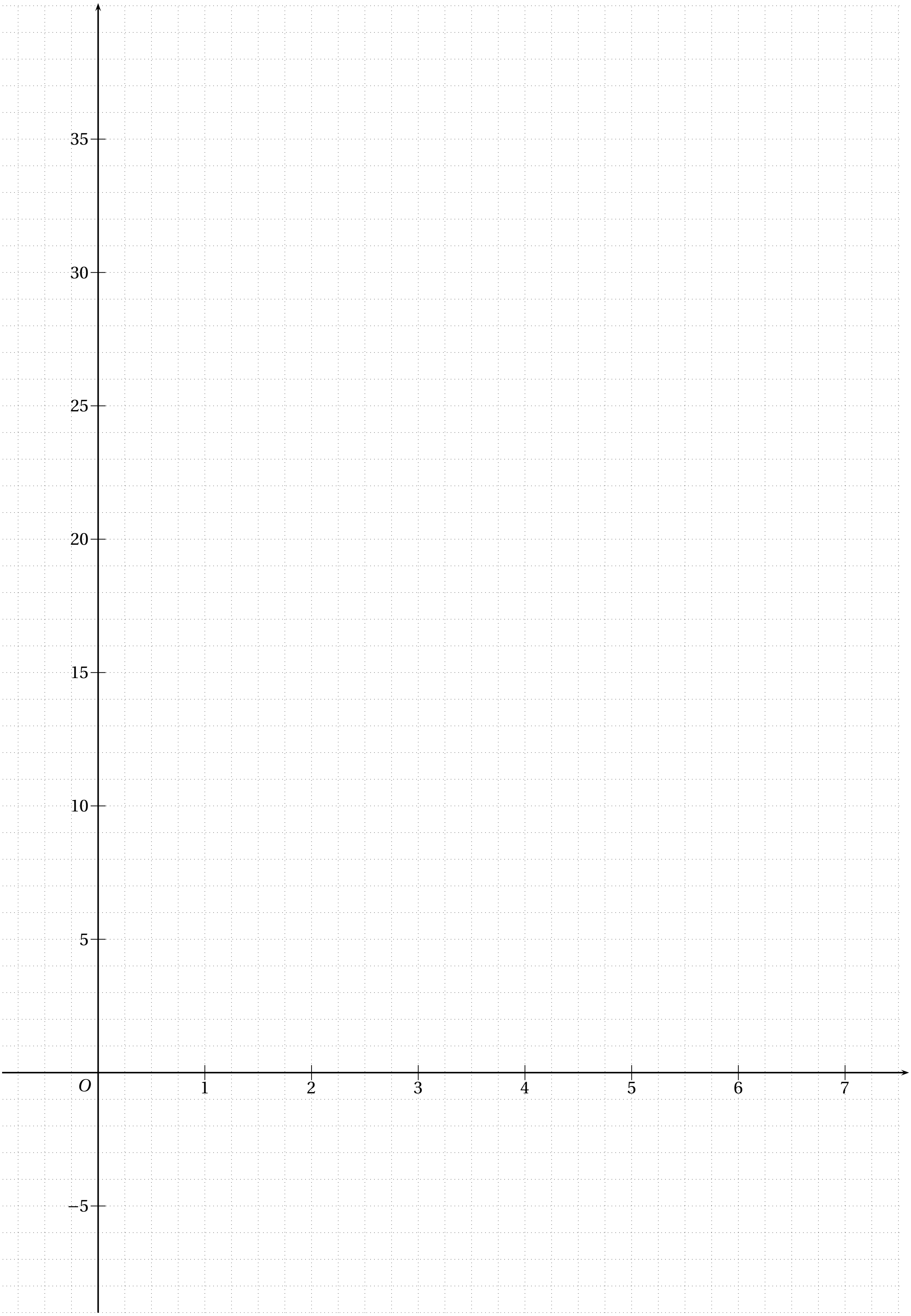
$$f(x) = 2x^2 - 20x + 40 + 16\ln(x).$$

1. Soit f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[1\,;7]$.
   Calculer $f'(x)$ puis montrer que $f'(x) = \dfrac{4(x-4)(x-1)}{x}$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;7]$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f.
3. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant. On arrondira les résultats à l'unité.

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	22						

4. Représenter graphiquement la fonction f dans le repère orthogonal de la figure 7.1 page suivante.
5. Un artisan fabrique entre 1 et 7 poupées de collection par jour. Le coût unitaire de fabrication de x poupées, exprimé en euros, est égal à $f(x)$ (x est compris entre 1 et 7).
   (a) Combien faut-il produire de poupées pour que le coût unitaire de fabrication soit minimal ? Quel est ce coût minimal ?
   (b) Le prix de vente d'une poupée est de 20 euros.
   Par lecture graphique, déterminer combien de poupées l'entreprise doit produire pour réaliser un bénéfice.

FIGURE 7.1 – Figure de l'activité 7.4



Chapitre 8

Probabilités

Sommaire

8.1 Activités

ACTIVITÉ 8.1 (Fréquences de populations)**.**
Le tableau suivant donne la répartition des 35 élèves d'une terminale STG selon leur spécialité

	Merc	CFE	GSI	Totaux
Filles	12	4	5	21
Garçons	4	3	7	14
Totaux	16	7	12	35

On note :
- M la sous-population d'élèves suivant la spécialité Mercatique ;
- C la sous-population d'élèves suivant la spécialité Comptabilité et finances des entreprises ;
- I la sous-population d'élèves suivant la spécialité Gestion des systèmes d'information.

On note respectivement F et G les sous-populations de filles et de garçons.

1. (a) Trouver la fréquence f_G de la population G de garçons dans la population totale.
   Cette fréquence est appelée la fréquence marginale de G.
   (b) En déduire la fréquence marginale f_F de la population F de filles.
   (c) Trouver la fréquence marginale de la population I.
2. Un élève fait partie de la sous-population $G \cap I$ s'il fait partie **simultanément** des deux sous-population G **et** I.
   Trouver la fréquence marginale de $G \cap I$.
   Cette fréquence est appelée fréquence conjointe de G et de I.
3. Un élève fait partie de la sous-population $G \cup I$ s'il fait partie **soit** des garçons, **soit** des élèves suivant la spécialité Gestion des systèmes d'information.
   Trouver le nombre d'élèves de cette sous-population et en déduire sa fréquence marginale.
4. Exprimer $f_{G\cup I}$ en fonction de f_G, f_I et $f_{G\cap I}$.
5. Trouver la fréquence de la spécialité Gestion des systèmes d'information dans la population de garçons.
   Cette fréquence conditionnelle est notée $f_G(I)$ et elle se lit : « fréquence de I sachant G ».
6. Vérifier que la fréquence de I sachant G est $f_G(I) = \frac{f_{G\cap I}}{f_G}$

ACTIVITÉ 8.2 (Probabilités et conditionnement)**.**
La répartition des élèves d'une terminale STG est celle du tableau de l'activité 8.1.
On choisit un élève au hasard dans cette classe. On appelle **univers** U l'ensemble de toutes les **éventualités** à l'issue de ce choix.
Chaque élève de la classe est une éventualité. Le nombre d'éléments de l'univers est 35 et est noté $\text{card}(U) = 35$.
Si l'élève est choisi au hasard, chaque élève a la même probabilité d'être choisi, soit $\frac{1}{35}$: il y a **équiprobabilité**.

1. On considère l'événement M « l'élève choisi suit la spécialité Mercatique ».
   Trouver la probabilité de M, notée $p(M)$
2. On note $\overline{M}$ l'événement contraire de M.
   Décrire cet événement par une phrase et trouver sa probabilité, notée $p(\overline{M})$.
3. On donne l'événement F « l'élève choisi est une fille ».
   Décrire les événements $F \cap M$ et $F \cup M$ par des phrases puis déterminer leurs probabilités, notées $p(F \cap M)$ et $p(F \cup M)$. Quelle égalité relie les probabilités $p(F \cap M)$, $p(F \cup M)$, $p(F)$ et $p(M)$?
4. Dans cette question, **on sait que** l'élève choisi est une fille. L'objectif est de trouver la probabilité qu'elle suive la spécialité Mercatique.

	Merc	CFE	GSI	Totaux
Filles	12	4	5	21

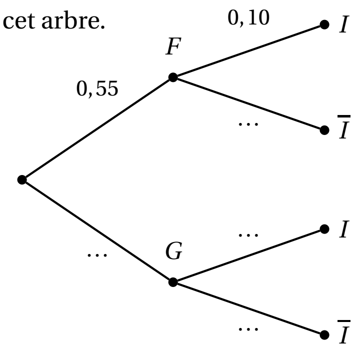
   (a) Le problème revient à choisir un élève parmi les filles : quel est le nombre d'éventualités ?
   (b) Comment se note l'événement « choisir une fille qui suit la spécialité Mercatique » ?
   (c) Trouver la probabilité que l'élève choisi suive la spécialité Mercatique sachant que c'est une fille ; cette probabilité est notée $p_F(M)$.
   (d) Calculer le quotient $\frac{p(F\cap M)}{p(F)}$. Que peut-on en déduire ?
   (e) Trouver la probabilité que l'élève choisi soit une fille sachant que cet élève a choisi la spécialité Mercatique.

ACTIVITÉ 8.3 (Arbres pondérés)**.**
Dans un établissement scolaire, 55 % des élèves sont des filles et 45 % sont des garçons. Parmi les filles, 10 % sont internes et, parmi les garçons, il y en a 20 %. On choisit un élève au hasard. On considère les événements suivants :

- F : « l'élève est une fille » ;
- G : « l'élève est un garçon » ;
- I : « l'élève est interne ».

1. Interpréter la phrase « 55 % des élèves sont des filles et 45 % sont des garçons » par des probabilités.
2. Les deux phrases suivantes sont équivalentes ; les compléter :
   - Dans l'univers des filles, la probabilité d'être interne est ....
   - La probabilité que l'élève choisi soit .... sachant que .... est ....

   Les traduire par une probabilité : $p_{...}(......) = ...$
3. (a) Décrire l'événement $\overline{I}$, contraire de I, par une phrase.
   (b) Les phrases suivantes sont équivalentes ; les compléter :
   - Parmi les filles, ... % ne sont pas internes.
   - La probabilité que l'élève choisi ne soit pas ...... sachant que ...... est ......
   - $p_{...}(......) = ...$
4. Compléter : $p_F(I) + p_F(\overline{I}) = ...$
5. Compléter : $p(F) = ...$ $\quad p_F(I) = ...$
   On rappelle que $p_F(I) = \frac{p(F\cap I)}{p(F)}$. Alors $p(F \cap I) = p(F) \times ....$
   L'arbre construit ci-dessous, appelé **arbre pondéré**, schématise la situation décrite dans cet exercice.
   $F \cap I$ est un **chemin** de l'arbre.
   Compléter cet arbre.



$F \cap I$ $\quad p(F \cap I) = p(F) \times ...... = ... \times ...... = ...$

...... $\quad p(F \cap \overline{I}) = ...$

...... $\quad p(F \cap G) = ...$

...... $\quad$ ......

6. Déterminer la probabilité que l'élève choisi soit un garçon non interne.

ACTIVITÉ 8.4 (Événements « conditionnés »).
On ne garde d'un jeu de 32 cartes que les 4 rois et les 4 dames.
Deux tirages successifs d'une carte **sans remise** sont effectués au hasard parmi ces huits cartes.
Soit A l'événement « obtenir un roi au premier tirage » et B l'événement « obtenir un roi au second tirage ».

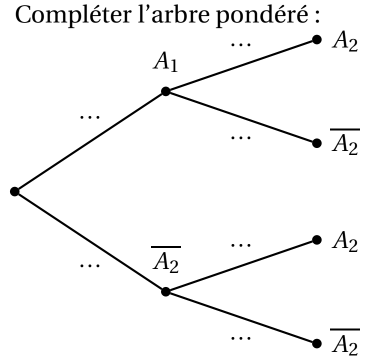
1. Déterminer la probabilité des événements A et $\overline{A}$.
2. - Si A est réalisé à l'issue du premier tirage, il reste, avant le second tirage ...... cartes dans le paquet doit ...... rois.
     La probabilité que B soit réalisé, sachant que A est réalisé, est donc $p_{...}(...) = ...$
   - Si A n'est pas réalisé à l'issue du premier tirage, il reste, avant le second tirage ...... cartes dans le paquet doit ...... rois.
     La probabilité que B soit réalisé, sachant que A n'est pas réalisé, est donc $p_{...}(...) = ...$

   La probabilité de la réalisation de B est conditionnée par la réalisation de A.
   Par la suite, on dira que B est un événement conditionné.
3. Construire un arbre pondéré schématisant la situation décrite.
4. (a) Déterminer $p(A \cap B)$.
   (b) Soit E l'événement « obtenir une dame au premier tirage et un roi au second tirage ».
   Exprimer E à l'aide de A et de B puis trouver sa probabilité.
5. (a) Compléter la phrase : B c'est « obtenir un roi au premier tirage et un roi au second tirage, ou bien obtenir .... ».
   (b) En déduire $p(B) = ... + ... = ...$

ACTIVITÉ 8.5 (Événements indépendants).
Sarah doit traverser régulièrement en voiture deux villes A et B comportant chacune une rue avec deux feux qui se suivent.

La couleur du deuxième feu dépend de celle du premier Dans la ville A, on note A_1 l'événement « Sarah est arrêtée par le premier feu » et A_2 l'événement « Sarah est arrêtée par le deuxième feu ».
La probabilité que Sarah soit arrêtée au premier feu est 0,125 et la probabilité que Sarah soit arrêtée au deuxième geu si elle l'a été au premier est 0,05. Si elle n'a pas été arrêtée au premier feu, elle est arrêtée par le deuxième dans 45 % des cas.

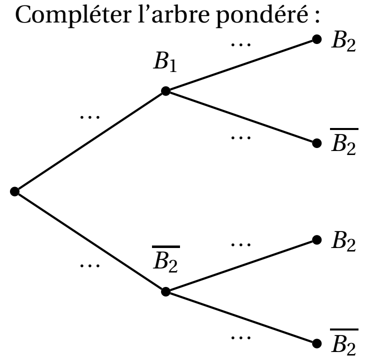
1. Compléter l'arbre pondéré :



2. Déterminer $p(A_1 \cap A_2)$ et $p(\overline{A_1} \cap A_2)$.
3. En déduire $p(A_2)$.
4. Calculer $p(A_1) \times p(A_2)$ et vérifier que $p(A_1) \times p(A_2) \neq p(A_1 \cap A_2)$.
5. A-t-on $p_{A_1}(A_2) = p(A_2)$?

La couleur du deuxième feu ne dépend pas de celle du premier Dans la ville B, on note B_1 l'événement « Sarah est arrêtée par le premier feu » et B_2 l'événement « Sarah est arrêtée par le deuxième feu ».
La probabilité que Sarah soit arrêtée au premier feu est 0,125 et la probabilité que Sarah soit arrêtée au deuxième geu si elle l'a été au premier est 0,05 et, si le premier feu est vert, la probabilité que le deuxième le soit aussi est 0,95.

1. Compléter l'arbre pondéré :



2. Déterminer $p(B_1 \cap B_2)$, $p_{\overline{B_1}}(B_2)$ et $p(\overline{B_1} \cap B_2)$.
3. En déduire $p(B_2)$.
4. Vérifier que $p(B_1) \times p(B_2) \neq p(B_1 \cap B_2)$.
5. Comparer $p_{B_1}(B_2)$, $p_{\overline{B_1}}(B_2)$ et $p(B_2)$.

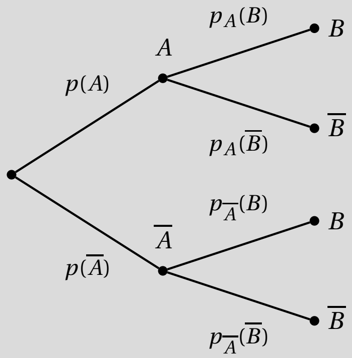
8.2 Bilan

Définition 8.1. Dans un univers donné où A et B sont deux événements tels que $p(A) \neq 0$. On appelle probabilité de B sachant A, notée $p_A(B)$, le nombre

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Cette probabilité est dite probabilité *conditionnelle*.

Propriété 8.1. *Dans un univers donné, soit A et B deux événements non impossibles*



$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$$

Il y a quatre chemins sur l'arbre : $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$.

La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses branches.

La somme des probabilités portées par les branches issues d'un même noeud est égale à 1.

Propriété 8.2. *Dans un univers donné, soient A et B deux événements. On a :*

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$$

Définition 8.2. Dans un univers donné, on dit que deux événements A et B sont indépendants si

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Devoir surveillé n°8

Probabilités

EXERCICE 8.1 (8 points)**.**
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Dans cet exercice, pour chacune des questions, 4 réponses sont proposées, une seule est correcte. Pour chaque question, cocher la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Chaque bonne réponse rapporte deux points, chaque réponse incorrecte retire $0,5$ *point, une question sans réponse n'apporte ni ne retire aucun point. Si le total des points est négatif la note attribuée à l'exercice est* 0.

Dans un lycée, 40 % des élèves sont dans une série technologique, les autres étant dans une section générale. Le taux de réussite du lycée au bac est de 90 % dans la série technologique et de 80 % dans la série générale.
On rencontre un élève de terminale au hasard le jour des résultats du bac. Chaque élève a la même probabilité d'être rencontré.
On considère les évènements suivants :

- T : « l'élève est dans une série technologique »,
- B : « l'élève est reçu au bac ».

1. La probabilité de l'évènement $\overline{\mathrm{T}}$ contraire de T est égale à :
   ❒ 0,4 ❒ 60 ❒ 0,6 ❒ $-0,4$
2. La probabilité $P_{\overline{\mathrm{T}}}\left(\overline{\mathrm{B}}\right)$ est égale à :
   ❒ 0,12 ❒ 0,6 ❒ 20 ❒ 0,2
3. La probabilité de l'évènement $\mathrm{T} \cap \mathrm{B}$ est égale à :
   ❒ 0,9 ❒ 0,36 ❒ 0,4 ❒ 4
4. La probabilité de l'évènement B est égale à :
   ❒ 0,84 ❒ 0,9 ❒ 0,8 ❒ 1,7
5. Sachant que l'élève rencontré au hasard est reçu au bac, la probabilité qu'il soit en série technologique est égale à :
   ❒ $P(\mathrm{T}\cap\mathrm{B})/P(\mathrm{B})$ ❒ $P(\mathrm{T}) \times P(\mathrm{B})$ ❒ $P(\mathrm{T}\cap\mathrm{B})$ ❒ $P_{\mathrm{T}}(\mathrm{B})$

EXERCICE 8.2 (12 points)**.**
Le service comptable d'un magasin réalise une étude sur le fichier des clients qui ont fait des achats le premier samedi du mois de novembre 2006. Il constate que 15 % des clients ont effectué leurs achats avec une carte de fidélité. Parmi ceux-ci, 80 % ont réalisé des achats d'un montant total supérieur à 50 €. Parmi les clients qui n'ont pas effectué leurs achats avec une carte de fidélité, 60 % ont réalisé des achats d'un montant total supérieur à 50 €.
On choisit au hasard une fiche de ce fichier. On admet que toutes les fiches ont la même probabilité d'être choisies.
On considère les événements suivants :

- F : « La fiche choisie indique que le client a effectué ses achats avec une carte de fidélité » ;
- S : « La fiche choisie indique que le client a réalisé des achats d'un montant total supérieur à 50 € ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. (a) Donner la probabilité $P(\mathrm{F})$ de l'événement F.
   (b) Donner $P_{\mathrm{F}}(\mathrm{S})$, la probabilité, sachant F, de l'évènement S.
3. Décrire par une phrase l'évènement $\mathrm{F} \cap \mathrm{S}$. Calculer la probabilité $P(\mathrm{F}\cap\mathrm{S})$.
4. Montrer que la probabilité de l'évènement S est égale à $0,63$.
5. Calculer la probabilité que la fiche choisie indique que le client a effectué ses achats avec une carte de fidélité sachant qu'il a réalisé des achats d'un montant total supérieur à 50 €.
6. Les évènements F et S sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.
7. On choisit au hasard, de façon indépendante, deux fiches. On admet que le nombre de fiches est suffisamment important pour que le tirage soit assimilé à un tirage avec remise et que chaque fiche a la même probabilité d'être choisie.
   On note :
   - S_1 l'événement « la première fiche choisie indique que le client a réalisé des achats d'un montant total supérieur à 50 € »,
   - S_2 l'événement « la seconde fiche choisie indique que le client a réalisé des achats d'un montant total supérieur à 50 € ».

   (a) Construire un nouvel arbre pondéré décrivant cette situation.
   (b) Quelle est la probabilité qu'au moins une des deux fiches indique que le client a réalisé des achats d'un montant total supérieur à 50 €.

Chapitre 9

Fonction exponentielle

Sommaire

9.1 Vers une nouvelle fonction

1. Compléter le tableau de valeurs de la fonction exponentielle suivant (exp en abrégé) en utilisant la touche $\boxed{e^x}$ de votre calculatrice. Vous donnerez les valeurs approchées à 10^{-1} près.

x	-2	-1	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	5	10
e^x									

2. Dans le repère de la figure 9.1, placer les points de coordonnées $(x\,;e^x)$ obtenus avec le tableau de valeurs et représenter graphiquement la fonction $\exp : x \longmapsto e^x$.
3. Sur quel ensemble semble être définie cette nouvelle fonction ?
4. (a) Compléter le tableau suivant, en donnant les résultats avec la plus grande précision permise par la calculatrice.

x	-50	-100	-150	-500
e^x				

Vers quelle valeur semble tendre e^x lorsque x se rapproche de $-\infty$?

(b) Compléter le tableau suivant, en donnant les résultats avec la plus grande précision permise par la calculatrice.

x	50	100	150	500
e^x				

Vers quelle valeur semble tendre e^x lorsque x se rapproche de $+\infty$?

(c) i. Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x \geqslant 1$.

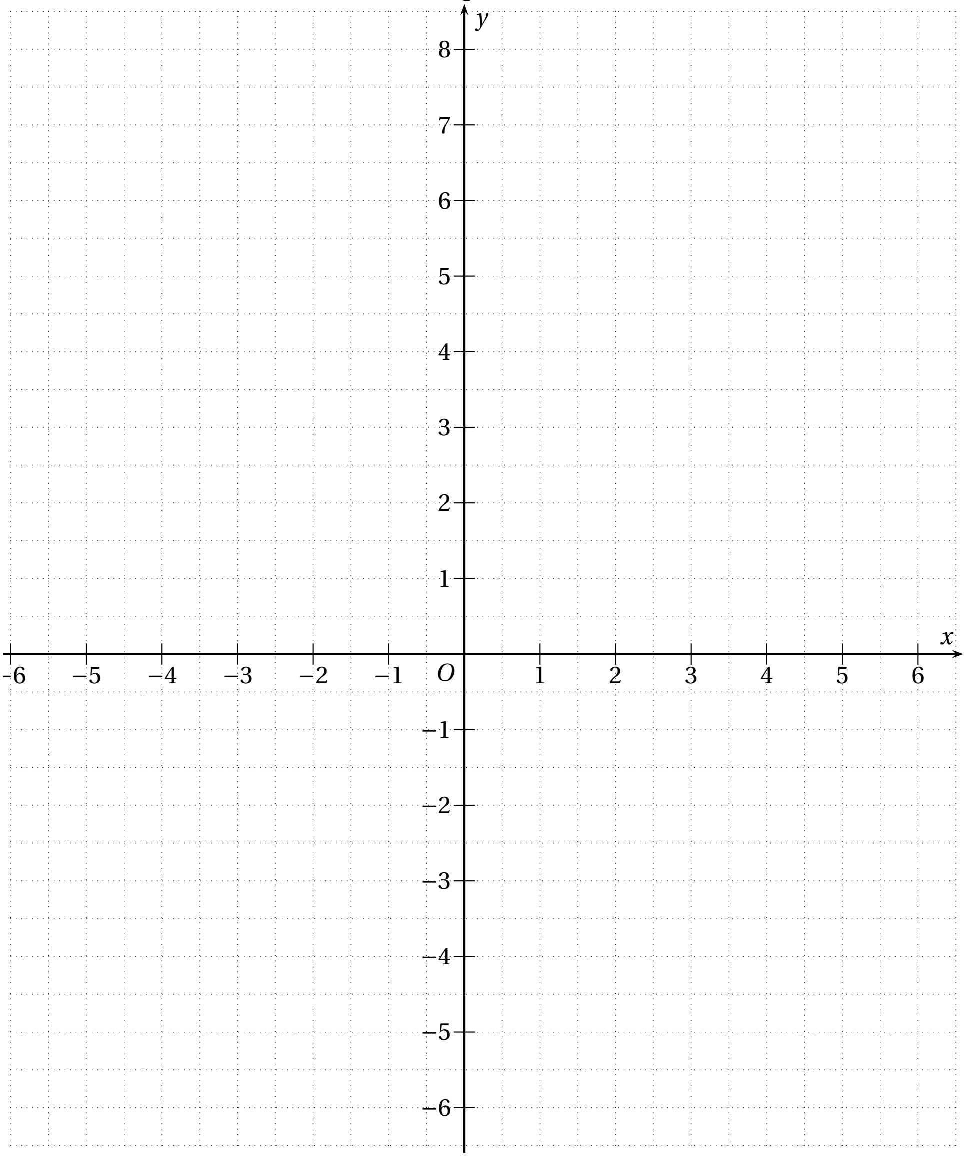
ii. Compléter : Si $x < 0$ alors $\dots\dots\dots < e^x < \dots\dots\dots$

iii. Compléter le tableau de signes de e^x lorsque $x \in \mathbb{R}$:

x	
e^x	

5. Quelles semblent être les variations de cette nouvelle fonction ?

FIGURE 9.1 – Figure de la section 2



9.2 Fonction exponentielle

9.2.1 Exponentielle et logarithme népérien

Définition

À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant, en donnant les valeurs approchées à 10^{-1} près.

x	-2	0	1	5	20
$y = e^x$					
$\ln y$					

Quelle remarque pouvez-vous faire ? Émettre une conjecture.
C'est de cette manière qu'on définit précisément la fonction exponentielle :

Définition 9.1. Pour tout réel x on note e^x, ou parfois $\exp x$, le nombre dont le logarithme népérien vaut x.

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = x$$

Remarque.
- $e^0 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ car $\ln \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$.
- $e^1 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ car $\ln \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$.

Fontions réciproques

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ de la figure 9.1.

1. Compléter le tableau de valeurs suivant (arrondir à 10^{-1} près) :

x	0,5	1	1,5	2	3	4
$\ln x$						

2. Placer les points de coordonnées $(x\,;\ln x)$ dans le repère de la figure 9.1 et construire la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ de la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \ln x$.
3. Tracer, dans le même repère, la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.
4. Quelle remarque peut-on faire sur les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et la droite $\mathscr{D}$?
5. (a) À l'aide de la calculatrice, compléter les tableaux suivants :

x	-2	-1	0	0,5	4
$\ln\left(\mathrm{e}^x\right)$					

x	0,5	1	2	4	10
$\mathrm{e}^{\ln x}$					

Pourquoi les valeurs de x choisies dans le deuxième sont-elles positives ?

(b) Quelles propriétés peut-on conjecturer au regard des résultats de ces tableaux ?

Propriété 9.1. *Pour tout nombre réel x on a :*

$$\ln\left(e^x\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Propriété 9.2. *Pour tout nombre réel x .... on a :*

$$e^{\ln x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On dit aussi que les fonctions ln et exp sont réciproques l'une de l'autre.

Signe

e^x étant l'antécédant de x par la fonction logarithme népérien, et cette fonction n'étant définie que pour des réels strictements positifs, on a la propriété suivante :

Propriété 9.3. *Pour tout réel x, e^x est strictement positif.*

Dérivées

On admettra la propriété suivante :

Propriété 9.4. *La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et*

$$(e^x)' = e^x$$

Comme la dérivée de l'exponentielle est strictement positive, la fonction exponentielle est strictement croissante. Ainsi :

x	
$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	
e^x	

Propriété 9.5. *Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et*

$$f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)} \qquad \text{ou encore} \qquad \left(e^u\right)' = u'e^u$$

9.3 Relations algébriques

À l'aide de la calculatrice, compléter les tableaux suivants en donnant les valeurs approchées à 10^{-2} près :

9.3.1 Exponentielle d'une somme

a	b	$a+b$	e^{a}	e^{b}		e^{a+b}
2	3					
-4	1					
0,2	15					

Propriété 9.6. *Pour tous nombres réels a et b, on a :*

$$e^{a+b} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

9.3.2 Exponentielle d'un opposé

a	$-a$	e^{a}		e^{-a}
2				
-4				
0,2				

Propriété 9.7. *Pour tout nombre réel a, on a :*

$$e^{-a} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

9.3.3 Exponentielle d'un produit

a	n	e^{a}	$\mathrm{e}^{a\times n}$	$\left(\mathrm{e}^{a}\right)^{n}$
2	3			
-4	2			
3	-2			

Propriété 9.8. *Pour tous nombres réels a et n, on a :*

$$\left(e^{a}\right)^{n} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

9.3.4 Exponentielle d'une différence

a	b	$a-b$	e^a	e^b		e^{a-b}
2	3					
-44	5					
0,2	15					

Propriété 9.9. *Pour tout nombre réel a strictement positif et tout nombre entier relatif n, on a :*

$$e^{a-b} = \dots\dots\dots\dots\dots$$

9.4 Équations et inéquations

On déduit du sens de variation de la fonction exponentielle, les équivalences suivantes :

Propriété 9.10. *Pour tous nombres a et b, on a :*
- $e^a = e^b$ *si et seulement si* ....
- $e^a \leqslant e^b$ *si et seulement si* ....
- $e^a > e^b$ *si et seulement si* ....

EXERCICE 9.1.
Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\mathrm{e}^{2x+1} = 1$
2. $\mathrm{e}^{-2x+3} = 0$
3. $\mathrm{e}^{-3x} \geqslant 2$

9.5 D'autres fonctions exponentielles

Soit $a > 0$. Pour tout réel x, on pose $a^x = \mathrm{e}^{\ln(a^x)} = \mathrm{e}^{x \ln a}$.

Définition 9.2. Soit $a > 0$. La fonction définie par $x \longmapsto a^x$ est appelée *fonction exponentielle de base a*.

Remarque. La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est la fonction exponentielle de base e.

Propriété 9.11. *Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :*
- $a^x \dots\dots\dots 0$
- $a^x \times a^y = \dots\dots\dots$
- $\frac{a^x}{a^y} = \dots\dots\dots$
- $(a^x)^y = \dots\dots\dots$
- $(a \times b)^x = \dots\dots\dots$
- $\ln(a^x) = \dots\dots\dots$

Propriété 9.12. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a^x$, $(a > 0)$. Alors $f'(x) = \ln a \times a^x$ et :*
- *Si $a > 1$, alors f est strictement .... (on parle alors de .... exponentielle).*
- *Si $a = 1$, alors f est ....*
- *Si $0 < a < 1$, alors f est strictement .... (on parle alors de .... exponentielle).*

La figure 9.1 page suivante présente quelques exemples de telles fonctions.

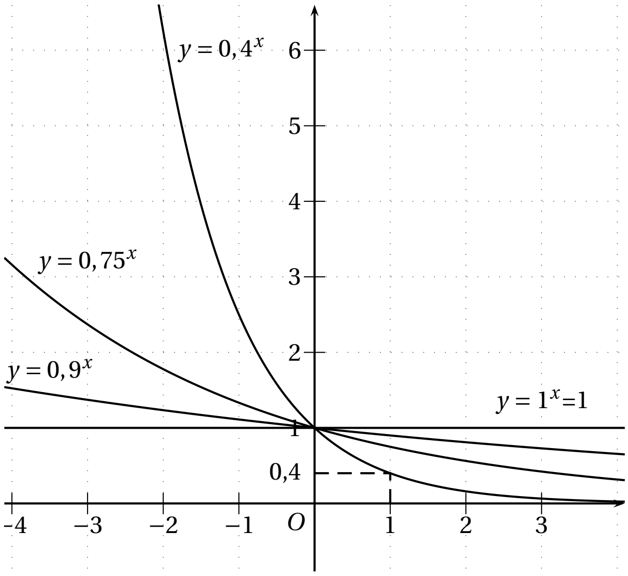
TABLE 9.1 – Tableaux de variations et courbes

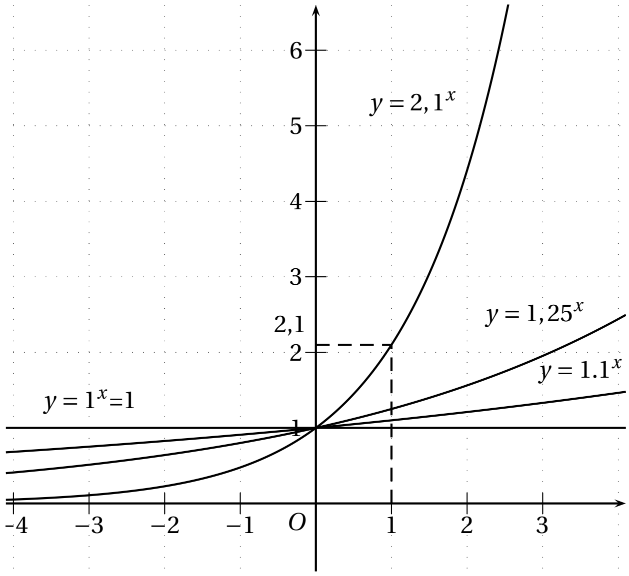
$0 < a < 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\ln a \times a^x$	$-$	
a^x	$+\infty$ ↘	0^+

$a > 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\ln a \times a^x$	$+$	
a^x	0^+ ↗	$+\infty$





9.6 Exercices

EXERCICE 9.2.

On étudie la croissance d'une culture bactérienne en milieu liquide non renouvelé. Le tableau ci-dessous donne à différents instants x (exprimés en heures), la masse m (exprimée en grammes) de cette culture.

x_i (en heures)	0	0,5	1	1,5	3	6
m_i (en grammes)	0,7	1,9	2,5	2,9	3,5	4,1

1. (a) Représenter le nuage de points de coordonnées $M_i(x_i\ ;\ m_i)$ dans le repère orthogonal de la figure 9.2 page ci-contre.
   (b) Un ajustement affine vous paraît-il justifié ? Expliquer.
2. (a) Compléter le tableau suivant où $y = \mathrm{e}^m$ (y est l'exponentielle de m).
   Les valeurs approchées des y_i seront données à l'unité près.

x_i (en heures)	0	0,5	1	1,5	3	6
$y_i = \mathrm{e}^{m_i}$ (en grammes)						

   (b) Représenter le nuage de points de coordonnées $N_i(x_i\ ;\ y_i)$ dans le repère orthogonal de la figure 9.3 page suivante.
   (c) Un ajustement affine vous paraît-il justifié ? Expliquer.
3. On note G_1 le point moyen des trois premiers points du nuage et G_2 celui des trois derniers.
   (a) Calculer les coordonnées des points G_1 et G_2.
   (b) Placer les points G_1 et G_2 et tracer la droite de MAYER (G_1G_2).
   (c) Déterminer une équation de la droite de MAYER sous la forme $y = ax + b$.
   (d) Déterminer, par le calcul, puis graphiquement une estimation de la valeur de y correspondant à la valeur $x = 7$.
   (e) En déduire une estimation à 10^{-1} près de la masse m de bactéries (en grammes) après 7 heures.

FIGURE 9.2 – Figure de l'exercice 9.2

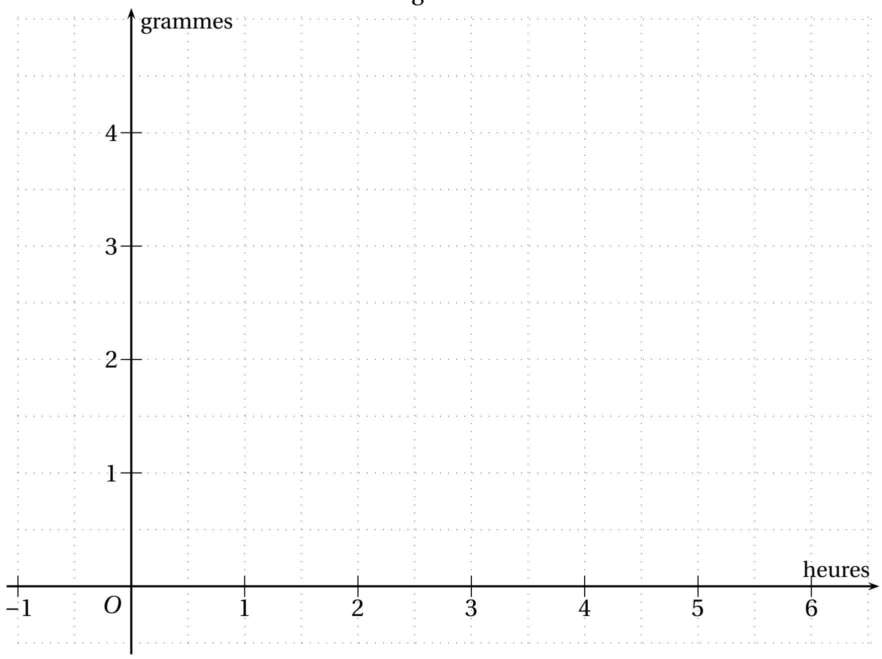
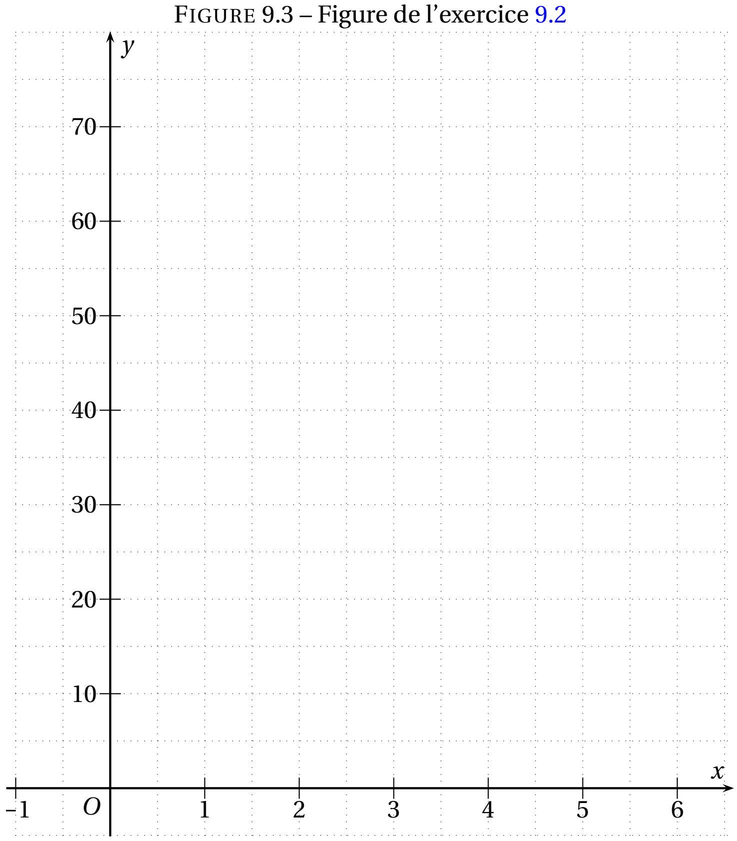


FIGURE 9.3 – Figure de l'exercice 9.2



EXERCICE 9.3.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{4x-3}$.

1. Sur quel intervalle la fonction f est-elle dérivable ? Calculer sa dérivée.
2. En déduire le sens de variation de f.

EXERCICE 9.4.
Soit f la fonction définie par $f(x) = 0,3^x$.

1. Déterminer la dérivée $f'(x)$ de f et déterminer son signe.
2. En déduire le sens de variation de f.

Devoir surveillé n°9

Exponentielle

EXERCICE 9.1 (6 points)**.**
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chaque question, trois réponses sont proposées. Une seule des réponses proposées est correcte.
On demande de cocher celle que vous pensez être correcte sachant qu'une réponse juste rapporte 1 point, une réponse fausse enlève 0,5 point et qu'une absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point.

1. Le nombre $\mathrm{e}^{3\ln(2)}$ est égal à
   ❒ 9 ❒ 8 ❒ $2\mathrm{e}^3$
2. Le nombre $\mathrm{e}^{\frac{2}{3}} \times \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$ est égal à
   ❒ e ❒ 1 ❒ $\mathrm{e}^{\frac{2}{9}}$
3. Le nombre -3 est solution de l'équation :
   ❒ $\ln x = -\ln 3$ ❒ $\ln(\mathrm{e}^x) = -3$ ❒ $\mathrm{e}^{\ln x} = -3$
4. L'équation $\mathrm{e}^{-3x} = 5$ admet pour solution dans $\mathbb{R}$:
   ❒ $-\frac{\ln(5)}{3}$ ❒ $3 + \ln(5)$ ❒ $-\ln\left(\frac{5}{3}\right)$
5. L'inéquation $\mathrm{e}^{x-3} \leqslant 4$ a pour ensemble de solutions dans $\mathbb{R}$:
   ❒ $S =]-\infty\,; 4 + \ln(3)]$ ❒ $S =]-\infty\,; 7]$ ❒ $S =]-\infty\,; 3 + \ln(4)]$
6. Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = (2x+3)\mathrm{e}^{-x}$. Sa fonction dérivée f' est donnée par :
   ❒ $f'(x) = 2\mathrm{e}^{-x}$ ❒ $f'(x) = (-2x-3)\mathrm{e}^{-x}$ ❒ $f'(x) = (-2x-1)\mathrm{e}^{-x}$

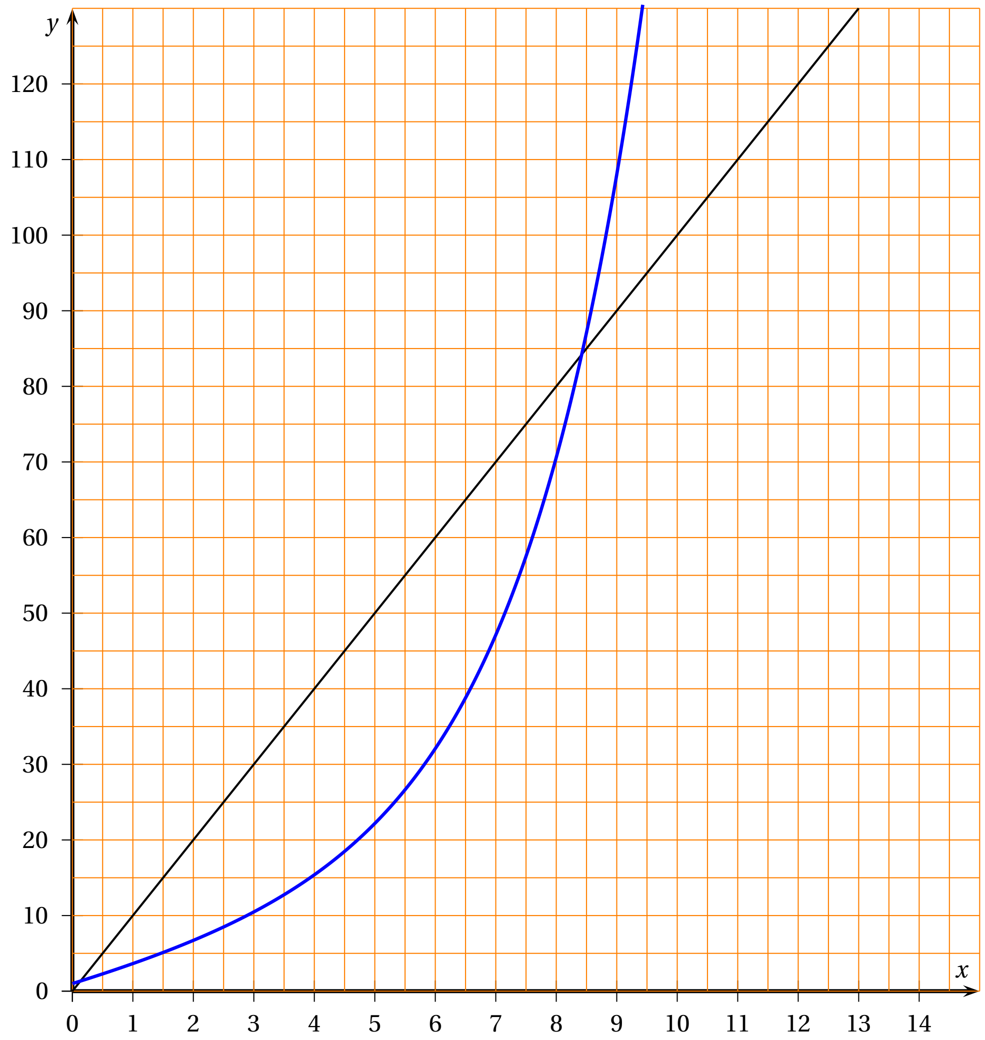
EXERCICE 9.2 (6 points)**.**
La fonction f est définie sur $[-2\,; 2]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - 2x - 1,5$$

1. Donner les valeurs exactes de :
   (a) $f(0)$.
   (b) $f\left(\frac{\ln(2)}{2}\right)$.
   (c) $f(1)$.
2. On note f' la fonction dérivée de f.
   (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Résoudre dans $[-2\,; 2]$ l'inéquation $\mathrm{e}^{2x} - 2 \geqslant 0$.
   (c) En déduire le tableau des variations de la fonction f en y indiquant la valeur exacte de l'extremum.

EXERCICE 9.3 (8 points)**.**
Une entreprise de maroquinerie fabrique des sacs.
On désigne par x le nombre de centaines de sacs fabriqués par jour dans l'entreprise.
Le coût de fabrication de x centaines de sacs, exprimé en centaines d'euros, est donné par : $C(x) = 2x + \mathrm{e}^{0,5x}$.
Chaque sac est vendu 10 euros, on note $R(x)$ la recette, exprimée en centaines d'euros, correspondant à la vente de x centaines de sacs. On a donc $R(x) = 10x$.

Partie 1 – Lectures graphiques
Voici les représentations graphiques des fonctions C et R :



1. Parmi ces deux représentations graphiques, quelle est celle de la fonction R ?
2. À l'aide du graphique, recopier et compléter le tableau suivant :

x			8
$C(x)$	10		
$R(x)$		40	

3. Arrondir à la centaine de sacs, combien de centaines de sacs faut-il fabriquer pour que l'entreprise soit certaine d'être bénéficiaire ?

Partie 2
On note $B(x)$ le bénéfice journalier, exprime en centaines d'euros réalisé par l'entreprise.

1. Montrer que $B(x) = 8x - \mathrm{e}^{0,5x}$.
2. (a) Calculer $B'(x)$. La notation B' désigne la fonction dérivée de la fonction B.
   (b) Montrer que dans $[0 ; 15]$, résoudre $B'(x) \leqslant 0$ revient à résoudre l'inéquation $\mathrm{e}^{0,5x} \geqslant 16$.
   (c) Dresser le tableau de variations de la fonction B sur $[0 ; 15]$.
   (d) En déduire la valeur exacte de x pour laquelle B admet un maximum. On donnera une valeur arrondie de cette valeur exacte à 10^{-2}.
3. En déduire la valeur maximale du bénéfice arrondi à l'euro.

Chapitre 10

Optimisation à deux variables

Sommaire

10.1 Équations de droites

10.1.1 Activités

Activité 10.1 (Équations de droites (rappels)).
Dans toute l'activité le plan est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthogonal.

1. Quelle est la nature de $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction $f(x) = -3x + 0,5$, définie sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer si $A(150,5; -451)$ ou $B(-73,25; -219,5)$ appartiennent à $\mathscr{C}$.
2. La droite $\mathscr{D}$ est d'équation réduite : $y = \frac{5}{2}x - 1$.
   (a) A est le point de $\mathscr{D}$ d'abscisse 12. Quelle est son ordonnée ?
   (b) B est le point de $\mathscr{D}$ d'ordonnée $-\frac{1}{2}$. Quelle est son abscisse ?
3. Dans un même repère, tracer les droites dont les équations sont les suivantes :
   - $\mathscr{D}_1 : y = -\frac{1}{2}x + 5$;
   - $\mathscr{D}_2 : y = 4x - 2$;
   - $\mathscr{D}_3 : y = -3$;
   - $\mathscr{D}_4 : y = \frac{3}{4}x - 4$;
   - $\mathscr{D}_5 : x = 6$;
4. Dans un même repère, tracer les droites suivantes :
   - $\mathscr{D}_1$ passant par $A(3; 1)$ et de coefficient directeur -1 ;
   - $\mathscr{D}_2$ passant par $B(-3; 2)$ et de coefficient directeur $-\frac{1}{4}$;
   - $\mathscr{D}_3$ passant par $C(1; 0)$ et de coefficient directeur 3 ;
   - $\mathscr{D}_4$ passant par $D(0; 2)$ et de coefficient directeur $\frac{4}{3}$;
   - $\mathscr{D}_5$ passant par $E(-2; 2)$ et de coefficient directeur 0 ;
5. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de la droite (AB) :
   (a) $A(1; 2)$ et $B(3; -1)$;
   (b) $A(0; -1)$ et $B(2; 3)$;
   (c) $A(-2; 2)$ et $B(3; 2)$;
   (d) $A(1; 3)$ et $B(1; 4)$;
6. Déterminer graphiquement les équations réduites des droites représentées sur la figure 10.1 page suivante.
7. Même question pour les droites représentées sur la figure 10.2 page suivante.

FIGURE 10.1 – Figure 1

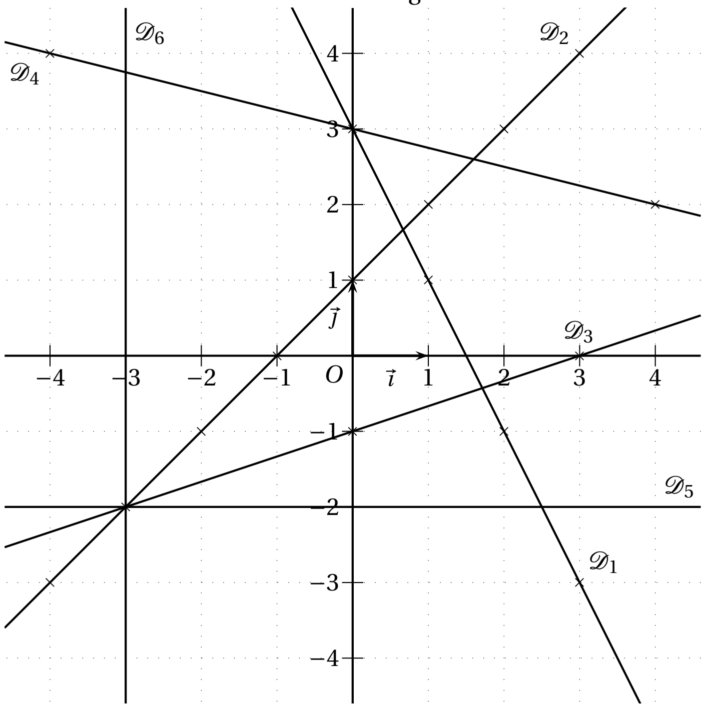
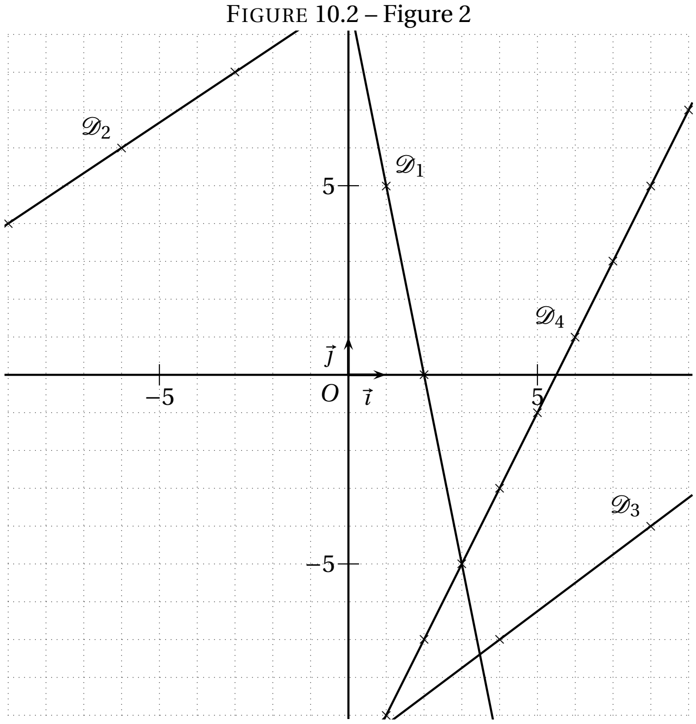


FIGURE 10.2 – Figure 2



ACTIVITÉ 10.2 (Autres équations)**.**
Dans toute l'activité le plan est muni d'un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthogonal.

1. On cherche à identifier quel est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x; y)$ tels que x et y vérifient la relation : $2x + y = 3$.
   (a) Déterminer y lorsque $x = 1$. Placer ce point dans le repère ; on le nommera A.
   (b) Déterminer y lorsque $x = 0$. Placer ce point dans le repère ; on le nommera B.
   (c) Déterminer x lorsque $y = -3$. Placer ce point dans le repère ; on le nommera C.
   (d) Déterminer x lorsque $y = -1$. Placer ce point dans le repère ; on le nommera D.
   (e) Que constate-t-on concernant A, B, C et D ?
   (f) Choisir un autre point ayant la même caractéristique que A, B, C et D et regarder si ses coordonnées vérifient la relation : $2x + y = 3$.
   (g) Choisir un autre point n'ayant pas la même caractéristique que A, B, C et D et regarder si ses coordonnées vérifient la relation : $2x + y = 3$.
2. En vous inspirant de ce qui précède, représenter l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x; y)$ tels que x et y vérifient la relation : $3x - 2y = 4$.
3. Mêmes questions avec les relations suivantes :
   - $-x - 2y = 3$;
   - $2x + 0y = 5$;
   - $0x + 3y = 2$.

   Que constate-t-on dans les deux derniers cas ?

ACTIVITÉ 10.3 (Droites parallèles)**.**
Dans toute l'activité le plan est muni d'un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthogonal.

1. On considère les droites $(d_1) : 2x + 5 = 0$ et $(d_2) : x = -1$.
   Expliquer pourquoi ces droites sont parallèles.
2. On donne $(d_3) : y = 3x + 4$, $(d_4) : 3x - y = 9$ et $(d_5) : 3x + y = 0$.
   (a) Déterminer l'équation réduite des droites (d_4) et (d_5).
   (b) Parmi ces trois droites, quelles sont celles qui sont parallèles ?
3. On donne la droite $(d) : 5x + 2y = 10$.
   (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (d) avec les axes du repère et placer ces points.
   (b) Déterminer l'équation réduite de (d) et en déduire son coefficient directeur.
   (c) Tracer la droite (d') parallèle à (d) et passant par le point $K(1; -1)$ et déterminer son équation réduite.
   (d) Montrer qu'une équation de (d') est : $5x + 2y = 3$.
   (e) Montrer que la droite (d'') d'équation : $5x + 2y = c$ (où c est un réel) est parallèle à la droite (d).

ACTIVITÉ 10.4 (Droites sécantes)**.**
Dans toute l'activité le plan est muni d'un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthogonal.
On considère les droites $(d_1) : 2x + y = 5$ et $(d_2) : 3x - 5y = 3$.

1. Déterminer les équations réduites des droites (d_1) et (d_2) et en déduire qu'elles sont sécantes.
2. Tracer ces deux droites et lire graphiquement les coordonnées de leur point d'intersection I.
3. Soit $(x; y)$ les coordonnées du point I. Le point I appartient aux deux droites, par conséquent ses coordonnées vérifient simultanément les équations des deux droites, donc elles vérifient le système :

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 5y = 3 \end{cases}$$

   Résoudre ce système par la méthode de votre choix.

10.1.2 Bilan et compléments

On admettra les propriétés suivantes :

Propriété 10.1. *Toute droite du plan admet une équation de la forme $ax+by=c$ où $(a;b)\neq(0;0)$.*
Si $a=0$ la droite est parallèle à l'axe des abscisses.
Si $b=0$ la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.
Si $a\neq 0$ et $b\neq 0$ la droite est sécante aux deux axes.

Propriété 10.2. *Soient $\mathscr{D}: y=mx+p$ et $\mathscr{D}': y=m'x+p'$ deux droites.*
$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles si et seulement si elles ont même coefficient directeur ($m=m'$).

Propriété 10.3. *Soit $\mathscr{D}: ax+by=c$.*
Toute droite parallèle à $\mathscr{D}$ admet une équation de la forme $ax+by=c'$.
Toute droite d'équation $ax+by=c'$ est parallèle à $\mathscr{D}$.

Propriété 10.4. *Si les droites $\mathscr{D}: ax+by=c$ et $\mathscr{D}': a'x+b'y=c'$ sont sécantes, les coordonnées $(x;y)$ de leur point d'intersection I vérifient le système* $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$

10.1.3 Exercices

Exercices 2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 13 pages 170-171

10.2 Régions du plan

10.2.1 Activités

ACTIVITÉ 10.5.
Dans toute l'activité le plan est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthogonal.

1. (a) Dans un repère orthogonal tracer la droite $\mathscr{D}$ d'équation $2x-3y=6$.
   (b) Choisir quatre points à coordonnées entières situés du même côté de $\mathscr{D}$ et calculer $2x-3y$ pour chacun d'entre eux.
   (c) Faire de même avec quatre autres points à coordonnées entières situés de l'autre côté de $\mathscr{D}$.
   (d) Que constate-t-on ?
   (e) Identifier la région du plan dont les points ont leurs coordonnées vérifiant $2x-3y\geq 6$ (on hachurera le reste).
2. En vous inspirant de ce qui précède, faire de même pour la région caractérisée par l'inéquation $-3x-4y\geq -12$ (on hachurera le reste).
3. Même question pour les inéquations $x\geq 0$ et $y\geq 0$.
4. Quel système d'inéquations vérifie la région non hachurée ?

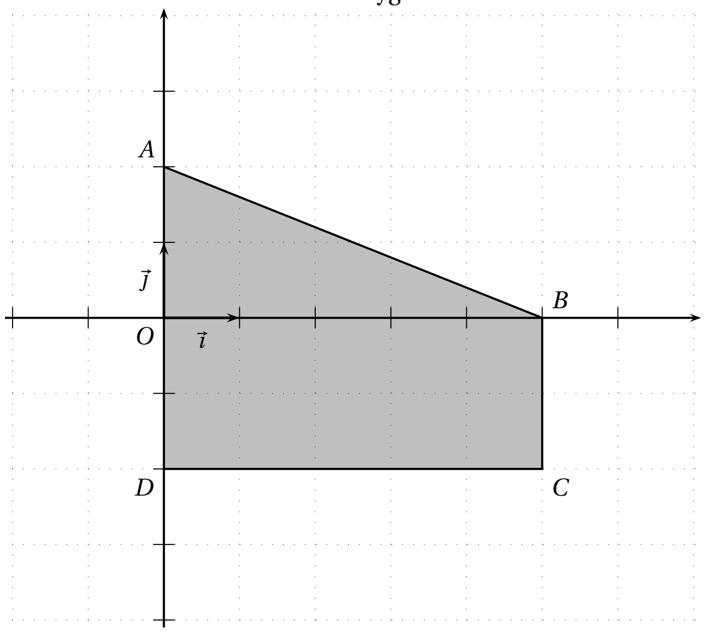
ACTIVITÉ 10.6 (Délimiter une région du plan)**.**
Pour visualiser un demi-plan $(\mathscr{P})$, on peut hachurer les points qui n'en font pas partie. Ainsi les points du demi-plan $(\mathscr{P})$ apparaissent en blanc.

1. On considère l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points $M(x;y)$ tels que : $\begin{cases} x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$
   Hachurer sur un graphique les points qui n'appartiennent pas à l'ensemble $(\mathscr{E})$.
2. On veut représenter les points $M(x;y)$ solutions du système :

$$\begin{cases} x\geqslant 0, y\geqslant 0 \\ 2x+3y\leqslant 6 \\ x+y\leqslant 4 \end{cases}$$

   (a) Construire sur le graphique précédent la droite (d_1) d'équation : $2x+3y=6$.
   (b) Hachurer les points qui ne font pas partie du demi-plan (P_1) : $2x+3y\leqslant 6$.
   (c) Hachurer les points qui ne font pas partie du demi-plan (P_2) : $x+y\leqslant 4$.
   (d) Où se trouvent, sur le graphique, les points solutions du système ?

FIGURE 10.3 – Polygone $ABCD$



ACTIVITÉ 10.7 (Caractériser une région)**.**
On considère les points $A(0;2)$, $B(5;0)$, $C(5;-2)$ et $D(0;-2)$.
On veut caractériser les points qui se trouvent à l'intérieur du polygone $ABCD$ (frontières comprises). Voir la figure 10.3 de la présente page.

1. (a) Déterminer une équation de la droite (AB).
   (b) Caractériser par une inéquation le demi-plan situé en dessous de cette droite (frontière comprise).
2. (a) Déterminer une équation de chacune des droites (AD), (DC) et (BC).
   (b) Compléter les phrases :
   - Les points $M(x;y)$ situés à l'intérieur du polygone sont dans le demi-plan situé .... de la droite (AD), donc vérifient : ....
   - Les points $M(x;y)$ situés à l'intérieur du polygone sont dans le demi-plan situé .... de la droite (DC), donc vérifient : ....
   - Les points $M(x;y)$ situés à l'intérieur du polygone sont dans le demi-plan situé .... de la droite (BC), donc vérifient : ....
3. En déduire un système d'inéquations caractérisant l'intérieur du polygone $ABCD$ (frontières comprises).

10.2.2 Bilan

On admettra la propriété suivante :

Propriété 10.5. *Toute droite d'équation $ax+by=c$ partage le plan en deux demi-plans régions :*
- *un demi-plan dont les coordonnées des points vérifient l'inéquation $ax+by \geqslant c$;*
- *un demi-plan dont les coordonnées des points vérifient l'inéquation $ax+by \leqslant c$;*

La droite d'équation $ax+by=c$ est la frontière entre ces demi-plans.

10.2.3 Exercices

Exercices 15, 18 pages 174-175.

10.3 Programmation linéaire

10.3.1 Activités

ACTIVITÉ 10.8 (Traduction de contraintes)**.**
Un hôtel veut renouveler une partie de son équipement. Il faut changer au moins 72 coussins, 48 rideaux et 32 jetés de lit. Deux ateliers de confection font des offres par lots :
- l'atelier A propose un lot de 12 coussins, 4 rideaux et 4 jetés de lit pour un montant de 400 € ;
- l'atelier B propose un lot de 6 coussins, 6 rideaux et 2 jetés de lit pour un montant de 300 €.

1. On note x le nombre de lots A achetés et y le nombre de lots B achetés.
   (a) Compléter les phrases suivantes :
   - Dans un lot A, il y a 12 coussins.
     Si on achète 3 lots A, on dispose de .... coussins.
     Si on en achète 10, on dispose de .... coussins.
     Si on achète x lots, on dispose de .... coussins.
   - Dans un lot B, il y a 6 coussins.
     Si on achète y lots B, on dispose de .... coussins.
   - Au total, on dispose de : ...... + ... coussins.
   - Le texte impose une contrainte sur ce nombre : « il faut changer au moins 72 coussins », ce qui veut dire que le nombre total de coussins achetés doit être .... à 72 : ...... + ... $\geqslant 72$

   (b) Compléter le tableau suivant :

	Nombre de coussins achetés	Nombre de rideaux achetés	Nombre de jetés de lit achetés
x lots A			
y lots B			
Total			
Contraintes			

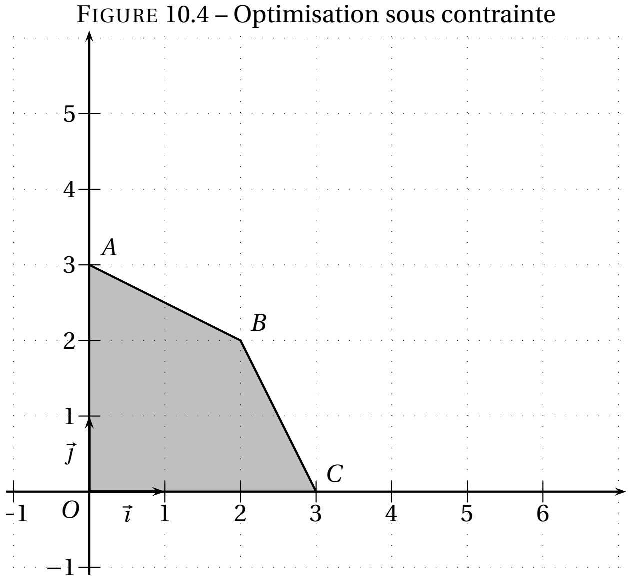
2. (a) Traduire les contraintes par un système d'inéquations.
   (b) Représenter graphiquement l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ solutions du système.
3. Respecte-t-on les contraintes si on achète :
   (a) 5 lots A et 4 lots B ? 5 lots A et 6 lots B ? 6 lots A et 7 lots B ?
   (b) Représenter les points correspondants sur le graphique.
4. Un lot A coûte 400 € et un lot B coûte 300 €.
   (a) Calculer le coût pour 5 lots A et 6 lots B achetés.
   (b) Calculer le coût pour x lots A et y lots B achetés.
   (c) Tracer sur le graphique la droite d'équation : $400x + 300y = 3800$.
   (d) Le gérant de l'hôtel dispose de 3800 € pour ses achats. Trouver les solutions qui s'offrent à lui.

ACTIVITÉ 10.9 (Rendre maximal un nombre soumis à une contrainte)**.**
La région coloriée représentée sur la figure 10.4 page suivante traduit les contraintes du système :

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ 2x + y \leqslant 6 \\ x + 2y \leqslant 6 \end{cases}$$

1. Tracer sur le graphique les droites $(d_1) : 2x + 3y = 12$ et $(d_2) : 2x + 3y = 6$.
2. Ces droites ont-elles des points communs avec la région coloriée ?
3. On veut rendre maximal le nombre $2x + 3y = b$, tout en respectant les contraintes du système.
   Soit (d) la droite d'équation : $2x + 3y = b$.
   (a) Comparer la droite (d) avec les droites (d_1) et (d_2).
   (b) Par quel point de coordonnées entières doit passer la droite (d) pour rendre b maximal, tout en respectant les contraintes du système ?
   (c) Tracer la droite ainsi trouvée et calculer le nombre b correspondant.

FIGURE 10.4 – Optimisation sous contrainte



ACTIVITÉ 10.10.
Le patron d'un restaurant prévoit d'acheter du mobilier de jardin en vue d'aménager un parc pour ses clients. Il prévoit deux modèles, l'un en bois, l'autre en métal.
Pour un modèle en bois, le lot comprend une table, trois chaises et quatre fauteuils.
Pour un modèle en métal, le lot comprend une table, neuf chaises et deux fauteuils.

Le projet est de disposer d'au moins 63 chaises et 30 fauteuils. Soit x le nombre de lots en bois (lots A) et y le nombre de lots en métal (lots B) achetés par le restaurateur.

1. Ecrire le système des contraintes correspondant à ce problème (on pourra s'aider du tableau ci-dessous).

	Nombre de chaises	Nombres de fauteuils
x lots A		
y lots B		
Total		
Contraintes		

2. Représenter dans un repère, l'ensemble des points $M(x; y)$ solutions de ce système. On prendra comme unités graphiques : 1 cm pour 2 unités en abscisses et en ordonnées.
3. Un lot en bois coûte 2 400 € et un lot en métal coûte 1 600 €.
   (a) Déterminer le coût c occasionné par l'achat de 5 lots en bois et 6 lots en métal.
   (b) Déterminer le coût c occasionné par l'achat de x lots en bois et y lots en métal.
   (c) Déterminer graphiquement le nombre de lots de chaque sorte pour que le coût c soit minimal.

10.3.2 Exercices

Exercices 20, 22 pages 178-179. Exercices 47 à 51 pages 186-188.