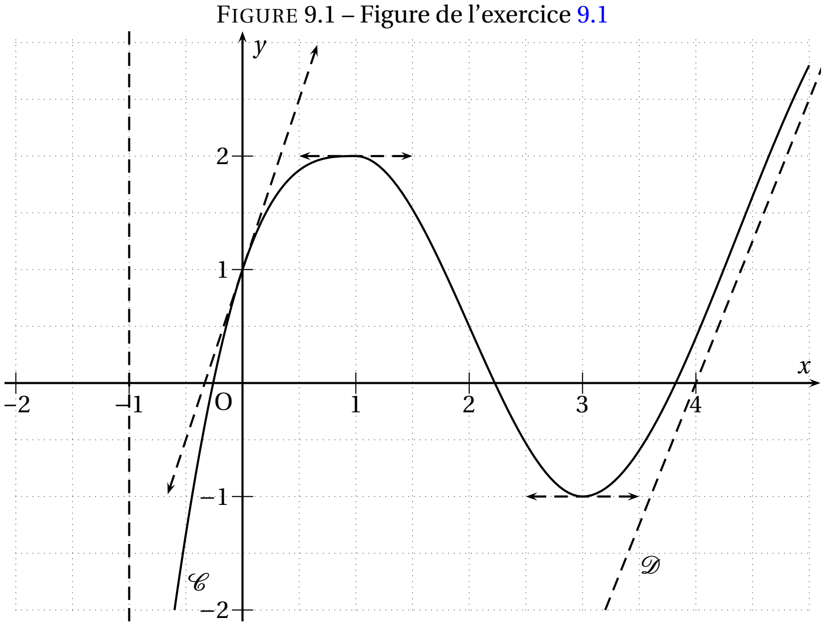
Devoir surveillé n°9

Fonction exponentielle – Statistiques – Graphes pondérés

EXERCICE 9.1 (6 points)**.**
La courbe $\mathscr{C}$ donnée sur la figure 9.1 de la présente page est la représentation graphique, dans un repère orthonormal, d'une fonction f définie et dérivable sur $]-1\,;+\infty[$. On sait que la fonction f est croissante sur $]-1\,;1]$ et sur $[3\,;+\infty[$ et que la droite $\mathscr{D}$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

FIGURE 9.1 – Figure de l'exercice 9.1



Partie I. Étude graphique de la fonction *f*
Chaque question comporte trois affirmations, une seule des trois est exacte. Cocher la bonne affirmation sans justifier votre choix. Une bonne réponse rapporte 0,5 *point ; une mauvaise réponse retire* 0,25 *point ; l'absence de réponse donne* 0 *point.*

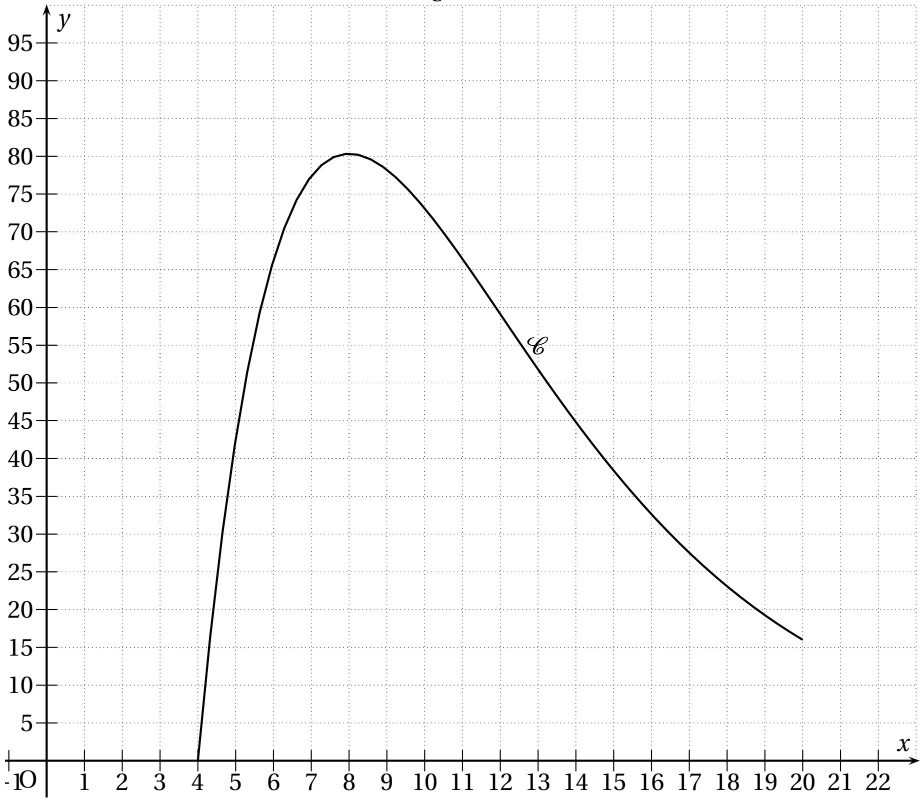
1. Une asymptote à $\mathscr{C}$ est la droite d'équation :
   ❒ $y=-1$ ❒ $x=1$ ❒ $x=-1$
2. La droite $\mathscr{D}$ a pour équation :
   ❒ $y=\dfrac{5}{2}x-10$ ❒ $y=\dfrac{5}{2}x-9$ ❒ $y=3x-10$
3. Le nombre dérivé de f en 0 est :
   ❒ 1 ❒ 3 ❒ -3
4. Le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ sur $]-1\,;+\infty[$ est :
   ❒ 2 ❒ 1 ❒ 3

Partie II. Étude d'une fonction *g*
On note g la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $g(x)=\exp[f(x)]$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$, puis $\displaystyle\lim_{x\to-1} g(x)$.
2. Étudier les variations de g sur $]-1\,;+\infty[$ et en dresser le tableau de variations.
3. Déterminer $g'(1)$ et $g'(0)$.
4. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, l'ensemble des solutions sur $]-1\,;+\infty[$ de l'inéquation $g(x)\leqslant \mathrm{e}^2$.

EXERCICE 9.2 (8 points).
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[4\,;\,20]$ par $f(x) = (x-4)\mathrm{e}^{-0,25x+5}$.
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure 9.2 de la présente page représente cette fonction dans un repère orthogonal.

FIGURE 9.2 – Figure de l'exercice 9.2



Partie A :

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[4\,;\,20]$, $f'(x) = (-0,25x+2)\mathrm{e}^{-0,25x+5}$.
2. En déduire le sens de variation de f et dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[4\,;\,20]$.
3. (a) Montrer que la fonction F définie par $F(x) = -4x\mathrm{e}^{-0,25x+5}$ est une primitive de f sur l'intervalle $[4\,;\,20]$.

   (b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_4^{20} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B :
Une entreprise commercialise des centrales d'aspiration.
Le coût de fabrication d'une centrale est de 4 centaines d'euros.
On suppose que le nombre d'acheteurs d'une centrale est donné par $N = \mathrm{e}^{-0,25x+5}$, où x est le prix de vente d'une centrale exprimé en centaines d'euros.

1. (a) Déterminer, en fonction du prix de vente x, exprimé en centaines d'euros, le bénéfice obtenu par la vente d'une centrale d'aspiration.

   (b) En déduire que la fonction f de la partie A donne le bénéfice réalisé par l'entreprise, en centaines d'euros.
2. À quel prix l'entreprise doit-elle vendre une centrale pour réaliser un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice maximal à l'euro près ? Donner un interprétation graphique de ces résultats.
3. Calculer le bénéfice moyen réalisé pour $x \in [4\,;\,20]$. On donnera le résultat à l'euro près.
   Représenter ce résultat dans le repère de la figure 9.2 de la présente page.

EXERCICE 9.3 (6 points).
Pour les élèves ***ne suivant pas*** *l'enseignement de spécialité.*
D'après l'INSEE, l'indice du chiffre d'affaires du secteur du Bâtiment gros œuvre (base 100 en 2000) a évolué entre 2000 et 2007 de la manière suivante :

année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x_i, $0 \leqslant i \leqslant 7$	0	1	2	3	4	5	6	7
Indice y_i, $0 \leqslant i \leqslant 7$	100	105,6	106,9	110,8	121,3	132,5	145,5	161,8

Partie 1 : Un ajustement affine est-il possible ?

1. Dans un repère orthogonal, représenter le nuage de points $(x_i\,;\,y_i)$ $0 \leqslant i \leqslant 7$ (unités graphiques : 2 cm pour 1 année sur l'axe des abscisses ; 2 cm pour 10 unités d'indice sur l'axe des ordonnées, en graduant ce dernier à partir de $y = 90$).
2. Expliquer pourquoi un ajustement affine de ce nuage de points ne parait pas approprié.

Partie 2 : On essaie un autre ajustement

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous ; on donnera les résultats à 10^{-2}

x_i, $0 \leqslant i \leqslant 7$	0	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$, $0 \leqslant i \leqslant 7$								

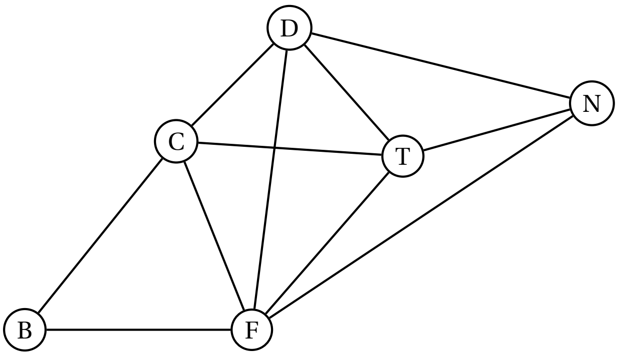
2. (a) À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés : les coefficients seront arrondis au centième.
   (b) En déduire une expression de y en fonction de x sous la forme $y = A \times \mathrm{e}^{Bx}$ où A et B sont des réels.
   (c) Dans le repère précédent, représenter la fonction f définie par $f(x) = 95,6 \times \mathrm{e}^{0,07x}$.
   (d) À l'aide de ce modèle, donner une estimation de l'indice du chiffre d'affaires du secteur du Bâtiment gros œuvre pour l'année 2009.

Partie 3 : Ce nouvel ajustement permet-il de prévoir l'avenir ?

« Baisse des permis de construire et donc des mises en chantier, stocks de logements neufs trop importants, hausse des taux d'intérêts, des coûts des matériaux et de la main d'œuvre ... À en croire le numéro 1 de l'assurance crédit en France, qui publiait jeudi son étude intitulée « *Immobilier, construction : à quand la sortie de crise ?* », le BTP français donne des signes de faiblesse. Et doit s'attendre selon l'assureur, tout d'abord à une dégradation de sa rentabilité. »

À la lecture de cette analyse faite en avril 2008, peut-on utiliser le modèle exponentiel de la partie 2 pour pronostiquer le chiffre d'affaires du secteur bâtiment gros œuvre en 2009 ?

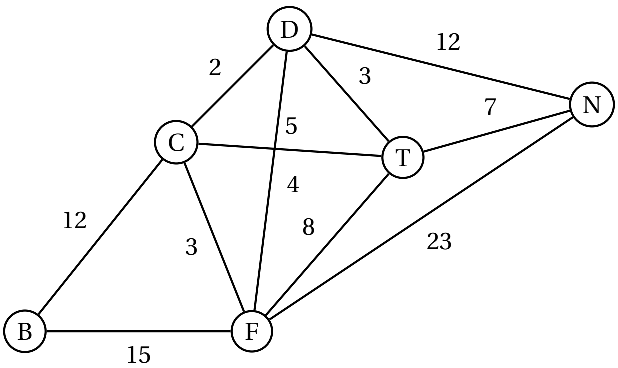
EXERCICE 9.3 (6 points).
Pour les élèves ***suivant*** *l'enseignement de spécialité.*
Un groupe d'amis organise une randonnée dans les Alpes.
On a représenté par le graphe ci-dessous les sommets B, C, D, F, T, N par lesquels ils peuvent choisir de passer. Une arête entre deux sommets coïncide avec l'existence d'un chemin entre les deux sommets.



1. (a) Recopier et compléter le tableau suivant :

Sommets	B	C	D	F	N	T
Degré des sommets du graphe						

   (b) Justifier que le graphe est connexe.
2. Le groupe souhaite passer par les six sommets en passant une fois et une seule par chaque chemin.
   Démontrer que leur souhait est réalisable. Donner un exemple de trajet possible.
3. Le groupe souhaite associer chaque sommet à une couleur de sorte que les sommets reliés par un chemin n'ont pas la même couleur. On note n le nombre chromatique du graphe.
   (a) Montrer que $4 \leqslant n \leqslant 6$.
   (b) Proposer un coloriage du graphe permettant de déterminer son nombre chromatique.
4. Le groupe se trouve au sommet B et souhaite se rendre au sommet N. Les distances en kilomètres entre chaque sommet ont été ajoutées sur le graphe.



Indiquer une chaîne qui minimise la distance du trajet. Justifier la réponse.