Mathématiques en Première ES

David ROBERT

2009–2010

Sommaire

Chapitre 1

Pourcentages

Sommaire

1.1 Rappels et compléments

Conformément au programme, ce chapitre n'introduit pas de connaissance technique nouvelle, c'est pourquoi il est quasi exclusivement constitué d'exercices.

1.1.1 Pourcentage

ACTIVITÉ 1.1.
Il y a 16 garçons dans une classe de 26 élèves. Quel est le pourcentage des garçons dans cette classe ?

Définition 1.1. Soit p et q deux réels où $q \neq 0$. Dire que p est égal à $t\,\%$ de q signifie que $\frac{p}{q} = \frac{t}{100}$.

Exemple. Dans l'activité on cherchait quel pourcentage (t) représentaient les 16 garçons (p) parmi 26 élèves (q). On a alors $\frac{16}{26} = \frac{t}{100}$ donc $t = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} \times \dots\dots \approx \dots\dots$

1.1.2 Variation en pourcentage

ACTIVITÉ 1.2.
Au 1$^{\text{er}}$ janvier 2 000, trois villes ont une population de 25 000 habitants.

1. *Ville 1*
   (a) La population de la première ville augmente de 6 % en 2 000, en 2 001 et en 2 002.
   En déduire sa population au 1$^{\text{er}}$ janvier 2 003.
   (b) Par quel nombre la population a-t-elle été multipliée :
      i. entre le 1$^{\text{er}}$ janvier 2 000 et le 1$^{\text{er}}$ janvier 2 001 ?
      ii. entre le 1$^{\text{er}}$ janvier 2 001 et le 1$^{\text{er}}$ janvier 2 002 ?
      iii. entre le 1$^{\text{er}}$ janvier 2 002 et le 1$^{\text{er}}$ janvier 2 003 ?

   Ce nombre s'appelle le *coefficient multiplicateur* correspondant à une augmentation de 6 %.
   (c) Par quel nombre la population a-t-elle été multipliée entre le 1$^{\text{er}}$ janvier 2 000 et le 1$^{\text{er}}$ janvier 2 003 ?
   À quel pourcentage d'augmentation cela correspond-il ?

2. *Ville 2*
   Le 31 décembre 2 000, la deuxième ville a une population de 26 400 habitants.
   Calculer le coefficient multiplicateur correspondant et en déduire le pourcentage d'augmentation.
3. *Ville 3*
   La population de la troisième ville diminue de 6 % durant l'année 2 000.
   (a) Calculer sa population à la fin 2 000, puis le coefficient multiplicateur correspondant.
   (b) Si la population augmente de 6 % l'année suivante, calculer sa population à la fin 2 001.
   En déduire le pourcentage global d'évolution sur les deux années de début 2 000 à fin 2 001.

Propriété 1.1. Augmenter *une grandeur de t %, où $t \geq 0$, revient à multiplier cette grandeur par* $\left(1+\frac{t}{100}\right)$.
Diminuer *une grandeur de t %, où $t \geq 0$, revient à multiplier cette grandeur par* $\left(1-\frac{t}{100}\right)$.
$\left(1+\frac{t}{100}\right)$ *ou* $\left(1-\frac{t}{100}\right)$ *sont les* coefficients multiplicateurs *correspondant à, respectivement, une augmentation ou une diminution de t %.*

Preuve. Soit p la valeur de la grandeur avant l'évolution et q celle après l'évolution.
- Dans le cas d'une augmentation, on a $q = p + p \times \frac{t}{100} = p \times \left(1+\frac{t}{100}\right)$.
- Dans le cas d'une diminution, on a $q = p - p \times \frac{t}{100} = p \times \left(1-\frac{t}{100}\right)$.

◇

Plus généralement, on dira qu'une grandeur *évolue* de t %, avec t positif en cas d'augmentation ou négatif en cas de diminution.

Propriété 1.2. *Le taux d'évolution t d'une grandeur passant de la valeur initiale $V_I \neq 0$ à la valeur finale V_F est donné par :* $t = \frac{V_F - V_I}{V_I} \times 100$.

Preuve. Dans le cas général, d'après la propriété précédente :
$$V_F = V_I \times \left(1+\frac{t}{100}\right) \Leftrightarrow V_F = V_I + V_I \times \frac{t}{100} \Leftrightarrow V_F - V_I = V_I \times \frac{t}{100} \Leftrightarrow \frac{V_F - V_I}{V_I} = \frac{t}{100} \Leftrightarrow t = \frac{V_F - V_I}{V_I} \times 100.$$ ◇

1.2 Exercices

1.2.1 Techniques de base

Exercice 1.1. 1. Un lycéen a travaillé pendant les vacances. Sur sa feuille de paye est inscrit :
- Salaire brut : 1 200,00 €
- Retenue Sécurité Sociale : 151,20 €

Quel pourcentage du salaire brut, la retenue représente-t-elle ?

2. En 2 004, la population active française comptait 27 455 000 individus, dont 12 680 000 femmes. Quel pourcentage de la population active représentaient les femmes ?
3. 28 % de la surface du territoire français, ce qui représente environ 154 000 km^2, est constitué de terrain boisé (forêts, etc.). Quelle est la surface totale du territoire français ?
4. Lors de l'achat d'un article coûtant 1 625 €, je dois verser un acompte de 130 €. Quel pourcentage de la somme totale cet acompte représente-t-il ?
5. Lors de l'achat d'un autre article, je dois verser un acompte de 15 %, et il me restera alors à débourser 1 700 €. Quel est le prix de cet article ?
6. (a) Dans la commune de Vachelle, sur 1 742 votants, 42 % ont choisi le candidat DESIRE. Combien cela fait-il de voix ?
   (b) M. DESIRE a obtenu 428 voix sur 1 312 votants à Port-Blanc et 323 voix sur 918 votants à Saint-André. Où a-t-il fait le meilleur score en pourcentage ?

Exercice 1.2.
Le tableau ci-dessous donne la répartition des filles dans trois classes de Première ES d'un Lycée.

Classe	A	B	C
Filles	10	8	9
Élèves	40	20	18

Déterminer la proportion de filles dans chacune des classes. Que constate-t-on ?

EXERCICE 1.3.

1. Une personne passe une petite annonce dans un journal diffusé dans 18 % des foyers d'un département. Elle passe aussi cette annonce dans un autre journal diffusé, lui, dans 25 % des foyers du département. À quelle condition cette personne peut-elle espérer que son annonce touche 43 % des foyers du département ? Pourquoi ?
2. Vrai ou faux ? Dans une entreprise 21 % des employés a moins de 25 ans et 36 % a plus de 45 ans ; donc 43 % du personnel de cette entreprise a entre 25 et 45 ans.
3. Dans cette entreprise, 40 % des employés ont suivi le stage de formation en comptabilité, tandis que 48 % ont suivi le stage d'anglais. Sachant que 35 % des employés ont suivi ces deux stages, quel pourcentage des employés de l'entreprise peut prétendre avoir suivi au moins l'un des deux stages ?
4. Vrai ou faux ? Dans cette même entreprise, 18 % des employés (hommes) a une ancienneté inférieure à 5 ans, tout comme 22 % des employées (femmes). Donc 40 % des employés de l'entreprise a une ancienneté inférieure à 5 ans.

1.2.2 Changement d'ensemble de référence

EXERCICE 1.4.
Dans un établissement scolaire, il y a 30 % de garçons et 30 % des filles sont internes. Sachant que le pourcentage d'internes dans l'établissement est de 27 %, quel est le pourcentage de garçons internes ?

EXERCICE 1.5.
Sur un emballage de fromage on peut lire : « Poids net : 217 g. 45 % de matière grasse sur le produit sec, soit 10 % sur le poids net du fromage. » Sachant que tout fromage est constitué de produit sec et d'eau :

1. quelle est la masse de matière grasse contenue dans le fromage ?
2. quelle est la masse d'eau contenue dans le fromage ?

EXERCICE 1.6.
Dans le Lycée GEORGES BRASSENS, l'anglais est choisi comme langue vivante 1 par une partie des élèves de Première ES. Les élèves de Première ES contituent l'ensemble de référence.

1. Compléter le tableau de répartition ci-dessous (les taux seront arrondis à un chiffre après la virgule).

Classe	Effectif	Élèves en anglais LV1	
		Effectif	Part en %
1 ES1	32	20	
1 ES2		28	80 %
1 ES3	33		
Total			70 %

2. Le Lycée ayant 320 élèves en Première, quelle est la part en pourcentage des élèves de Première ES étudiant l'anglais en LV1 parmi les élèves de Première du Lycée ?

EXERCICE 1.7.
Il y a 800 élèves au Lycée JACQUES CARTIER. dans ce Lycée :

- 15 % des élèves de Lycée sont des filles de Première ;
- 48 % des élèves de Première sont des filles ;
- 25 % des filles du Lycée sont en Première.

1. Calculer l'effectif des filles de Première.
2. En déduire l'effectif des élèves de Première, puis des filles dans ce Lycée.
3. Compléter le tableau des effectifs ci-dessous :

	Fille	Garçon	Total
Première			
Autres			
Total			

4. Calculer le pourcentage d'élèves de Première dans ce Lycée.

EXERCICE 1.8.
Dans une entreprise, 70 % des salariés sont des hommes, 6 % des femmes sont cadres et 4 % des hommes sont cadres.

1. Quel est le pourcentage des cadres dans cette entreprise ?
2. Faire un tableau, en pourcentages de salariés de l'entreprise, résumant la situation.
3. L'entreprise compte 23 cadres. Quel est le nombre total de salariés ?
4. Faire un tableau, en nombres de salariés de l'entreprise, résumant la situation.

EXERCICE 1.9.
Voici les résultats du référendum du 29 mai 2 005 à Paris (*source : ministère de l'intérieur*) :

Inscrits	:	1 084 114
Abstention	:	24,94 % des inscrits
Blancs ou nuls	:	1,61 % des votants
Oui	:	66,45 % des suffrages exprimés
Non	:	33,55 % des suffrages exprimés

On rappelle que les votants sont les inscrits moins les abstentions et que les suffrages exprimés sont les votants moins les blancs ou nuls.

1. Quel est le nombre de votants ? Le nombre de suffrages exprimés ?
2. Quel pourcentage représentent les suffrages exprimés parmi les votants ? Parmi les inscrits ?
3. Quel est le pourcentage de Oui parmi la totalité des votants ? Par rapport à l'ensemble des inscrits ?

EXERCICE 1.10.
1. Un Lycée compte 1 250 élèves ; 26 % d'entre eux sont en classe de Première et 24 % des élèves de Première sont en Première ES.
   (a) Quel calcul doit-on effectuer pour déterminer le nombre d'élèves de Première du Lycée ?
   (b) Quel calcul doit-on faire pour déterminer le nombre d'élèves en Première ES dans ce Lycée ?
   (c) Combien y a-t-il d'élèves en Première ES dans ce Lycée ? Quel pourcentage cela représente-t-il vis-à-vis de l'ensemble des lycéens ?
   (d) Quel calcul aurait-on pu faire directement pour déterminer ce pourcentage ?
2. 75 % des foyers d'un pays ont une connexion Internet, dont 80 % de type ADSL. Quel est le pourcentage de foyers équipés d'une connexion ADSL dans ce pays ?
3. Dans une population, 65 % des individus partent en vacances et 20 % de ceux qui partent en vacances vont à la montagne. Quelle est la proportion de départs à la montagne dans cette population ?

EXERCICE 1.11.
1. Considérons les statistiques (fictives) suivantes :
   - en janvier 2 004 : 2 183 500 chômeurs, dont 624 200 jeunes (moins de 25 ans) ;
   - en janvier 2 005 : 2 008 700 chômeurs, dont 617 400 jeunes.

   Le nombre de chômeurs a-t-il diminué ? Le nombre de jeunes chômeurs a-t-il diminué ? Le pourcentage de jeunes chômeurs parmi l'ensemble des chômeurs a-t-il diminué ?
2. Voici les chiffres d'affaires d'une entreprise (fictive) pendant quatre ans :

Année	1 997	1 998	1 999	2 000
CA (en millions d'€)	35	38	41	44

   (a) De combien de millions d'euros, d'une année sur l'autre, augmente le chiffre d'affaire ?
   (b) De combien de millions d'euros en pourcentage, d'une année sur l'autre, augmente le chiffre d'affaire ?

EXERCICE 1.12.
L'objet de cet exercice est d'évaluer si, pour les Premières générales à Dupuy de Lôme en 2 004–2 005, il y avait un lien entre l'orientation et le sexe.
Les données du tableau ci-dessous sont celles de l'année scolaire 2 004–2 005 :

	1 ES	1 L	1 S
Femmes	76	50	92
Hommes	43	13	76

1. (a) Déterminer le pourcentage de femmes et d'hommes en Premières générales à Dupuy de Lôme en 2 004–2 005.
   (b) Déterminer le pourcentage de femmes et d'hommes dans chacune des trois filières.
   (c) Dans chaque filière indiquer si les femmes et les hommes sont sur-représentés ou sous-représentés par rapport à l'ensemble des femmes et hommes en Premières générales.
2. (a) Déterminer le pourcentage de ES, L et S en Premières générales à Dupuy de Lôme en 2 004–2 005.
   (b) Déterminer le pourcentage de ES, L et S pour chaque sexe.
   (c) Pour chaque sexe indiquer si ES, L et S sont sur-représentés ou sous-représentés par rapport à l'ensemble ES, L et S en Premières générales.
3. À l'aide des questions précédentes, établir s'il existe un lien entre le sexe et la filière, éventuellement selon la filière, et préciser lequel.

EXERCICE 1.13.
On dispose du tableau suivant, donnant, parmi les élèves reçus à l'École polytechnique, la proportion de ceux issus de classes « défavorisées » et ceux issus de classes « favorisées », pour les périodes 1 950 et 1 990.

Proportions d'élèves reçus à l'École polytechnique	1 950	1 990
d'origine défavorisée	21 %	7,8 %
d'origine favorisée	79 %	92,2 %

Pour étudier si la discrimination sociale est plus forte dans les années 1990 que dans les années 1950, il faut tenir compte de l'évolution de la composition de la société française entre ces deux périodes.

Proportions de la population des 20-24 ans	1 950	1 990
d'origine défavorisée	90,8 %	68,2 %
d'origine favorisée	9,2 %	31,8 %

1. Que signifie 21 % dans le premier tableau ? Que signifie 90,8 % dans le second tableau ?
2. (a) On note r le nombre de reçus à Polytechnique en 1 950, exprimer en fonction de r le nombre de reçus à Polytechnique d'origine défavorisée en 1 950.
   (b) On note n le nombre de jeunes de 20-24 ans en 1 950. Montrer que proportion q_D de reçus à Polytechnique parmi la population défavorisée en 1 950 est :
$$q_D = \frac{0,21 \times r}{0,908 \times n}$$
3. Donner, de même, l'expression de la proportion q_F de reçus à Polytechnique parmi la population favorisée en 1 950.
4. On note $t = \frac{q_F}{q_D}$. Montrer que $t \approx 37$.
   On peut interpréter ce résultat en disant qu'en 1 950 un jeune « favorisé » a 37 fois plus de chances d'entrer à Polytechnique qu'un jeune « défavorisé ».
5. Pour comparer avec la situation en 1 990, on utilise les mêmes notations que ci-dessus, avec un '. On considère donc $t' = \frac{q'_F}{q'_D}$. Calculer t'.
   Peut-on considérer que « l'ascenseur social » s'est amélioré entre 1 950 et 1 990 ?
6. On souhaite utiliser le tableur (selon l'image d'écran de la figure 1.1 page suivante) pour calculer les quotients t et t' dans les quatre autres cas de ce tableau :

Proportions d'élèves d'origine défavorisée	1 950	1 990
ENA (École nationale d'administration)	18,3 %	6,1 %
ENS (Écoles normales supérieures)	23,9 %	6,1 %
HEC (Hautes études commerciales)	38,2 %	11,8 %
Grandes écoles (avec entrée sur concours)	29 %	8,6 %

   On pourra organiser les calculs (ici pour l'École polytechnique) selon l'image d'écran, de sorte qu'il suffise de modifier le contenu des cellules B2 et C2.
   Interpréter les résultats obtenus.

FIGURE 1.1 – Capture d'écran de l'exercice 1.13

	A	B	C
1	Proportion d'élèves reçus	1950	1990
2	D	**0,21**	**0,078**
3	F	0,79	0,922
4			
5	Proportion des 20-24 ans	1950	1990
6	D	0,908	0,682
7	F	0,092	0,318
8			
9		t	t'
10		37,128364	25,350911
11			

1.2.3 Pourcentage d'évolution

EXERCICE 1.14. 1. Calculer les coefficients multiplicateurs dans chacun des cas suivants :

- hausse de 20 % ;
- baisse de 15 % ;
- hausse de 0,1 % ;
- baisse de 5,2 % ;
- hausse de 100 % ;
- baisse de 85 % ;
- hausse de 300 % ;
- baisse de 100 %.

2. Donner les pourcentages de hausse ou de baisse associés aux coefficients multiplicateurs suivants :
   - 1,25 ;
   - 0,98 ;
   - 1,175 ;
   - 3 ;
   - 1,001 ;
   - 1,01 ;
   - 1,0049 ;
   - 1,0101 ;
   - 0,875 ;
   - 0,5 ;
   - 0,999 ;
   - 0,1.

3. Donner le pourcentage d'évolution pour une grandeur qui passe :
   - de 12 540 à 13 620 ;
   - de 5,7 à 2,6 ;
   - 21 000 à 84 000.

EXERCICE 1.15. 1. En août un loyer était de 564 €. Un an plus tard il est de 589 €. Quelle est son évolution en pourcentage ?

2. Le chiffre d'affaire d'une entreprise en 2 004 était de 124 000 €. En 2 005, les prévisions donnent un chiffre d'affaire de 117 000 €seulement. Quelle est son évolution en pourcentage ?
3. Pour un même produit, le magasin A propose 20 % de produit en plus pour la même prix et le magasin B propose 20 % de remise sur le prix pour une même quantité.
   Si 1 Kg de produit coûte 100 euros, quelle est la proposition la plus avantageuse pour le client ?
4. Après une augmentation de 15 %, un produit coûte 89,70 €. Quel était son prix initial ?

EXERCICE 1.16.
Dire que la TVA est de 19,6 % revient à dire que le prix hors taxe (HT) a été augmenté de 19,6 % de TVA pour obtenir le prix toutes taxes comprises (TTC).

1. Par quel nombre doit-on multiplier le prix HT pour obtenir le prix TTC ?
2. Un article vaut 120 € HT. Combien va-t-on le payer en magasin ?
3. Vous payez un article en magasin (donc TTC) à 200 €. À combien s'élève le prix HT et la TVA en € ?
4. Laquelle de ces deux propositions est la plus avantageuse :
   - Proposition 1 : Faire une remise de 10 % sur le prix HT, puis appliquer la TVA.
   - Proposition 2 : Appliquer la TVA, puis faire une remise de 10 % sur le prix TTC.

EXERCICE 1.17. 1. Au moment des soldes, un magasin propose une baisse de 10 % sur un article, suivie d'une nouvelle baisse de 20 % sur ce même article.
Ces deux diminutions peuvent être remplacées par une diminution unique. Déterminer le pourcentage de cette diminution.

2. Le prix d'un article augmente de 22 % puis diminue de 15 %. Quel est le pourcentage d'évolution de cet article ?
3. Le prix d'un produit subit successivement une hausse de 12 %, une baisse de 5 %, une baisse de 8 % et une hausse de 2 %. Quel est le pourcentage de variation final.
4. Si le nombre de chômeurs dans une ville diminue de 2 % par mois pendant un an, quel sera le pourcentage de diminution du nombre de chômeurs sur l'année ?

5. Un client veut acheter un véhicule qui coûtait 17 000 € le mois dernier mais qui, depuis, a augmenté de 4 %. Le vendeur consent une remise de 3,85 %. Le modèle coûte-t-il plus ou moins de 17 000 € ?
6. Pour calculer son revenu net imposable, Amédée peut procéder à deux abattements successifs sur son revenu brut global, le premier de 10 % puis le deuxième de 20 % sur ce qui reste après le premier abattement.
   (a) Quel est le pourcentage du revenu brut représente le revenu net ?
   (b) Amédée pense qu'il aurait été plus avantageux pour lui d'intervertir l'ordre des abattements. A-t-il raison ? Justifier.

EXERCICE 1.18.
Dire qu'une monnaie A est réévaluée de x % par rapport à une monnaie B, c'est dire que sa valeur en monnaie B est augmentée de x %.
Dire qu'une monnaie A est dévaluée de y % par rapport à une monnaie B, c'est dire que sa valeur en monnaie B est diminuée de y %.

1. Supposons que le dollar américain passe de 0,90 € à 1,20 €.
   (a) Quel est le pourcentage de réévaluation du dollar par rapport à l'euro ?
   (b) Quel est le pourcentage de dévaluation de l'euro par rapport au dollar ?
2. En 1 985, le peso bolivien a été dévalué de telle façon que le dollar a été réévalué de 400 % par rapport au peso.
   (a) Le Monde du 12 février 1 985 présentait ainsi l'événement : « le peso bolivien a été dévalué de 400 % par rapport au dollar ». Critiquer cette phrase.
   (b) Calculer le pourcentage de dévaluation du peso bolivien par rapport au dollar.

EXERCICE 1.19. 1. Après une augmentation de 5 % suivie d'une hausse de t %, on obtient une hausse globale de 17,6 %. Combien vaut t ?

2. À la bourse de Paris, l'action Renault :
   - a augmenté de 1,45 % entre le 10 juin 2 000 et le 11 juin 2 000 ;
   - a baissé de 0,5 % entre le 10 juin 2 000 et le 12 juin 2 000.

   Quelle a été son évolution entre le 11 juin 2 000 et le 12 juin 2 000 ?
3. Après deux augmentation successives de t % le prix d'un produit a globalement augmenté de 20 %. Combien vaut t ?
4. Après une augmentation de t % suivie d'une baisse de t %, on obtient une baisse globale de 4 %. Combien vaut t ?
5. Un article subit une augmentation de 10 %. Quel pourcentage de baisse doit-on appliquer pour compenser cette hausse ?

EXERCICE 1.20. 1. Est-il pertinent de dire que 3 augmentations successives de 2 % sont approximativement équivalentes à une augmentation globale de 6 % ?

2. Est-il pertinent de dire qu'une hausse de 1 % suivie d'une baisse de 3 % suivie d'une hausse de 2% sont approximativement équivalentes à une évolution globale de 0 % ?
3. Est-il pertinent de dire que 3 augmentations successives de 20 % sont approximativement équivalentes à une augmentation globales de 60 % ?

1.2.4 Indices

Les indices sont essentiellement utilisés dans des séries chronologies.

La valeur d'une grandeur observée une année ou un mois sert de référence (indice 100) et toutes les autres données (antérieures ou ultérieures) sont exprimées sous forme de pourcentage par rapport à cette année de référence.

Indices et grandeurs sont alors proportionnels.

Les indices sont particulièrement utiles pour comparer des évolutions de deux grandeurs quand les grandeurs ne sont pas du même ordre ou n'ont pas les mêmes unités (comparer PIB et population par exemple).

EXERCICE 1.21.
Le tableau suivant donne la production de blé et d'orge en Algérie, en millions de tonnes :

Année	1 996	1 997	1 998	1 999
Blé	2,983	0,662	2,280	1,503
Orge	1,800	0,191	0,700	0,481

En prenant comme indice 100 la production de 1 996, complétez le tableau suivant :

Année	1 996	1 997	1 998	1 999
Blé	100			
Orge	100			

EXERCICE 1.22.
On veut connaître l'évolution du PIB par habitant en France depuis 1 990 qui servira d'année de référence.
On dispose du tableau suivant qu'on complètera au fur et à mesure par les réponses aux questions :

Année	1 990	1 991	1 992	1 993	1 994	1 995	1 996	1 997	1 998	1 999
PIB (en $)	1 195	1 201	1 322	1 250	1 331	1 535	1 554	1 406	1 447	1 432
Indice										

1. Calculer l'indice des années 1 991, 1 995, 1 996 et 1 999 (arrondis à 0,1).
2. En déduire le pourcentage d'évolution du PIB par habitant entre :
   - 1 990 et 1 991 ;
   - 1 990 et 1 995 ;
   - 1 990 et 1 999 ;
3. Quelle est l'unité de l'indice ?

EXERCICE 1.23.
Le tableau ci-dessous donne les montants, en millairds d'euros, des cotisations sociales versées par les non-salariés en France, de 1 994 à 1 999 (*source : INSEE*) :

Année	1 994	1 995	1 996	1 997	1 998	1 999
Montant	16,66	17,33	19,03	19,25	15,23	15,99

1. En prenant 100 pour base en 1 994, calculer les indices des autres années.
2. En déduire les pourcentages d'évolution de ces montants de 1 994 à 1 996, de 1 994 à 1 998, 1 994 à 1 999.
3. En utilisant ces indices, calculer les pourcentages d'évolution de ces montants de 1 997 à 1 999.

EXERCICE 1.24.
Le tableau ci-dessous done l'évolution de l'indice des prix à la consommation en France entre 1 998 et 2 004 en prenant pour année de base l'année 1 998 (indice 100) (*source : INSEE*) :

Année	1 998	1 999	2 000	2 001	2 002	2 003	2 004
Indice	100	100,5	102	103,5	105,6	107,6	109,3

1. Donner l'évolution globale des prix consommés par les ménages entre :
   - 1 998 et 1 999 ?
   - 1 998 et 2 004 ?
   - 2 000 et 2 004 ?
   - 1 998 et 2 001 ?
   - 2 000 et 2 002 ?
2. Reconstruire un tableau donnant l'évolution de l'indice des prix entre 2 000 et 2 004, en prenant 2 000 come année de référence (indice 100).

EXERCICE 1.25.
Le tableau suivant indique l'évolution du PIB base 100 en 1 980 aux États-Unis (EU), au Japon et dans l'Union Européenne (UE) :

Année	1 980	1 990	1 999
EU	100	132,6	172,3
Japon	100	155,2	166,0
UE	100	126,8	146,8

1. Donner le pourcentage d'évolution du PIB aux EU entre 1 980 et 1 990 puis entre 1 980 et 1 999. Faire de même pour le PIB du Japon et dans l'UE.
2. Pour les EU, calculer l'indice du PIB en 1 999 base 100 en 1 990. faire de même pour le Japon et l'UE (valeurs arrondies à 0,1 près).
3. Si le PIB aux EU était de 5 554 milliards de dollars en 1 990, calculer le PIB en 1 980 et en 1 999 (valeurs arrondies au milliard de dollars).
4. Peut-on dire que le PIB du Japon est supérieur à celui de l'UE ?

EXERCICE 1.26.
Le tableau ci-dessous donne les indices de production de deux entreprises (base 100 le 31/12/1 992).

Année	1 992	1 993	1 994	1 995	1 996	1 997	1 998	1 999
Entreprise A	100	105	110	110	98	95	100	110
Entreprise B	100	96	97	101	110	106	110	112

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier brièvement votre réponse.
   (a) Les deux entreprises ont eu la même production au cours de l'année 1 992.
   (b) L'entreprise B n'a connu que deux années de baisse de sa production.
   (c) L'évolution en pourcentage de l'entreprise A a été la même en 1 993 et en 1 994.
2. Pour chacune des deux entreprises, en indiquant les calculs effectués, déterminer :
   - le taux d'évolution de la production sur la période 1 992-1 997 ;
   - le taux d'évolution de la production sur la période 1 997-1 999.

EXERCICE 1.27.
Les quatre premiers pays producteurs de gaz naturel et leur production en millions de m^3 sont donnés dans le tableau ci-dessous :

	1 990	2 002	2 003
Russie	641 000	595 300	616 500
États-unis	504 900	537 000	541 000
Canada	106 800	187 800	180 500
Royaume-Uni	49 600	102 600	102 800

Source : Comité professionnel du pétrole Cédigaz.

1. Reproduire ce tableau en affectant pour chaque année l'indice 100 à la Russie. Quelle évolution étudie-t-on dans ce cas ?
2. Reproduire ce tableau en affectant pour chaque pays l'indice 100 à l'année 2 002. Quelle évolution étudie-t-on dans ce cas ?

Devoir surveillé n°1

Pourcentages

EXERCICE 1.1 (5 points).
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chaque question, trois réponses sont proposées. Une seule des réponses proposées est correcte.
On demande de cocher celle que vous pensez être correcte sachant qu'une réponse juste rapporte 1 point, une réponse fausse enlève 0,5 point et qu'une absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point.

1. Fin janvier 2 009 le nombre de demandeurs d'emploi inscrits en catégorie 1 [1] a augmenté, par rapport à décembre 2 008, de 4,3 % (*source : AFP*). Le nombre de demandeurs d'emploi de cette catégorie a donc été multiplié par :
   ❒ 0,043 ❒ 1,43 ❒ 1,043
2. Fin janvier 2 009 le nombre de demandeurs d'emploi inscrits en catégorie 1 a augmenté, par rapport à janvier 2 008, de 15,4 % (*source : AFP*). Sachant qu'en janvier 2 009 cette catégorie comportait 2 204 500 demandeurs d'emploi, leur effectif en janvier 2 008 était d'environ :
   ❒ 1 865 007 ❒ 1 910 311 ❒ 2 543 993
3. De janvier 2 008 à janvier 2 009, le nombre de demandeurs d'emploi de catégorie a augmenté de 15,4 % et il a augmenté de 4,3 % de décembre 2008 à janvier 2 009. Entre janvier 2 008 et décembre 2 008, ce nombre a donc augmenté d'environ :
   ❒ 9,6 % ❒ 10,6 % ❒ 11,1 %
4. De fin janvier 2 008 à fin janvier 2 009, le nombre d'offres d'emploi déposées à Pôle emploi a diminué de 29,3 % (*source : ministère de l'économie*). Pour annuler une telle baisse il faudrait que le nombre d'offres d'emploi augmente d'environ :
   ❒ 22,7 % ❒ 29,3 % ❒ 41,4 %
5. Le prix du gaz a subi deux évolutions successives : -9 % en novembre 2 003 ; $+5,2$ % en novembre 2 004. Globalement, le prix du gaz a évolué environ de :
   ❒ $-4,3$ % ❒ $-3,8$ % ❒ 4,3 %

EXERCICE 1.2.
Toutes les données statistiques proviennent du site L'observatoire des inégalités.
Tous les résultats seront à arrondir au millier pour les effectif et à 0,1 % pour les pourcentages.
Les deux parties de l'exercice sont ***dépendantes****.*

Partie A (9 points)
En juin 2008, sur un ensemble 3 063 milliers de chômeurs (catégorie ABC [2]) :

- 46,6 % des chômeurs étaient des hommes,
- 67,4 % des chômeurs étaient des personnes âgées entre 25 ans et 49 ans
- 17 % des femmes au chômage avaient plus de 50 ans
- 227 milliers étaient des hommes de moins de 25 ans et ils représentaient 47,8 % de l'ensemble des moins de 25 ans.

1. Déterminer les effectifs d'hommes et de femmes au chômage.
2. Déterminer l'effectif des femmes de plus de 50 ans au chômage.
3. Déterminer l'effectif des moins de 25 ans au chômage.
4. Déterminer l'effectif des 25-49 ans au chômage.
5. Recopier le tableau suivant et le compléter par les effectifs.

	moins de 25 ans	25 à 49 ans	plus de 50 ans	total
Hommes	227			
Femmes				
Total				3 063

1. Cette catégorie, qui sert de baromètre de référence, ne retient que les personnes à la recherche d'un emploi à temps plein et à durée indéterminée.
2. Catégorie ABC : Demandeurs d'emploi inscrits à Pôle emploi tenus de faire des actes positifs de recherche d'emploi.

Partie B (6 points)
Pour les élèves ***ne suivant pas*** *l'enseignement de spécialité.*
En juin 2 009, les effectifs étaient les suivants :

	moins de 25 ans	25 à 49 ans	plus de 50 ans	total
Hommes	330	1201	285	1 816
Femmes	300	1208	311	1 819
Total	630	2409	596	3 635

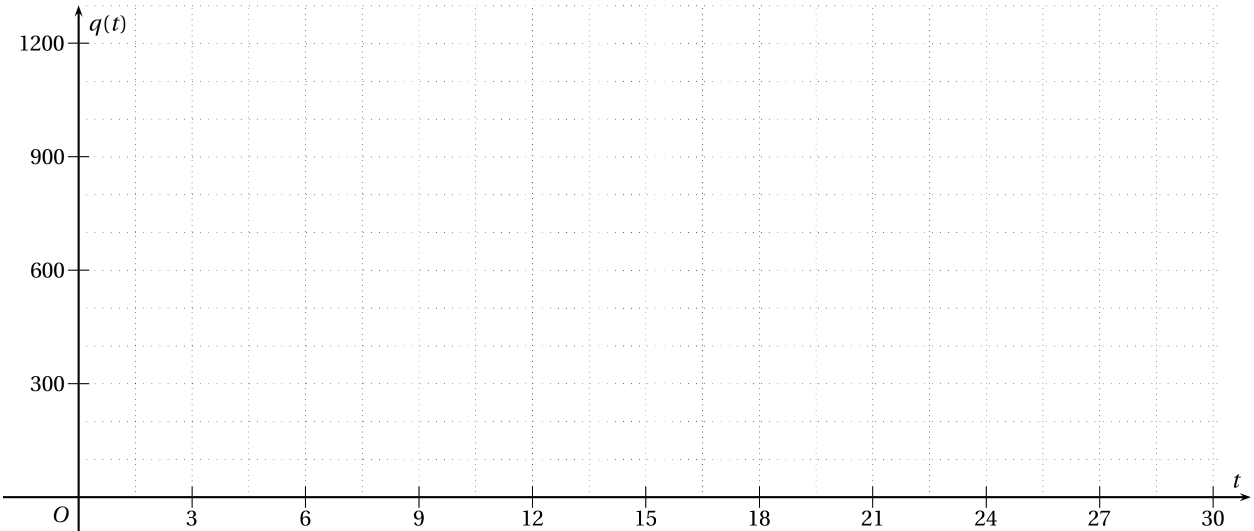
1. Quelles sont les évolutions, en pourcentage, entre 2 008 et 2 009 :
   (a) de l'effectif total des chômeurs ?
   (b) de l'effectif total des femmes ?
   (c) de l'effectif total des hommes au chômage ?
   (d) Commenter ces évolutions.
2. Dans la catégorie des moins de 25 ans, quelles sont les évolutions, en pourcentage, entre 2 008 et 2 009 :
   (a) de l'effectif total des moins de 25 ans ?
   (b) de l'effectif des hommes de moins de 25 ans au chômage ?
   (c) de l'effectif des femmes de moins de 25 ans au chômage ?
   (d) Commenter ces évolutions.
3. Que peut-on en conclure ?

EXERCICE 1.3 (6 points)**.**
Pour les élèves ***suivant*** *l'enseignement de spécialité.*
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

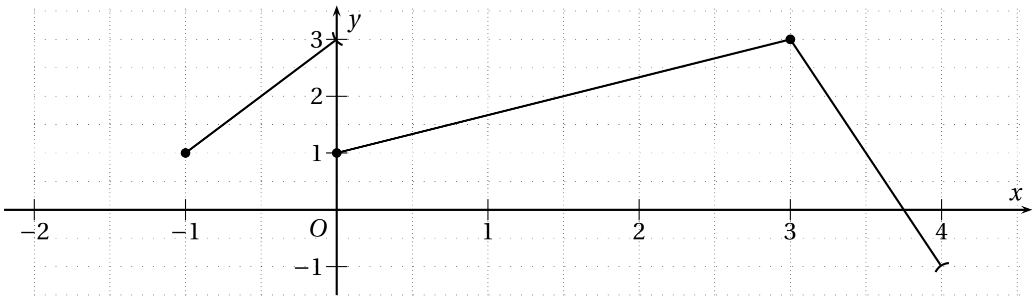
1. Un centre de tri postal reçoit des lettres. Une étude a montré que la quantité q de lettres présentes dans le centre de tri en fonction du temps t (en heures) pouvait être modélisée par la fonction suivante :

$$q(t) = \begin{cases} 1\,200 & \text{pour } t \in [0\,;6] \\ 50t - 300 & \text{pour } t \in]6\,;12] \\ 75t - 600 & \text{pour } t \in]12\,;24] \\ 1\,200 & \text{pour } t \in]24\,;30] \end{cases}$$

   (a) Représenter la fonction q dans le repère ci-dessous :



   (b) Comment interpréter le saut pour $t = 6$?
   (c) À quel moment de la journée les lettres arrivent-elles au centre du tri en plus grand nombre ?
2. Déterminer l'expression de la fonction f représentée dans le repère ci-dessous :



Chapitre 2

Second degré

Sommaire

2.1 Activités

ACTIVITÉ 2.1. 1. Soit f la fonction carré. Dresser le tableau de variation de f et déterminer son minimum et les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+3)^2$.
   (a) Soit a et b deux réels tels que $-3 \leq a < b$. Compléter :

$$\begin{array}{cccccc} \dots & \leq & a+3 & < & b+3 & \\ \dots & \dots & (a+3)^2 & \dots & (b+3)^2 & \text{car } \dots\dots\dots \end{array}$$

   Donc f est .... sur ....

   (b) En procédant de la même manière, déterminer le sens de variation de f sur l'intervalle $]-\infty; -3]$.

   (c) Dresser le tableau de variation de f puis en déduire le minimum de la fonction et les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

3. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer ses variations et dresser son tableau de variation, déterminer son extremum et les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = 0$.
   - $f(x) = (x-1)^2$
   - $f(x) = (x+2)^2 - 1$
   - $f(x) = (x-0,5)^2 + 2$
   - $f(x) = 3 - (x+1)^2$

ACTIVITÉ 2.2. 1. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 6x + 5$ et $g(x) = (x+3)^2 - 4$.
   (a) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = g(x)$.
   (b) En déduire le tableau des variations de f et son extremum.
   (c) En déduire les éventuelles solutions de l'équation $f(x) = 0$ et le signe de f selon les valeurs de x.

2. Mêmes questions avec les fonctions f et g suivantes :
   - $f(x) = 2x^2 - x - 1$ et $g(x) = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$
   - $f(x) = -x^2 + 2x - 4$ et $g(x) = -(x-1)^2 - 3$
   - $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$ et $g(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

ACTIVITÉ 2.3 (Cas général)**.**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels. On appellera cette forme, la *forme développée*.
Les activités précédentes ont montré que lorsqu'on pouvait obtenir $f(x)$ sous la forme $f(x) = \alpha(x+\beta)^2 + \gamma$ où α, β et γ sont des réels, alors on pouvait en déduire les variations de f, son extremum, les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 0$ et le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x. On appelera cette forme, la *forme canonique*.
On cherche dans cette activité à obtenir les valeurs de α, β et γ dans le cas général.

1. En développant la forme canonique, montrer que α, β et γ sont les solutions du système :
$$\begin{cases} a = \alpha \\ b = 2\alpha\beta \\ c = \alpha\beta^2 + \gamma \end{cases}$$
2. En déduire que :
$$\begin{cases} \alpha = a \\ \beta = \dfrac{b}{2a} \\ \gamma = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} \end{cases}$$

2.2 Trinôme

2.2.1 Définition, forme développée

Définition 2.1. On appelle *trinôme* toute expression qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$. Cette forme s'appelle la *forme développée* du trinôme.

2.2.2 Forme canonique

Théorème 2.1. *Tout trinôme $ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $\alpha(x+\beta)^2 + \gamma$ où α, β et γ sont des réels. Cette forme s'appelle la* forme canonique *du trinôme.*

Preuve. L'activité 2.3 a montré que $\alpha = a$, $\beta = \frac{b}{2a}$ et $\gamma = -\frac{b^2-4ac}{4a}$. ◊

Remarque. Pour alléger les écritures, et parce que cette quantité aura un rôle important plus tard, on notera : $\Delta = b^2 - 4ac$.

La forme canonique devient alors :

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \qquad \text{avec } \Delta = b^2 - 4ac}$$

2.2.3 Racines et discriminant

Définitions 2.2. Soit un trinôme $ax^2 + bx + c$. On appelle :
- *racine* du trinôme tout réel solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$;
- *discriminant* du trinôme, noté Δ, le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Propriété 2.2. *Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discrimant.*
- *Si $\Delta < 0$, alors le trinôme* ***n'a pas de racine****.*
- *Si $\Delta = 0$, alors le trinôme a* ***une unique racine*** *: $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.*
- *Si $\Delta > 0$, alors le trinôme a* ***deux racines*** *: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$*

Remarques.
- Le signe de Δ permet *discriminer* les équations de type $ax^2 + bx + c = 0$ qui ont zéro, une ou deux solutions, c'est la raison pour laquelle on l'appelle le *discriminant*[1].
- Si $\Delta = 0$ les formules permettant d'obtenir x_1 et x_2 donnent $x_1 = x_0$ et $x_2 = x_0$; pour cette raison, on appelle parfois x_0 la *racine double* du trinôme.

Preuve. On a vu que $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$ donc $(\mathscr{E}) : ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$

- Si $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ alors $ax^2 + bx + c$ est égal à la somme de deux quantités positives (la seconde strictement) donc $ax^2 + bx + c > 0$ et $(\mathscr{E})$ n'a pas de solution. Or $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{\Delta}{4a^2} < 0 \Leftrightarrow \Delta < 0$.

1. Discriminer. *v. tr.* Faire la discrimination, c'est-à-dire l'action de distinguer l'un de l'autre deux objets, ici des équations

- Si $-\frac{\Delta}{4a^2}=0$ alors $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ donc $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}$. $(\mathscr{E})$ a une unique solution. Or $-\frac{\Delta}{4a^2}=0 \Leftrightarrow \Delta=0$.
- Si $-\frac{\Delta}{4a^2}<0$ alors ax^2+bx+c est de la forme $a(A^2-B^2)$ donc :
  $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow (A^2-B^2)=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right)$
  donc deux solutions :
  1. $x=-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}}=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}$.
     Donc, si $a>0$, $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et, si $a<0$, $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
  2. $x=-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}}=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}$.
     Donc,si $a>0$, $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et, si $a<0$, $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

  Donc, dans tous les cas, $\mathscr{E}$ a deux solutions qui sont $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. Or $-\frac{\Delta}{4a^2}<0 \Leftrightarrow \frac{\Delta}{4a^2}>0 \Leftrightarrow \Delta>0$.

$\diamondsuit$

2.2.4 Forme factorisée, signe d'un trinôme

Propriété 2.3. *Soit ax^2+bx+c un trinôme.*
- *Si le trinôme a deux racines x_1 et x_2 alors $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.*
- *Si le trinôme a une racine x_0 alors $ax^2+bx+c=a(x-x_0)(x-x_0)=a(x-x_0)^2$.*
- *Si le trinôme n'a pas de racine, il n'a pas de forme factorisée.*

Cette écriture, lorsqu'elle existe, est appelée forme factorisée *du trinôme.*

Preuve. On a obtenu les formes factorisées dans la démonstration précédente. $\diamondsuit$

Propriété 2.4. *Soit ax^2+bx+c un trinôme.*
- *Si le trinôme n'a pas de racine, ax^2+bx+c est strictement du signe de a pour tout x.*
- *Si le trinôme a une racine, ax^2+bx+c est strictement du signe de a pour tout $x\neq-\frac{b}{2a}$ et s'annule en $-\frac{b}{2a}$.*
- *Si le trinôme a deux racines x_1 et x_2, ax^2+bx+c est :*
  · *strictement du signe de a quand $x\in]-\infty;x_1[\cup]x_2;+\infty[$;*
  · *strictement du signe opposé de a quand $x\in]x_1;x_2[$;*
  · *s'annule en x_1 et en x_2.*

On peut aussi énoncer cette propriété de la façon synthétique suivante :

Propriété 2.5. *Un trinôme ax^2+bx+c est du signe de a sauf entre les racines, si elles existent.*

Preuve. On a vu que $ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right)$
- Dans le cas où $\Delta<0$, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}$ est la somme de deux quantités positives, la seconde strictement, donc le signe de ax^2+bx+c est strictement celui de a.
- Dans le cas où $\Delta=0$, $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, donc le signe de ax^2+bx+c est celui de a. Plus précisement : il ne s'annule qu'en $x_0=-\frac{b}{2a}$ et est sinon strictement du signe de a.
- Dans le cas où $\Delta>0$, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines. En supposant que $x_1<x_2$ (sinon il suffit d'inverser les racines), le tableau de signe ci-desous donne le résultat.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$(x-x_1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-x_2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-x_1)(x-x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

$\diamondsuit$

2.3 Fonction trinôme

2.3.1 Définition

Définition 2.3. On appelle *fonction trinôme* une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, qui à x associe $f(x)=ax^2+bx+c$ où $a\neq0$.

2.3.2 Sens de variation

Propriété 2.6. *Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ une fonction trinôme. Alors f a les variations résumées dans les tableaux ci-dessous :*

- *Si $a > 0$:*

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

- *Si $a < 0$:*

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

Preuve. La preuve sera admise dans le cas général même si elle est du même type que les cas particuliers déjà vus dans les activités. ♢

2.4 Exercices et problèmes

Exercice 2.1.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $x^2 = 9$;
- $x^2 = -3$;
- $(x-5)^2 = 3$;
- $(5x-4)^2 - (3x+7)^2 = 0$;
- $(3x+5)^2 = (x+1)^2$;
- $(2x-1)^2 + x(1-2x) = 4x^2 - 1$.

Exercice 2.2.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- $4x^2 - x - 3 = 0$;
- $(t+1)^2 + 3 = 0$;
- $2(2x+1)^2 - (2x+1) - 6 = 0$;
- $x^2 + 10^{50}x + 25 \times 10^{98} = 0$.

Exercice 2.3.
Résoudre les équations suivantes :

- $x^2 = \frac{1}{2}$
- $x^2 = \frac{1}{3}$.
- $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

Exercice 2.4.
Résoudre l'équation $2004x^4 + x^2 - 2005 = 0$.

Exercice 2.5.
On note $P(x) = -2x^2 - x + 1$.

1. Résoudre $P(x) = 0$.
2. Factoriser $P(x)$.
3. Résoudre $P(x) \leq 0$.

Exercice 2.6.
Résoudre les équations suivantes :

- $\dfrac{2x-5}{x-1} = \dfrac{x-1}{x+1}$
- $\dfrac{x^2-x+1}{x+2} = 2x+3$

Exercice 2.7.
Résoudre les inéquations suivantes :

- $-2x^2 + 7x - 5 \leq 0$;
- $\dfrac{3x^2+x+1}{x^2-3x-10} > 0$.
- $-x^2 + 9x + 22 \geq 0$;
- $\dfrac{x^2-3x+2}{-x^2+2x+3} \geqslant 0$

Exercice 2.8.
Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 13x + 15$.

1. Montrer que $x = -1$ est racine de ce polynôme.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$.
3. (a) Terminer la factorisation de $f(x)$.
   (b) Résolvez l'inéquation $f(x) > 0$.

Problème 2.1.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Précisez la nature de la courbe $\mathscr{C}$ et les coordonnées de son sommet S.

2. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points A et B dont on précisera les coordonnées.
3. Pour quelles valeurs de x la courbe $\mathscr{C}$ est-elle situé au dessus de l'axe des abscisses ?

PROBLÈME 2.2.
Une entreprise produit de la farine de blé.
On note q le nombre de tonnes de farine fabriquée avec $0 < q < 80$.
On appelle $C(q)$ le coût total de fabrication, $R(q)$ la recette obtenue par la vente et $B(q)$ le bénéfice obtenu par la vente de q tonnes de farine.

1. Sachant que chaque tonne est vendue 120 €, exprimer $R(q)$ en fonction de q.
2. Sachant que $C(q) = 2q^2 + 10q + 900$:
   (a) déterminer la quantité de farine à produire pour que la production soit rentable ;
   (b) la production correspondant au bénéfice maximal et le montant de ce bénéfice.

PROBLÈME 2.3.
Le gérant d'une salle de cinéma de 300 places constate que le nombre x de spectateurs à une séance est une fonction affine du prix p du billet. Plus précisement on a : $x = 300 - 12p$.

1. Entre quelles valeurs peut varier le prix du billet ?
2. Sachant que les charges fixes pour chaque séance s'élèvent à 1 848 €, montrer que le bénéfice $b(p)$ de chaque séance est égal à $b(p) = -12p^2 + 300p - 1848$.
3. En déduire pour quelles valeurs de p le séance est rentable.
4. Déterminer le prix du billet pour que le bénéfice soit maximum. Quel est alors le nombre de spectateurs et le bénéfice réalisé ?

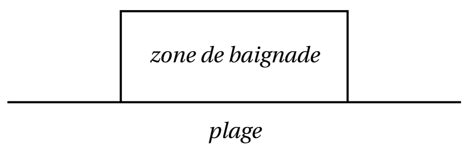
PROBLÈME 2.4.
Une mutuelle complémentaire propose à ses adhérents le mode de remboursement suivant : lorsque la sécurité sociale a remboursé t% des frais de maladie, la mutuelle rembourse à l'adhérent t% de ce qui reste à sa charge .
Madame Martin, sur l'une de ses feuilles de remboursement de frais, constate que le taux global de remboursement de ses frais est 87.75%. Quel est le taux de remboursement de la sécurité sociale ?

PROBLÈME 2.5.
Une société de livres par correspondance a actuellement 10000 abonnés qui paient hacun 50 €par an. Une étude a montré qu'une augmentation (respectivement une diminution) de 1 €du prix de l'abonnement annuel, entraîne une diminution (respectivement une augmentation) de 100 abonnés.
On se propose de trouver comment modifier le prix de l'abonnement annuel pour obtenir le maximum de recette.
n désigne la variation du prix de l'abonnement annuel en euros (n est un entier relatif).

1. Exprimer en fonction de n le prix de l'abonement annuel, et le nombre d'abonnés correspondant.
2. Exprimer en fonction de n la recette annuelle de cette socité, notée $R(n)$.
3. Déterminer la valeur de n pour laquelle $R(n)$ est maximum.
   Quel est alors le montant de l'abonnement annuel, le nombre d'abonnés et la recette totale correspondante ?

PROBLÈME 2.6.
Trouver deux nombres dont la somme est égale à 57 et le produit égal à 540.

PROBLÈME 2.7.
Une zone de baignade rectangulaire est délimitée par une corde (agrémentée de bouées) de longueur 50 m. Quelles doivent être les dimensions de la zone pour que la surface soit maximale ?



PROBLÈME 2.8.
Quelle largeur doit-on donner à la croix pour que son aire soit égale à l'aire restante du drapeau ?

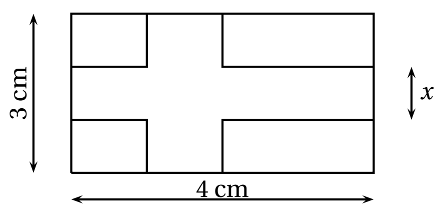
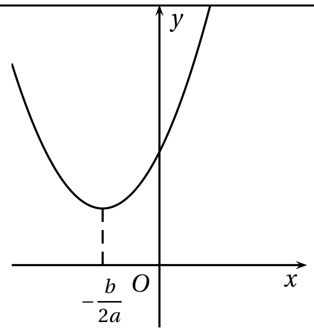
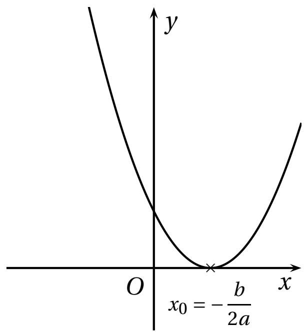
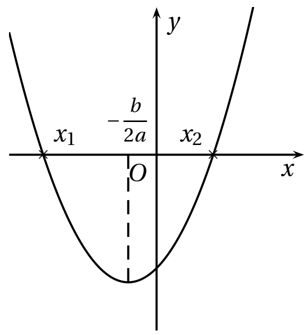


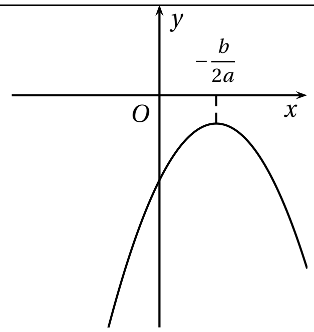
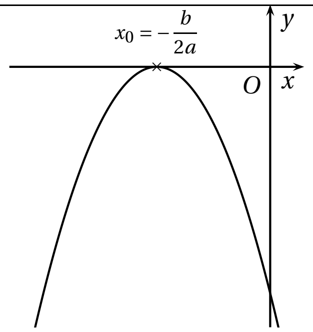
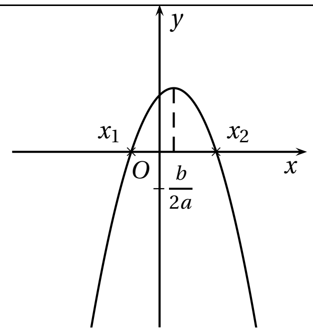
TABLE 2.1 – Bilan du second degré

<table>
<tr><td rowspan="5"></td><td colspan="3">$\Delta = b^2 - 4ac$</td></tr>
<tr><td>$\Delta < 0$</td><td>$\Delta = 0$</td><td>$\Delta > 0$</td></tr>
<tr><td>$ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$</td><td>$ax^2+bx+c=0$ a une solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$</td><td>$ax^2+bx+c=0$ a deux solutions $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td></tr>
<tr><td>ax^2+bx+c n'a pas de racine</td><td>ax^2+bx+c a une racine double</td><td>ax^2+bx+c a deux racines</td></tr>
<tr><td>Aucune factorisation</td><td>$ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$</td><td>$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Si $a>0$</td><td colspan="3">

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
ax^2+bx+c	↘		↗

</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$ax^2+bx+c>0$ sur $\mathbb{R}$</td><td>$ax^2+bx+c \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$</td><td>$ax^2+bx+c \geq 0$ sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ et $ax^2+bx+c \leq 0$ sur $[x_1; x_2]$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Si $a>0$</td><td colspan="3">

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
ax^2+bx+c	↗		↘

</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$ax^2+bx+c<0$ sur $\mathbb{R}$</td><td>$ax^2+bx+c \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$</td><td>$ax^2+bx+c \leq 0$ sur $]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$ et $ax^2+bx+c \geq 0$ sur $[x_1; x_2]$</td></tr>
</table>

Devoir surveillé n°2

Indices – Second degré

EXERCICE 2.1 (4 points)**.**
Le tableau ci-dessous donne les indices de production de deux entreprises (base 100 le 31/12/1 992).

Année	1 992	1 993	1 994	1 995	1 996	1 997	1 998	1 999
Entreprise A	100	105	110	110	98	95	100	110
Entreprise B	100	96	97	101	110	106	110	112

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier brièvement votre réponse.
   (a) Les deux entreprises ont eu la même production au cours de l'année 1 992.
   (b) L'entreprise B n'a connu que deux années de baisse de sa production.
   (c) L'évolution en pourcentage de l'entreprise A a été la même en 1 993 et en 1 994.
2. Pour chacune des deux entreprises, en indiquant les calculs effectués, déterminer :
   - le taux d'évolution de la production sur la période 1 992-1 997 ;
   - le taux d'évolution de la production sur la période 1 997-1 999.

EXERCICE 2.2 (4 points)**.**
Compléter sur l'énoncé le tableau ci-dessous. *On ne demande aucune justification.*

Forme développée	Forme canonique	Forme factorisée
$3x^2-2x-1$		
	$2(x-1)^2+1$	
		$5(x-1)(x+2)$
$9x^2-9x+1$		

EXERCICE 2.3 (6 points)**.**
Pour les élèves ***ne suivant pas*** *l'enseignement de spécialité.*
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2+x+3=0$
2. $9x^2-6x+1=0$
3. $x^2+x-2=0$
4. $x^2+3x+1=0$

EXERCICE 2.4 (6 points)**.**
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

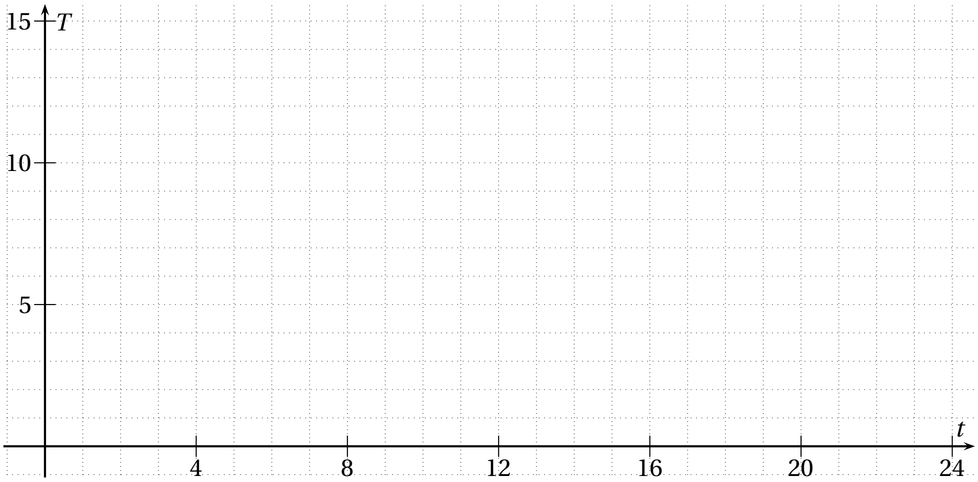
1. $x^2+3x+2<0$
2. $-x^2-2x+3\leqslant 0$
3. $\dfrac{x^2+3x+2}{-x^2-2x+3}\geqslant 0$

EXERCICE 2.3 (6 points).
*Pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité.*
Le tableau suivant indique les températures relevées toutes les 4 heures dans une ville au cours d'une journée. On

heure t	0 h	4 h	8 h	12 h	16 h	20 h	24 h
température T	6°	4°	7°	9°	14°	11°	7°

appelle f la fonction qui à l'heure t associe la température $f(t)$.

1. Représenter la courbe d'interpolation de f dans le repère ci-dessous.



2. Par lecture graphique évaluer la température à 7 h.
3. Par identification des coefficients directeurs, évaluer l'intervalle pendant lequel la température était supérieure à 11°.
4. À l'aide d'une équation de droite, évaluer la température toutes les heures entre 12 h et 16 h.

Chapitre 3

Systèmes d'équations et d'inéquations

Sommaire

3.1 Activités

ACTIVITÉ 3.1 (Équations)**.**
Dans toute l'activité le plan est muni d'un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthogonal.

1. On cherche à identifier quel est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x; y)$ tels que x et y vérifient la relation : $2x + y = 3$.
   (a) Déterminer y lorsque $x = 1$. Placer ce point dans le repère ; on le nommera A.
   (b) Déterminer y lorsque $x = 0$. Placer ce point dans le repère ; on le nommera B.
   (c) Déterminer x lorsque $y = -3$. Placer ce point dans le repère ; on le nommera C.
   (d) Déterminer x lorsque $y = -1$. Placer ce point dans le repère ; on le nommera D.
   (e) Que constate-t-on concernant A, B, C et D ?
   (f) Choisir un autre point ayant la même caractéristique que A, B, C et D et regarder si ses coordonnées vérifient la relation : $2x + y = 3$.
   (g) Choisir un autre point n'ayant pas la même caractéristique que A, B, C et D et regarder si ses coordonnées vérifient la relation : $2x + y = 3$.
2. En vous inspirant de ce qui précède, représenter l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x; y)$ tels que x et y vérifient la relation : $3x - 2y = 4$.
3. Mêmes questions avec les relations suivantes :
   - $-x + 3y = 1$;
   - $-x - 2y = 3$;
   - $2x + 0y = 5$;
   - $0x + 3y = 2$.

   Que constate-t-on dans les deux derniers cas ?

ACTIVITÉ 3.2 (Droites parallèles, droites sécantes)**.**
Droites parallèles.

1. On considère les droites $\mathscr{D}_1 : 2x + 5 = 0$ et $\mathscr{D}_2 : x = -1$.
   Expliquer pourquoi elles sont parallèles.
2. On donne $\mathscr{D}_3 : y = 3x + 4$, $\mathscr{D}_4 : 3x - y = 9$ et $\mathscr{D}_5 : 3x + y = 0$.
   (a) Trouver l'équation réduite de chacune des droites $\mathscr{D}_4$ et $\mathscr{D}_5$.
   (b) Reconnaître parmi ces trois droites celles qui sont parallèles.
3. On donne la droite $\mathscr{D} : 5x + 2y = 10$.
   (a) Trouver les points d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ avec les axes du repère puis la tracer.
   (b) Trouver l'équation réduite de la droite $\mathscr{D}$ et en déduire son coefficient directeur.
   (c) Tracer la droite $\mathscr{D}'$ parallèle à $\mathscr{D}$ et passant par le point $K(1; -1)$; trouver l'équation réduite de $\mathscr{D}'$.
   (d) Montrer que l'équation de $\mathscr{D}'$ peut s'écrire $5x + 2y = 3$.

(e) Montrer que la droite $\mathscr{D}''$ d'équation $5x+2y=c$, où c désigne un nombre réel, est parallèle à la droite $\mathscr{D}$.

(f) En déduire que la droite Δ d'équation $10x+4y=c'$, où c' désigne un nombre réel, est elle aussi parallèle à la droite $\mathscr{D}$.

Droites sécantes.
On considère les droites $\mathscr{D}_1 : 2x+y=5$ et $\mathscr{D}_2 : 3x-5y=3$.

1. Trouver les équations réduites des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ et montrer qu'elles sont sécantes.
2. Tracer ces deux droites et lire graphiquement les coordonnées de leur point d'intersection I.
3. Expliquer pourquoi les coordonnées $(x\,;\,y)$ de I vérifient le système :

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x-5y=3 \end{cases}$$

4. Résoudre ce système.

Activité 3.3 (Régionnement du plan)**.** 1. (a) Dans un repère orthogonal tracer la droite $\mathscr{D}$ d'équation $2x-3y=6$.

(b) Choisir quatre points à coordonnées entières situés du même côté de $\mathscr{D}$ et calculer $2x-3y$ pour chacun d'entre eux.

(c) faire de même avec quatre autres points à coordonnées entières situés de l'autre côté de $\mathscr{D}$.

(d) Que constate-t-on ?

(e) Identifier la région du plan dont les points ont leurs coordonnées vérifiant $2x-3y \geq 6$ (on hachurera le reste).

2. En vous inspirant de ce qui précède, faire de même pour la région caractérisée par l'inéquation $-3x-4y \geq -12$ (on hachurera le reste).
3. Même question pour les inéquations $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
4. Quel système d'inéquations vérifie la région non hachurée ?

Activité 3.4 (Programmation linéaire)**.**
On considère le problème suivant :

Une coopérative vinicole dispose de 600 bouteilles de vin rouge et 600 bouteille de vin blanc. Il est décidé de proposer à la vente deux assortiments : • L'assortiment appelé A, comprenant deux bouteilles de vin rouge et trois bouteilles de vin blanc, est vendu 12 euros ; • L'assortiment appelé B, comprenant cinq bouteilles de vin rouge et trois bouteilles de vin blanc, est vendu 20 euros. Combien doit-on vendre d'assortiments de chaque sorte pour espérer un chiffre d'affaires maximal ?

1. Dans la résolution proposée ci-dessous, justifier :
   (a) la mise en équation ;
   (b) la construction du polygone ;
   (c) la conclusion.
2. Expliciter les solutions.

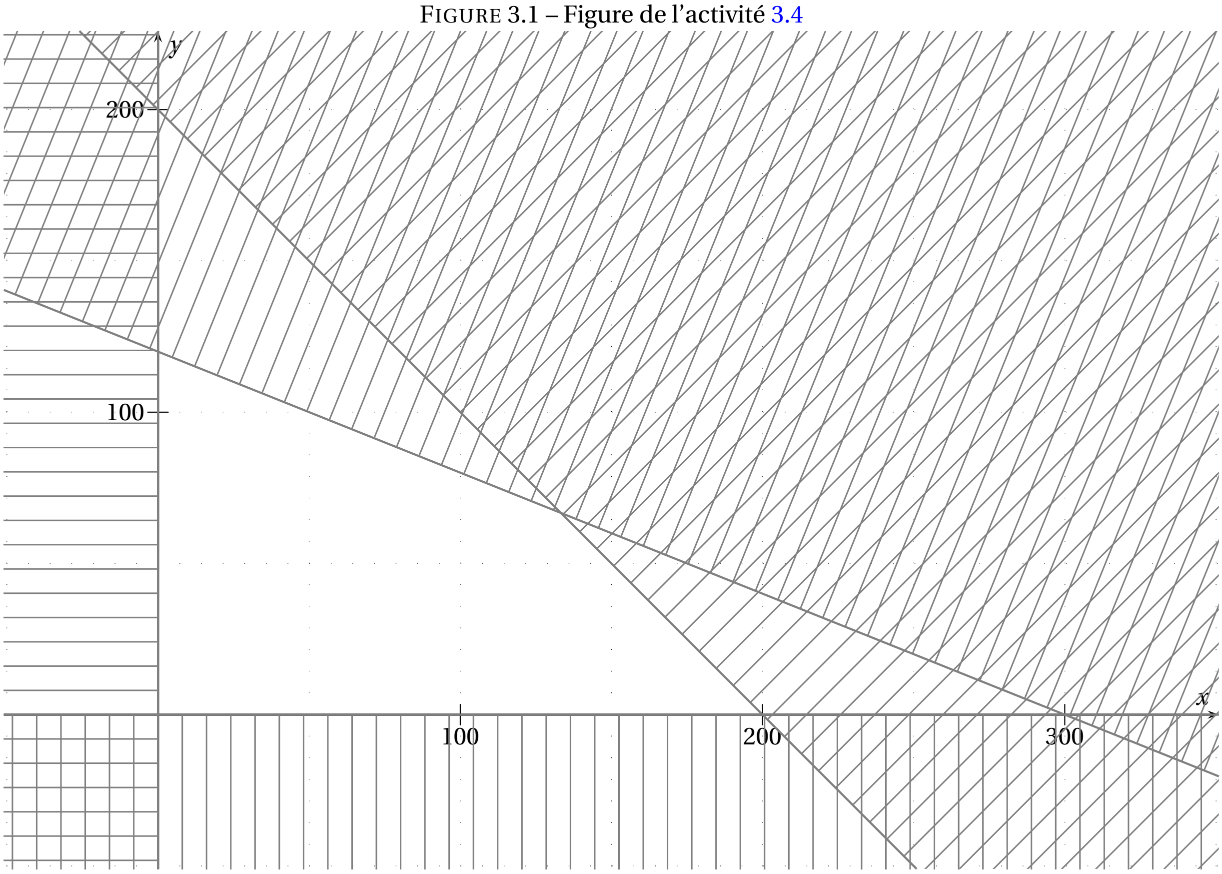
Résolution
On appelle x et y les nombres respectifs d'assortiments A et B.
x et y sont des nombres entiers vérifiant le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ 2x+5y \leqslant 600 \\ 3x+3y \leqslant 600 \end{cases}$$

On recherche alors les valeurs entières de x et y vérifiant le système précédent et telles que $12x+20y$ soit maximal.

On résout le problème graphiquement : dans le plan muni d'un repère, on représente les points M du plan dont les coordonnées vérifient le système d'inéquation ; ce sont les points situés à l'intérieur (zone non hachurée) du polygone dessiné sur la figure 3.1 page suivante.
On considère la droite D d'équation $12x+20y=0$. On recherche parmi toutes les parallèles à D, la droite D' qui coupe le polygone en au moins un point de coordonnées entières et dont l'ordonnée à l'origine est maximale. Ses coordonnées entières fournissent la solution du problème.

FIGURE 3.1 – Figure de l'activité 3.4



3.2 Bilan et compléments

Propriété 3.1 (rappel)**.** *Dans un repère, toute droite a une équation de la forme :*
- $y = mx + p$*, si la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées ;*
- $x = k$*, si la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.*

L'équation $y = mx + p$ (quand elle existe) est appelée *équation réduite* de la droite, m est appelé *coefficient directeur* de la droite et p *ordonnée à l'origine*

Propriété 3.2 (rappel)**.** *Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont parallèles entre elles si et seulement si elles ont même coefficient directeur.*

Propriété 3.3. *Dans un repère :*
- *Soit* $\mathscr{D}$ *une droite du plan. Tous les points de cette droite ont des coordonnées qui vérifient une même équation de la forme* $ax + by = c$ *avec* $(a ; b) \neq (0 ; 0)$.
- *L'ensemble des points* $M(x ; y)$ *du plan qui vérifient* $ax + by = c$ *avec* $(a ; b) \neq (0;0)$ *est une droite* $\mathscr{D}$.

On dira que la droite $\mathscr{D}$ *admet comme équation* $ax + by = c$.

Remarque. Si l'équation réduite est unique, ce n'est pas le cas d'une équation de la forme $ax + by = c$.
En effet, il suffit de multiplier cette équation par un réel quelconque (différent de 0) pour en obtenir une autre.

Preuve de la propriété.
- Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan et $M(x ; y)$ un point de $\mathscr{D}$.
  $\mathscr{D}$ a pour équation réduite $y = mx + p$ ou $x = k$.
  Dans le premier cas, tous les points $M(x ; y)$ vérifient $y = mx + p \Leftrightarrow mx - y + p = 0$ qui est de la forme $ax + by = c$ avec $(a ; b) = (m ; -1) \neq (0 ; 0)$.
  Dans le second cas, tous les points $M(x ; y)$ vérifient $x = c \Leftrightarrow x - c = 0$ qui est de la forme $ax + by = c$ avec $(a ; b) = (1 ; 0) \neq (0 ; 0)$.
- Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des points $M(x ; y)$ vérifiant $ax + by = c$ avec $(a ; b) \neq (0;0)$.
  Si $a = 0$, $b \neq 0$ et donc $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow by = -c \Leftrightarrow y = -\frac{c}{b}$ (droite parallèle à l'axe des abscisses) qui est de la forme $y = mx + p$.

Si $b = 0$, $a \neq 0$ et donc $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow ax = -c \Leftrightarrow x = -\frac{c}{a}$ (droite parallèle à l'axe des ordonnées) qui est de la forme $x = c$.
Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow by = -ax - c \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ qui est de la forme $y = mx + p$.
Dans tous les cas, c'est bien une droite.

◇

Propriété 3.4. *Deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $ab' - a'b = 0$*

Preuve.
- Supposons que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles.
  - Si elles sont parallèles à l'axe des ordonnées, on a alors $b = b' = 0$ et donc $ab' - a'b = 0$
  - Dans tous les autres cas, elles admettent comme équations réduites, respectivement, $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ et $y = -\frac{a'}{b'}x - \frac{c'}{b'}$.
    Étant parallèles, $-\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'} \Leftrightarrow -ab' = -a'b \Leftrightarrow ab' - a'b = 0$.
- Supposons que $ab' - a'b = 0$.
  - Si $b = 0$, $a \neq 0$ et donc $b' = 0$. De même, si $b' = 0$, $b = 0$. Les deux droites sont alors parallèles à l'axe des ordonnées.
  - Dans tous les autres cas, $ab' - a'b = 0 \Leftrightarrow -\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$, donc elles ont même coefficient directeur. ◇

Des deux propriétés précédentes, on obtient la propriété suivante :

Propriété 3.5. *Soit $\mathscr{S}$ le système d'équation*

$$\mathscr{S}\left\{\begin{array}{l} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right.$$

- *$\mathscr{S}$ a une unique solution $(x; y)$ si et seulement si $ab' - a'b \neq 0$;*
- *sinon $\mathscr{S}$ a soit une infinité de solution, soit aucune solution.*

Preuve. Les droites d'équation $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ sont sécantes si et seulement si $ab' - a'b \neq 0$, sinon elles sont parallèles.
Dans ce cas elles peuvent être confondues (une infinité de points d'intersection) ou distinctes (aucun point d'intersection). ◇

Propriété 3.6 (admise)**.** *Une droite $\mathscr{C}$ d'équation $ax + by = c$ partage le plan en trois parties :*
- *la droite $\mathscr{C}$ dont les points $M(x; y)$ vérifient $ax + by = c$;*
- *un demi-plan dont les points $M(x; y)$ vérifient $ax + by > c$;*
- *un demi-plan dont les points $M(x; y)$ vérifient $ax + by < c$.*

Remarque. Le demi-plan dont les points $M(x; y)$ vérifient $ax + by > c$ n'est pas forcément situé au-desus de la droite ; cela dépend des signes coefficients.
Pour savoir lequel des deux demi-plans est celui dont les points $M(x; y)$ vérifient $ax + by > c$, il suffit de faire un essai avec un point extérieur à la droite : si l'inéquation est vérifiée, tous les points situés du même côté de la droite forment ce demi-plan, sinon c'est l'autre.

Un système d'inéquations linéaires se résout graphiquement. Pour des raisons de lisibilité, on hachure en général les demi-plans ne convenant pas, la partie du plan non-hachurée étant l'ensemble des solutions.

3.3 Exercices

EXERCICE 3.1 (Prévoir sans calcul)**.**
Pour chacun des systèmes suivants déterminer, sans le résoudre, s'il admet une solution unique. Dans les cas où le système n'admet pas de solution unique, préciser ce que l'on peut dire de l'ensemble solution.

1. $\left\{\begin{array}{l} 4x - 6y = -26 \\ 5x + 2y = -4 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{l} -2y + 6x = 5 \\ -9x + 3y = -7,5 \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{l} 3x = 6y + 7 \\ 8,5 - 2,5x + 5y = 6 \end{array}\right.$
4. $\left\{\begin{array}{l} -3x + 4y = 9 - 5x \\ -x + 5y = 25 \end{array}\right.$
5. $\left\{\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 1 \\ 3x + 7y = 5 \end{array}\right.$

EXERCICE 3.2 (Quelle méthode choisir ?)**.**
Pour résoudre les systèmes, on dispose depuis la classe de troisième de deux méthodes principales et d'une troisième qui combine les deux précédentes.

1. Décrire ces trois méthodes.
2. Pour chacun des systèmes suivants, choisir la méthode de résolution la plus appropriée :

(a) $\begin{cases} 2x+7y=1 \\ 2x-7y=-3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x-y=7,5 \\ 3x+y=9 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x-2=1+2y-5 \\ 3x=1-(y-1) \end{cases}$

(d) $\begin{cases} -8(x-1)-7y-18=0 \\ 5y+8x=16 \end{cases}$

EXERCICE 3.3 (Organiser la résolution d'un système de trois équations à trois inconnues)**.**
On s'intéresse à des systèmes de trois équations à trois inconnues.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système :
   $(S) : \begin{cases} x+y+5z=0 \\ 3x-y-z=-4 \\ 5x-2y-z=-7 \end{cases}$ Expliciter la méthode employée.
2. Voici la méthode exposée par GAUSS pour résoudre le système (S) (on appelle E_1 la première équation, E_2 la deuxième, E_3 la troisième) :
   $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+5z=0 & (E_1) \\ -4y-16z=-4 & (E_2-3E_1)=(E_2') \\ -7y-26z=-7 & (E_3-5E_1)=(E_3') \end{cases}$
   $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+5z=0 & (E_1) \\ y+4z=1 & \left(E_2' \times \left(-\frac{1}{4}\right)\right)=(E_2'') \\ -7y-26z=-7 & (E_3') \end{cases}$
   $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+5z=0 & (E_1) \\ y+4z=1 & (E_2'') \\ 2z=0 & (E_3'+7E_2'') \end{cases}$
   (a) En quoi le dernier système obtenu est-il intéressant pour la résolution de (S) ?
   (b) Décrire la méthode permettant d'obtenir ce système.
   (c) Donner l'ensemble solution de (S).
3. Résoudre à l'aide de la méthode précédente le système :
   $\begin{cases} x+1,5y=5,5-z \\ 7x=2y-z+26 \\ 25x-3y+6z-97=0 \end{cases}$

EXERCICE 3.4 (Système 2×2 : équilibre sur le marché pour un bien)**.**
Une entreprise possède le monopole de la vente d'un certain type de café. Ce café est vendu sous forme de paquets d'un kg.
Une étude de marché a fourni les résultats suivants.

- **Offre :** Compte tenu des coûts de production, l'entreprise a fixé le prix minimal de vente à 2 €.
  Pour un prix de vente de 6 €, la production idéale pour l'entreprise est de 250 000 paquets.
- **Demande :** Compte tenu du marché, on estime que pour un prix de vente de 5,5 €, la demande serait de 50 000 paquets et pour un prix de vente de 3 €, elle serait de 175 000 paquets.

1. **Fonction d'offre**
   On considère le marché du point de vue de l'entreprise qui se préoccupe avant tout de sa rentabilité.
   On note p_o le prix de vente (en €) et Q_o le nombre optimal de paquets produits par l'entreprise (en milliers d'unités) pour ce prix de vente p_o.
   (a) Vérifier que la fonction $f : Q_o \longmapsto p_o = 0,016Q_o + 2$ vérifie les conditions de l'offre.
   (b) Dans un repère, représenter graphiquement la fonction f (on placera les quantités en abscisses et les prix en ordonnées).
2. **Fonction de demande**
   On se place ici du point de vue du consommateur qui a tendance à réduire sa consommation quand les prix de vente augmentent.
   On note p_d le prix payé (en €) et Q_d (en milliers d'unités) le nombre de paquets que les consommateurs sont prêts à acheter au prix p_d.
   La fonction de demande notée g associe à Q_d le prix p_d.
   On suppose que g est une fonction affine, $g : Q_d \longmapsto p_d = aQ_d + b$.
   (a) En utilisant les conditions sur la demande, établir un système de deux équations dont $(a\,;b)$ est solution.
   (b) Résoudre ce système et en déduire l'expresion de g.
   (c) Sur le graphique précédent, représenter la fonction g.
   (d) Quel est le prix maximal qu'accepterait de payer le consommateur ?
   (e) Quelle est la quantité maximale que les consommateurs sont disposés à acheter ?

3. **Équilibre sur le marché**
   L'idéal sur le marché serait que l'offre coïncide avec la demande. Ce point d'équilibre est atteint quand $p_o = p_d$ et $Q_o = Q_d$.
   (a) Graphiquement où se situe ce point d'équilibre ?
   (b) Déterminer algébriquement le prix de vente du paquet et la quantité produite à l'équilibre du marché.

EXERCICE 3.5 (Systèmes 3×3 : modèle ouvert de LEONTIEFF [1]).
Voici un modèle (simple) de complexe industriel :

- Le complexe est constitué d'une centrale électrique au fioul, d'une raffinerie de pétrole et d'un chemin de fer.
- Pour produire l'équivalent de 1 € de fioul, la raffinerie utilise 0,20 € d'électricité et 0,10 € de transport ferroviaire.
- Pour produire l'équivalent de 1 € d'électricité, la centrale électrique utilise 0,55 € de fioul, 0,10 € d'électricité et 0,05 € de transport ferroviaire.
- Pour produire l'équivalent de 1 € de transport, le chemin de fer utilise 0,60 € d'électricité et 0,20 € de fioul.

Ce complexe industriel doit livrer, à l'intérieur du complexe, le fioul, l'électricité et le transport nécessaires à son fonctionne et, à l'extérieur, du fioul pour un montant de 92 000 € et de l'électricité pour un montant de 38 000 €. On se propose de déterminer les productions (en euros) x de la raffinerie, y de la centrale électrique et z du chemin de fer pour que ce complexe industriel puisse effectuer sa livraison.

1. Montrer que le problème peut se traduire par le sytème suivant (on justifera chaque ligne) :

$$\begin{cases} x - 0,55y - 0,2z = 92\,000 \\ 0,9y - 0,2x - 0,6z = 38\,000 \\ z - 0,1x - 0,05y = 0 \end{cases}$$

2. Résoudre ce système.
3. Conclure.

EXERCICE 3.6 (Programmation linéaire : traitement de déchets industriels).
Une entreprise de déchets industriels a le choix entre deux procédés qui ne peuvent être utilisés en même temps.

- **Procédé A :** Il permet de traiter 3 tonnes de déchets par heure et produit des résidus gazeux. Pour chaque tonne traitée, on rejette 8 L de gaz polluant.
- **Procédé B :** Il permet de traiter 1 tonne de déchets par heure et produit des résidus liquides. Pour chaque tonne traitée, on rejette 1 L de liquide polluant.

L'entreprise doit traiter au moins 2 600 tonnes de déchets en moins de 2 400 heures, tout en respectant les autorisations de rejet. Elle a obtenu une autorisation de rejet gazeux de 10 000 L et de rejet liquide de 4 000 L.
On note x le nombre de tonnes traitées avec le procédé A et y le nombre de tonnes traitées avec le procédé B.

1. Quelles sont les durées nécessaires pour traiter x tonnes avec le procédé A et y tonnes avec le procédé B ?
2. Justifier que les contraintes ci-dessus se traduisent par le système (S) :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1250 \\ 0 \leqslant y \leqslant 4\,000 \\ \frac{x}{3} + y \leqslant 2400 \\ x + y \geqslant 2600 \end{cases}$$

3. Résoudre graphiquement le système (S) dans un repère orthogonal (unités : 1 cm représente 100 tonnes en abscisses et 1 cm représente 400 tonnes en ordonnées).
4. (a) Le procédé A coûte 50 € la tonne, et le procédé B coûte 100 € la tonne.
   Quel est le coût C associé au traitement de x tonnes avec le procédé A et y tonnes avec le procédé B ?
   (b) Justifier que pour un coût C, le point $M(x\,;\,y)$ appartient à une droite Δ_C dont on donnera l'équation réduite.
   (c) Tracer $\Delta_{260\,000}$ et $\Delta_{150\,000}$. Justifier que toutes les droites Δ_C sont parallèles.
5. (a) Par translation d'une des droites tracées, déterminer en quel point du domaine des contraintes, le coût est minimum. Préciser ce coût.
   (b) Pour ce coût minimum, déterminer alors la quantité de matière traitée avec chaque procédé, la durée de traitement et les volumes de rejets polluants sous forme liquide et gazeuse.
6. Quelles seraient les conséquences économiques d'une réduction de 50% des autorisations de rejet ?
   Quelle(s) stratégie(s) l'entreprise a-t-elle alors intérêt à adopter à long terme ?

1. VASSILI LEONTIEFF, Prix Nobel d'économie en 1973, a réalisé des recherches sur l'analyse interindustrielle, qui est utilisée pour la planification, l'étude de la croissance.

EXERCICE 3.7.
Au moment des fêtes, un artisan chocolatier propose des assortissements de chocolats par ballotins de 500 g :
- *Succès* : 60 % de chocolats au lait, 20 % de chocolats noir et le reste en chocolats divers ;
- *Passion* : 80 % de chocolats noirs et le reste en chocolats divers ;
- *Évasion* : la moitié de chocolats divers, 40 % de chocolats noirs et 10 % de chocolats au lait.

1. Pour sa soirée de fin d'année 1 999, Madame Bomonde a commandé des chocolats.
   Elle a pu mettre sur son buffet 2 kg de chocolats noir, 1,5 kg de chocolats au lait et 2 kg de chocolats divers.
   Calculer le nombre de ballotins de chaque sorte qu'elle a acheté fin 1999.
2. Pour la fin 2 000, le chocolatier a proposé les mêmes assortissements.
   Madame Bomonde passe commande de x ballotins *Succès* et y ballotins *Passion*.
   Elle désire proposer à ses invités au moins 1,8 kg de chocolats noirs, 1,2 kg de chocolats au lait et 900 g de choco divers
   (a) Justifier que les contraintes se traduisent par le système suivant où x et y sont des entiers :
   $$\begin{cases} x+4y \geqslant 18 \\ 3x \geqslant 12 \\ x+y \geqslant 9 \end{cases}$$
   (b) Dans un repère orthonormal, représenter l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan dont les coordonnées vérifient le système ci-dessus.
   (c) Le prix d'un ballotin *Succès* est de 15 € et celui d'un ballotin *Passion* de 30 €.
   Exprimer le coût total de cet achat pour Madame Bomonde en fonction de x et y.
   Tracer la droite correspondent à un coüt de 210 €.
   Existe-t-il des points solutions du système situés en dessous de cette droite ?
   Déterminer graphiquement le nombre de ballotins de chaque sorte acheté qui permet à Madame Bomonde un coût total minimum. Expliquer la méthode employée.
   En déduire le coût total de son achat pour la fin 2 000.

Devoir surveillé n°3

Systèmes d'équations et d'inéquations

EXERCICE 3.1 (2 points)**.**
Pour chacun des trois systèmes suivants :

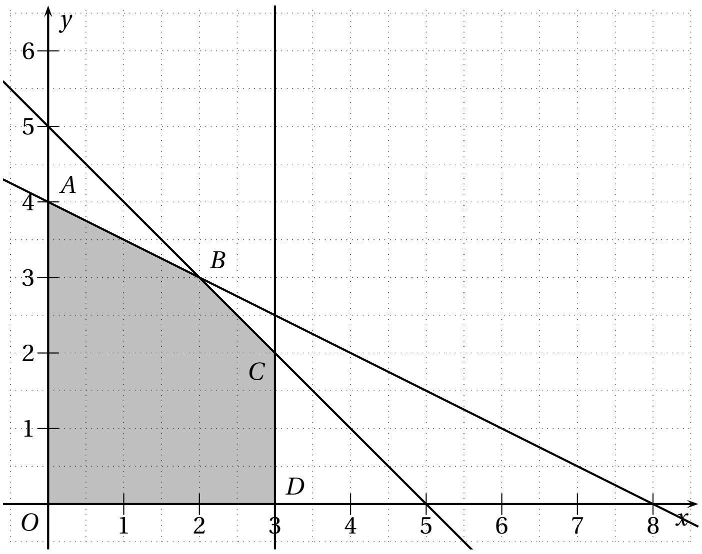
1. déterminer s'il a ou non une unique solution ;
2. s'il a une unique solution, le résoudre.

- $\mathscr{S}_1 : \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 4y - 2x = 1 \end{cases}$
- $\mathscr{S}_2 : \begin{cases} x + 3y = -5 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases}$
- $\mathscr{S}_3 : \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x + 4,5y = 6 \end{cases}$

EXERCICE 3.2 (Caractériser une région du plan – 5 points)**.**
Le plan est muni d'un repère orthonormal.
On considère le polygone OABCD représenté sur la figure 3.1 de la présente page, et on appelle $\mathscr{P}$ la partie grisée, bords compris.

1. On admettra que la droite (BC) a pour équation : $y = x + 5$.
   Déterminer, en justifiant, une inéquation du demi-plan $\mathscr{P}_1$ de frontière (BC) correspondant à l'intérieur du polygone $OABCD$.
2. (a) Déterminer, par le calcul, l'équation réduite de la droite (AB).
   (b) Déterminer, en justifiant, une inéquation du demi-plan $\mathscr{P}_2$ de frontière (AB) correspondant à l'intérieur du polygone $OABCD$.
3. En déduire un système d'inéquations $\mathscr{S}$ caractérisant l'intérieur $\mathscr{P}$ du polygone $OABCD$ (frontières comprises).
4. Déterminer graphiquement en expliquant votre démarche :
   (a) Peut-on respecter les contraintes et avoir $x = 3$ et $y = 3$?
   (b) Peut-on respecter les contraintes et avoir $x = 2$ et $y = 3$?
   (c) Si l'on choisit $x = 2$, quelles sont toutes les valeurs entières de y que l'on peut prendre tout en respectant les contraintes ?
   (d) Si l'on choisit $y = 1$, quelle est la valeur entière maximale de x que l'on peut prendre tout en respectant les contraintes ?

FIGURE 3.1 – Figure de l'exercice 3.2



EXERCICE 3.3 (4,5 points)**.**
*Pour les élèves **ne suivant pas** l'enseignement de spécialité.*
Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\mathscr{S} : \begin{cases} 2x - 3y + z = -3 \\ x + 2y - z = 5 \\ 4x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

EXERCICE 3.3 (4,5 points)**.**
*Pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité.*
On justifiera toutes ses réponses.
L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
On donne les points $A\,(2\,;0\,;0)$, $B\,(1\,;3\,;4)$, $C\,(4\,;2\,;0)$, $D\,(3\,;3\,;3)$ et $E\,(4\,;2\,;4)$.

1. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?
2. La droite (DE) est-elle perpendiculaire au plan (ABC) ?
3. Quelle est la nature du triangle ABC ?

EXERCICE 3.4 (Résolutions de sytèmes – 4 points)**.**
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
On donne deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'équations respectives : $x+2y=30$ et $2x+y=30$.

1. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection I de ces deux droites.
2. Représenter graphiquement dans le repère de la figure 3.2 page suivante l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient le système :
$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x+2y \geqslant 30 \\ 2x+y \geqslant 30 \end{cases}$$
On hachurera la partie du plan qui ne convient pas.

EXERCICE 3.5 (Optimisation à deux variables – 4,5 points)**.**
Un artisan ferronnier doit fabriquer des tables et fauteuils métalliques pour un grand magasin.
Chaque table nécessite 10 kg de fer, 2 litres de peintures anti-corrosion et demande 3 heures de travail.
Chaque fauteuil nécessite 5 kg de fer, 4 litres de peintures anti-corrosion et demande 4 heures de travail.
Pour cet ouvrage, l'artisan reçoit 100 kg de fer et 36 litres de peintures anti-corrosion. Les délais imposés font qu'il ne dispose que de 40 heures de travail.
On note x le nombre de tables et y le nombre de fauteuils que l'artisan va réaliser.

1. Montrer que les contraintes de cette situation peuvent être traduites par le système d'inéquations :
$$\mathscr{S}\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ 2x+y \leqslant 20 \\ x+2y \leqslant 18 \\ 3x+4y \leqslant 40 \end{cases}$$
où x et y sont des entiers naturels. La figure 3.3 page 32 représente l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient le système $\mathscr{S}$ (polygone grisé).
2. L'artisan recevra 60 € pour chaque table produite et 40 € pour chaque fauteuil produit.
Soit S le salaire que l'artisan recevra pour la confection de x tables et de y fauteuils.
   (a) Exprimer S en fonction de x et y.
   (b) Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$ correspondant à un salaire de 440 € et compléter le graphique de la figure 3.3 page 32 en traçant la droite $\mathscr{D}$.
   (c) En justifiant la démarche, déterminer le couple d'entiers x et y qui permettent à l'artisan d'obtenir le salaire le plus élevé.
   Préciser le montant de ce salaire maximum.
   À combien alors s'élève son salaire horaire ?

FIGURE 3.2 – Figure de l'exercice 3.4

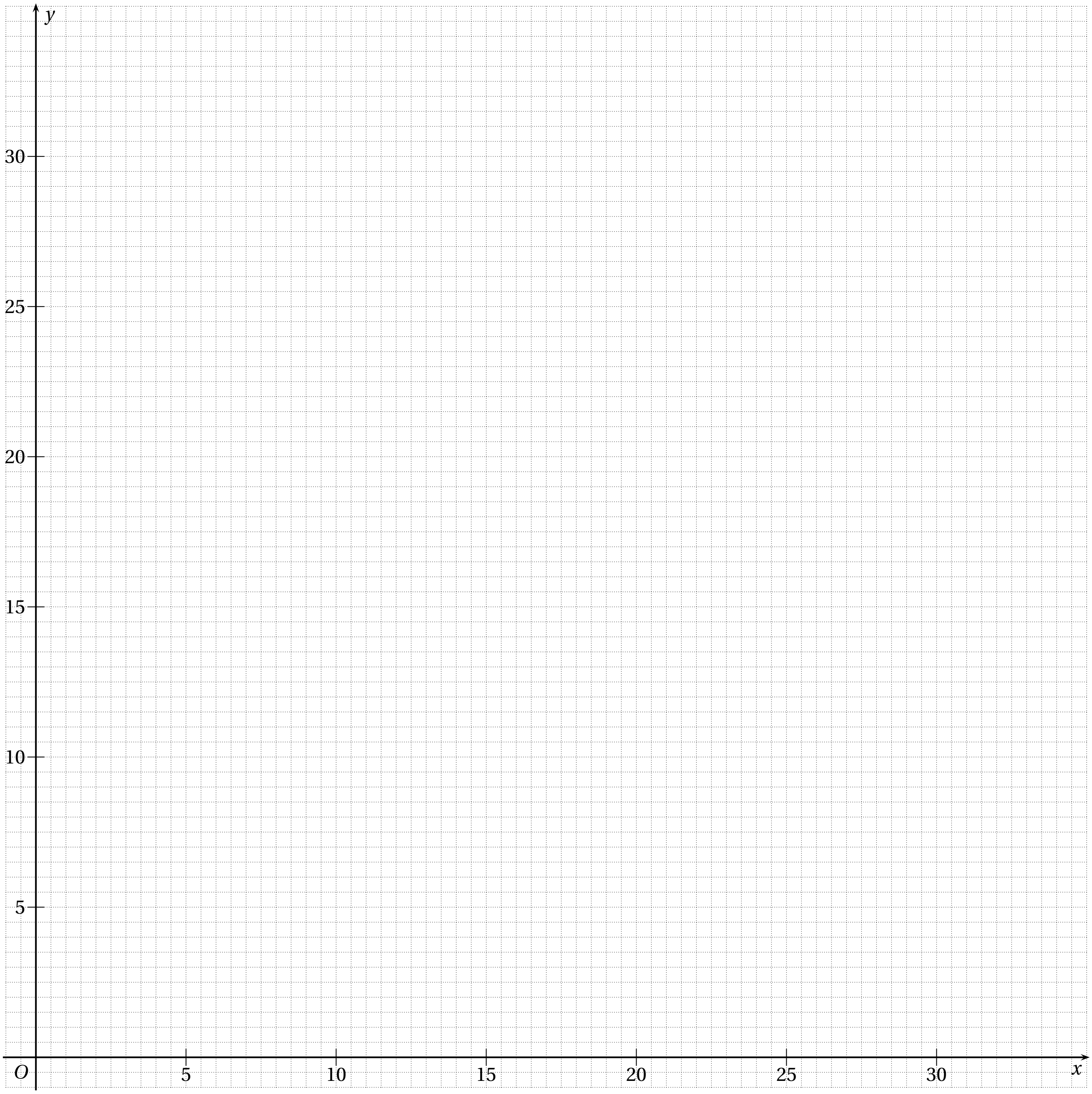
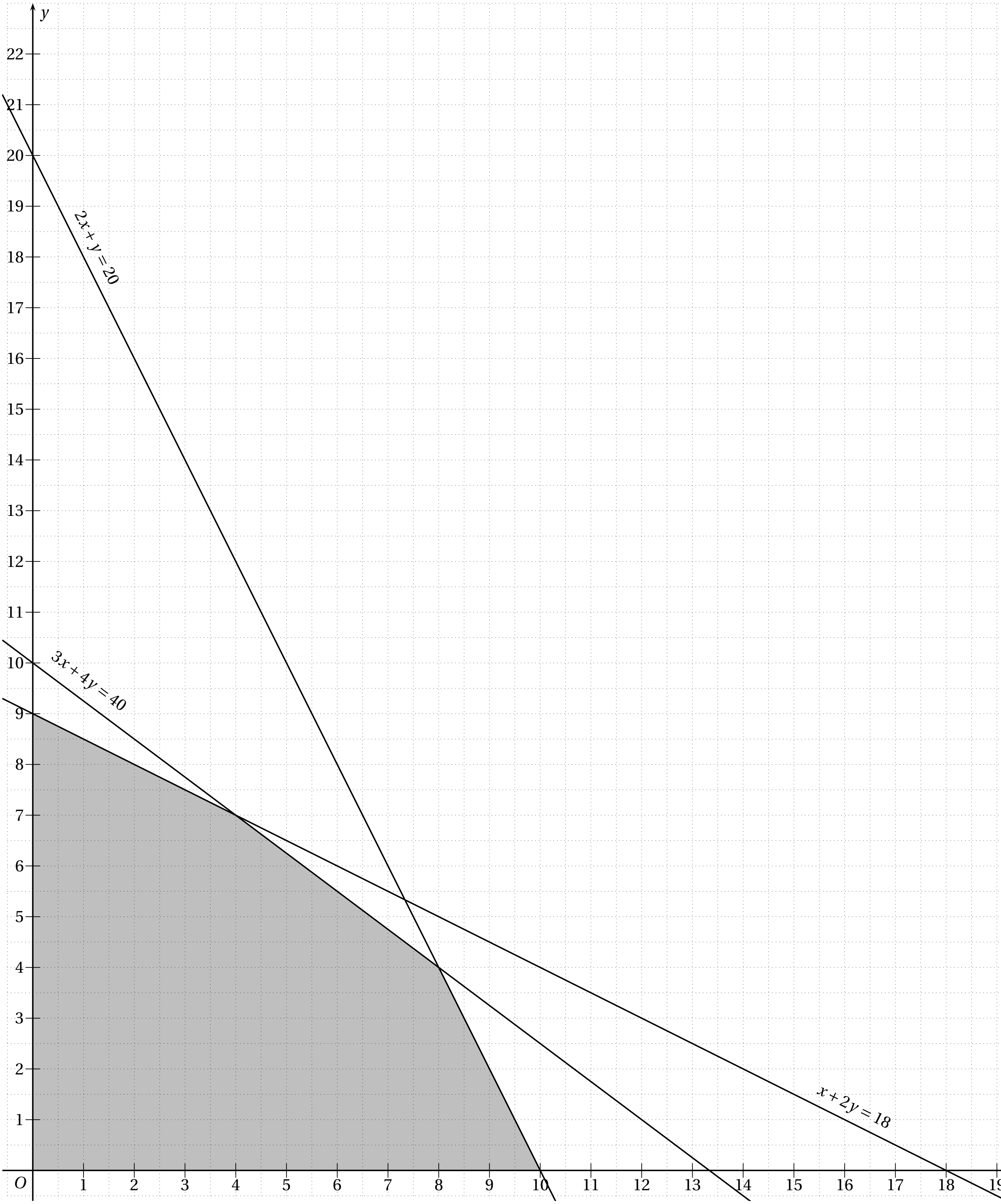


FIGURE 3.3 – Figure de l'exercice 3.5



Devoir surveillé n°3

Systèmes d'équations et d'inéquations

EXERCICE 3.1 (6 points)**.**
Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\mathscr{S} : \begin{cases} 2x + y + 4z = 9 \\ x + 3y - 2z = -5 \\ 3x + 2y - z = -7 \end{cases}$$

EXERCICE 3.2 (14 points)**.**
Partie A
Dans le repère de la figure 3.1 page suivante (à rendre avec la copie), on a construit les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'équations respectives :

$$\mathscr{D}_1 : 2x + y = 24$$
$$\mathscr{D}_2 : 2x + 3y = 36$$

1. Calculer les coordonnées du point I, intersection des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.
2. Sur la feuille annexe, mettre en évidence l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan dont les coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ 0 \leqslant y \leqslant 9 \\ 2x + y \leqslant 24 \\ 2x + 3y \leqslant 36 \end{cases}$$

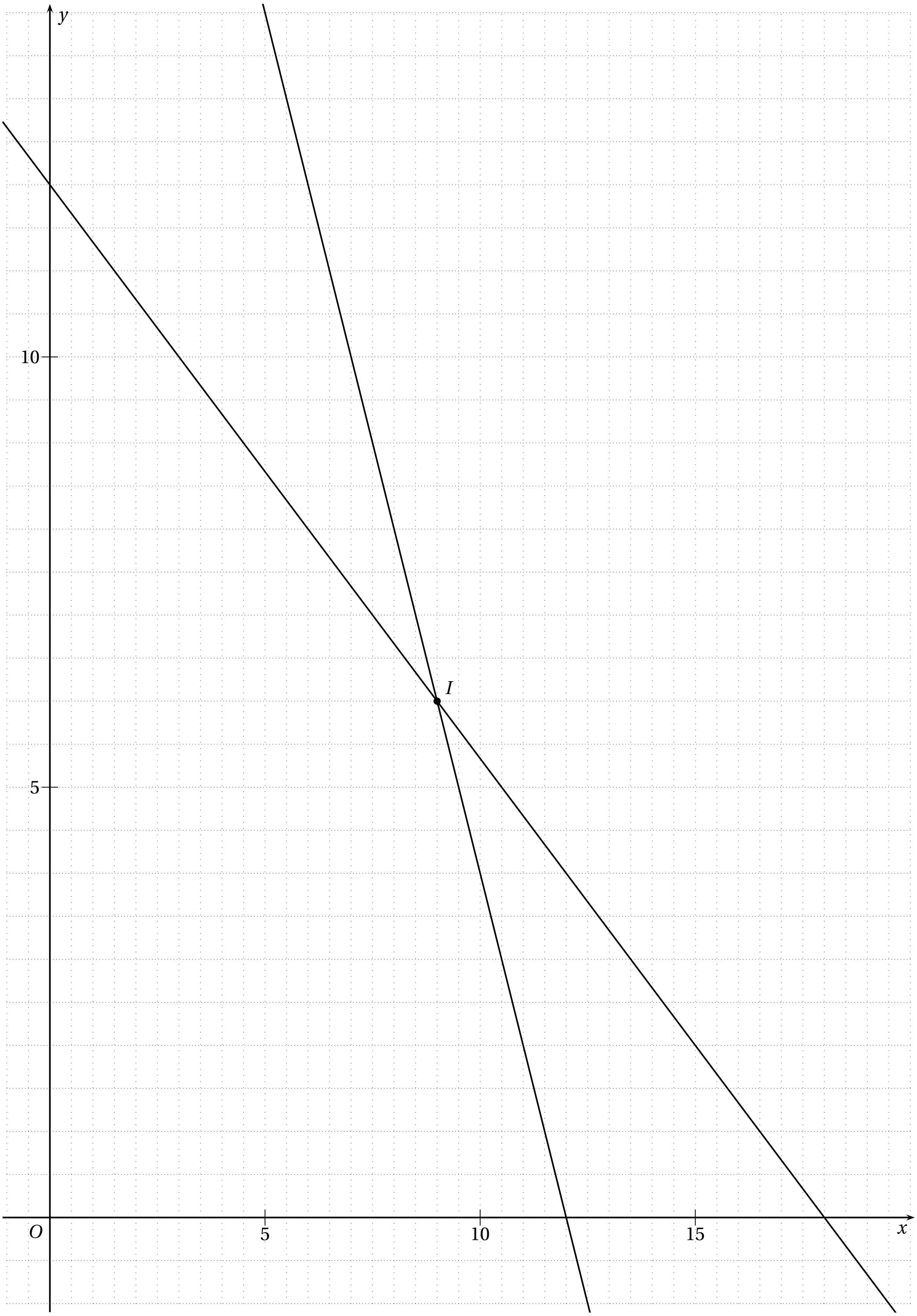
Partie B
Un artisan fabrique des portes de placard. Les unes sont en hêtre, les autres sont en chêne.

- En raison de contraintes liées à l'approvisionnement, cet artisan ne peut produire plus de 9 portes en chêne par semaine.
- La fabrication d'une porte en hêtre dure 4 heures et nécessite $2\,\text{m}^2$ de bois. Celle d'une porte en chêne dure 2 heures et nécessite $3\,\text{m}^2$ de bois.
- L'artisan ne travaille pas plus de 48 heures par semaine et il ne peut pas entreposer plus de $36\,\text{m}^2$ de bois dans son atelier.

Soit x le nombre de portes en hêtre fabriquées et y le nombre de portes en chêne fabriquées par semaine (x et y sont des nombres entiers).

1. Déterminer, en justifiant les réponses, le système d'inéquations traduisant les contraintes de la production hebdomadaire de l'artisan.
2. Utiliser le graphique réalisé dans la partie A pour répondre aux questions suivantes :
   (a) Si l'artisan produit 5 portes en hêtre, combien de portes en chêne au maximum peut-il fabriquer ?
   (b) Si l'artisan produit 3 portes en chêne, combien de portes en hêtre au maximum peut-il fabriquer ?
3. L'artisan fait un bénéfice de 30 € sur une porte en hêtre et un bénéfice de 20 € sur une porte en chêne.
   (a) On note B le bénéfice total réalisé sur la vente de x portes en hêtre et de y portes en chêne. Exprimer B en fonction de x et de y.
   (b) Représenter graphiquement sur la feuille annexe, la droite Δ correspondant à un bénéfice de 180 €.
   (c) Déterminer graphiquement le nombre de portes de chaque sorte à fabriquer par semaine, pour que le bénéfice soit maximal. Expliquer la méthode suivie.
   (d) Quel est, alors, ce bénéfice en euros ?

FIGURE 3.1 – Figure de l'exercice 3.2



Devoir surveillé n°4

Second degré – Systèmes – Matrices

EXERCICE 4.1 (6 points).
*Pour **tous** les élèves.*
Le gérant d'une salle de cinéma de 300 places constate que le nombre x de spectateurs à une séance est une fonction affine du prix p du billet. Plus précisement on a : $x = 300 - 12p$.

1. Expliquer pourquoi on a obligatoirement $0 \leqslant p \leqslant 25$.
2. Sachant que les charges fixes pour chaque séance s'élèvent à 1632 €, montrer que le bénéfice $b(p)$ de chaque séance est égal à $b(p) = -12p^2 + 300p - 1632$.
3. En déduire pour quelles valeurs de p le séance est rentable.
4. Déterminer le prix du billet pour que le bénéfice soit maximum. Quel est alors le nombre de spectateurs et le bénéfice réalisé ?

EXERCICE 4.2 (6 points).
*Pour les élèves **ne suivant pas** l'enseignement de spécialité.*
Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\mathscr{S} : \begin{cases} 2x - 2y + z = -7 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ 3x + y + 2z = -1 \end{cases}$$

EXERCICE 4.2 (6 points).
*Pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité.*

1. Déterminer la matrice inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Les deux matrices suivantes sont-elles inverses l'une de l'autre ? (*Justifier*)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer A^2.
   (b) Développer le produit matriciel : $(I_2 - A) \times (I_2 + A)$ où $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (c) Calculer $I_2 - A$.
   (d) Déduire de ce qui précède l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

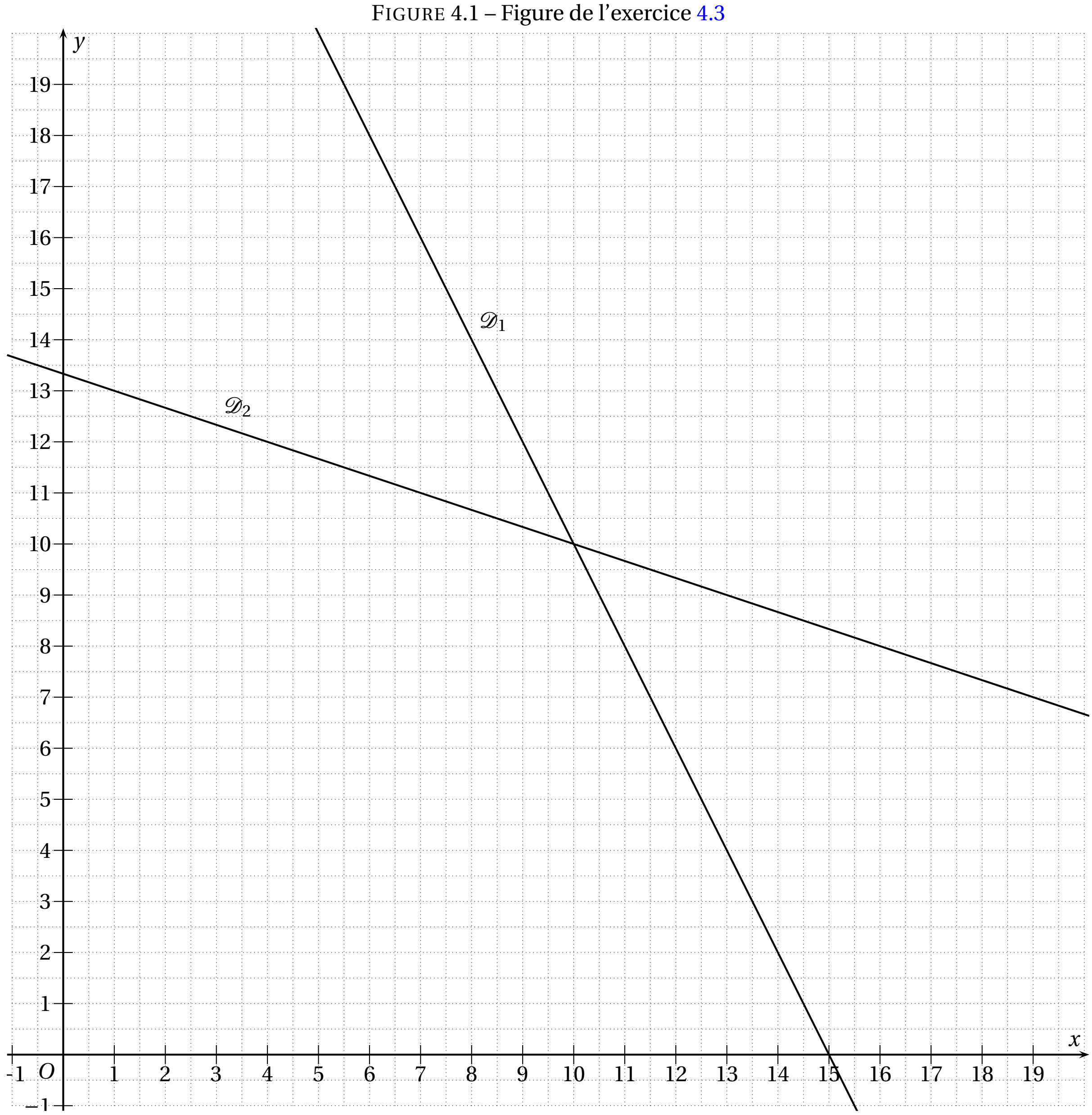
EXERCICE 4.3 (8 points).
*Pour **tous** les élèves.*
Un menuisier fabrique des tables et des buffets en bois.
Une table nécessite 3 heures de découpage et 2 heures de finition.
Un buffet nécessite 1 heure 30 minutes de découpage et 6 heures de finition.
Pour des raisons de commercialisation, ce menuisier ne peut pas produire plus de 18 meubles (tables et buffets) par mois. Les capacités de production sont de 45 heures pour le découpage et de 80 heures pour la finition.
Cet artisan réalise un bénéfice de 200 € par table et de 300 €par buffet.
On se propose de déterminer le nombre x de tables et le nombres y de buffets que ce menuisier doit fabriquer pour réaliser un bénéfice maximum.

1. Expliquer pourquoi les contraintes de production peuvent se traduire par le système :

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x + y \leqslant 18 \\ 2x + y \leqslant 30 \\ x + 3y \leqslant 40 \end{cases}$$

2. Dans le repère de la figure 4.1 de la présente page les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'équations respectives $2x + y = 30$ et $x + 3y = 40$ ont été tracées.
Compléter le tracé si nécessaire et représenter le domaine des contraintes. **On hachurera la partie du plan qui ne convient pas.**
3. (a) Exprimer le bénéfice B en fonction de x et de y.
   (b) Représenter l'ensemble des points correspondants à un bénéfice de 2 400 €.
   (c) Déterminer graphiquement le point I du domaine des contraintes en lequel le bénéfice est maximum en expliquant votre méthode.
   Vérifier ce résultat par le calcul.
   (d) En déduire le nombre de tables et de buffets à produire pour que le bénéfice soit maximum et déterminer ce bénéfice maximum.

FIGURE 4.1 – Figure de l'exercice 4.3



Chapitre 4

Généralités sur les fonctions

Sommaire

4.1 Activités

ACTIVITÉ 4.1 (Fonctions de référence (rappels))**.**
Compléter le tableau 4.1, page suivante, sur le modèle de la deuxième ligne.

ACTIVITÉ 4.2 (La fonction racine)**.**
On appelle *fonction racine* la fonction qui à un réel x associe, s'il existe, le réel positif noté $\sqrt{x}$ tel que $(\sqrt{x})^2 = x$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction racine.
2. Montrer que si $0 \leq a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Que peut-on en déduire ?
3. Tracer la courbe représentative de la fonction racine.

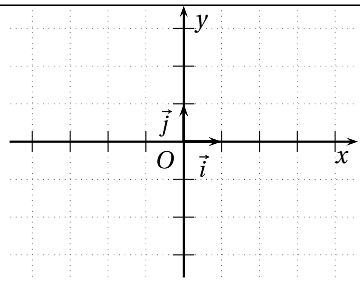
ACTIVITÉ 4.3 (Sommes de fonctions)**.**

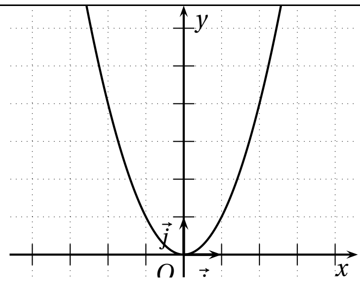
1. (a) Sur le graphique 4.1 page 39, tracer la courbe représentant la fonction f, somme des deux fonctions déjà représentées.
   (b) Donner, par lecture graphique, les variations de la fonction f.
   (c) Y a-t-il un lien entre les variations des deux fonctions représentées et celles de f ?
2. (a) À l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un grapheur tracer les courbes représentatives des fonctions f et g (définies sur $\mathbb{R}$) ci-dessous puis de la fonction h, somme de ces deux fonctions et relever par lecture graphique les sens de variation de chacune de ces fonctions :
   - $f(x) = 2x+3$ et $g(x) = x-4$;
   - $f(x) = -2x+4$ et $g(x) = x+1$;
   - $f(x) = -2x+1$ et $g(x) = 2x-4$;
   - $f(x) = -3x+2$ et $g(x) = x-4$;
   - $f(x) = -x+4$ et $g(x) = -2x+3$.

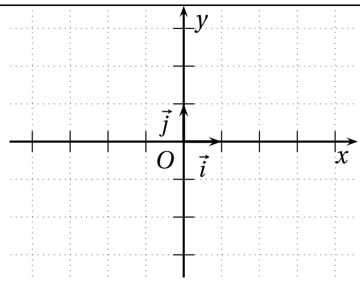
   (b) Même question avec les fonctions f et g suivantes et la fonction h, somme de ces deux fonctions :

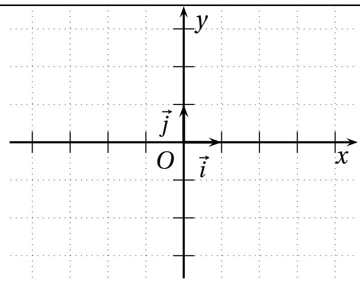
TABLE 4.1 – Fonctions de référence - Tableau de l'activité 4.1

<table>
<tr><th>Fonction
Définie sur</th><th>Variations</th><th>Allure de la courbe représentative</th></tr>
<tr><td>Affine
$f(x) =$

$D_f =$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Carré
$f(x) = x^2$

$D_f = \mathbb{R}$</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ 0 $+\infty$</td></tr><tr><td>$f(x) = x^2$</td><td>$\searrow$ 0 $\nearrow$</td></tr></table></td><td>Parabole</td></tr>
<tr><td>Cube
$f(x) =$

$D_f =$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Inverse
$f(x) =$

$D_f =$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Valeur absolue
$f(x) =$

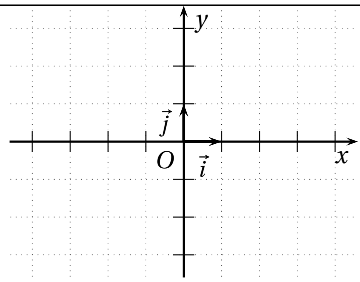
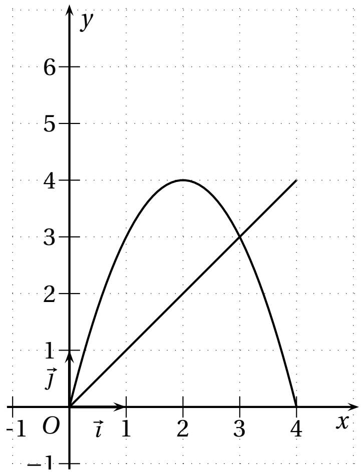
$D_f =$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

FIGURE 4.1 – Graphique de l'activité 4.3



- $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = x + 1$;
- pour $x \neq 0$, $f(x) = x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$;
- $f(x) = -x^3$ et $g(x) = -x + 2$;
- pour $x \neq -2$, $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = 2 - \dfrac{1}{x+2}$.

(c) Conjecturer le lien qu'il existe entre les variations de f et g et celles de h puis le prouver.

ACTIVITÉ 4.4 (Fonctions associées).
Soit f, g, h, k, l les fonctions définies par :

- $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$
- $g(x) = 3 + \sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$
- $h(x) = \sqrt{x+4}$ pour $x \in [-4; +\infty[$
- $k(x) = -\sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$
- $l(x) = 4\sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^+$

1. À l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un grapheur, tracer la courbe représentative de f puis celle de g.
2. Décrire la transformation permettant de passer de la courbe de f à celle de g en précisant ses caractéristiques si cette transformation est une transformation usuelle (symétrie, etc.).
3. Mêmes questions en remplaçant g par chacune des autres fonctions.

4.2 Rappels sur la notion de fonction

Les définitions et propriétés suivantes ont été vues en Seconde aussi les propriétés ne seront pas démontrées.

4.2.1 Définition, vocabulaire et notations

Définition 4.1. Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.
Définir une fonction f sur un ensemble D, c'est associer, à chaque réel $x \in D$, *au plus* un réel noté $f(x)$.
On dit que $f(x)$ est l'*image* de x par f et que x est un *antécédent* de $f(x)$.
On note :

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

et on lit « f, la fonction de D dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(x)$ ».

Remarque. f désigne la fonction, $f(x)$ désigne le réel qui est l'image de x par f.

4.2.2 Ensemble de définition

Définition 4.2. L'ensemble des réels possédant une image par une fonction est appelé *ensemble de définition* de la fonction. On le note en général D_f.

On le détermine par le calcul. À notre niveau les seuls problèmes de définition portent sur les fonctions comportant la variable x au dénominateur ou sous une racine.

4.2.3 Courbe représentative

Définition 4.3. Dans un repère, l'ensemble des points M de coordonnées $(x; f(x))$ où x décrit D_f est appelé *courbe représentative* (ou représentation graphique) de la fonction f. On la note en général $\mathscr{C}_f$.
On dit que la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$.

On veillera à ne pas confondre la fonction et sa représentation graphique.

4.3 Comparaison de fonctions

Comparer deux fonctions f et g c'est déterminer si $f(x) = g(x)$ pour tout x et, sinon, sur quel(s) intervalle(s) on a $f(x) > g(x)$ et $f(x) < g(x)$.

4.3.1 Égalité de deux fonctions

Définition 4.4. Soit f et g deux fonctions. On dit que f et g sont égales si :
- f et g ont même ensemble de définition D ;
- pour tout $x \in D$, $f(x) = g(x)$.

On note alors $f = g$.

4.3.2 Comparaison de deux fonctions

Cas général

Définition 4.5. Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et f et g deux fonctions définies au moins sur D. On dit que f est ***inférieure à*** g sur D lorsque $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in D$.
On note $f \leq g$ sur D.

Remarque. On dit parfois que f est majorée par g sur D ou que g est minorée par f sur D.

Les conséquences graphiques sont les suivantes :

Propriété 4.1. *Soient f et g deux fonctions définies au moins sur D, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes respectives. Alors si $f \leq g$ sur D, $\mathscr{C}_f$ est* au-dessous *de $\mathscr{C}_g$.*

Preuve. Immédiat. ◊

Cas particulier – Fonction majorée, minorée, bornée

Dans les cas où l'une des deux fonctions est constante (ici $g(x) = m$) on a :

Définition 4.6. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que :
- f est *minorée sur I* s'il existe un réel m tel que, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$. m est un minorant de f sur I ;
- f est *majorée sur I* s'il existe un réel M tel que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$. M est un majorant de f sur I ;
- f est *bornée sur I* si elle est majorée et minorée sur I.

La représentation graphique de f est alors :
- au-dessus de la droite d'équation $y = m$ si elle est minorée par m ;
- au-dessous de la droite d'équation $y = M$ si elle est majorée par M ;
- dans une bande horizontale délimitée par les droites d'équation $y = m$ et $y = M$ si elle est bornée par m et M.

4.4 Opérations sur les fonctions

4.4.1 Opérations algébriques sur les fonctions

De la même manière qu'on peut ajouter, multiplier, diviser, etc. des nombres, on peut ajouter, multiplier, diviser, etc. des fonctions.

Définition 4.7. Soit f et g deux fonctions définies au moins sur D et k un réel. Le tableau suivant regroupe les opérations sur les fonctions f et g :

Opération	Notation	Définition	Définie pour
Somme de la fonction f et du réel k	$f+k$	$(f+k)(x)=f(x)+k$	$x \in D_f$
Produit de la fonction f et du réel k	kf	$(kf)(x)=kf(x)$	
Somme des fonctions f et g	$f+g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$x \in D_f \cap D_g$
Différence des fonctions f et g	$f-g$	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	
Produit des fonctions f et g	fg	$(fg)(x)=f(x)\times g(x)$	
Quotient des fonctions f et g	$\dfrac{f}{g}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$x \in D_f \cap D_g$ et $g(x)\neq 0$

4.4.2 Fonctions associées

Définition 4.8. Soit f une fonction définie sur D et k un réel.
On appelle fonctions associées à f les fonctions : $x \mapsto f(x)+k \quad x \mapsto f(x+k) \quad x \mapsto kf(x)$

Remarque. Ces fonctions ne sont en général pas définies sur le même ensemble de définition que f.

Propriété 4.2. *Soit f une fonction définie sur D et k un réel.*
- *La courbe de $f+k$ s'obtient à partir de celle de f par une translation de vecteur $\vec{u}(0;k)$*
- *La courbe de $x \mapsto f(x+k)$ s'obtient à partir de celle de f par une translation de vecteur $\vec{u}(-k;0)$*
- *Dans un repère orthogonal, la courbe de $-f$ s'obtient à partir de celle de f par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses*

On l'admettra.

4.5 Variations d'une fonction

4.5.1 Rappels

Définition 4.9. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que
- f est *croissante sur I* si pour tous réels a et b de I on a : si $a<b$, alors $f(a)\leq f(b)$;
- f est *décroissante sur I* si pour tous réels a et b de I on a : si $a<b$, alors $f(a)\geq f(b)$;
- f est *monotone sur I* si f ne change pas de sens de variation sur I.

Remarque. On obtient les définitions de strictement croissante ou décroissante en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

4.5.2 Variations de $f+g$

Propriété 4.3. *Soit deux fonctions f et g définies au moins sur un ensemble D.*
- *Si f et g sont deux fonctions croissantes sur D, alors la fonction $f+g$ est croissante sur D.*
- *Si f et g sont deux fonctions décroissantes sur D, alors la fonction $f+g$ est décroissante sur D.*

Preuve. Voir l'exercice 4.5 ◊

4.5.3 Variations de $f+k$

Propriété 4.4. *Soit f une fonction définie et monotone sur un intervalle I et k un réel. Les fonctions f et $f+k$ ont même sens de variation sur I.*

Preuve. Si f est croissante et $a<b$, alors $f(a)\leq f(b)$. Donc $f(a)+k\leq f(b)+k$ donc $f+k$ est aussi croissante.
On démontre de la même manière si f est décroissante. ◊

Exemple 4.1. La fonction $f : x \longmapsto x^2+2$ a les mêmes variations que la fonction carrée.

4.5.4 Variations de kf

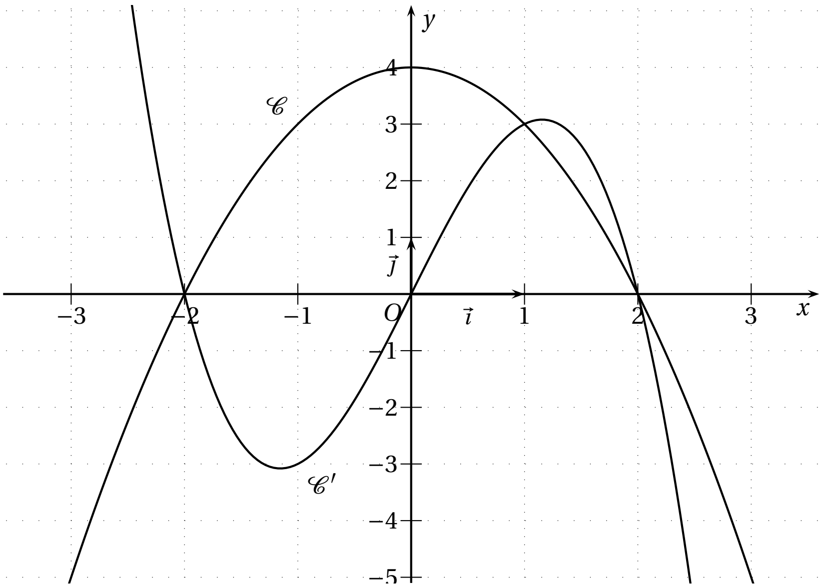
Propriété 4.5. *Soit f une fonction définie et monotone sur D.*
- *Si $k > 0$ alors les fonctions f et kf ont le même sens de variation sur D.*
- *Si $k < 0$ alors les fonctions f et kf ont des sens de variation opposés sur D.*

Preuve. Voir l'exercice 4.6 ◇

4.6 Exercices

EXERCICE 4.1.
Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^3 + 4x$ et $g(x) = -x^2 + 4$.
On a tracé sur le graphique 4.2 de la présente page les courbes représentatives de f et de g.

FIGURE 4.2 – Graphique de l'exercice 4.1



1. Associer chaque courbe à la fonction qu'elle représente. Justifier succinctement.
2. Déterminer graphiquement puis par le calcul les solutions des équations :
   - $f(x) = 0$;
   - $g(x) = 0$;
3. (a) Résoudre graphiquement : $f(x) \leq g(x)$.
   (b) En factorisant d'abord f résoudre par le calcul $f(x) \leq g(x)$.

EXERCICE 4.2.
Soit f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$.
1. Étudier le signe de $f(x) - g(x) = x - x^2$.
2. En déduire l'intervalle sur lequel on a $f \leq g$.

EXERCICE 4.3.
Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$ et $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
1. Calculer $f(x) - g(x)$ (*réduire au même dénominateur*).
2. En déduire l'intervalle sur lequel on a $f \leq g$.

EXERCICE 4.4.
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(1-x)$.
En étudiant le signe de $\frac{1}{4} - f(x)$, montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$ par $\frac{1}{4}$.

EXERCICE 4.5 (Preuve de la propriété 4.3)**.**
1. Montrer que si a et b sont deux nombres de D tels que $a < b$ et que f et g sont croissantes sur D, alors $(f+g)(a) \leq (f+g)(b)$. Conclure.
2. Mêmes questions lorsque f et g sont décroissantes sur D.

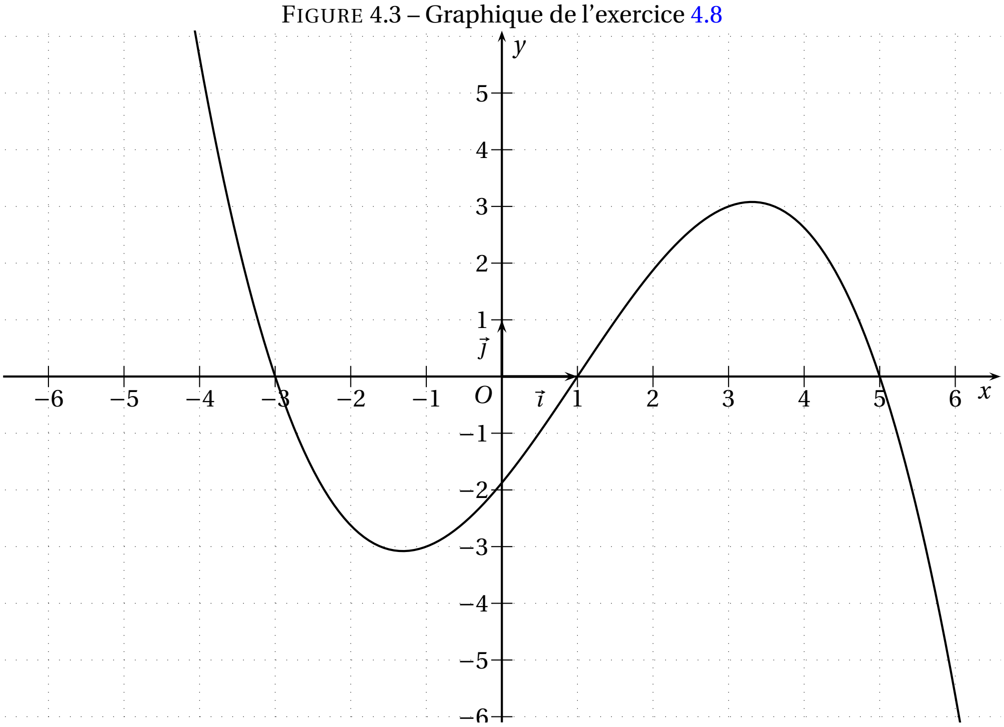
EXERCICE 4.6 (Preuve de la propriété 4.5).
Montrer que :
- si a et b sont deux nombres de D tels que $a < b$
- si f croissante sur D
- et si $k < 0$

alors $kf(a) \geq kf(b)$.
Conclure.

EXERCICE 4.7.
1. Donner une décomposition de la fonction f définie par $f(x) = (x-3)^2+2$ qui permette d'en déduire son sens de variation sur l'intervalle $]-\infty;3]$ et décrire simplement comment obtenir la courbe représentative de f à partir de celle d'une fonction de référence.
2. Mêmes questions pour les fonctions suivantes :
   - $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$;
   - $f(x) = (x+1)^3 - 1$;
   - $f(x) = 3-(x+1)^2$;
   - $f(x) = 3 + \dfrac{1}{2+x}$;
   - $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x-2}$;
   - $f(x) = -3\sqrt{x+1}$.

EXERCICE 4.8.
On a représenté sur la figure 4.3 de la présente page la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Y tracer les courbes des fonctions suivantes :
- $u = f+2$;
- $v = -2f$;
- $w(x) = f(x+3)$;
- $z = |f|$.

FIGURE 4.3 – Graphique de l'exercice 4.8



EXERCICE 4.9.
Soient f et g les fonctions définies par :
- $f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$;
- $g(x) = \dfrac{2x-9}{x-4}$.

1. Quels sont leurs ensembles de définition ?
2. Déterminer les réels a, b, c et d tels que, pour tout réel x :
   - $f(x) = a + \dfrac{b}{x}$;
   - $g(x) = c + \dfrac{d}{x-4}$.
3. En déduire les tableaux de variations de ces deux fonctions.
4. (a) Vérifier que, pour tout réel t : $f(2+t) = g(2-t)$.

   (b) Que peut-on en déduire pour leurs représentations graphiques ?

EXERCICE 4.10.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par : $f(x) = \dfrac{2x^2-5x+1}{x-3}$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x, $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-3}$.
2. Soit $\mathscr{D}$ la droite représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x+1$. On pose $d(x) = f(x)-g(x)$.
   (a) Étudier le signe de $d(x)$ selon les valeurs de x.
   (b) En déduire la position de $\mathscr{C}$ par ropport à $\mathscr{D}$.

EXERCICE 4.11.
Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Étudier le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
3. Déterminer la position de la courbe de g par rapport à la droite d'équation $y = 1$ selon les valeurs de x.

EXERCICE 4.12.
1. On considère la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{-4}{x+1}$.
   À partir du tableau de variations de la fonction inverse, déduire, en justifiant, le tableau de variations de g et son ensemble de définition.
2. On considère la fonction f définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x+1}$.
   Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x+1}$
3. À l'aide des questions précédentes, déterminer les variations de la fonction f.
4. On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
   (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec chacun des axes du repère.
   (b) Placer les points trouvés aux questions précédentes dans un repère et tracer soigneusement $\mathscr{C}$.

EXERCICE 4.13.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{-x^2+5x-4}{x-2}$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. (a) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x, $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-2}$.
   (b) En déduire les variations de f.
2. Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite d'équation $y = -x+3$ selon les valeurs de x.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
4. Placer les points et les droites rencontrés dans les questions précédentes dans un même repère et y tracer $\mathscr{C}$.

EXERCICE 4.14 (Exercice type corrigé)**.**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2-3x-3}{x-2}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-2}$.

$f(x) = \dfrac{(ax+b)(x-2)}{x-2} + \dfrac{c}{x-2} = \dfrac{ax^2-2ax+bx-2b+c}{x-2} = \dfrac{ax^2+(-2a+b)x-2b+c}{x-2}$

Par identification :

$$\begin{cases} a=2 \\ -2a+b=-3 \\ -2b+c=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=-1 \end{cases}.$$

Donc $f(x) = 2x+1-\dfrac{1}{x-2}$

2. En déduire les variations de f.

On a $f(x) = 2x+1-\dfrac{1}{x-2} = u(x)+v(x)$ avec $u(x) = 2x+1$ et $v(x) = -\dfrac{1}{x-2}$.

$u(x) = 2x+1$ est une fonction affine croissante sur $]-\infty\,; 2[$ et sur $]2\,;+\infty[$.

$v(x) = -\dfrac{1}{x-2}$ est une fonction associée à la fonction inverse or on sait que :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

donc, d'après les propriétés des fonctions associées :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$\frac{1}{x-2}$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

et donc

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-\frac{1}{x-2}$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

f est donc la somme de deux fonctions croissantes sur $]-\infty\,; 2[$ et sur $]2\,;+\infty[$, elle est donc croissante sur $]-\infty\,; 2[$ et sur $]2\,;+\infty[$.

3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.

- *Intersection avec* (Oy)

  On a $x=0$ et $y = f(0) = \dfrac{-3}{-2} = 1{,}5$ donc A $(0\,; 1{,}5)$ est l'intersection de $\mathscr{C}$ avec $(\mathrm{O}y)$.
- *Intersection avec* (Ox)

  On cherche x tel que $y = f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-3x-3}{x-2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2-3x-3 = 0$ et $x-2 \neq 0$.

  $\Delta = (-3)^2-4(2)(-3) = 33 > 0$ donc deux racines : $x = \dfrac{3+\sqrt{33}}{4}$ ou $x = \dfrac{3-\sqrt{33}}{4}$.

  Donc B $\left(\dfrac{3+\sqrt{33}}{4}\,; 0\right)$ et C $\left(\dfrac{3-\sqrt{33}}{4}\,; 0\right)$ sont les intersections de $\mathscr{C}$ avec $(\mathrm{O}x)$.

4. Déterminer les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.

On cherche sur quels intervalles $\mathscr{C}$ est au-dessus de l'axe et sur quels intervalles elle est en-dessous. Cela revient à étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Comme $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 3}{x - 2}$, on va donc étudier le signe du numérateur et du dénomitateur et faire un tableau de signes.

- *Numérateur*
  C'est un trinôme, donc du signe du coefficient de x^2 sauf entre les racines qu'on a déjà trouvées dans la question précédente.
- *Dénominateur*
  C'est une expression affine croissante.
- *Tableau de signes*

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{33}}{4}$		2		$\frac{3+\sqrt{33}}{4}$		$+\infty$
$2x^2-3x-3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur $\left[\frac{3-\sqrt{33}}{4}\,;2\right[\cup \left[\frac{3+\sqrt{33}}{4}\,;+\infty\right[$ et au-dessous sur $\left]-\infty;\frac{3-\sqrt{33}}{4}\right] \cup \left]2;\frac{3+\sqrt{33}}{4}\right[$.

5. Déterminer les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2x+1$ selon les valeurs de x.

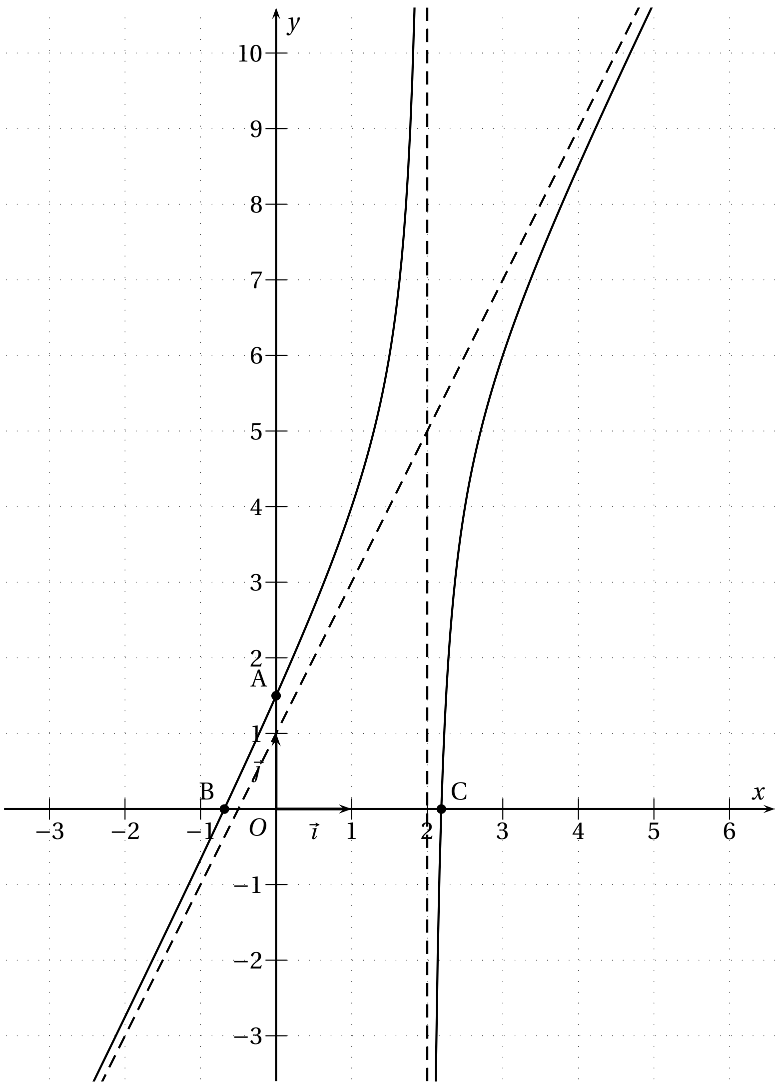
On va étudier le signe de $f(x) - (2x+1)$.

$f(x) - (2x+1) = 2x + 1 - \dfrac{1}{x-2} - (2x+1) = -\dfrac{1}{x-2}$. Or :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	
$-\dfrac{1}{x-2}$		$+$	$\Vert$	$-$	

Finalement :
- Quand $x < 2$:
  $f(x) - (2x+1) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 2x+1 \Leftrightarrow \mathscr{C} > \mathscr{D}$
- Quand $x > 2$:
  $f(x) - (2x+1) < 0 \Leftrightarrow f(x) < 2x+1 \Leftrightarrow \mathscr{C} < \mathscr{D}$

6. Placer dans un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ les points rencontrés dans les questions précédentes, tracer la droite $\mathscr{D}$ puis la courbe $\mathscr{C}$.



y
x
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−3
−2
−1
O
1
2
3
4
5
6
A
B
C

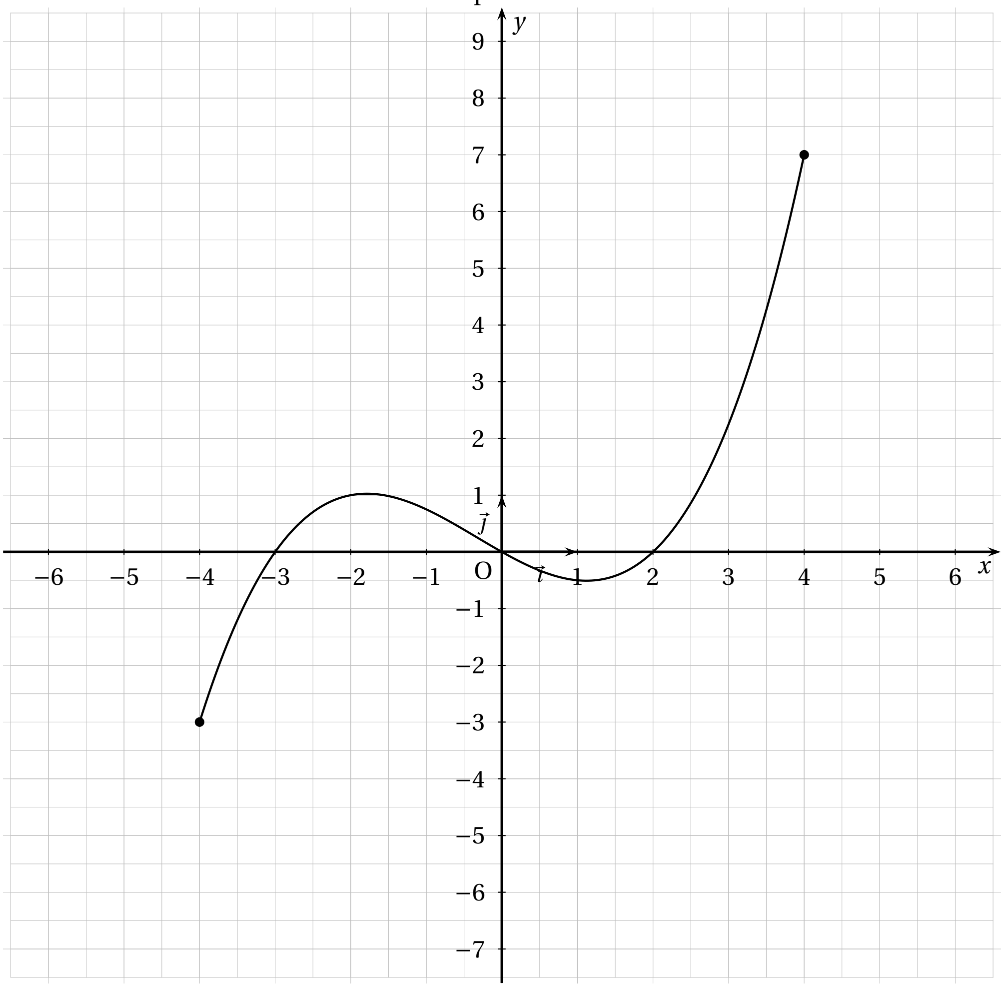
Devoir surveillé n°5

Généralités sur les fonctions – Géométrie dans l'espace

EXERCICE 5.1 (3 points).
*Pour **tous** les élèves.*
On a représenté sur la figure de la présente page la courbe d'une fonction f définie sur $[-4\,;\,4]$.
Tracer les courbes des fonctions suivantes :

- $u = f + 2$;
- $v = -f$;
- $w(x) = f(x+2)$.

FIGURE 5.1 – Repère de l'exercice 5.1



EXERCICE 5.2 (6 points).
*Pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité.*
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. On considère les points $A(4\,;0\,;2)$, $B(11\,;-2\,;7)$ et $C(2\,;4\,;-10)$.
   Déterminer une équation de ce plan du type $ax + by + cz = d$ où a, b, c et d sont des entiers.
2. Soient $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ les plans d'équations respectives :

$$\mathscr{P}_1 : x + 6y + z = 6 \qquad \mathscr{P}_2 : x + y - 7z = 2 \qquad \mathscr{P}_3 : 1,5x + 9y + 1,5z = 3.$$

   (a) Montrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires.
   (b) Montrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ sont parallèles.

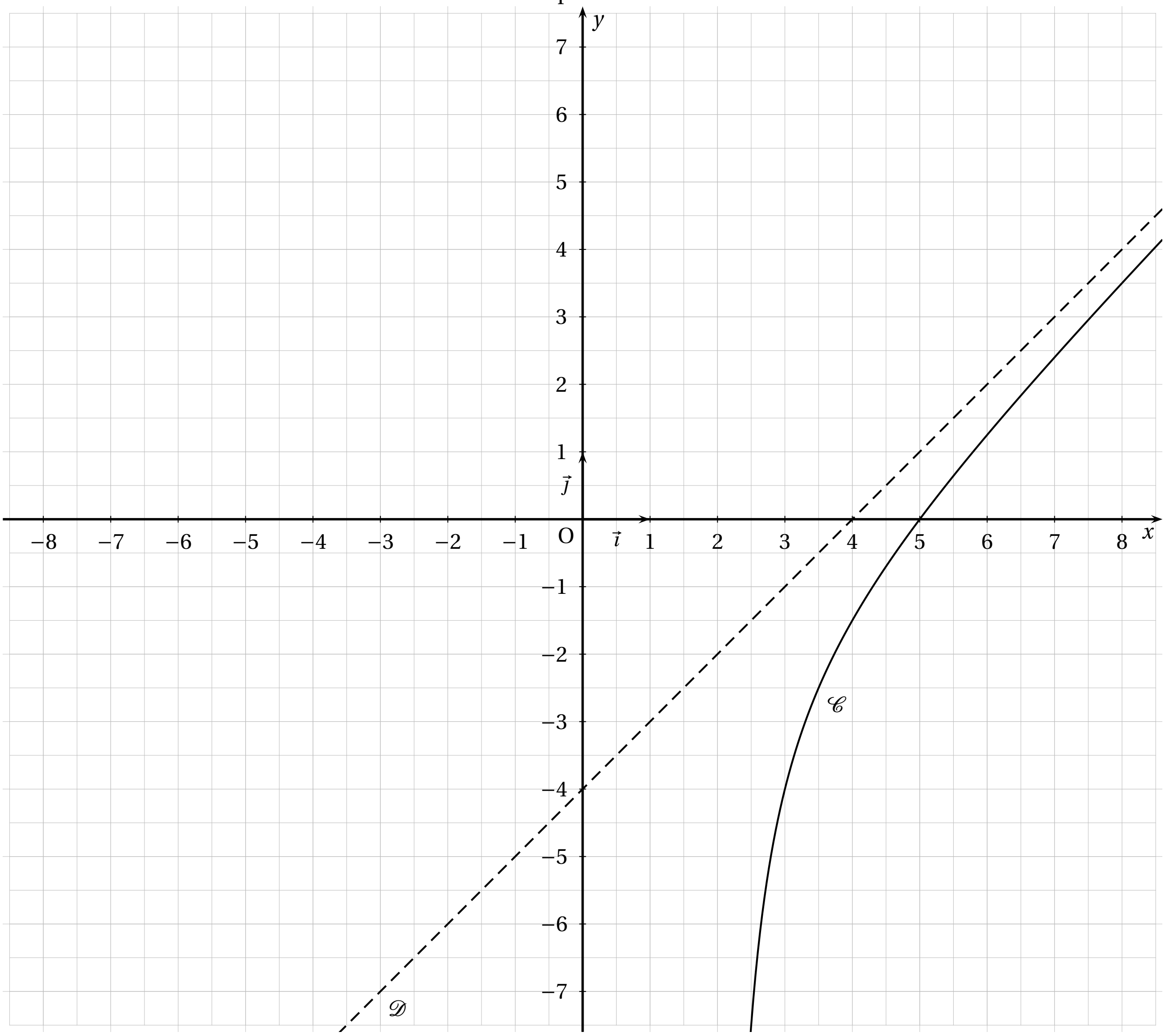
EXERCICE 5.2 (6 points)**.**
Pour les élèves ***ne suivant pas*** *l'enseignement de spécialité.*
Déterminer les tableaux de variations des fonctions suivantes en justifiant :

1. $f(x) = 3 - (x+1)^2$;
2. $g(x) = 2\sqrt{x} + 3$;
3. $h(x) = 3 + \dfrac{1}{2+x}$.

EXERCICE 5.3 (11 points)**.**
Pour ***tous*** *les élèves.*

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par : $g(x) = -\frac{3}{x-2}$.
   À partir du tableau de variations de la fonction inverse, déduire, en justifiant, le tableau de variations de g.
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x-2}$.
   Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f(x) = x - 4 - \frac{3}{x-2}$.
3. À l'aide des questions précédentes, déterminer les variations de f.
4. On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f.
   (a) Déterminer les coordonnées des points intersections de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
   (b) Déterminer les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x - 4$ selon les valeurs de x.
   (c) Dans le repère de la présente page, placer les points rencontrés dans les questions précédentes, et compléter le tracé de $\mathscr{C}$.

FIGURE 5.2 – Repère de l'exercice 5.3



Chapitre 5

Suites

Sommaire

5.1 Activité

Activité 5.1.
On connaît les premiers termes de quelques suites.

Suite (a_n)	Suite (b_n)	Suite (c_n)	Suite (d_n)	Suite (e_n)
$a_0 = 0$		$c_0 = 1$		$e_0 = 100$
$a_1 = 1$	$b_1 = -1$	$c_1 = 1{,}5 = \dfrac{3}{2}$	$d_1 = 1$	$e_1 = 20$
$a_2 = 4$	$b_2 = \dfrac{1}{2}$	$c_2 = 1{,}75 = \dfrac{7}{4}$	$d_2 = 3$	$e_2 = 4$
$a_3 = 9$	$b_3 = -\dfrac{1}{3}$	$c_3 = 1{,}875 = \dfrac{15}{8}$	$d_3 = 5$	$e_3 = 0{,}8$
$a_4 = 16$	$b_4 = \dfrac{1}{4}$	$c_4 = 1{,}9375 = \dfrac{31}{16}$	$d_4 = 7$	$e_4 = 0{,}16$
$a_5 = 25$	$b_5 = -\dfrac{1}{5}$	$c_5 = 1{,}96875 = \dfrac{63}{32}$	$d_5 = 9$	$e_5 = 0{,}032$

1. Conjecturer, dans chaque cas, lorsque c'est possible, une formule permettant de calculer un terme quelconque de la suite en fonction de n (on parle alors de *formule explicite*) ainsi qu'une formule permettant d'obtenir un terme quelconque de la suite en fonction du terme précédant (on parle alors de *relation de récurrence*).
2. À l'aide des relations de récurrence obtenues, calculer, pour chacune des cinq suites ci-dessus, le terme d'indice 10. Faire de même à l'aide des formules explicites. Quelle est la forme la plus pratique ?
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} > a_n$. On dit alors que la suite (a_n) est *strictement croissante*.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} - c_n > 0$. Que peut-on en déduire pour la suite (c_n) ?
   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_n > 0$. Montrer que $\frac{e_{n+1}}{e_n} < 1$. Que peut-on en déduire pour la suite (e_n) ?
   (d) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n = f(n)$ où f est une fonction connue. Expliciter f. Déterminer le sens de variation de f sur $[0\,;+\infty[$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_{n+1} > d_n$. Que peut-on en déduire pour la suite (d_n) ?

(e) Montrer que la suite (b_n) n'est ni croissante, ni décroissante. On dira que la suite n'est pas *monotone*.

4. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant 0$. On dira que la suite (a_n) est *minorée* par 0. Donner un autre minorant de la suite (a_n)
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n < 2$. On dira que la suite (c_n) est *majorée* par 2.
   (c) Montrer qu'il existe deux réels m et M tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq b_n \leq M$. On dira que la suite (b_n) est *bornée* par m et M.

5.2 Définition, vocabulaire et notations

Définition 5.1. Une suite numérique u est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une fonction qui à tout entier naturel n associe un reel, noté $u(n)$ ou, plus généralement, u_n.

Définition 5.2 (explicite)**.** Soit f une fonction définie au moins sur $\mathbb{R}^+$. Une suite (u_n), telle que $u_n = f(n)$ est dite définie de manière *explicite*.

Définition 5.3 (par récurrence)**.** Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$.
Une suite (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ est dite définie *par récurrence*.

Remarques (Vocabulaire, notations).
- n est l'indice (ou le rang) et u_n est le terme de rang n.
- *Attention :* (u_n) désigne la suite alors que u_n désigne le terme de rang n.
- Contrairement aux suites explicites, on ne peut pas, *a priori*, calculer un terme quelconque de la suite définie par récurrence, sans avoir obtenu, avant, tous les termes le précédant. De nombreux exercices seront consacrés à obtenir, malgré tout, des moyens de calculer directement un terme donné, c'est-à-dire à transformer, lorsque c'est possible, la suite récurrente en une suite explicite.
- Toutes les fonctions f ne conviennent pas pour définir une suite par récurrence ($u_{n+1} = f(u_n)$). Par exemple si $u_0 = 3$ et $f(x) = \sqrt{x-2}$, c'est-à-dire $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 2}$, on a $u_1 = \sqrt{u_0 - 2} = \sqrt{1} = 1$. Par contre on ne peut pas calculer u_2, donc la suite n'est pas définie.
- Une suite peut aussi être définie par la donnée de u_0 et u_1 et une relation de récurrence du type $u_{n+2} = f(u_{n+1}\,;\,u_n)$.

EXERCICE 5.1.
Dans chacun des cas suivants, déterminer les termes jusqu'au rang $n = 5$.

1. (u_n) telle que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1}{n+1} + n$
2. (v_n) telle que $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \frac{2}{v_n} + 1$
3. (w_n) telle que $w_0 = 0$, $w_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $w_{n+2} = -2(w_{n+1})^2 + w_n$

5.3 Représentation graphique d'une suite

5.3.1 Cas général

Définition 5.4. Dans un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ la représentation graphique d'une suite (u_n) est l'ensemble des points M_n de coordonnées $(n\,;\,u_n)$.

Remarque. Contrairement à une fonction, la représentation graphique d'une suite n'est pas une courbe mais un nuage de points car la suite n'est définie que pour $n \in \mathbb{N}$. $u_{1,5}$ n'a, mathématiquement, pas de sens et donc le point $(1,5; u_{1,5})$ non plus.

EXERCICE.
Construire les représentations graphiques de (u_n) et (v_n) définies à l'exercice 5.1.

5.3.2 Cas d'une suite définie par récurrence

Dans le cas d'une suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$, une autre représentation graphique possible s'obtient en procédant de la façon suivante :

1. On trace la représentation graphique $\mathscr{C}$ de f et la première bissectrice d'équation $y = x$.
2. On place le premier terme u_0 sur l'axe des abscisses.
3. On utilise $\mathscr{C}$ pour construire $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées.
4. On reporte u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la première bissectrice.

5. On utilise $\mathscr{C}$ pour construire $u_2 = f(u_1)$ sur l'axe des ordonnées.
6. etc.

On obtient alors la *réprésentation en chemin* de la suite.

Exemples 5.1. La figure 5.1 de la présente page propose quelques exemples de représentations graphiques en chemin.

FIGURE 5.1 – Quelques exemples de représentations graphiques en chemin

FIGURE 5.2 – (u_n) : $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n+4}{2+u_n^2}$

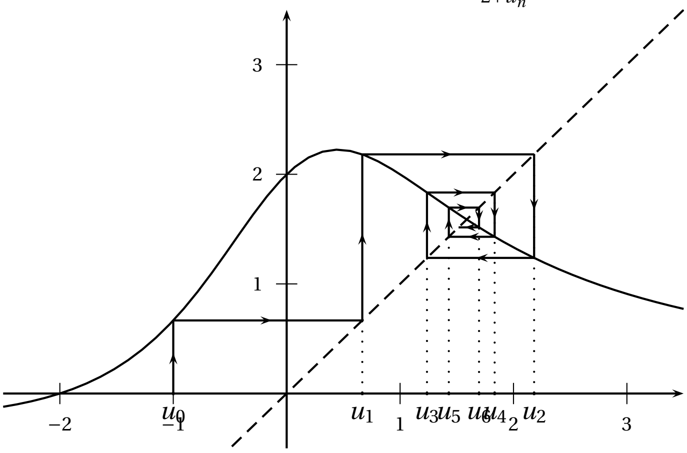


FIGURE 5.3 – (v_n) : $v_0 = 0,5$ et $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n^2 + 1$

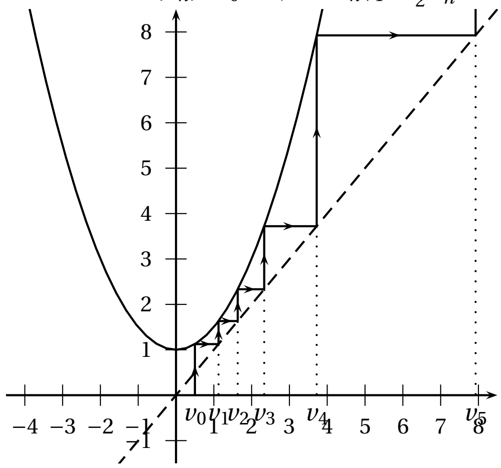
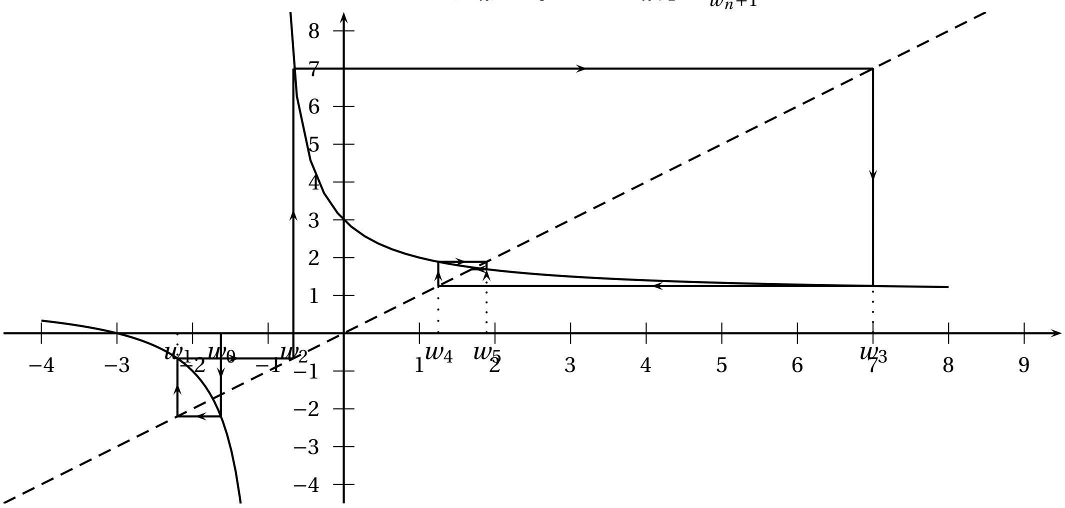


FIGURE 5.4 – (w_n) : $w_0 = 0$ et $w_{n+1} = \frac{w_n+3}{w_n+1}$



EXERCICE.
Construire la représentation graphique de (v_n) définies à l'exercice 5.1.

5.4 Monotonie d'une suite

5.4.1 Définition

Définition 5.5. Une suite est dite :
- *croissante* si, pour tout n, $u_{n+1} \geqslant u_n$;
- *décroissante* si, pour tout n, $u_{n+1} \leqslant u_n$;
- *stationnaire* si, pour tout n, $u_{n+1} = u_n$.

Si la suite ne change pas de sens de variation, on dit qu'elle est *monotone*.

Remarque. On obtient les définitions de *strictement* croissante, décroissante ou monotone en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

5.4.2 Méthodes

Signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

Pour étudier le sens de variation d'une suite, on peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$. Cette méthode est très générale et « fonctionne » souvent.

Exemple. Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n^2 - n$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) - n^2 + n = n^2 + 2n + 1 - n - 1 - n^2 + n = 2n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq u_n$.
La suite (u_n) est croissante.

Comparaison de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

Pour étudier le sens de variation d'une suite *à termes strictement positifs*, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
Cette méthode est particulièrement adaptée aux suites dont le terme général contient une puissance ou un produit.

Exemple. Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \frac{2^n}{n}$. La suite (u_n) est à termes strictement positifs car $n \in \mathbb{N}^*$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{2^n \times 2}{2^n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{2n}{n+1}.$$

Or, $\frac{2n}{n+1} \geq 1 \Leftrightarrow 2n \geq n+1 \Leftrightarrow n \geq 1$, donc, pour tout $n \geq 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ donc $u_{n+1} \geq u_n$ car $u_n > 0$.
La suite (u_n) est croissante à partir du rang 1.

Variations de la fonction associée

Pour étudier les variations d'une suite définie par une formule explicite, on peut étudier les variations de la fonction associée. On s'appuie alors sur le théorème suivant.

Théorème 5.1. *Soit (u_n) la suite définie par la relation $u_n = f(n)$.*
Si la fonction f est monotone sur $[0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est monotone et a même sens de variation que f.

Preuve. Voyons le cas où f est croissante sur $[0; +\infty[$, les autres cas se démontrant de manière analogue.
Supposons f croissante sur $[0; +\infty[$. Pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant n < n+1$ donc $f(n) < f(n+1)$ donc $u_n < u_{n+1}$.
La suite (u_n) est donc croissante. $\diamondsuit$

Cette méthode concerne donc uniquement les suites définies par une formule explicite, elle est intéressante lorsque les variations de la fonction associée sont simples à déterminer.

Exemple 5.2. Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ par $u_n = \sqrt{n-2}$. On a $u_n = f(n)$ où $f : x \mapsto \sqrt{x-2}$, définie sur $[2; +\infty[$.

La fonction f est une fonction associée à la fonction racine et, comme la fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}^+$, d'après les propriétés des fonctions asociées, f est croissante sur $[2; +\infty[$.

D'après le théorème précédent, la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang 2.

Remarque. La réciproque du théorème est fausse.

EXERCICE.
Étudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n) définies dans l'exercice 5.1.

5.5 Deux suites particulières

5.5.1 Activité

Un étudiant loue un chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail :

- *Premier contrat* : un loyer de 200 €pour le premier mois, puis une augmentation de 5 €par mois jusqu'à la fin du bail ;
- *Second contrat* : un loyer de 200 €pour le premier mois, puis une augmentation de 2 % par mois jusqu'à la fin du bail.

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.
2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois, c'est-à-dire celui du 36ᵉ mois.
3. Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ? (Justifier à l'aide de calculs).

5.5.2 Suites arithmétiques

Définition et premières propriétés

Définition 5.6. On appelle *suite arithmétique* toute suite (u_n) telle que

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = u_n + r \text{ où } r \in \mathbb{R}$$

r est appelé *la raison* de la suite arithmétique.

Remarque. Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de montrer que, pour tout n, la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante. Cette constante sera alors la raison de la suite.

Exemples 5.3.
- La suite contituée des montants des loyers correspondants au premier contrat de l'activité est une suite arithmétique définie par $u_0 = 200$ €et $u_{n+1} = u_n + 5$ (qui s'arrête toutefois à $n = 36$).
- La suite formée par les nombres entiers naturels pairs est une suite arithmétique. Celle formée par les nombres entiers naturels impairs aussi.
- La suite définie par : pour tout n, $u_n = 3n - 2$ est arithmétique.
  En effet $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - (3n-2) = 3 \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + 3$ (de raison 3).
- La suite définie par : pour tout n, $u_n = n^2$ n'est pas arithmétique.
  En effet $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 \neq$ constante.
  On peut le voir encore plus facilement sur les premiers termes :
  $u_1 - u_0 = 1 \neq u_2 - u_1 = 3$

Propriété 5.2. *Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et raison r. Alors, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 + nr$*

Remarque. Cette propriété est importante car elle transforme une suite arithmétique, définie par récurrence ($u_{n+1} = f(u_n)$), en une suite définie explicitement ($u_n = f(n)$).

Preuve. Une démonstration rigoureuse sera réalisée éventuellement en Terminale. En première nous ne pouvons que faire la chose suivante :

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_0 + r \\
u_2 &= u_1 + r = u_0 + 2r \\
u_3 &= u_2 + r = u_0 + 3r \\
&\dots \\
u_n &= u_0 + nr
\end{aligned}$$

◊

Monotonie

Propriété 5.3. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors :*
- *si $r > 0$, (u_n) est strictement croissante ;*
- *si $r < 0$, (u_n) est strictement décroissante ;*
- *si $r = 0$, (u_n) est constante.*

Preuve. Pour tout $n \geq 0$ on a $u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r$, ce qui donne le résultat. ◊

Somme de termes consécutifs

Pour obtenir ce résultat, nous avons besoin de la petite propriété suivante (on appelle ça un *lemme* : une propriété qui sert à la démonstration d'une autre)

Lemme 5.4. *Soit $S = 1 + 2 + \dots + n$ la somme des n premiers entiers. Alors $S = 1 + 2 + \dots + n = \dfrac{(1+n)n}{2}$*

Preuve. Écrivons S de deux manières :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
S & = & 1 & + & 2 & + & \dots & + & n-1 & + & n \\
\text{et } S & = & n & + & n-1 & + & \dots & + & 2 & + & 1 \\
\text{donc } 2S & = & n+1 & + & n+1 & + & \dots & + & n+1 & + & n+1
\end{array}$$

Donc $2S = n(n+1) \Leftrightarrow S = \dfrac{(1+n)n}{2}$ ◊

Démontrons alors que :

Propriété 5.5. *Soit (u_n) une suite arithmétique et n un entier naturel. Alors :*

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{(u_0+u_n)(n+1)}{2}$$

Preuve. Pour tout i on a $u_i = u_0 + ir$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} u_i &= u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n & &= u_0 + (u_0 + r) + \ldots + (u_0 + (n-1)r) + (u_0 + nr) \\
&= (n+1)u_0 + r(1 + \ldots + n) & &= (n+1)u_0 + r\left(\frac{(1+n)n}{2}\right) \text{ d'après le lemme} \\
&= \frac{2(n+1)u_0 + r(1+n)n}{2} & &= \frac{(n+1)(2u_0+nr)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(u_0+u_0+nr)}{2} & &= \frac{(u_0+u_n)(n+1)}{2} \text{ car } u_0 + nr = u_n
\end{aligned}$$

◊

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs *d'une suite arithmétique est :*

$$S = \frac{(1^{er}\ terme + dernier) \times (nb\ de\ termes)}{2}$$

5.5.3 Suites géométriques

Définition et premières propriétés

Définition 5.7. On appelle *suite géométrique* toute suite (u_n) telle que

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = q \times u_n$ où $q \in \mathbb{R}$

q est appelé *la raison* de la suite géométrique.

Remarques.

1. Si $q = 0$, tous les termes de la suite, hormis peut-être u_0 sont nuls.
   Si $u_0 = 0$, tous les termes de la suite sont nuls.
   En dehors de ces deux cas triviaux, inintéressants, tous les termes de la suite sont différents de zéro.
2. Pour démontrer qu'une suite est géométrique (en dehors des deux cas triviaux), il suffit de montrer que, pour tout n, le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. Cette constante sera alors la raison de la suite.

Exemples 5.4.

- La suite contituée des montants des loyers correspondants au second contrat de l'activité est une suite géométrique définie par $u_0 = 200$ €et $u_{n+1} = 1,02u_n$ (qui s'arrête toutefois à $n = 36$).
- La suite définie par : pour tout $n \geq 1$, $u_n = 2^n$ est géométrique.
  En effet $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \Leftrightarrow u_{n+1} = 2u_n$ (de raison 2).
- La suite définie par : pour tout n, $u_n = n^2$ n'est pas arithmétique.
  En effet $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \neq$ constante.
  On peut le voir encore plus facilement sur les premiers termes :
  $\frac{u_2}{u_1} = 4 \neq \frac{u_3}{u_2} = \frac{9}{4}$

Propriété 5.6. *Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et raison q. Alors, pour tout entier naturel n, on a :*

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Remarque. Cette propriété est importante car elle transforme une suite géométrique, définie par récurrence ($u_{n+1} = f(u_n)$), en une suite définie explicitement ($u_n = f(n)$).

Preuve. Une démonstration rigoureuse sera réalisée éventuellement en Terminale. En première nous ne pouvons que faire la chose suivante :

$$\begin{aligned}
&u_1 = u_0 \times q \\
&u_2 = u_1 \times q = u_0 \times q^2 \\
&u_3 = u_2 \times q = u_0 \times q^3 \\
&\ldots \\
&u_n = u_0 \times q^n
\end{aligned}$$

◊

Monotonie

On ne s'intéresse, en première, qu'à la monotonie de suites géométriques de raison positive et de premier terme positif.

Si $q = 0$, tous les suites, hormis peut-être le premier sont nuls, aussi la suite géométrique est-elle stationnaire à partir du rang 1. En dehors de ce cas trivial, on a la propriété suivante :

Propriété 5.7. *Soit (u_n) une suite géométrique de raison q telle que $q > 0$, $q \neq 0$ et $q \neq 1$. Alors, si $u_0 > 0$:*
- *si $0 < q < 1$, (u_n) est strictement décroissante ;*
- *si $q > 1$, (u_n) est strictement croissante ;*
- *si $q = 1$, (u_n) est constante.*

Preuve. Pour tout $n \geq 0$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, ce qui donne le résultat. ♢

Somme de termes consécutifs

Pour obtenir ce résultat, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 5.8. *Soit $q \neq 1$ et $S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$. Alors $S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.*

Preuve. Remarquons que $q \times S = q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1}$.
Donc $S - qS = 1 - q^{n+1} \Leftrightarrow S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$ donc, pour $q \neq 1$, $S = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. ♢

Démontrons alors que :

Propriété 5.9. *Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et n un entier naturel. Alors :*

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Preuve. Pour tout i on a $u_i = q^i u_0$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} u_i &= u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n & &= u_0 + q u_0 + q^2 u_0 + \ldots + q^n u_0 \\ &= u_0(1 + q + \ldots + q^n) & &= u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

♢

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs *d'une suite géométrique est :*

$$S = 1^{er} \text{ terme} \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q}$$

5.6 Exercices

EXERCICE 5.2.
Étudier la monotonie de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$;
2. $v_n = n + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$;
3. $w_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 5.3.
Étudier la monotonie de chacune des suites suivantes, où $n \in \mathbb{N}$:

1. $u_n = \frac{1}{n+2}$;
2. $v_n = \frac{2n+1}{n+3}$;
3. $u_n = n - n^2$;
4. $w_n = 3^n$.

EXERCICE 5.4.
(v_n) est la suite définie pour tout entier strictement positif par $v_n = \frac{2^n}{n^2}$

1. Calculer ses quatre premiers termes.
2. On cherche à montrer que la suite est croissante à partir du rang $n = 3$.
   (a) Résoudre l'inéquation $\frac{2x^2}{(x+1)^2} > 1$.
   (b) Montrer que $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2n^2}{(n+1)^2}$.
   (c) Conclure.

EXERCICE 5.5.
Pour chacune des suites données ci-dessous, où $n \in \mathbb{N}$:

- $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}$;
- $v_n = 5 - 2n$;
- $w_n = (n+1)^2 - n^2$;
- $x_n = \frac{3^n}{n+1}$;
- $y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1. Calculer les trois premiers termes.
2. La suite est-elle géométrique ? arithmétique ?
3. Si elle est arithmétique ou géométrique :
   (a) calculer le terme de rang 100 ;
   (b) calculer la somme des termes jusqu'au rang 100.

EXERCICE 5.6.
1. La suite (u_n) est artihmétique de raison $r = 8$. On sait que $u_{100} = 650$. Que vaut u_0 ?
2. La suite (u_n) est arithmétique de raison r. On sait que $u_{50} = 406$ et $u_{100} = 806$.
   (a) Déterminer r et u_0.
   (b) Calculer $S = u_{50} + u_{51} + \ldots + u_{100}$.

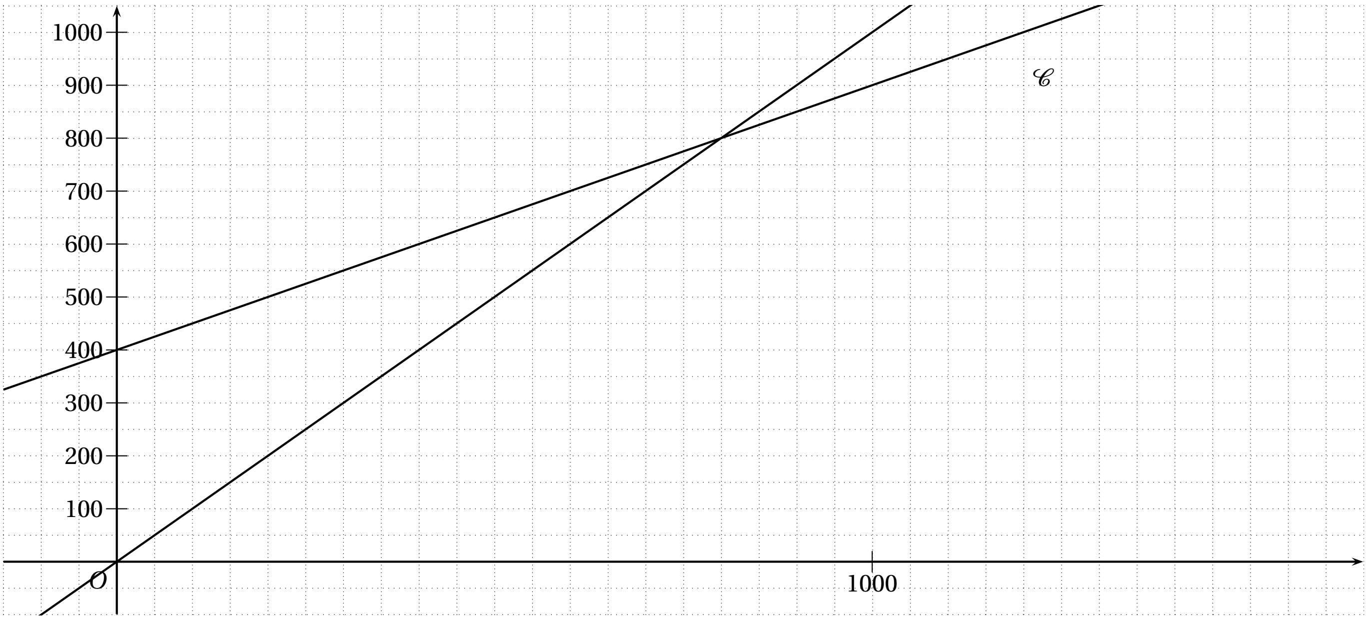
EXERCICE 5.7.
On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $q = -2$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Calculer u_{20}.
3. Calculer la somme $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_{20}$.

EXERCICE 5.8.
1. La suite (u_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$. On sait que $u_8 = -1$. Que vaut u_0 ?
2. La suite (u_n) est géométrique de raison q. On sait que $u_4 = 10$ et $u_6 = 20$.
   (a) Déterminer q et u_0.
   (b) Calculer $S = u_{50} + u_{51} + \ldots + u_{100}$.

EXERCICE 5.9.
Un fournisseur fait une étude sur la fidélité de sa clientèle depuis l'année $n = 0$, où il y a eu 200 clients. Chaque année, sa clientèle est composée de 50% des clients de l'année précédente auxquels s'ajoutent 400 nouveaux clients.

1. Soit u_n le nombre de clients l'année n. Justifier que $u_{n+1} = 0,5u_n + 400$, puis calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. La fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = 0,5x + 400$ est représentée par la courbe $\mathscr{C}$ page suivante, ainsi que la première bissectrice d'équation $y = x$.
   Construire la représentation en escalier de la suite (u_n).
3. (a) Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection des deux droites
   (b) Que laisse supposer cette représentation sur la limite de la suite (u_n) ?
4. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 800$.
   (a) Vérifier que $v_{n+1} = 0,5v_n$.
   (b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   (c) En déduire l'expression de v_n, puis celle de u_n, en fonction de n.
   (d) Étudier la limite de la suite (u_n).
   Que peut on en déduire concernant le nombre de clients du fournisseur ?



EXERCICE 5.10.
Un étudiant souhaite s'acheter une super collection de CD d'une valeur de 1 000 €. Pour économiser une telle somme, il ouvre un compte épargne à la banque qui rapporte 0,25 % mensuellement. À l'ouverture, il dépose 100 €le premier d'un mois, et ensuite 50 €le 1er de chaque mois. On pose $c_0 = 100$ et on note c_n le capital le premier de chaque mois après le versement initial.

1. Calculer les capitaux c_1, c_2 et c_3 du premier, deuxième et troisième mois.
2. Montrer que (c_n) vérifie une relation de récurrence de la forme $c_{n+1} = ac_n + b$, où a et b sont des réels à déterminer.
3. On pose $u_n = c_n + 20000$.
   (a) Montrer que cette suite est géométrique. (b) En déduire c_n puis u_n en fonction de n.
4. Montrer que (c_n) est croissante.
5. Déterminer le nombre de mois nécessaires pour l'achat de la collection.

EXERCICE 5.11.
On donne la suite : $(v_n) : \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{v_n}{1+v_n}\right) \end{cases}$

1. Construire sa représentation graphique en chemin dans le repère de la figure 5.5 page suivante.
2. Conjecturer sa monotonie.

EXERCICE 5.12.
On donne la suite : $(w_n) : \begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{n+1} = \frac{2w_n+3}{w_n+4} \end{cases}$

1. (a) Construire sa représentation graphique en chemin dans le repère de la figure 5.6 page suivante.
   (b) Conjecturer sa convergence
2. On pose $v_n = \frac{w_n-1}{w_n+3}$
   (a) Montrer que (v_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
   (b) Donner l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) En déduire l'expression de w_n en fonction de n.
   (d) En déduire la convergence de (w_n).

EXERCICE 5.13.
On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u_n = \dfrac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2}$ et $v_n = \dfrac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2}$

1. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n + v_n$. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique.
2. Soit (t_n) la suite définie par $t_n = u_n - v_n$. Démontrer que (t_n) est une suite arithmétique.
3. Exprimer la somme suivante en fonction de n : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

FIGURE 5.5 – Figure de l'exercice 5.11

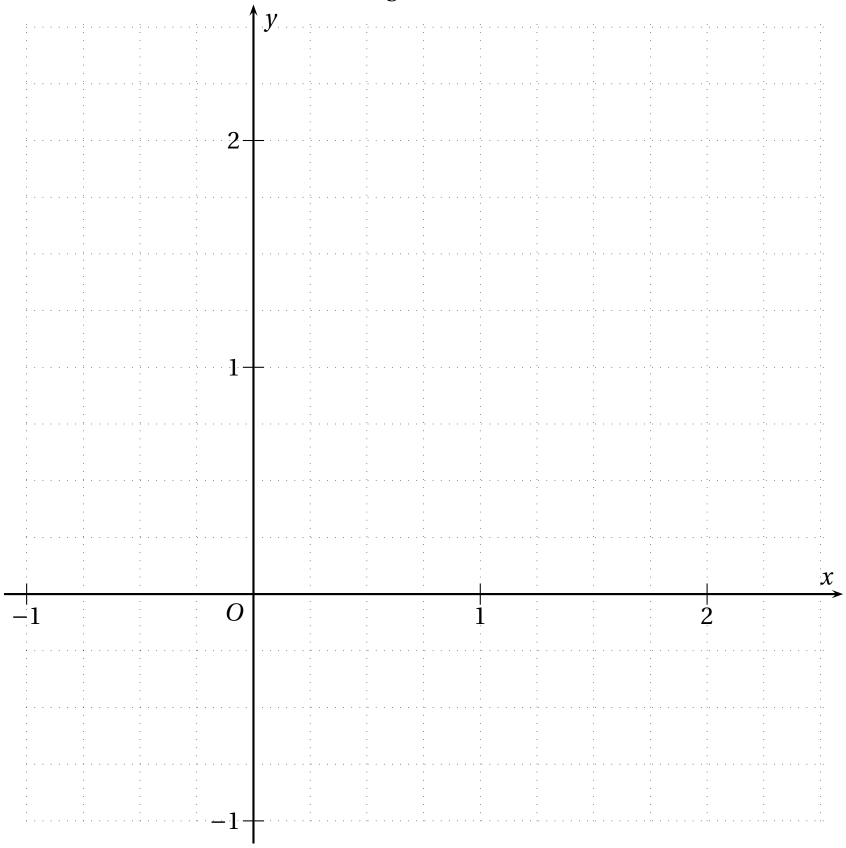
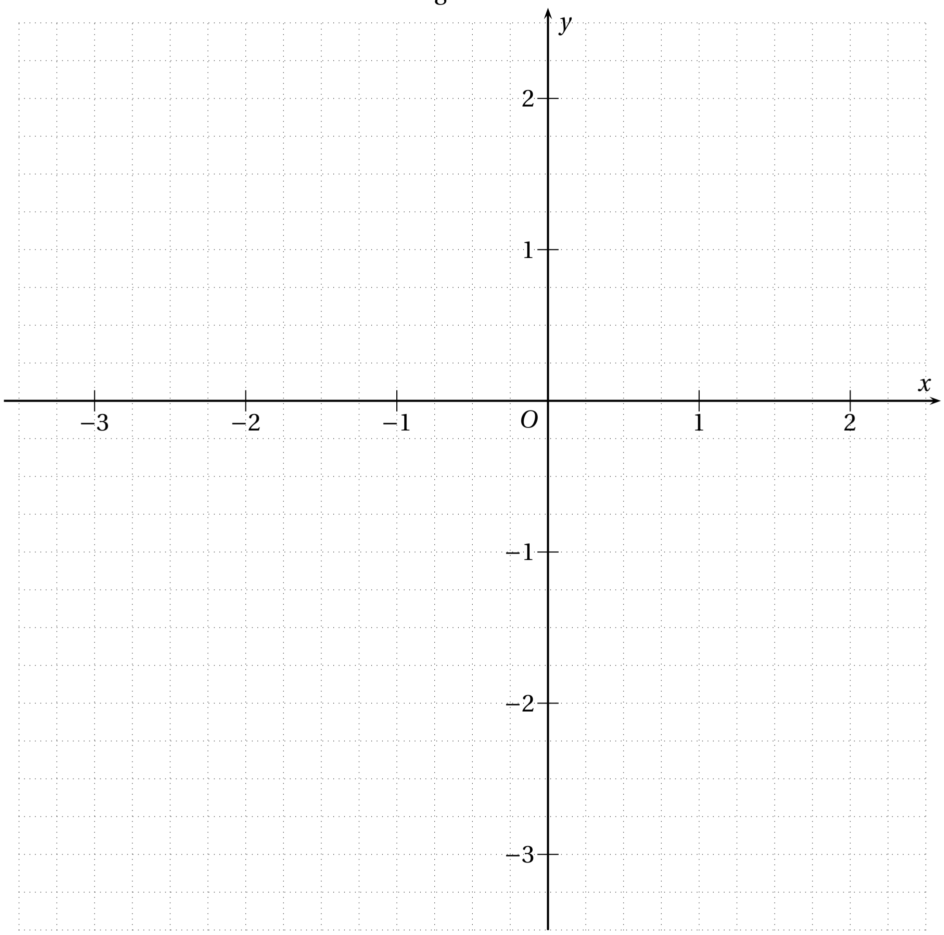


FIGURE 5.6 – Figure de l'exercice 5.12



EXERCICE 5.14.

On dit qu'un capital produit :

- *des **intérêts simples** si les intérêts sont uniquement calculés sur ce capital ;*
- *des **intérêts composés** si à la fin de chaque période, les intérêts générés sont ajoutés au capital pour produire de nouveaux intérêts.*

Alexandre dispose de 4 000 € qu'il souhaite placer à la banque. Celle-ci lui propose deux placements :

- un placement A à intérêts simples à un taux de 5 % par an ;
- un placement B à intérêts composés à un taux de 4 % par an.

1. On appelle A_n le montant du capital obtenu après n années avec le placement A.
   (a) Déterminer A_0, A_1, A_2 et A_3.
   (b) Montrer que (A_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (c) Exprimer A_n en fonction de n.
2. On appelle B_n le montant du capital obtenu après n années avec le placement B.
   (a) Déterminer B_0, B_1, B_2 et B_3.
   (b) Montrer que (B_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (c) Exprimer B_n en fonction de n.
3. Alexandre a entendu dire que les placements à intérêts composés étaient plus intéressants que les placements à intérêts simples.
   (a) À l'aide de la calculatrice, déterminer les valeurs de A_n et B_n jusqu'à $n = 20$.
   (b) Que peut-on en conclure ?

Devoir surveillé n°6 (spécialité)

Équations cartésiennes

EXERCICE 6.1 (5 points)**.**
Pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité.
L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
Sur le dessin de la figure 6.1 joint en annexe page suivante, on a placé les points $A\,(0\,;2\,;0)$, $B\,(0\,;0\,;6)$, $C\,(4\,;0\,;0)$, $D\,(0\,;4\,;0)$ et $E\,(0\,;0\,;4)$.
Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $3y+z=6$.
Il est représenté par ses traces sur les plans de base sur le dessin joint en annexe.

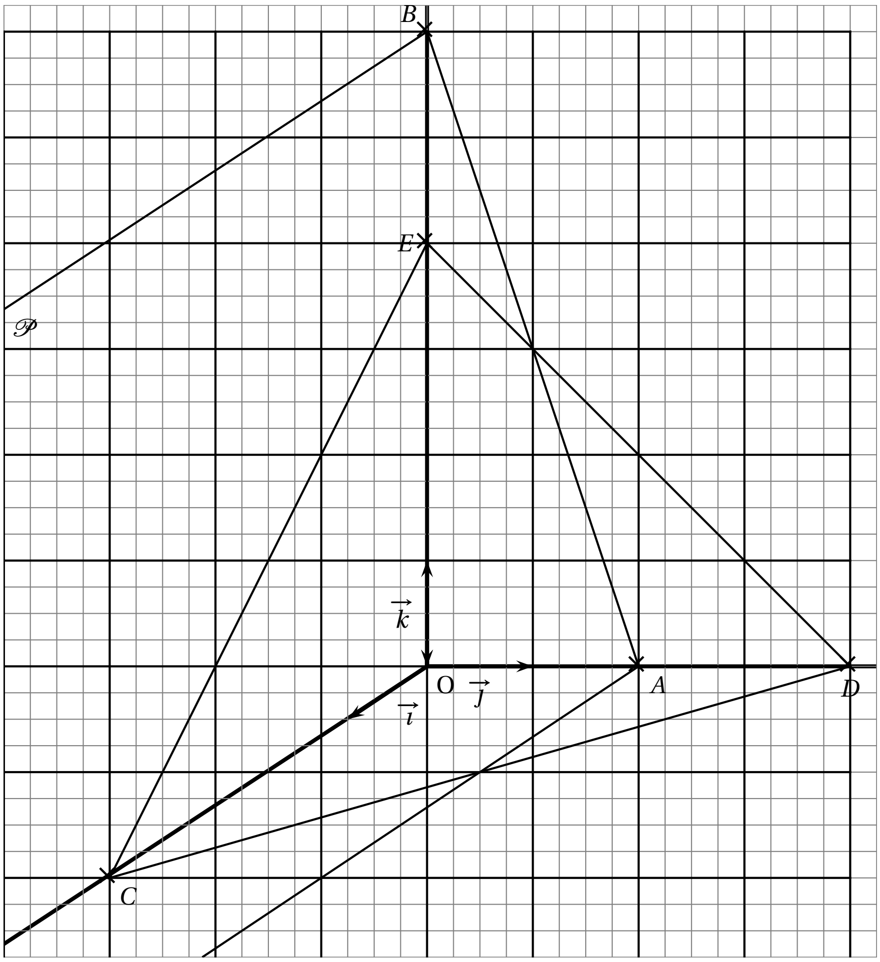
1. (a) Démontrer que les points C, D et E déterminent un plan que l'on notera (CDE).
   (b) Vérifier que le plan (CDE) a pour équation $x+y+z=4$.
2. (a) Justifier que les plans $\mathscr{P}$ et (CDE) sont sécants. On note Δ leur intersection.
   (b) Sans justifier, représenter Δ en couleur (ou à défaut en traits pointillés) sur la figure en annexe.
3. On considère les points $F\,(2\,;0\,;0)$ et $G\,(0\,;3\,;0)$.
   On note $\mathscr{P}'$ le plan parallèle à l'axe $\left(O\,;\overrightarrow{k}\right)$ et contenant les points F et G.
   (a) Placer sur la figure en annexe les points F et G.
   Sans justifier, représenter le plan $\mathscr{P}'$ par ses traces sur les plans de base, d'une autre couleur (ou à défaut en larges pointillés), sur la figure en annexe.
   (b) Déterminer les réels a et b tels que $ax+by=6$ soit une équation du plan $\mathscr{P}'$.
4. L'intersection des plans (CDE) et $\mathscr{P}'$ est la droite Δ'.
   Sans justifier, représenter la droite Δ', d'une troisième couleur (ou à défaut en très larges pointillés), sur la figure en annexe.
5. On considère le système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3y+z & = & 6 \\ x+y+z & = & 4 \\ 3x+2y & = & 6 \end{array}\right.$$

   (a) Résoudre ce système.
   (b) Que peut-on alors en déduire pour les droites Δ et Δ' ?

FIGURE 6.1 – Figure de l'exercice 6.1 pour les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

À rendre avec la copie



Devoir surveillé n°6

Suites

EXERCICE 6.1 (10 points).
Marc postule pour un emploi dans deux entreprises.
La société ALLCAUR propose à compter du 1er janvier 2 008, un contrat à durée déterminée (CDD) de 2 ans avec un salaire net de 1 800 € le premier mois, puis une augmentation de 0,7 % chaque mois sur la période de 2 ans.
La société CAURALL propose un salaire de départ de 1 750 € augmenté de 20 € chaque mois.
Partie A. Étude de la rémunération proposée par ALLCAUR.
On note U_0 le salaire du mois de janvier 2 008, U_1 celui du mois de février 2 008, ..., U_{23} celui de décembre 2 009 proposé à Marc par la société ALLCAUR.

1. Déterminer U_0, U_1, U_2 et U_3 arrondis à 10^{-2}.
2. (a) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n.
   (b) En déduire la nature de la suite U_n, en précisant son premier terme et sa raison.
   (c) Exprimer U_n en fonction de n.
3. Déterminer le salaire que percevrait Marc, au centime près, au dernier mois de son CDD.
4. Calculer le montant total S des salaires qui seraient versés à Marc sur les 2 ans, arrondi au centime.

Partie B. Étude de la rémunération proposée par CAURALL.
On note V_0 le salaire du mois de janvier 2 008, V_1 celui du mois de février 2 008, ..., V_{23} celui de décembre 2 009 proposé à Marc par la société CAURALL.

1. Déterminer V_0, V_1, V_2 et V_3.
2. (a) Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n.
   (b) En déduire la nature de la suite V_n, en précisant son premier terme et sa raison.
   (c) Exprimer V_n en fonction de n.
3. Déterminer le salaire que percevrait Marc au dernier mois de son CDD.
4. Calculer le montant total S' des salaires qui seraient versés à Marc sur les 2 ans.
5. Lequel des deux contrats est le plus avantageux ?

EXERCICE 6.2 (10 points).
Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,85u_n + 1,8$.

1. (a) Calculer u_1, u_2 et u_3.
   (b) La suite est-elle arithmétique ? La suite est-elle géométrique ?
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 12$.
   (a) Calculer v_0, v_1, v_2 et v_3.
   (b) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (c) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 12 - 4 \times 0,85^n$.
3. Un magazine est vendu uniquement par abonnement. On a constaté que :
   - il y a 1 800 nouveaux abonnés chaque année ;
   - d'une année sur l'autre, 15 % des abonnés ne se réabonnent pas.

   En 2 008, il y avait 8 000 abonnés.
   (a) Montrer que cette situation peut être modélisée par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre de milliers d'abonnés en $(2008 + n)$.
   (b) En utilisant la question 2c, calculer une estimation du nombre d'abonnés en 2 014.

Chapitre 6

Dérivation

Sommaire

6.1 Nombre dérivé

6.1.1 Activités

ACTIVITÉ 6.1.
Un corps, soumis à certaines forces, parcourt au bout de t secondes la distance $d(t)$ (en mètres) exprimée par :

$$d(t) = 0,1t^3 - 2,4t^2 + 21,2t$$

1. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction d sur l'intervalle $[0\,;20]$.
2. Calculer la vitesse moyenne du corps dans les intervalles de temps $[0\,;1]$; $[1\,;2]$; $[2\,;3]$; $[3\,;4]$; $[4\,;5]$.
   Que constate-t-on ?
   Comment peut-on retrouver graphiquement ces vitesses moyennes ?
3. Inventer une manière d'obtenir la vitesse instantanée à l'instant $t = 2$.

ACTIVITÉ 6.2.
On s'intéresse à la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 25$ et on appelle $\mathscr{P}$ sa courbe représentative.
On appelle :
- T le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse 1 ;
- T_h le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse $1 + h$ où h est un réel ;
- $\mathscr{D}_h$ la sécante (TT_h) ;
- m_h le coefficient directeur de $\mathscr{D}_h$.

1. On suppose que $h = 1$.
   (a) Déterminer l'abscisse x_1 et y_1 et l'ordonnée de T_1.
   (b) Déterminer m_1 le coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}_h$.
2. En vous inspirant que la question précédente, compléter le tableau suivant :

h	1	0,5	0,1	0,01	0,001
x_h					
y_h					
m_h					

3. Montrer, par le calcul, que, dans le cas général, $m = -2 - h$ pour $h \neq 0$
4. Quand h *tend* vers 0 :
   (a) Vers quelle valeur *tend* m ?
   (b) Vers quel point *tend* M_h ?
   (c) Vers quelle droite *tend* la sécante $\mathscr{D}_h$?
   (d) En déduire l'équation réduite de cette droite.

On appellera *tangente* à $\mathscr{P}$ au point d'abscisse 1, la droite de laquelle se rapproche la sécante $\mathscr{D}_h$ quand h *tend* vers 0 et on appellera *nombre dérivé de* $f(x)$ *en 1* le coefficient directeur de la tangente.

6.1.2 Nombre dérivé

Définition. On appelle *accroissement moyen* d'une fonction f entre deux nombres *distincts* a et b le nombre :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

On écrit la plupart du temps $a + h$ à la place de b et la définition devient alors :

Définition 6.1. On appelle *accroissement moyen* d'une fonction f entre deux nombres distincts a et $a + h$ le nombre :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Les deux définitions sont équivalentes (il suffit de poser $b = a + h$). C'est la seconde que nous utiliserons pour la suite.

On a vu dans les activités que cet accroissement moyen *tendait* vers l'accroissement « instantané » quand h *tendait* vers 0. Cet accroissement « instantané » est appelé *nombre dérivé* en mathématiques, et on a donc la définition suivante :

Définition 6.2 (Dérivabilité et nombre dérivé)**.** Si, quand h *tend* vers 0, la quantité $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *tend* vers un nombre A, on dit que la fonction f est *dérivable en* a et on appelle A le *nombre dérivé de* f *en* a. On le note $f'(a)$.

Remarques.
- On note parfois $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ l'accroissement moyen, surtout en physique. Δx est la différence[1] entre deux valeurs de x, $\Delta f(x)$ celle entre les deux valeurs correspondantes de $f(x)$.
- On note parfois $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ le nombre dérivé. Le d indique là encore une différence mais entre deux valeurs infiniment proches.
- Ces nombres correspondent à des quantités concrètes qui dépendent de la nature de la fonction f ou de la variable. Ainsi, si $f(t)$ est la distance parcourue au bout d'un temps t, la variation moyenne ne sera rien d'autre que la vitesse moyenne et le nombre dérivé est la vitesse instantanée.

Exemple 6.1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 7$ est-elle dérivable en $a = 2$?
Pour le savoir étudions la quantité suivante : $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$.

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} = \frac{8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 8}{h} \\ &= \frac{12h + 6h^2 + h^3}{h} = \frac{h(12 + 6h + h^2)}{h} \\ &= 12 + 6h + h^2 \text{ avec } h \neq 0\end{aligned}$$

Lorsque h *tend* vers 0 (en restant différent de 0), $12 + 6h + h^2$ *tend* vers 12. Donc f est dérivable en $a = 2$ et son nombre dérivé en 2 est 12. On note alors $f'(2) = 12$.

6.1.3 Interprétation graphique du nombre dérivé

Définition 6.3 (Tangente à une courbe)**.** On appelle *tangente à une courbe* $\mathscr{C}$ *en un point* M, appartenant à $\mathscr{C}$, une droite passant par M et qui, si elle existe, est aux alentours de M, la droite la plus proche de $\mathscr{C}$.

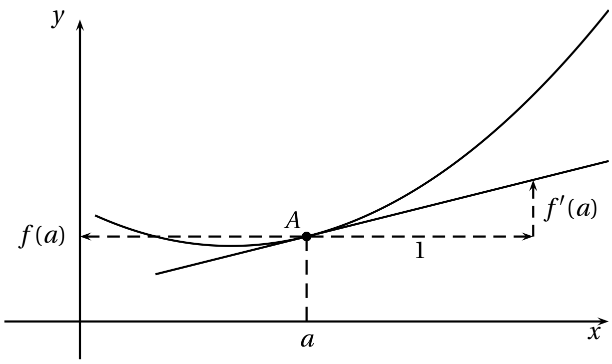
1. Δ est la lettre grecque correspondant à D

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f et $A(a; f(a))$ et $B(a+h; f(a+h))$, deux points de cette courbe.
La quantité $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de la droite (AB), sécante à la courbe.
Lorsque h *tend* vers 0, la sécante (AB) *tend* vers la tangente à la courbe au point A et le nombre $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *tend* vers le coefficient directeur de la tangente en A.
On a donc la propriété suivante, qu'on admettra :

Propriété 6.1. *Soit f une fonction dérivable en a et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.*
Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.

Le schéma 6.1 de la présente page illustre cette propriété.

FIGURE 6.1 – Interprétation graphique du nombre dérivé



Remarque. Le point $A(a; f(a))$ est un point de la courbe et est *aussi* un point de la tangente ; en particulier, ses coordonnées vérifient l'équation de la tangente. Cela nous permet d'obtenir, dans le cas général, l'équation de la tangente.

Propriété 6.2. *Soit f une fonction définie et dérivable en a et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.*
Alors $\mathscr{C}$ admet en son point d'abscisse a une tangente T_a d'équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Preuve. On sait déjà que $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente T_a, donc son équation est de la forme

$$y = f'(a)x + p$$

Le point $A(a; f(a))$ est un point de la courbe et est *aussi* un point de T_a donc ses coordonnées vérifient l'équation de T_a :

$$f(a) = f'(a) \times a + p \Leftrightarrow p = f(a) - f'(a) \times a$$

Donc

$$\begin{aligned} T_a : y &= f'(a)x + (f(a) - f'(a) \times a) \\ &= f'(a)x - f'(a)a + f(a) \\ &= f'(a)(x-a) + f(a) \end{aligned}$$

◊

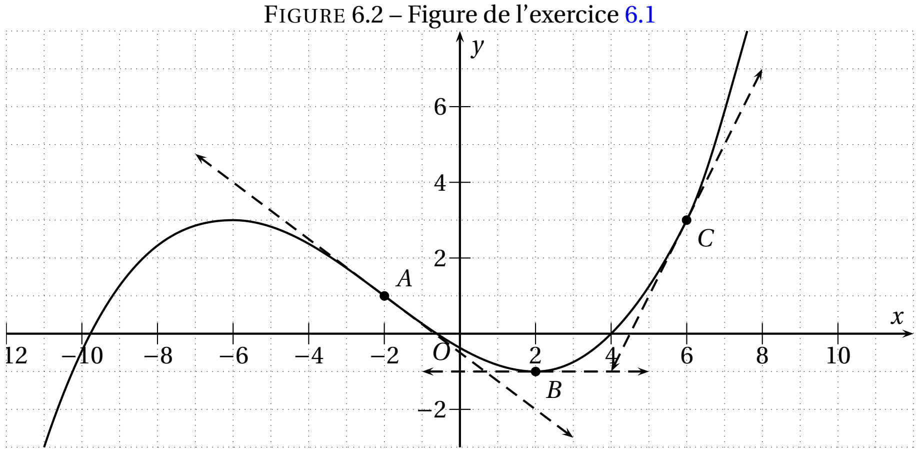
6.1.4 Exercices

Lectures graphiques de nombres dérivés

EXERCICE 6.1.
On donne sur la figure 6.2 de la présente page la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f en y indiquant les droites tangentes aux points A, B et C.

1. Donner par lecture graphique $f(-2)$ et $f(6)$
2. Donner par lecture graphique $f'(-2)$, $f'(6)$ et $f'(2)$
3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2.

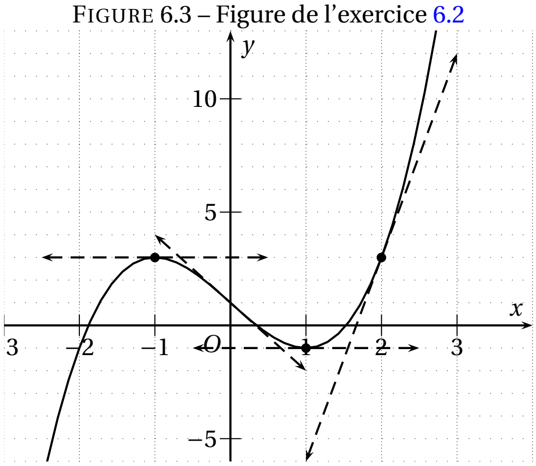
FIGURE 6.2 – Figure de l'exercice 6.1



EXERCICE 6.2.
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure 6.3 de la présente page est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthogonal.

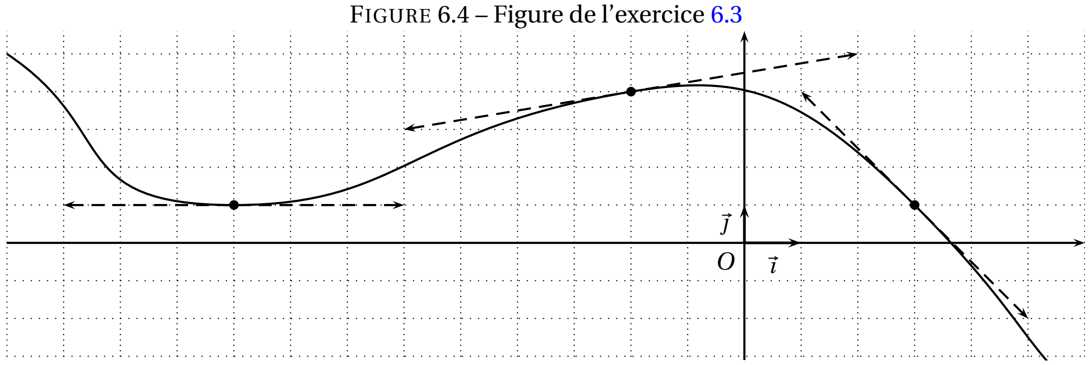
1. Déterminer graphiquement :
   (a) $f(0)$ et $f'(0)$;
   (b) $f(-1)$ et $f'(-1)$;
   (c) $f(2)$ et $f'(2)$;
   (d) L'équation de la tangente T_{-1} au point d'abscisse -1 ;
   (e) L'équation de la tangente T_0 au point d'abscisse 0.
2. La droite T tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2 et d'ordonnée -1 passe par le point A de coordonnées $(1 ; 26)$
   (a) Déterminer par le calcul une équation de T.
   (b) En déduire $f'(-2)$.

FIGURE 6.3 – Figure de l'exercice 6.2



EXERCICE 6.3.
On donne sur la figure 6.4 de la présente page la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction définie f sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à cette courbe en certains points.

FIGURE 6.4 – Figure de l'exercice 6.3



1. Donner par lecture graphique $f(3)$, $f(-2)$ et $f(-9)$.
2. Donner par lecture graphique $f'(3)$, $f'(-2)$ et $f'(-9)$.
3. Déterminer l'équation réduite de T, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.

Tracés

EXERCICE 6.4.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-3;3]$ ayant les propriétés suivantes :

- f est décroissante sur $[-3;0]$;
- $f(0)=-2$ et $f'(0)=0$;
- f est paire ;
- $f(3)=9$.

EXERCICE 6.5.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0;9]$ ayant les popriétés suivantes :

- $f(0)=0$;
- $f(1)=3$ et $f'(1)=2$;
- $f(3)=6$ et $f'(3)=1$;
- $f(5)=7$ et $f'(5)=0$;
- $f(6)=6$ et $f'(6)=-4$.

EXERCICE 6.6.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0;5]$ ayant les popriétés suivantes :

- $f(0)=1$;
- f est décroissante sur l'intervalle $[0;2]$;
- f admet en 2 un minimum égal à -3 ;
- $f(3)=-1$ et $f(5)=-1$;
- $f'(2)=0$, $f'(3)=1$ et $f'(5)=-1$;
- pour tout $x\in[2;5]$, $f(x)<0$.

Nombres dérivés

EXERCICE 6.7.
Dans chacun des cas suivants, on admettra que la fonction est dérivable et on déterminera par le calcul son nombre dérivé.

1. $f(x)=x^2-2x$ en 3.
2. $g(x)=\frac{1}{x}$ en 1.
3. $h(x)=x^2+2x-1$ en -1.
4. $i(x)=\sqrt{x}$ en 2.

EXERCICE 6.8.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2+2x+3$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
2. Déterminer les nombres dérivés de f là où $\mathscr{C}$ coupe les axes.
3. Déterminer $f'(1)$.
4. Tracer dans un repère les tangentes à la courbe qu'on peut déduire des questions précédentes.
5. Tracer $\mathscr{C}$ dans ce même repère.

6.2 Dérivée d'une fonction

6.2.1 Fonctions dérivées

Activités

ACTIVITÉ 6.3 (Plusieurs nombres dérivés).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4$.

1. Déterminer les valeurs des nombres dérivés en a dans les cas suivants :
   - $a = 0$;
   - $a = 1$;
   - $a = 2$.
2. Cas général : déterminer, en fonction de a, la valeur du nombre dérivé.

On obtient ainsi une fonction, qui dépend de f, qui à tout réel x associe le nombre dérivé de f en x. Une telle fonction est appelée *fonction dérivée de* f et est notée f'. Ainsi, pour $f(x) = -x^2 + 4$, $f'(x) = -2x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

ACTIVITÉ 6.4 (Fonctions dérivées de quelques fonctions usuelles).
Déterminer les fonctions dérivées des fonctions usuelles suivantes :

- $f(x) = k$;
- $f(x) = mx + p$;
- $f(x) = x^2$;
- $f(x) = x^3$.

Bilan et compléments

Définition 6.4. On dit qu'une fonction f est dérivable sur un ensemble I lorsqu'elle est dérivable en tout nombre de cet ensemble et on note f' la fonction qui a tout nombre x de cet ensemble associe le nombre dérivé de f en x. Cette fonction s'appelle la *fonction dérivée de* f.

On admettra[2] que les fonctions usuelles ont les fonctions dérivées suivantes :

Propriété 6.3. *Les fonctions dérivées des fonctions usuelles sont données par le tableau suivant :*

Fonction f	*définie sur*	*Fonction dérivée f'*	*définie sur*
$f(x) = k$ (constante)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^+ =]0; +\infty[$

Remarque. Si l'on remarque que $f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$ et que $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$, on a alors :
$f(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$ a pour fonction dérivée $f'(x) = nx^{n-1}$.
Ainsi, pour obtenir la fonction dérivée de $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$, on peut appliquer l'une ou l'autre formule :

$$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} = -\frac{2}{x^{2+1}} = -\frac{2}{x^3} \text{ ou } f'(x) = nx^{n-1} = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

6.2.2 Opérations sur les fonctions

Activités

ACTIVITÉ 6.5 (Produit d'une fonction par une constante).
On pose $f(x) = x^2$, $g(x) = 3f(x) = 3x^3$ et $h(x) = \frac{f(x)}{4} = \frac{x^2}{4}$, toutes trois définies sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer la fonction dérivée de chacune de ces fonctions.
2. Que constate-t-on ?

ACTIVITÉ 6.6 (Fonction dérivée d'une somme de fonctions et d'un produit de fonctions).
Soient u, v et f trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3$, $v(x) = -2x^2$ et $f(x) = u(x) + v(x)$.

1. (a) Déterminer $f'(x)$, $u'(x)$ et $v'(x)$.
   (b) Que constate-t-on ?
2. (a) Montrer que $f(x) = g(x) \times h(x)$ où g et h sont deux fonctions non constantes à déterminer.
   (b) Déterminer $g'(x)$ et $h'(x)$.
   (c) A-t-on $f'(x) = g'(x) \times h'(x)$?

2. Certaines démonstrations ont été faites en activité ou seront faites en exercice

Bilan et compléments

Plus généralement, on a :

Propriété 6.4. *Soient u et v définies et dérivables sur un même intervalle I.*

Fonction	*Fonction dérivée*	*Exemple*
ku avec $k \in \mathbb{R}$	ku'	Si $f(x) = 4x^3$ alors $f'(x) = 4 \times \left(3x^2\right) = 12x^2$
$u+v$	$u'+v'$	Si $f(x) = x + \frac{1}{x}$ alors $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$
$u \times v$	$u'v + uv'$	Si $f(x) = x\sqrt{x}$ alors $f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ avec $x \neq 0$
u^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	$nu'u^{n-1}$	Si $f(x) = \left(x^2-1\right)^4$ alors $f'(x) = 4(2x)\left(x^2-1\right)^3 = 8x\left(x^2-1\right)^3$
$\dfrac{1}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	Si $f(x) = \frac{1}{3x^2+2x+1}$ alors $f'(x) = -\frac{6x+2}{\left(3x^2+2x+1\right)^2}$
$\dfrac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	Si $f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$ alors $f'(x) = \frac{(2)(3x+2)-(2x-1)(3)}{(3x+2)^2} = \frac{7}{(3x+2)^2}$

Remarque. Seules les deux premières formules sont intuitives, les autres sont à apprendre par coeur.
En particulier, comme on l'a vu en activité, la dérivée d'un produit (ou d'un quotient) n'est pas égale au produit (ou au quotient) des dérivées.

Preuve.

- Montrons que $(ku)' = ku'$

$$\frac{ku(a+h) - ku(a)}{h} = \frac{k[u(a+h) - u(a)]}{h} = k\frac{u(a+h) - u(a)}{h}$$

Donc, lorsque h *tend* vers 0, $\dfrac{ku(a+h) - ku(a)}{h}$ *tend* vers la même chose que $k\dfrac{u(a+h) - u(a)}{h}$, c'est-à-dire ku'

- Montrons que $(u+v)' = u' + v'$

$$\frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h) + v(a+h) - u(a) - v(a)}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$$

Donc, lorsque h *tend* vers 0, $\dfrac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h}$ *tend* vers la même chose que $\dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} + \dfrac{v(a+h) - v(a)}{h}$, c'est-à-dire $u' + v'$

- Montrons que $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$

$$\frac{\frac{1}{u(a+h)} - \frac{1}{u(a)}}{h} = \frac{\frac{u(a)-u(a+h)}{u(a+h)u(a)}}{h} = \left(\frac{u(a) - u(a+h)}{h}\right)\frac{1}{u(a+h)u(a)}$$

Lorsque que h *tend* vers 0, $\dfrac{u(a) - u(a+h)}{h}$ *tend*, par définition, vers $-u'(a)$ et $\dfrac{1}{u(a+h)u(a)}$ *tend* vers $\dfrac{1}{u^2(a)}$, donc $\dfrac{\frac{1}{u(a+h)} - \frac{1}{u(a)}}{h}$ *tend* vers $-\dfrac{u'(a)}{u^2(a)}$

- On admettra que $(uv)' = u'v + uv'$
- Montrons que $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

On a vu que $(uv)' = u'v + uv'$, or $\dfrac{u}{v} = u \times \dfrac{1}{v}$, donc $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = u' \times \dfrac{1}{v} + u \times \left(-\dfrac{v'}{v^2}\right) = \dfrac{u'v}{v^2} - \dfrac{uv'}{v^2}$

- On admettra les autres propriétés.

◊

On admettra le résultat suivant :

Propriété 6.5. *Soit $f(x) = g(mx+p)$ où m et p sont des réels et g une fonction définie et dérivable, alors f est dérivable et $f'(x) = mg'(mx+p)$*

Exemple 6.2. Soit f définie sur $\left[\frac{1}{3};+\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{3x-1}$.
On a $f(x) = g(3x-1)$ avec $g(X) = \sqrt{X}$.
Or $g'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}}$ pour $X > 0$.
Donc $f'(x) = 3g'(3x-1) = 3\frac{1}{2\sqrt{3x-1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$ pour $x \in \left]\frac{1}{3};+\infty\right[$

6.2.3 Applications de la fonction dérivée

Activités

ACTIVITÉ 6.7 (Variations d'une fonction)**.**
Reprenons la fonction de l'activité 6.3 page 72 : $f(x) = -x^2 + 4$ et rappelons que le nombre dérivé en x est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse x.

1. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice graphique et par lecture graphique, les variations de f en fonction de x.
2. Comment cela se traduit-il pour les coefficients directeurs des tangentes à la courbe ?
3. En déduire un lien entre les variations de f et la fonction dérivée f'.

ACTIVITÉ 6.8 (Extremum local)**.**
On s'intéresse à la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$

1. Montrer que $f'(x) = 3x^2 - 3$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
3. Dresser le tableau des variations de f, en faisant apparaître une ligne indiquant le signe de f'.
4. Qu'observe-t-on en -1 et en 1, pour f ? Comment cela se traduit-il pour f' ?

On dit que f admet en -1 et en 1 des extremums locaux.

Bilan et compléments

On a vu que la tangente à la courbe au point d'abscisse x est la droite la plus proche de la courbe au voisinage du point de la courbe d'abscisse x. Il est *naturel* de penser que lorsque la tangente *monte*, la courbe *monte* et que lorsque la tangente *descend*, la courbe *descend*, et réciproquement ou, plus mathématiquement, que lorsque la fonction affine dont la tangente est la représentation graphique est croissante (respectivement décroissante), f est aussi croissante (respectivement décroissante) et réciproquement. Or la croissance et la décroissance d'une fonction affine dépendent du signe de son coefficient directeur, ici $f'(x)$. Ainsi, étudier les variations de f revient donc à étudier le signe de sa fonction dérivée selon les valeurs de x.
On admettra donc le résultat suivant :

Théorème 6.6. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée*
- $f'(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in I \Leftrightarrow f$ *croissante sur* I
- $f'(x) \leq 0$ *pour tout* $x \in I \Leftrightarrow f$ *décroissante sur* I
- $f'(x) = 0$ *pour tout* $x \in I \Leftrightarrow f$ *constante sur* I

On admettra aussi la propriété suivante :

Propriété 6.7. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ (respectivement $f'(x) < 0$), alors f est strictement croissante sur I (resp. strictement décroissante)*

Remarque. On notera qu'on n'a pas l'équivalence ($\Leftrightarrow$) dans ce cas, une fonction pouvant être strictement croissante avec une dérivée qui s'annule seulement en quelques valeurs. C'est le cas, par exemple, de la fonction cube, dont la dérivée s'annule seulement en 0.

Par ailleurs, lorsque la fonction change de sens de variation en a, on dit qu'elle admet un extremum local en a (minimum ou maximum). On a donc :

Propriété 6.8. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I contenant a et f' sa fonction dérivée.*
f' s'annule et change de signe en $a \Leftrightarrow f$ admet un extremum local en a

On l'admettra.
On a un maximum lorsque $f'(x)$ est positive avant a et négative après, et un minimum lorsque $f'(x)$ est négative avant a et positive après.

Remarque. Local signifie qu'aux alentours de a ce sera un extremum mais, qu'ailleurs, il se peut que f prenne des valeurs supérieures ou inférieures à cet extremum comme on a pu le voir dans l'activité 6.8.

6.2.4 Exercices

Technique

EXERCICE 6.9.
Montrer que la fonction racine carrée est dérivable en tout nombre appartenant à $]0;+\infty[$ mais pas en 0

EXERCICE 6.10.
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 4$
2. $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$
3. $f(x) = (2x+3)(3x-7)$ pour $x \neq \frac{7}{3}$
4. $f(x) = \frac{2x+4}{3x-1}$ pour $x \neq \frac{1}{3}$
5. $f(x) = \frac{x+5}{x^2+1}$
6. $f(x) = \left(2x^2 + 3x + 1\right)^5$
7. $f(x) = \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$

EXERCICE 6.11.
Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

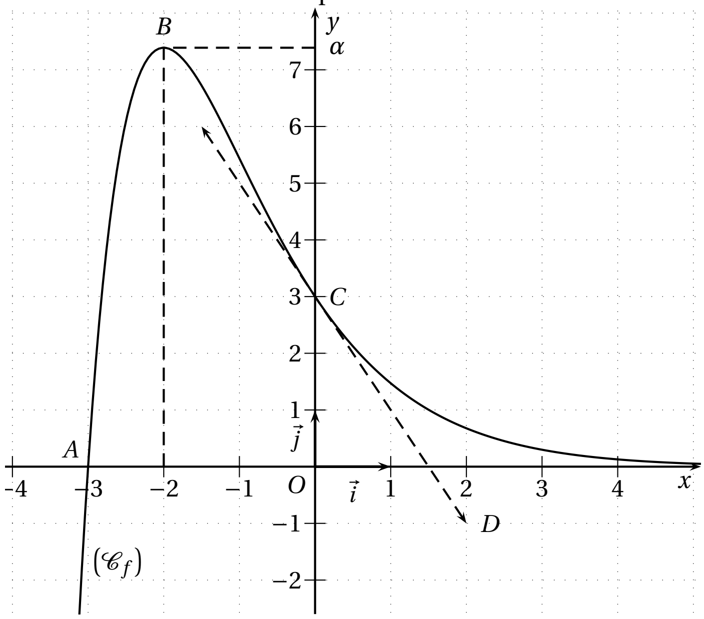
1. $f(x) = \left(x^2 + x + 1\right)^2$
2. $f(x) = (x-1)^4(x+1)^4$
3. $f(x) = x^3\left(1 + \sqrt{x}\right)$
4. $f(x) = 4x^2\sqrt{x}$
5. $f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)\left(x + \sqrt{x}\right)$
6. $f(x) = \sqrt{2 - x}$

Lectures graphiques

EXERCICE 6.12.
La courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ de la figure 6.5 de la présente page est une partie de la courbe représentative, relativement à un repère orthogonal, d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\,;\,+\infty[$.
On donne les renseignements suivants :

- les points $A(-3;0)$, $B(-2;\alpha)$ où $\alpha \approx 7{,}39$ et $C(0;3)$ sont des points de la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$;
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ en $+\infty$.
- la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-2;+\infty[$;
- la droite tangente à la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ en son point C passe par le point $D(2;-1)$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

FIGURE 6.5 – Repère de l'exercice 6.12



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse à l'aide des renseignements ci-dessus ou du graphique.

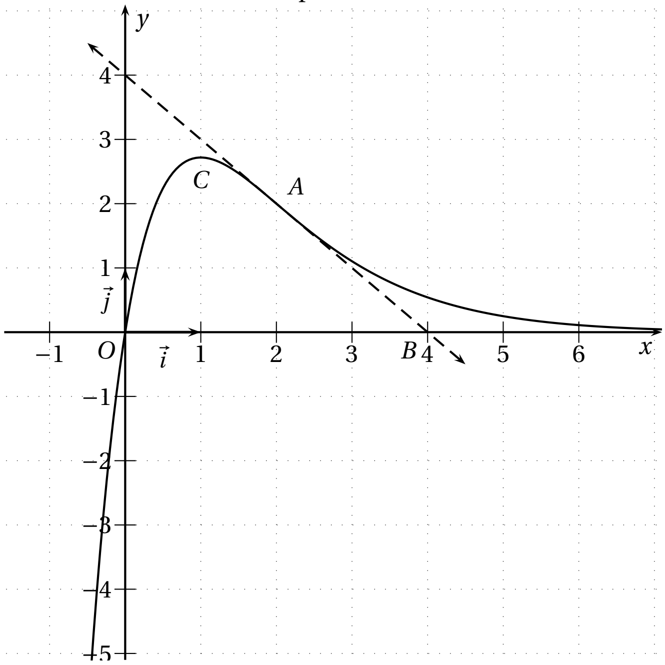
1. $f'(0) = -\frac{1}{2}$.
2. Pour tout x élément de l'intervalle $[-2;+\infty[$, on a : $f'(x) \leqslant 0$.
3. Soit une fonction g telle que $g' = f$ sur l'intervalle $[-4;+\infty[$, alors la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[-2;+\infty[$.

EXERCICE 6.13.
On a représenté sur la figure 6.6 de la présente page, dans un repère orthonormal, la courbe représentative Γ d'une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La courbe Γ passe par les points $O(0;0)$ et $A(2;2)$.
La droite (AB) est la tangente en A à la courbe Γ. La tangente à Γ au point C d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $g(0)$, $g(2)$, $g'(1)$ et $g'(2)$.
2. Une des représentations graphiques page suivante, représente la fonction dérivée g' de g. Déterminer laquelle.
3. Une des représentations graphiques page ci-contre, représente une fonction h telle que $h' = f$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer laquelle.

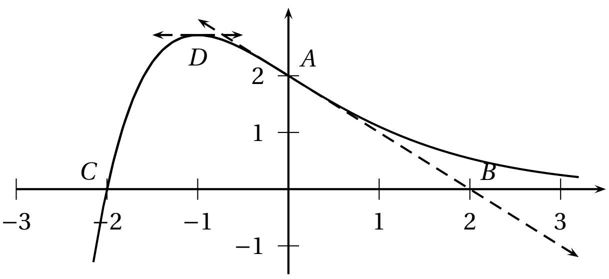
Vous justifierez vos choix à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques.

FIGURE 6.6 – Repère de l'exercice 6.13

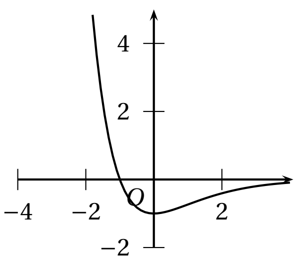


EXERCICE 6.14.
On a représenté ci-dessous la courbe représentative Γ, dans un repère orthonormal, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La courbe Γ passe par les points $A(0\ ;\ 2)$ et $C(-2\ ;\ 0)$ et la droite (AB) est la tangente en A à Γ. La tangente à Γ en son point D d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.

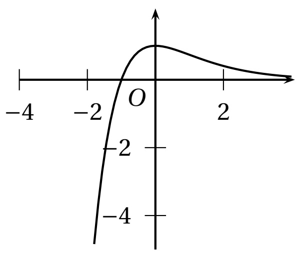
1. Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction dérivée f' de f et une autre représente une fonction h telle que $h' = f$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction h.
Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix



Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

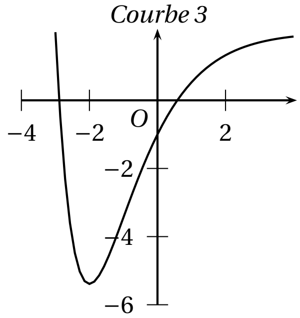
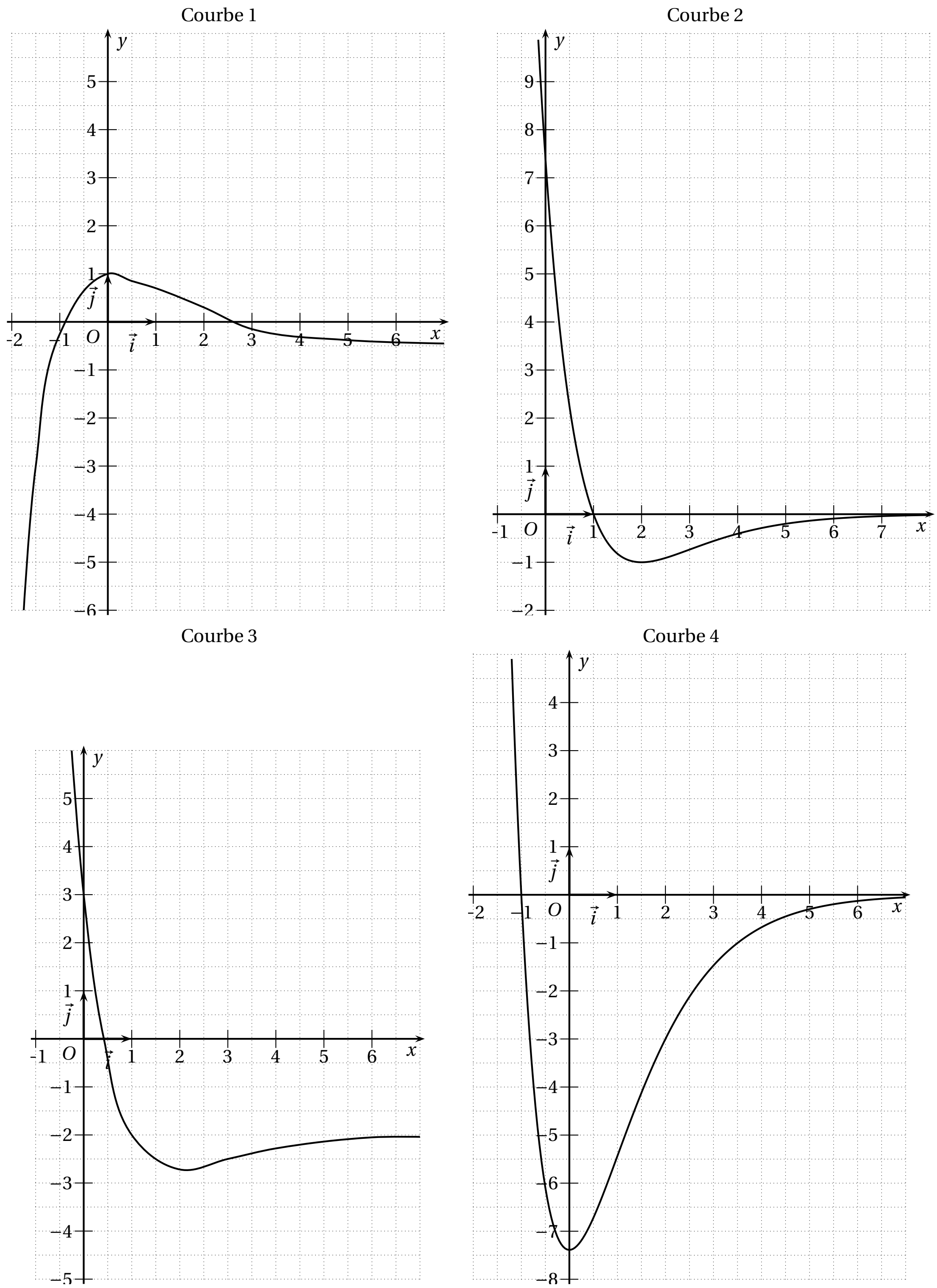


FIGURE 6.7 – Courbes de l'exercice 6.13



EXERCICE 6.15.
La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;6]$.
Soit A le point du plan de coordonnées $(-1\,;0)$ et B le point du plan de coordonnées $(1\,;5)$. Le point B appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B.

1. Déterminer $f'(1)$, où f' est la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0;6]$.
2. L'une des trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, et $\mathscr{C}_3$ représentées sur les figures 1, 2 et 3 de la présente page représente la fonction f'. Laquelle ? *Justifier votre réponse.*

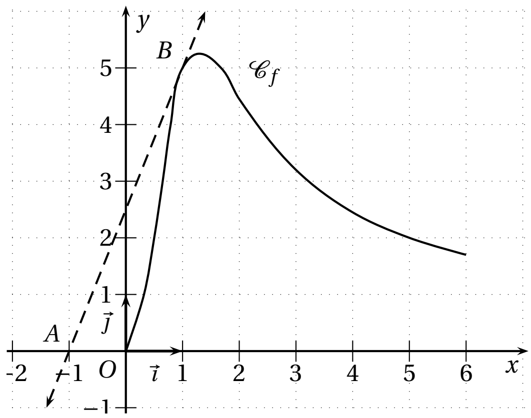


FIGURE 6.8 – Courbes de l'exercice 6.15
Figure 1

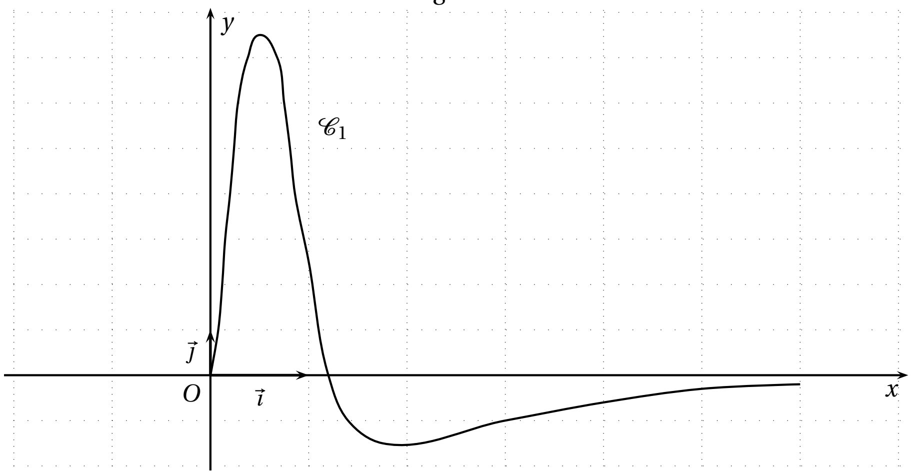


Figure 2

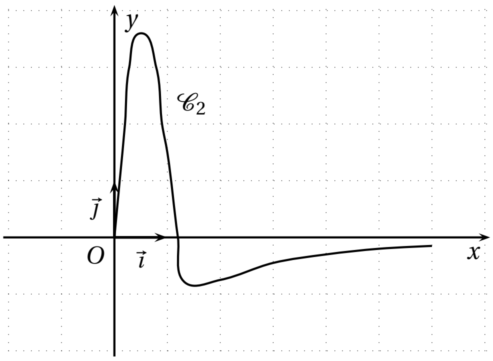
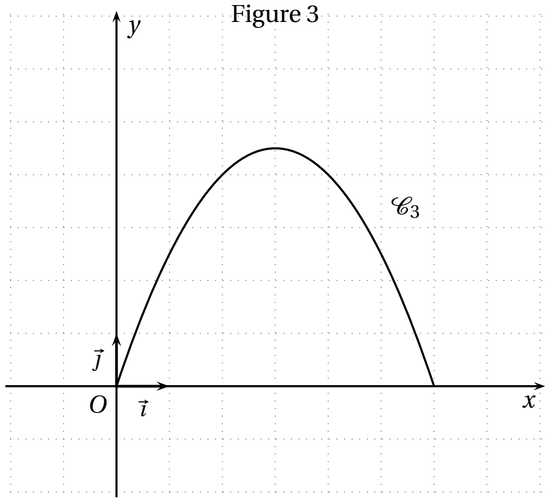


Figure 3



Études de fonctions

EXERCICE 6.16.
Soit $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
2. En déduire les variations de f.
3. Dresser le tableau des variations de f en y indiquant le signe de la fonction dérivée.
4. Montrer que f admet un extremum.

EXERCICE 6.17.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

1. Calculer la dérivée f' de f. Étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f en précisant les éventuels extremums.
2. Tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-1;3]$.
3. Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

EXERCICE 6.18.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x - 3$ On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Calculer la dérivée f' de f. Étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
3. Tracer T, les tangentes parallèles à l'axe des abscisses puis $\mathscr{C}$.

EXERCICE 6.19.
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \frac{1}{x} + x$

1. Déterminer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
2. Étudier le signe de la dérivée g'.
3. Dresser le tableau des variations de g.
4. Déterminer si g admet des extremums locaux.
5. Tracer la représentation graphique de la fonction g

EXERCICE 6.20.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$.
On note $\mathscr{C}$ sa représentation grahique.

1. Calculer la dérivée f' de f.
2. Soit A le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses. Calculer les coordonnées de A, puis une équation de la tangente T_A à la courbe $\mathscr{C}$ en A.
3. Soit B le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées. Calculer les coordonnées de B, puis une équation de la tangente T_B à la courbe $\mathscr{C}$ en B.
4. Tracer dans un même repère T_A, T_B et $\mathscr{C}$.

EXERCICE 6.21.
On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 3x$ et $g(x) = x^3 - 3x$.

1. Calculer la dérivée f' de f, étudier son signe et dresser le tableau des variations de f.
2. Faire de même pour g.
3. (a) Tracer soigneusement, dans un repère, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentant les fonctions f et g. (On se limitera à l'intervalle $[-2;2]$ et on prendra un pas de 0,5).
   (b) À l'aide du graphique, déterminer le nombre de points d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et leurs coordonnées.
   (c) Retrouver ces résultats par le calcul.

EXERCICE 6.22.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f et étudier son signe.
2. Dresser le tableau des variations de f en précisant la valeur M de son maximum et la valeur m de son minimum.
3. Tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-4;4]$.

EXERCICE 6.23.
On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1$ et $g(x) = \frac{x^2}{x-1}$

1. Calculer la dérivée f' de f, étudier son signe et en déduire le tableau des variations de f.
2. Calculer la dérivée g' de g, étudier son signe et en déduire le tableau des variations de g.
3. (a) Tracer soigneusement, dans un repère, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentant les fonctions f et g. (On se limitera à l'intervalle $[-3;5]$ et on prendra un pas de 0,25).
   (b) Á l'aide du graphique, déterminer le nombre de points d'intersections entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et leurs coordonnées.
   (c) Retrouver ces résultats par le calcul.

EXERCICE 6.24.
Question préliminaire : factoriser le polynôme $P(x) = x^2 + 2x - 3$
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^2 + 1$ et $g(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Calculer les dérivées f' et g'. Étudier leur signe.
2. Dresser les tableaux des variations des fonctions f et g.
3. Tracer les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g. (On se limitera à l'intervalle $[-3;3]$).
4. Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x) \leq g(x)$. (On pourra utiliser la question préliminaire).

EXERCICE 6.25.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Étudier le sens de variation de f.
3. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.
4. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
5. Peut-on trouver des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$?
6. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente a pour coefficient directeur -3.

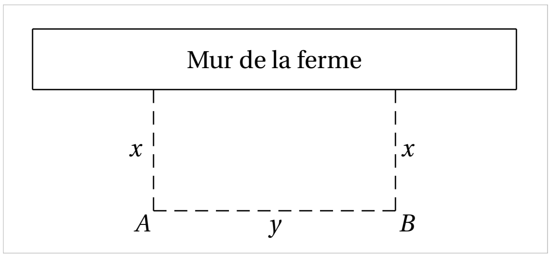
Problèmes

PROBLÈME 6.1.
On considère un rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm.

1. Déterminer ses dimensions (Longueur L et largeur l) sachant que son aire S est égale à $\frac{3}{4}$ cm^2
2. On recherche maintenant les dimensions du rectangle de façon que son aire S soit maximale.
   (a) Exprimer S en fonction de l
   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2-x)$.
   Calculer la dérivée f' et étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f. Tracer sa représentation graphique $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0;2]$.
   (c) En déduire les dimensions du rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm et l'aire S est maximale.

PROBLÈME 6.2.
Un fermier décide de réaliser un poulailler (de forme rectangulaire) le long du mur de sa maison. Ce poulailler devra avoir une aire de 392 m^2. Où doit-on placer les piquets A et B pour que la longueur de la clôture soit minimale ?
La figure ci-dessous représente le poulailler accolé à la ferme en *vue de dessus*. On appelle x la distance séparant chaque piquet au mur et y la distace entre les deux piquets A et B. (On a donc $x > 0$ et $y > 0$).

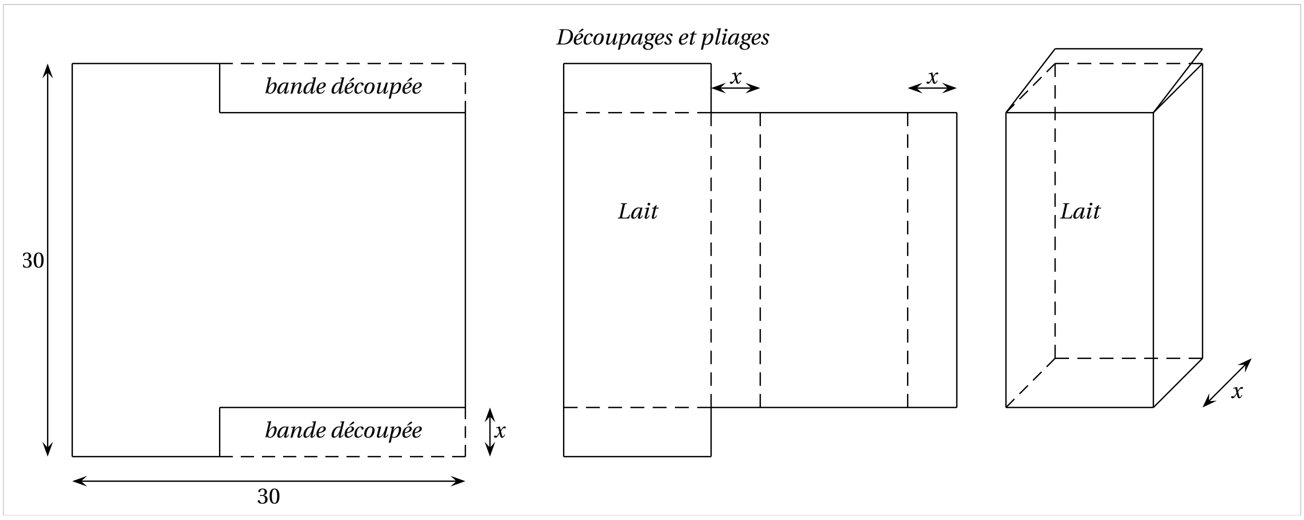
1. Sachant que l'aire du poulailler est de 392 m^2, exprimer y en fonction de x.
2. Démontrer que la longueur $l(x)$ du grillage est : $l(x) = \frac{2x^2+392}{x}$
3. Calculer la dérivée l' de l. en déduire le tableau des variations de l.
4. En déduire les dimensions x et y pour lesquelle la clôture a une longueur minimale. Préciser cette longueur.



PROBLÈME 6.3. 1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$

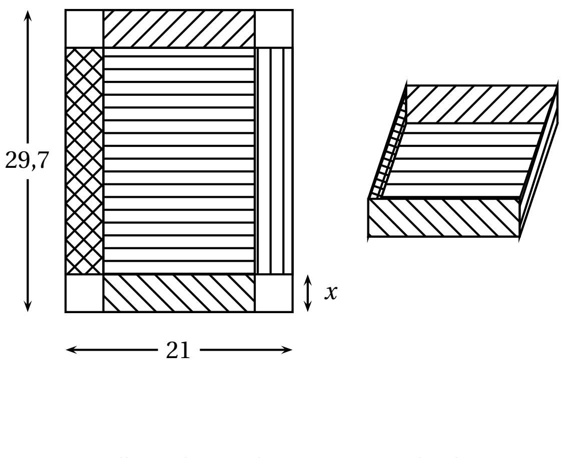
(a) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0;20]$. Dresser le tableau des variations de f.
(b) Déterminer une équation de la tangente Δ à la représentation graphique de f au point d'abscisse 0.
(c) Déterminer, par calcul, les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
(d) Tracer Δ et la représentation graphique de f pour $x \in [0;20]$.

2. Un fabricant envisage la production de briques de lait en carton obtenues en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille carrée (voir la figure de la présente page). Le côté de la feuille carrée mesure 30 cm et on désigne par x la mesure (en centimètres) de la largeur des bandes découpées. On suppose que $0 < x < 15$.
   (a) Démontrer que le volume (en cm^3) de la boîte est $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.
   (b) Pour quelle valeur de x le volume $V(x)$ est-il maximal ? Préciser la valeur de ce volume maximal en litres.



PROBLÈME 6.4.
On dispose d'une feuille de dimensions 21 cm × 29,7 cm avec laquelle on veut fabriquer une boite sans couvercle. Pour cela on découpe aux quatre coins de la feuille un carré de côté x. On obtient le patron de la boite. On se propose d'étudier le volume de la boite en fonction de x.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
2. On appelle $V(x)$ le volume de la boite.
   (a) Montrer que $V(x) = x(29,7 - 2x)(21 - 2x)$.
   (b) Étudier les variations de V.
   (c) En déduire la (ou les) valeur(s) de x pour laquelle (lesquelles) le volume de la boite est maximum. *On donnera le(s) résultat(s) au millimètre.*



PROBLÈME 6.5.
Quel doit être le format (hauteur, rayon) d'une boite de conserve cylindrique pour que, pour un volume donné, la quantité de métal pour la concevoir, qu'on supposera proportionnelle à sa surface, soit minimale.

PROBLÈME 6.6.
Soit $\mathscr{C}$ la représentation graphique d la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par : $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x-2}$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Déterminer a et b tels que la droite d'équation $y = 8$ soit tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.
3. Déterminer l'abscisse de l'autre point de $\mathscr{C}$ où la tangente est horizontale.

PROBLÈME 6.7.
Une parabole $\mathscr{P}$ admet, dans un repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$, une équation du type : $y = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Déterminer les coefficients a, b et c sachant que $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse 3, l'axe des ordonnées au point B d'ordonnées 2 et qu'elle admet en ce point la droite d'équation $y = 2x + 2$ pour tangente.
Indiquer l'abscisse du second point d'intersection de $\mathscr{P}$ avec l'axe des abscisses.

PROBLÈME 6.8.
Une entreprise fabrique x portes blindées par jour, x variant de 0 à 120. On estime que le coût total de fabrication, noté $C(x)$, est donné, en euros, par : $C(x) = 0,001x^3 - 0,1x^2 + 95x + 1500$.
La recette de l'entreprise obtenue par la vente de x portes, notée $R(x)$, en euros, est donnée par : $R(x) = 228x$.
On suppose que chaque porte est vendue.

1. Étude de la fonction bénéfice
   (a) Exprimer $B(x)$ en fonction de x.
   (b) Calculer $B'(x)$ pour tout x de $[0\,;120]$.
   (c) Étudier le signe de $B'(x)$ puis dresser le tableau des variations de la fonction B.
   (d) À l'aide du tableau de variation et d'un tableau de valeurs donné par la calculatrice, donner les arrondis au dixième des solutions de l'équation $B(x) = 0$.
   En déduire le nombre de portes vendues pour que la fabrication soit rentable. Justifier votre réponse.
   (e) Pour quel nombre de portes vendues, le bénéfice est-il maximal ? Justifier votre réponse.
2. Courbe représentative de la fonction B
   (a) Dans un repère orthogonal, tracer la courbe représentative de la fonction B.
   (b) Vérifier graphiquement vos réponses aux questions d) et e) de la partie 1.

PROBLÈME 6.9.
Une entreprise fabrique des pizzas comptées par lots de 40 pizzas. On suppose qu'elle vend toute sa production. Les coûts de production sont, d'une part, les coûts fixes (amortissement du four, assurances, etc.), d'autre part, les coûts variables (ingrédients, salaires, etc.) qui dépendent du nombre q de lots fabriqués.
On estime que la fonction de coût total de cette entreprise est donnée par la fonction suivante :

$$C(q) = \frac{1}{2}q^3 - 2q^2 + 5q + 20$$

où q est le nombre de lots fabriqués et $C(q)$ est exprimé en dizaine d'euros.

1. Études du coût marginal et du coût total.
   Le coût marginal, noté $C_m(q)$ est, pour une quantité q donnée, l'augmentation du coût occasionnée par la production d'une unité supplémentaire. Sa valeur exacte est donc $C_m(q) = C(q+1) - C(q)$ mais dans la pratique on prend la valeur approchée $C_m(q) = C'(q)$, la différence entre les deux valeurs étant négligeable.
   (a) Étudier les variations de la fonction C sur l'intervalle $[1\,;8]$.
   (b) Étudier les variations de la fonction C' sur l'intervalle $[1\,;8]$.
   (c) Représenter graphiquement, dans le même repère, les fonctions C et C' (unités graphiques : 2 cm pour un lot en abscisses et 1 cm pour 5 dizaines d'euros en ordonnées).
2. Étude du coût moyen.
   Le coût de production par unité produite est appelé coût moyen de production ; on le note généralement $C_M(q)$.
   On a donc $C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$.
   (a) Une fonction auxiliaire
   Soit $D(q)$ la fonction définie sur $[1\,;8]$ par $D(q) = q^3 - 2q^2 - 20$
      i. Étudier les variations de $D(q)$ puis dresser son tableau de variations.
      ii. En déduire que l'équation $D(q) = 0$ admet une unique solution q_0 dans $[1\,;8]$.
      iii. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de q_0 au dixième.
   (b) Expliquer pourquoi l'entreprise à tout intérêt à produire une quantité telle que $C_M(q)$ soit minimale.
   (c) Montrer que $C'_M(q) = \frac{q^3-2q^2-20}{q^2}$
   (d) Dresser le tableau des variations de C_M
   (e) En déduire la production optimale de l'entreprise.
   (f) i. Représenter C_M dans le même graphique que C et C_m.
      ii. Déterminer l'abscisse du point d'intersection des courbes de C_M et C_m.
      Que constate-t-on ? *Cette propriété est toujours vraie.*

3. Concurrence parfaite.
   Dans cette partie on suppose que l'on est en situation de concurrence parfaite, c'est-à-dire que le prix de vente est imposé par le marché.
   Le prix de vente du lot est calculé à partir du prix de vente unitaire fixé à 7,5 €la pizza.
   (a) Calculer le prix de vente d'un lot de pizzas.
   Quelle est la recette $R(q)$, en dizaines d'euros, pour q lots vendus ?
   (b) Sur le même graphique que précédemment, tracer la droite d'équation $y = 30$.
   (c) « Tant que le coût marginal est inférieur au prix de vente, l'entreprise a intérêt à produire. »
   Expliquer pourquoi.
   (d) Le bénéfice produit par la vente de q lots de pizzas est $B(q) = R(q) - C(q)$.
   Étudier les variations de la fonction B et en déduire la production qui assure le bénéfice maximal.
   Que représente cette production sur le graphique précédent ?

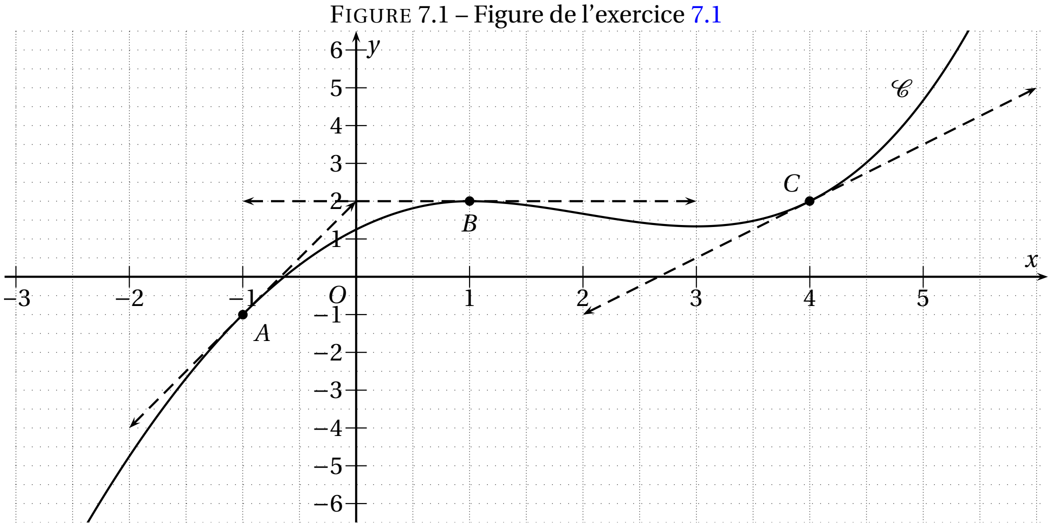
Devoir surveillé n°7

Nombre dérivé

EXERCICE 7.1 (4 points)**.**
*Pour **tous** les élèves.*
On donne sur la figure 7.1 de la présente page la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f en y indiquant les droites tangentes aux points A, B et C.

1. Donner par lecture graphique $f(-1)$, $f(1)$ et $f(4)$.
2. Donner par lecture graphique $f'(-1)$, $f'(1)$ et $f'(4)$.
3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 4.

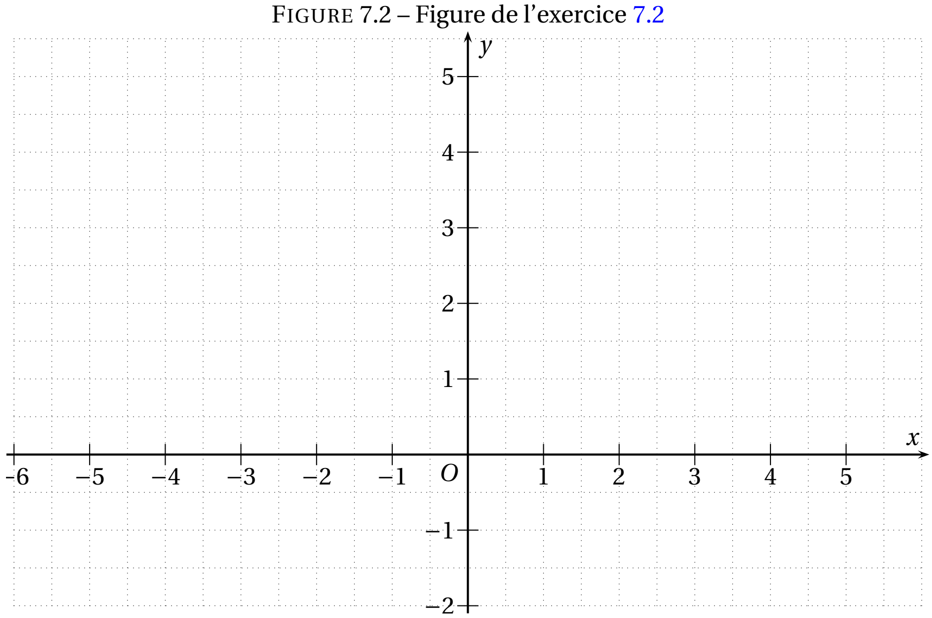
FIGURE 7.1 – Figure de l'exercice 7.1



EXERCICE 7.2 (6 points)**.**
*Pour les élèves **ne suivant pas** l'enseignement de spécialité.*
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ dans le repère fourni sur la figure 7.2 de la présente page représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-6;6]$ ayant les propriétés suivantes (*on tracera **toutes** les tangentes qu'on peut déduire de l'énoncé*) :

- f est paire ;
- $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$;
- $f(2) = 3$ et $f'(2) = 2$;
- $f(5) = 3$ et $f'(5) = -\frac{1}{2}$.

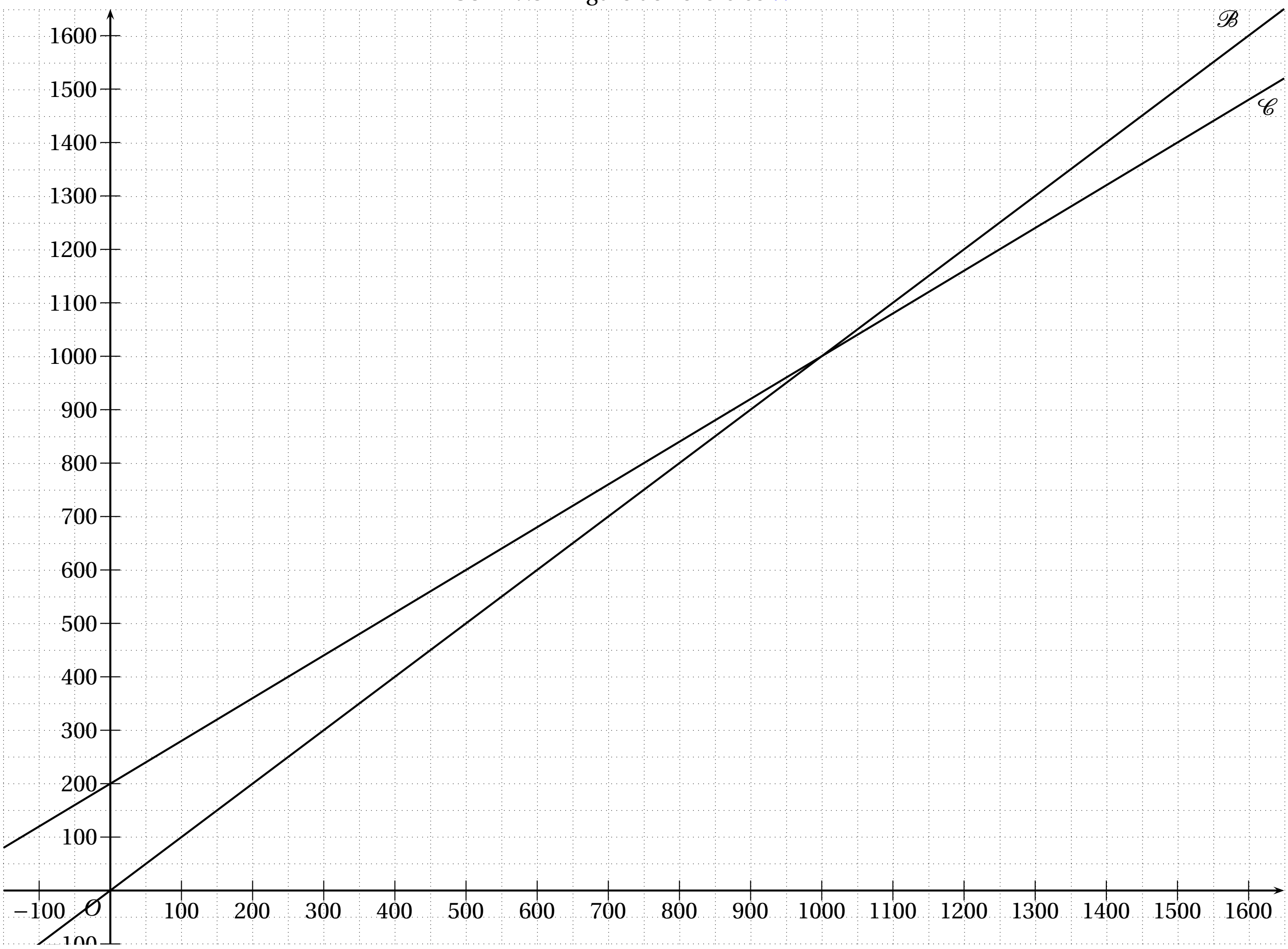
FIGURE 7.2 – Figure de l'exercice 7.2



EXERCICE 7.2 (6 points)**.**
*Pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité.*
Le 1er janvier 2005, une grande entreprise compte 1500 employés.
Une étude montre que lors de chaque année à venir, 20 % de l'effectif du 1er janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 200 jeunes dans l'année. Pour tout entier n on appelle u_n le nombre d'employés le 1er janvier de l'année $(2005+n)$.

1. Déterminer u_0, u_1 et u_2.
2. Montrer que $u_{n+1} = 0,8u_n + 200$.
3. On a tracé dans le repère de la figure 7.3 de la présente page les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{B}$ d'équations respectives $y = 0,8x+200$ et $y = x$.
   (a) Sans justifier, construire la « représentation en chemin » de la suite (u_n).
   (b) Que peut-on conjecturer de la monotonie de la suite (u_n) ?
   (c) Que peut-on conjecturer pour u_n quand n devient grand ?
4. On pose $v_n = u_n - 1000$.
   (a) Déterminer v_0, v_1 et v_2.
   (b) Montrer que $v_{n+1} = 0,8v_n$. Que peut-on en déduire pour la suite (v_n) ?
   (c) En déduire la monotonie de (v_n) puis celle de (u_n).

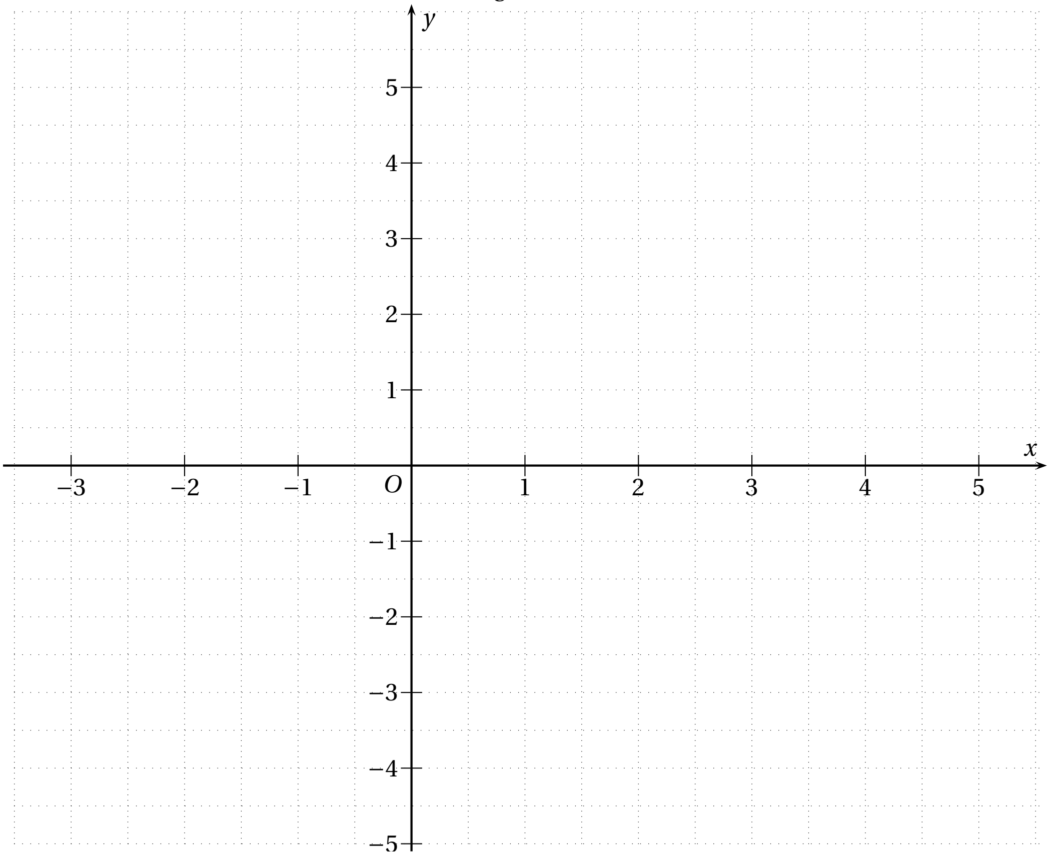
FIGURE 7.3 – Figure de l'exercice 7.2



EXERCICE 7.3 (10 points)**.**
*Pour **tous** les élèves.*
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. (a) Déterminer les coordonnées de A, point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées.
   (b) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en A.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
3. Déterminer $f(1)$, $f'(1)$ et l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
4. (a) Placer tous les points qu'on peut déduire des questions précédentes dans le repère de la figure 7.4 de la présente page.
   (b) Tracer toutes les tangentes qu'on peut déduire des questions précédentes dans le même repère.
   (c) Tracer $\mathscr{C}$ dans le même repère.

FIGURE 7.4 – Figure de l'exercice 7.3

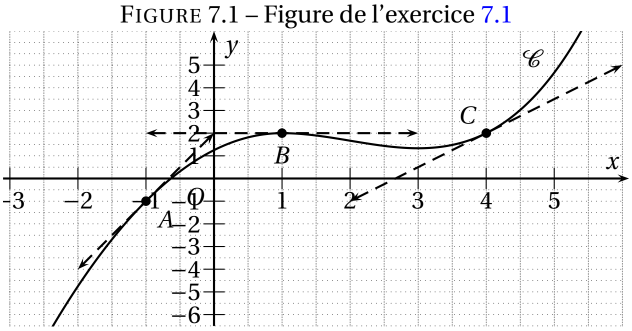


Corrigé du devoir surveillé n°7

EXERCICE 7.1 (4 points).
*Pour **tous** les élèves.*
On donne sur la figure 7.1 de la présente page la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f en y indiquant les droites tangentes aux points A, B et C.

1. Donner par lecture graphique $f(-1)$, $f(1)$ et $f(4)$.
   - $A(-1;-1) \in \mathscr{C}$ donc $f(-1) = -1$;
   - $B(1;2) \in \mathscr{C}$ donc $f(1) = 2$;
   - $C(4;2) \in \mathscr{C}$ donc $f(4) = 2$.
2. Donner par lecture graphique $f'(-1)$, $f'(1)$ et $f'(4)$.
   - $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1. On a donc $f'(-1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{1} = 3$;
   - $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1, or cette tangente est horizontale donc $f'(1) = 0$;
   - $f'(4)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 4. On a donc $f'(4) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.
3. Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 4.
   Soit T_4 cette tangente. On a $T_4 : y = f'(4)(x-4) + f(4) = 1{,}5(x-4) + 2 = 1{,}5x - 6 + 2 = 1{,}5x - 4$.

FIGURE 7.1 – Figure de l'exercice 7.1



EXERCICE 7.2 (6 points).
*Pour les élèves **ne suivant pas** l'enseignement de spécialité.*
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ dans le repère fourni sur la figure 7.2 page suivante représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-6;6]$ ayant les propriétés suivantes (*on tracera **toutes** les tangentes qu'on peut déduire de l'énoncé*) :

- f est paire ;
- $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$;
- $f(2) = 3$ et $f'(2) = 2$;
- $f(5) = 3$ et $f'(5) = -\frac{1}{2}$.

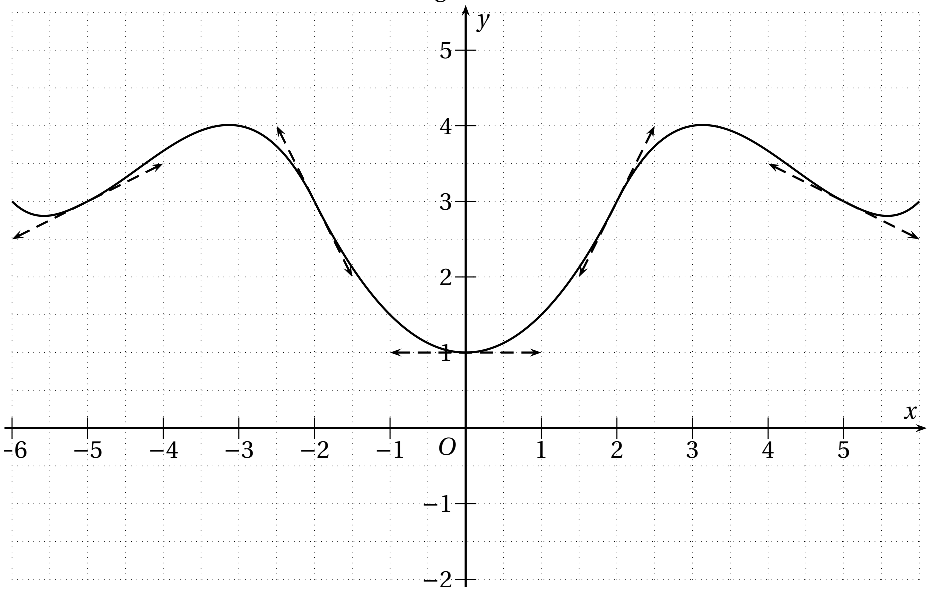
- f est définie sur l'intervalle $[-6;6]$, la courbe doit donc aller d'un point d'abscisse -6 à un point d'abscisse 6 ;
- f est paire, la courbe doit donc être symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;
- les autres informations nous permettent d'obtenir 3 points de la courbe et 3 tangentes en ces points et, comme la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on doit aussi tracer leurs symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, soit 5 points et 5 tangentes.

Voir la figure 7.2 page suivante pour un exemple de courbe.

EXERCICE 7.2 (6 points).
*Pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité.*
Le 1er janvier 2005, une grande entreprise compte 1500 employés.
Une étude montre que lors de chaque année à venir, 20 % de l'effectif du 1er janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 200 jeunes dans l'année. Pour tout entier n on appelle u_n le nombre d'employés le 1er janvier de l'année $(2005 + n)$.

1. Déterminer u_0, u_1 et u_2.
   - $u_0 = 1500$
   - $u_1 = (1 - \frac{20}{100})u_0 + 200 = (1 - \frac{20}{100})1500 + 200 = 1400$
   - $u_2 = (1 - \frac{20}{100})u_1 + 200 = (1 - \frac{20}{100})1400 + 200 = 1320$
2. Montrer que $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 200$.
   $u_{n+1} = (1 - \frac{20}{100})u_n + 200 = 0{,}8u_n + 200$
3. On a tracé dans le repère de la figure 7.3 page 91 les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{B}$ d'équations respectives $y = 0{,}8x + 200$ et $y = x$.
   (a) Sans justifier, construire la « représentation en chemin » de la suite (u_n).
   Voir la figure 7.3 page 91.
   (b) Que peut-on conjecturer de la monotonie de la suite (u_n) ?
   La suite semble décroissante.

FIGURE 7.2 – Figure de l'exercice 7.2



(c) Que peut-on conjecturer pour u_n quand n devient grand ?
Il semble que lorsque n devient grand, la représentation en chemin tend vers le point (1000; 1000) donc u_n tend vers 1000.

4. On pose $v_n = u_n - 1000$.
   (a) Déterminer v_0, v_1 et v_2.
   - $v_0 = u_0 - 1000 = 1500 - 1000 = 500$
   - $v_1 = u_1 - 1000 = 1400 - 1000 = 400$
   - $v_2 = u_2 - 1000 = 1320 - 1000 = 320$

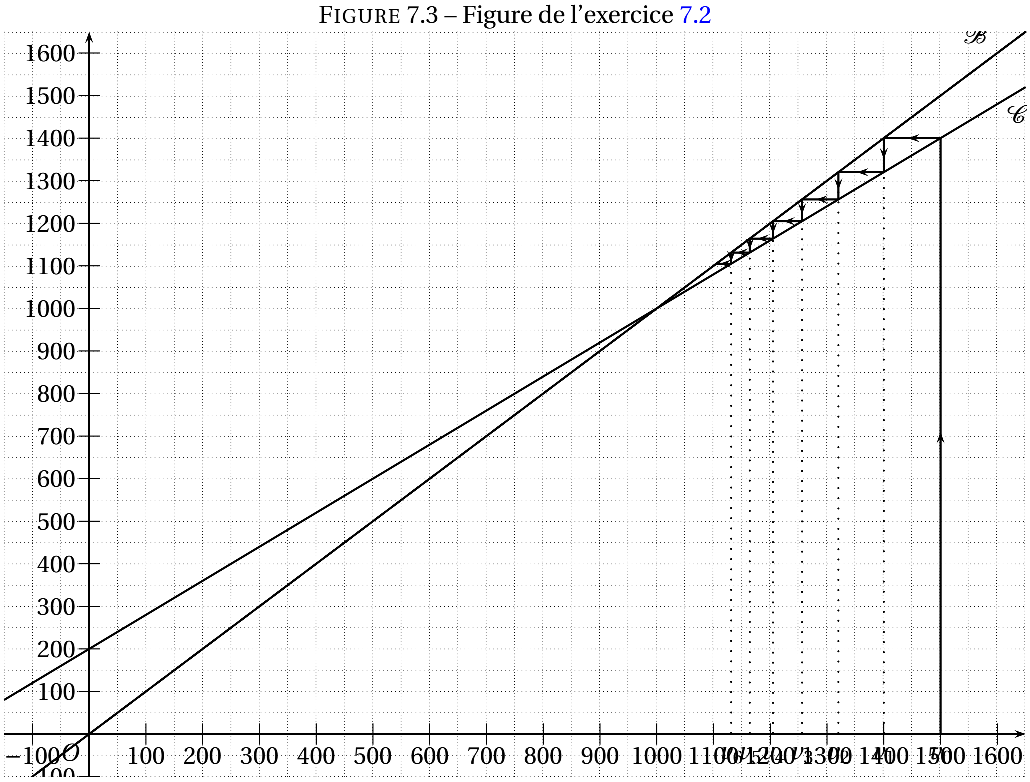
   (b) Montrer que $v_{n+1} = 0,8v_n$. Que peut-on en déduire pour la suite (v_n) ?

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1000 \\ &= 0,8u_n + 200 - 1000 \\ &= 0,8u_n - 800 \\ &= 0,8(u_n - 1000) \\ &= 0,8v_n \end{aligned}$$

   La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,8.

   (c) En déduire la monotonie de (v_n) puis celle de (u_n).
   La suite (v_n) est géométrique de raison 0,8, or $0 < 0,8 < 1$ donc c'est une suite décroissante.
   $u_n = v_n + 1000$ donc elle est aussi décroissante.

FIGURE 7.3 – Figure de l'exercice 7.2



EXERCICE 7.3 (10 points)**.**
*Pour **tous** les élèves.*
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. (a) Déterminer les coordonnées de A, point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées.
   On cherche les coordonnées du point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0. Or tout point de la courbe a pour coordonnées $(x\,;f(x))$ donc $A(0\,;f(0)) = (0\,;-3)$.

   (b) Déterminer le coefficient directeur de la tangente $\mathscr{C}$ en A.
   Étudions le comportement de $\frac{f(0+h)-f(0)}{0+h-0}$ quand h tend vers 0.

$$\begin{aligned}\frac{f(0+h)-f(0)}{0+h-0} &= \frac{f(h)-f(0)}{h}\\ &= \frac{h^2-2h-3-(-3)}{h}\\ &= \frac{h^2-2h}{h}\\ &= \frac{h(h-2)}{h}\\ &= h-2\end{aligned}$$

   Donc, quand h tend vers 0, $\frac{f(0+h)-f(0)}{0+h-0} = h-2$ tend vers -2 donc $f'(0) = -2$.

2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
   On cherche les coordonnées des points de $\mathscr{C}$ d'ordonnée 0. Or tout point de la courbe a pour coordonnées $(x\,;f(x))$, donc il faut résoudre $f(x) = 0$.
   f est un trinôme avec $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16 > 0$ donc il y a deux solutions à l'équation $f(x) = 0$: $x_1 = \frac{-(-2)-4}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{-(-2)+4}{2} = 3$.
   On a donc deux points d'intersection avec l'axe des abscisses de coordonnées $(-1\,;0)$ et $(3\,;0)$.

3. Déterminer $f(1)$, $f'(1)$ et l'équation de la tangente $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
   - $f(1) = 1 - 2 - 3 = -4$
   - Étudions le comportement de $\frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1}$ quand h tend vers 0.

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1} &= \frac{(1+h)^2-2(1+h)-3-(-4)}{h}\\ &= \frac{1+2h+h^2-2-2h-3+4}{h}\\ &= \frac{h^2}{h}\\ &= \frac{h\times h}{h}\\ &= h\end{aligned}$$

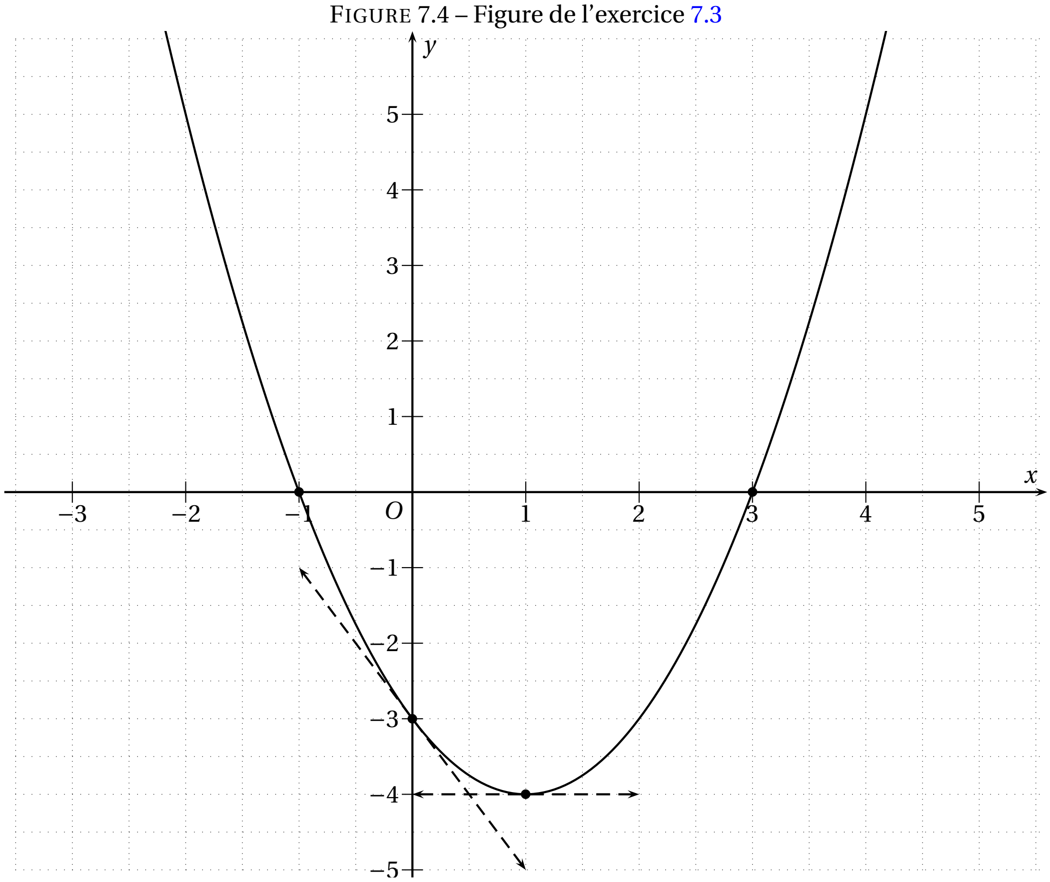
Or, quand h tend vers 0, $\frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1} = h$ tend vers 0 donc $f'(1) = 0$.

4. (a) Placer tous les points qu'on peut déduire des questions précédentes dans le repère de la figure 7.4 de la présente page.
   Quatre points à placer : $A(0\,;-3)$, $(-1\,;0)$, $(3\,;0)$ et $(1\,;-4)$.

   (b) Tracer toutes les tangentes qu'on peut déduire des questions précédentes dans le même repère.
   Deux tangentes à tracer : celle en 0 et celle en 1.

   (c) Tracer $\mathscr{C}$ dans le même repère.
   Voir la figure 7.4 de la présente page.

FIGURE 7.4 – Figure de l'exercice 7.3



Devoir surveillé n°8

Fonction dérivée – Fonctions de deux variables

EXERCICE 8.1 (3 points).

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

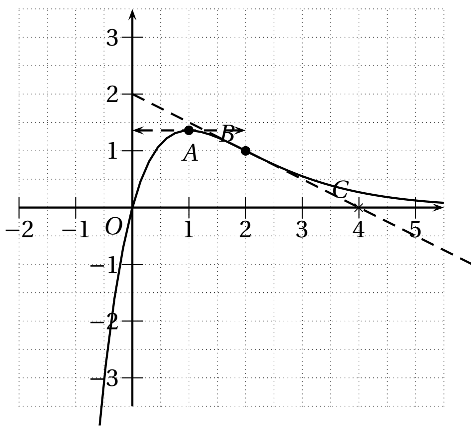
- $f(x) = (2x+3)\sqrt{x}$
- $g(x) = (x^2+4x+3)^3$

EXERCICE 8.2 (3 points).

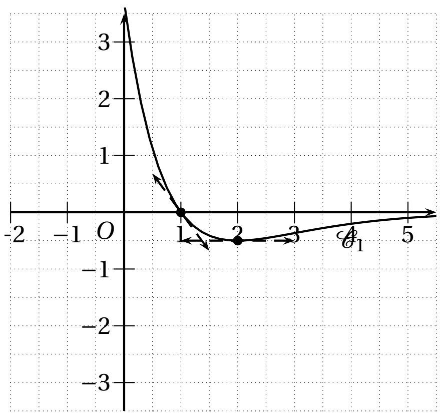
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure ci-contre est une partie de la courbe représentative, relativement à un repère orthogonal, d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

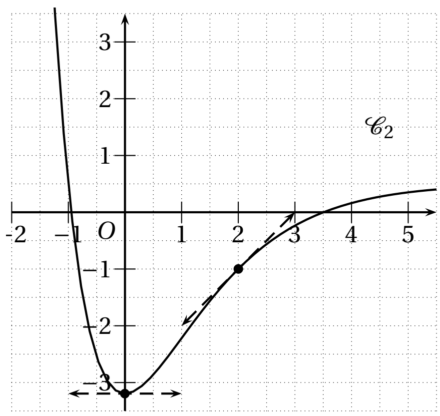
On donne les renseignements suivants :

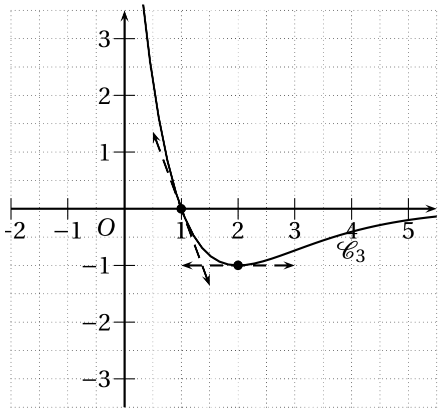
- la courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 ;
- le point $B(2; 1)$ appartient à $\mathscr{C}$;
- la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B passe par le point $C(4; 0)$;



1. Déterminer graphiquement $f(2)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
2. Une des représentations graphiques ci-dessous, représente la fonction dérivée f' de f. En justifiant votre choix *à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques*, déterminer la courbe associée à la fonction f'.



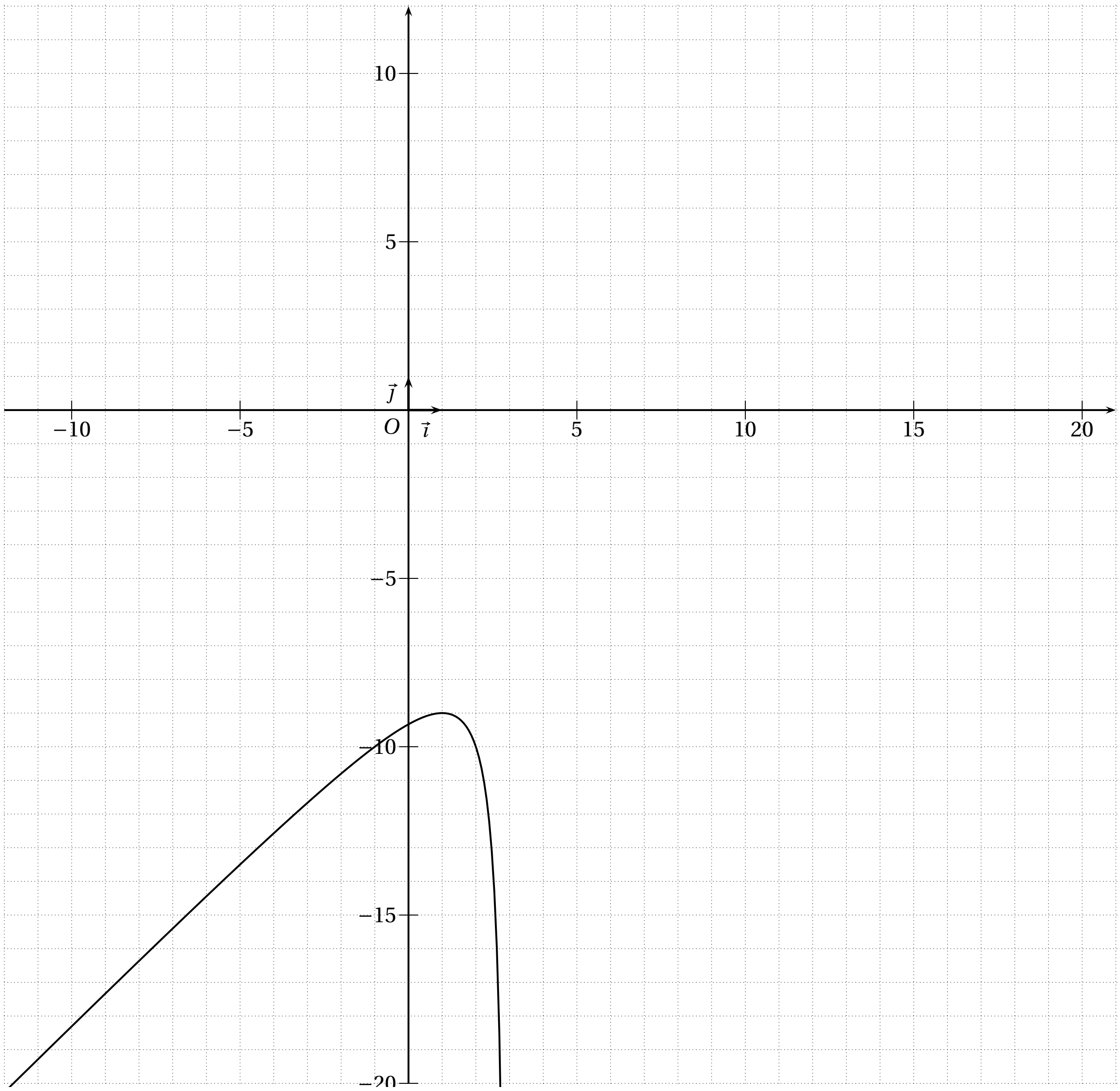




EXERCICE 8.3 (8 points)**.**
f est la fontion définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-11x+28}{x-3}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.
On donne en annexe page 99 un repère dans lequel une partie de $\mathscr{C}$ est déjà tracée.
On complètera le schéma avec les éléments rencontrés au fur et à mesure de l'exercice (points, tangentes, etc.).

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ et on note f' la fonction dérivée de f.
   (a) Justifer que $f'(x) = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x et établir le tableau de variation de la fonction f (on indiquera les extremums locaux de f).
2. (a) Déterminer, s'il y en a, les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
   (b) Soit T la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de T.
3. (a) Tracer les tangentes de la question 2.
   (b) Compléter le tracé de $\mathscr{C}$.

FIGURE 8.1 – Annexe de l'exercice 8.3



EXERCICE 8.4 (6 points)**.**
*Pour les élèves **n'ayant pas suivi** l'enseignement de spécialité.*
On considère un rectangle de dimensions ℓ et L. On appelle P son périmètre et S son aire.

1. Exprimer P en fonction de ℓ et L. Faire de même pour S.
2. On suppose maintenant que son périmètre est égal à 8 cm et que son aire est égale à 3,75 cm^2.
   Déterminer ℓ et L.
3. On suppose que son périmètre est égal à 4 cm et on recherche maintenant les dimensions du rectangle de façon que son aire S soit maximale.
   (a) Expliquer pourquoi $L = 2 - \ell$.
   (b) En déduire une expression de S en fonction de ℓ.
   (c) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2-x)$.
   Calculer la dérivée f' et étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f.
   (d) En déduire les dimensions du rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm et l'aire S est maximale.

EXERCICE 8.4 (6 points)**.**
*Pour les élèves **ayant suivi** l'enseignement de spécialité.*
Une entreprise fabrique des savons et des bougies parfumées en quantités respectives x et y exprimées en tonnes.
Le coût total de production z, exprimé en milliers d'euros, est donné par la relation $z = 2x^2 - 8x + y^2 - 6y + 18$ avec $x \in [0\,;6]$ et $y \in [0\,;8]$.

1. La surface $\mathscr{S}$ représentant le coût en fonction de x et y dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ est donnée sur la figure 8.2 page 101.
   (a) Le point $A(3\,;2\,;3)$ appartient-il à la surface $\mathscr{S}$? Justifier.
   (b) Les points F et G sont sur la surface $\mathscr{S}$.
   Donner sans justifier leurs coordonnées.
   (c) Les points suivants appartiennent à $\mathscr{S}$:
   - le point B d'abscisse 5 et d'ordonnée 1 ;
   - le point C d'abscisse 4 et de cote 20 ;
   - le point D d'ordonnée 5 et de cote 30.

   Les placer sur la figure 8.2 page 101.
   (d) Soit $y = 2$. Exprimer alors z sous la forme $z = f(x)$ puis donner la nature de la section de la surface $\mathscr{S}$ par le plan d'équation $y = 2$ en justifiant.
2. On donne, sur la figure 8.3 page 101, la projection orthogonale de la surface $\mathscr{S}$ sur le plan $(x\mathrm{O}y)$ (« vue de dessus de la surface $\mathscr{S}$ »).
   (a) E' est la projection orthogonale dans le plan $(x\mathrm{O}y)$ d'un point E situé sur la surface $\mathscr{S}$.
      i. Déterminer les coordonnées de E.
      ii. On appelle E'' la projection orthogonale de E dans le plan $(y\mathrm{O}z)$.
      Donner les coordonnées de E''.
   (b) Représenter sur la figure 8.3 page 101 les points B', C' et D', projections orthogonales respectives de B, C et D de la question 1c dans le plan $(x\mathrm{O}y)$.

FIGURE 8.2 – Figure de l'exercice 8.4 (spécialité)

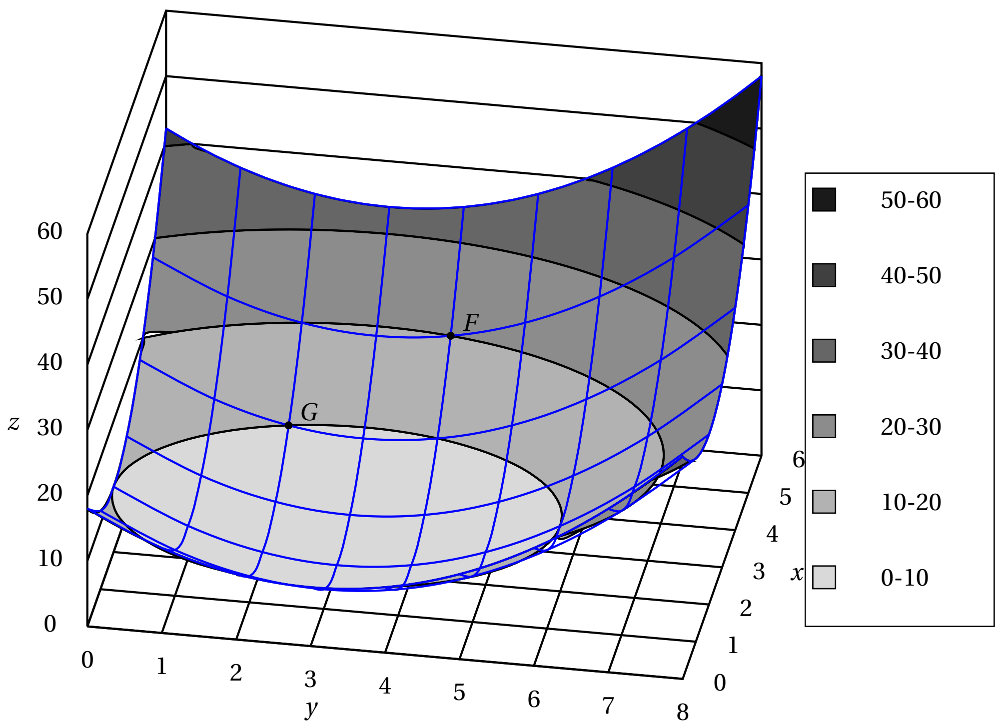
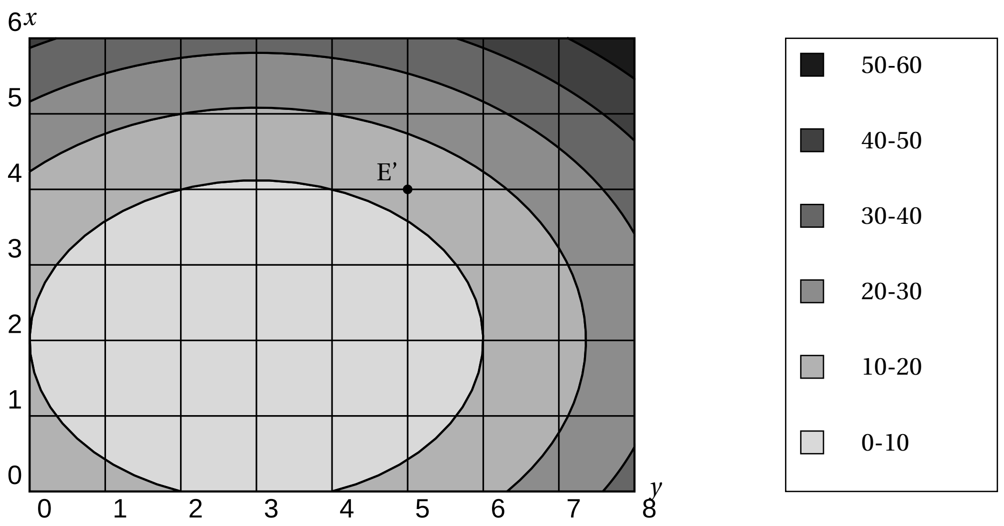


FIGURE 8.3 – Figure de l'exercice 8.4 (spécialité)



Corrigé du devoir surveillé n°8

Fonction dérivée – Fonctions de deux variables

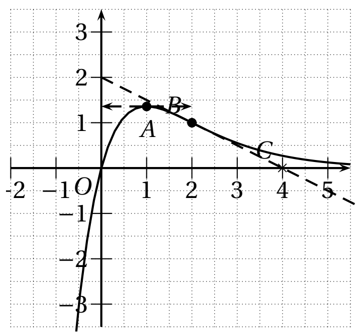
EXERCICE 8.1 (3 points)**.**
Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

- $f(x) = (2x+3)\sqrt{x}$
- $g(x) = (x^2+4x+3)^3$

- $f = u \times v$ avec $u(x) = 2x+3$ et $v(x) = \sqrt{x}$ or $f' = u'v + uv'$.
  Comme $u'(x) = 2$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ alors $f'(x) = 2\sqrt{x} + (2x+3)\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- $g = u^3$ avec $u(x) = x^2+4x+3$ or $g' = 3u'u^2$.
  Comme $u'(x) = 2x+4$ alors $g'(x) = 3(2x+4)\left(x^2+4x+3\right)^2$.

EXERCICE 8.2 (3 points)**.**
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure ci-contre est une partie de la courbe représentative, relativement à un repère orthogonal, d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne les renseignements suivants :

- la courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 ;
- le point $B(2;1)$ appartient à $\mathscr{C}$;
- la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B passe par le point $C(4;0)$;



1. Déterminer graphiquement $f(2)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.

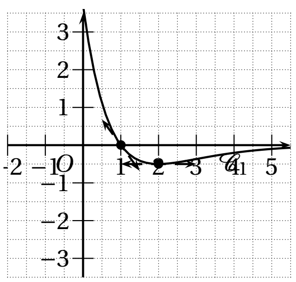
- Le point $B(2;1)$ appartient à $\mathscr{C}$ donc $f(2) = 1$.
- La courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 donc $f'(1) = 0$ car c'est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.
- La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B passe par le point $C(4;0)$ donc son coefficient directeur vaut $f'(2) = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{0-1}{4-2} = -\frac{1}{2}$.

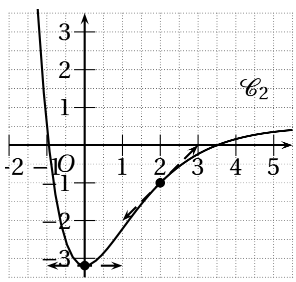
2. Une des représentations graphiques ci-dessous, représente la fonction dérivée f' de f. En justifiant votre choix *à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques*, déterminer la courbe associée à la fonction f'.

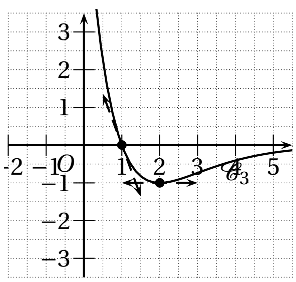
Les variations de f donnent le signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$ $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
Variations de f	$\nearrow$ $\quad$ $\searrow$
Signe de $f'(x)$	+ $\quad$ 0 $\quad$ −

Donc la courbe de f' ne peut pas être la courbe $\mathscr{C}_2$, mais peut très bien être une des deux autres courbes. Il faut un argument supplémentaire.
On sait que $f'(2) = -\frac{1}{2}$ donc la courbe de f' passe par le point $\left(2;-\frac{1}{2}\right)$. Ce ne peut donc pas être la courbe $\mathscr{C}_3$.
La courbe de f' est donc la courbe $\mathscr{C}_1$.







EXERCICE 8.3 (8 points)**.**

f est la fontion définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-11x+28}{x-3}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

On donne en annexe page suivante un repère dans lequel une partie de $\mathscr{C}$ est déjà tracée.

On complètera le schéma avec les éléments rencontrés au fur et à mesure de l'exercice (points, tangentes, etc.).

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ et on note f' la fonction dérivée de f.

   (a) Justifer que $f'(x) = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$.

   $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 - 11x + 28$ et $v(x) = x - 3$. Or $f' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.
   Comme $u'(x) = 2x - 11$ et $v'(x) = 1$, alors $f'(x) = \frac{(2x-11)(x-3)-(x^2-11x+28)}{(x-3)^2} = \frac{2x^2-6x-11x+33-x^2+11x-28}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$.

   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x et établir le tableau de variation de la fonction f (on indiquera les extremums locaux de f).

   - Signe de $f'(x)$.
     · $x^2 - 6x + 5$ est un trinôme positif sauf entre les racines, si elles existent.
     $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 36 - 20 = 16 = 4^2 > 0$, il y a donc deux racines $x_1 = \frac{-(-6)-4}{2} = \frac{2}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{-(-6)+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$
     · $(x-3)^2$ est positif.
     On a donc :

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
x^2-6x+5		+	0	−	‖	−	0	+	
$(x-3)^2$		+		+	‖	+		+	
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	

   - Le signe de $f'(x)$ donne les variations de f. On a donc :

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
f		↗	-9	↘	‖	↘	-1	↗	

   Car $f(1) = \frac{1^2-11\times1+28}{1-3} = \frac{18}{-2} = -9$ et $f(5) = \frac{5^2-11\times5+28}{5-3} = \frac{-2}{2} = -1$.

2. (a) Déterminer, s'il y en a, les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

   On cherche les abscisses ou le coefficient directeur de la tangente est égal à zéro, donc on cherche les x tels que $f'(x) = 0$. Or on sait que $f'(x) = 0$ pour $x = 1$ ou pour $x = 5$.
   Donc les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses sont 1 et 5.

   (b) Soit T la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de T.

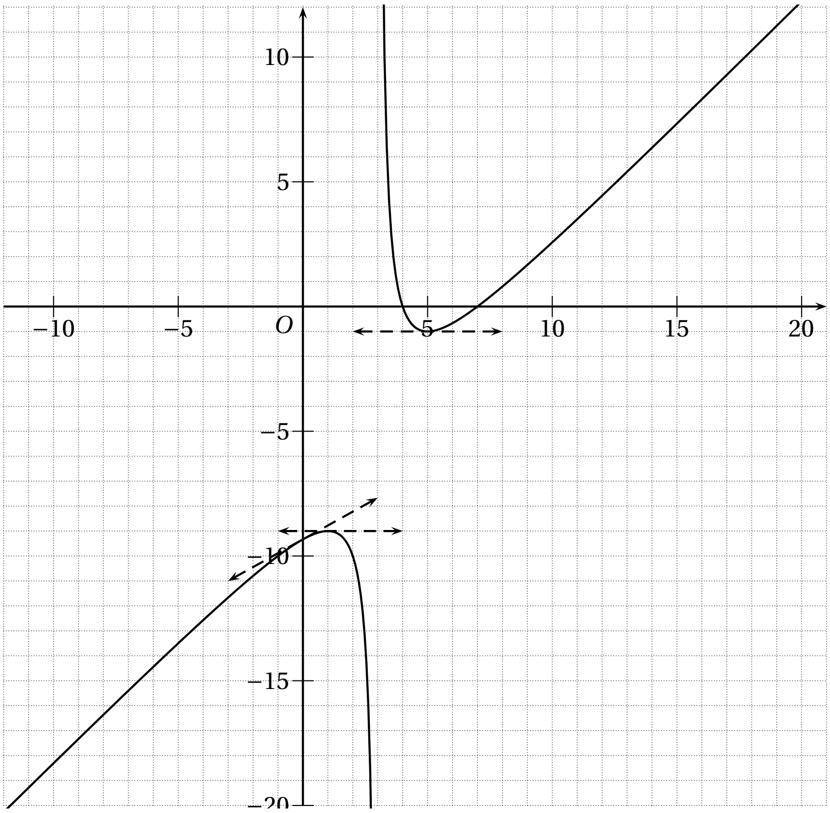
   On sait que la tangente au point d'abscisse a admet pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
   Donc $T : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.
   Or $f'(0) = \frac{0^2-6\times0+5}{(0-3)^2} = \frac{5}{9}$ et $f(0) = \frac{0^2-11\times0+28}{0-3} = -\frac{28}{3}$.
   Donc $T : y = \frac{5}{9}x - \frac{28}{3}$.

3. (a) Tracer les tangentes de la question 2.

   (b) Compléter le tracé de $\mathscr{C}$.

Voir la figure 8.1 page ci-contre.

FIGURE 8.1 – Annexe de l'exercice 8.3



EXERCICE 8.4 (6 points)**.**
*Pour les élèves **n'ayant pas suivi** l'enseignement de spécialité.*
On considère un rectangle de dimensions ℓ et L. On appelle P son périmètre et S son aire.

1. Exprimer P en fonction de ℓ et L. Faire de même pour S.

   $P = 2(\ell + L)$ et $S = \ell \times L$

2. On suppose maintenant que son périmètre est égal à 8 cm et que son aire est égale à 3,75 cm^2.
   Déterminer ℓ et L.

   On a donc : $\begin{cases} 2(\ell + L) = 8 \\ \ell \times L = 3,75 \end{cases}$.
   De la première ligne il vient : $2(\ell + L) = 8 \Leftrightarrow \ell + L = 4 \Leftrightarrow \ell = 4 - L$.
   Remplaçons ℓ dans la seconde ligne : $\ell \times L = 3,75 \Leftrightarrow (4 - L) \times L = 3,75 \Leftrightarrow 4L - L^2 = 3,75 \Leftrightarrow -L^2 + 4L - 3,75 = 0$.
   Cherchons les éventuelles racines du trinôme : $\Delta = 4^2 - 4(-1)(-3,75) = 16 - 15 = 1 = 1^2 > 0$ donc il y a deux racines : $L_1 = \frac{-4-1}{-2} = 2,5$ (et dans ce cas $\ell_1 = 4 - L_1 = 1,5$) et $L_2 = \frac{-4+1}{-2} = 1,5$ (et dans ce cas $\ell_2 = 4 - L_2 = 2,5$).
   Finalement les dimensions de ce rectangle sont 1,5 cm et 2,5 cm.

3. On suppose que son périmètre est égal à 4 cm et on recherche maintenant les dimensions du rectangle de façon que son aire S soit maximale.

   (a) Expliquer pourquoi $L = 2 - \ell$.

   $P = 2(\ell + L) = 4 \Leftrightarrow \ell + L = 2 \Leftrightarrow L = 2 - \ell$.

   (b) En déduire une expression de S en fonction de ℓ.

   $S = \ell \times L = \ell(2 - \ell)$.

   (c) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2 - x)$.
   Calculer la dérivée f' et étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f.

Le plus simple est de développer f : $f(x) = 2x - x^2$ donc $f'(x) = 2 - 2x$, fonction affine décroissante s'annulant en 1 donc :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
f		$\nearrow$	1	$\searrow$	

Car $f(1) = 1(2-1) = 1$.

(d) En déduire les dimensions du rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm et l'aire S est maximale.

On remarque que $S = f(\ell)$ donc S est maximale quand $\ell = 1$ et dans ce cas $L = 2 - \ell = 1$.
Les dimensions du rectangle sont 1 cm sur 1 cm (c'est un carré).

EXERCICE 8.4 (6 points).
Pour les élèves ***ayant suivi*** *l'enseignement de spécialité.*
Une entreprise fabrique des savons et des bougies parfumées en quantités respectives x et y exprimées en tonnes.
Le coût total de production z, exprimé en milliers d'euros, est donné par la relation $z = 2x^2 - 8x + y^2 - 6y + 18$ avec $x \in [0\,;6]$ et $y \in [0\,;8]$.

1. La surface $\mathcal{S}$ représentant le coût en fonction de x et y dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est donnée sur la figure 8.2 page suivante.

   (a) Le point $A(3\,;2\,;3)$ appartient-il à la surface $\mathcal{S}$? Justifier.

   Regardons si les coordonnées de A vérifient l'équation de la surface : $z = 2x^2 - 8x + y^2 - 6y + 18$.
   $2x_A^2 - 8x_A + y_A^2 - 6y_A + 18 = 2\times 3^2 - 8\times 3 + 2^2 - 6\times 2 + 18 = 18 - 24 + 4 - 12 + 18 = 4 \neq z_A$ donc A n'appartient pas à la surface $\mathcal{S}$.

   (b) Les points F et G sont sur la surface $\mathcal{S}$.
   Donner sans justifier leurs coordonnées.

   $F(5\,;4\,;20)$ et $G(4\,;2\,;10)$.

   (c) Les points suivants appartiennent à $\mathcal{S}$:
   - le point B d'abscisse 5 et d'ordonnée 1 ;
   - le point C d'abscisse 4 et de cote 20 ;
   - le point D d'ordonnée 5 et de cote 30.

   Les placer sur la figure 8.2 page ci-contre.

   Voir la figure.

   (d) Soit $y = 2$. Exprimer alors z sous la forme $z = f(x)$ puis donner la nature de la section de la surface $\mathcal{S}$ par le plan d'équation $y = 2$ en justifiant.

   $z = 2x^2 - 8x + y^2 - 6y + 18 = 2x^2 - 8x + 2^2 - 6\times 2 + 18 = 2x^2 - 8x + 10$ donc z est une fonction trinôme de x, donc la section est une parabole.

2. On donne, sur la figure 8.3 page suivante, la projection orthogonale de la surface $\mathcal{S}$ sur le plan $(x\mathrm{O}y)$ (« vue de dessus de la surface $\mathcal{S}$ »).

   (a) E' est la projection orthogonale dans le plan $(x\mathrm{O}y)$ d'un point E situé sur la surface $\mathcal{S}$.

   i. Déterminer les coordonnées de E.

   E est le point de la surface qui a les mêmes abscisse et ordonnée que E'. Sa cote est donc $z_E = 2x^2 - 8x + y^2 - 6y + 18 = 2\times 4^2 - 8\times 4 + 5^2 - 6\times 5 + 18 = 13$.
   Donc $E(4\,;5\,;13)$.

   ii. On appelle E'' la projection orthogonale de E dans le plan $(y\mathrm{O}z)$.
   Donner les coordonnées de E''.

   E'' étant dans le plan $(y\mathrm{O}z)$, son abscisse est 0. Sinon ses coordonnées sont les mêmes que celles de E.
   Donc $E''(0\,;5\,;13)$.

   (b) Représenter sur la figure 8.3 page ci-contre les points B', C' et D', projections orthogonales respectives de B, C et D de la question 1c dans le plan $(x\mathrm{O}y)$.

   Voir la figure.

FIGURE 8.2 – Figure de l'exercice 8.4 (spécialité)

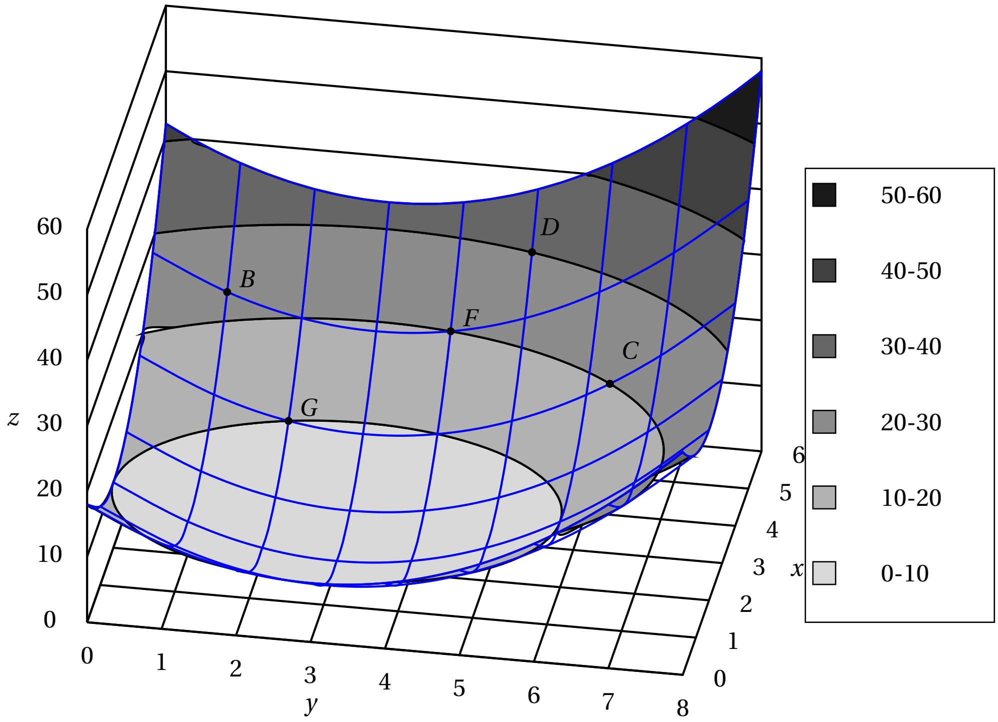
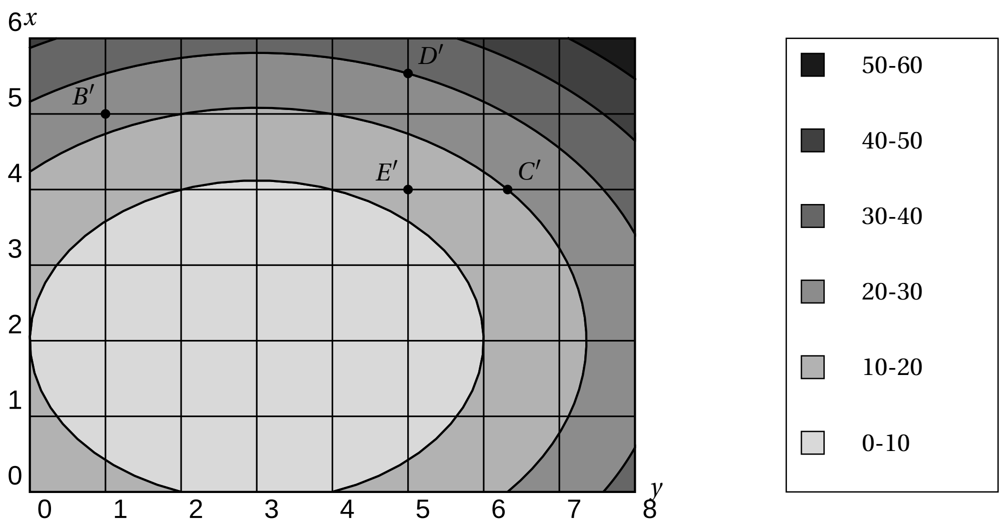


FIGURE 8.3 – Figure de l'exercice 8.4 (spécialité)



Chapitre 7

Probabilités

Sommaire

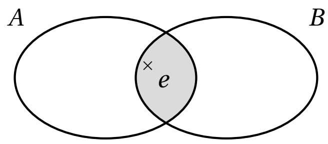
7.1 Vocabulaire des ensembles

Les mathématiques utilisent toutes sortes d'ensembles (finis, infinis dénombrables, infinis non dénombrables). Le but de ce paragraphe n'est pas de faire une étude systématique de la théorie des ensembles (qui s'avérerait très complexe) mais de proposer une approche des notions les plus utilisées de cette théorie.

Ainsi, nous ne tenterons pas de définir rigoureusement ce qu'est un ensemble. Disons simplement qu'un ensemble s'apparente à une liste (finie ou non) d'objets distincts possédant un propriété commune (par exemple l'ensemble des entiers naturels pairs, l'ensemble des entiers qui n'ont que deux diviseurs (nombres premiers), l'ensemble des polynômes de degré 2, etc.). On considère ces objets dans leur globalité sans tenir compte d'un ordre éventuel.

Un ensemble se note avec des accolades : par exemple si E est l'ensemble des entiers naturels pairs inférieurs à 9, on notera $E = \{0;2;4;6;8\}$. On utilisera les symboles $\in$ et $\notin$ pour signifier qu'un élément appartient ou n'appartient pas à un ensemble : par exemple $2 \in \{0;1;2;3;4;5\}$ et $3 \notin \{0;2;4;6;8\}$. Enfin, nous noterons $\varnothing$ l'ensemble qui n'a pas d'éléments (ensemble vide).

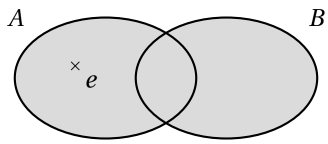
Définition 7.1 (Intersection)**.** L'*intersection* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A et B.
On la note $A \cap B$.



Ainsi $e \in A \cap B$ signifie $e \in A$ **et** $e \in B$.

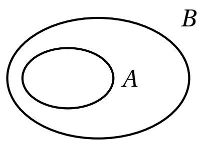
Remarque. Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

Définition 7.2 (Réunion)**.** La *réunion* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B.
On la note $A \cup B$.



Ainsi $e \in A \cup B$ signifie $e \in A$ **ou** $e \in B$.

Définition 7.3 (Inclusion)**.** On dit qu'un ensemble A est *inclus* dans un ensemble B si tous les éléments de A sont des éléments de B.
On note alors $A \subset B$.



On dit alors que A est une *partie* de B ou que A est un *sous-ensemble* de B.

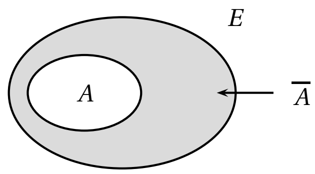
Remarque. $\varnothing$ et E sont toujours des parties de E (partie vide et partie pleine).

On notera $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

Exemples 7.1. On a toujours :

- $A \subset A \cup B$;
- $B \subset A \cup B$;
- $A \cap B \subset A$;
- $A \cap B \subset B$;
- $A \cap B \subset A \cup B$;
- $\varnothing \subset A$;
- $\varnothing \cap A = \varnothing$;
- $\varnothing \cup A = A$.

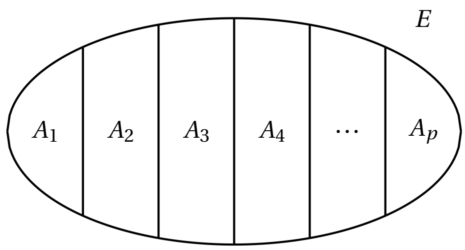
Définition 7.4 (Complémentaire)**.** Soit E un ensemble et A une partie de E. Le *complémentaire* de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On le note $E \setminus A$ ou $\overline{A}$ ou encore $C_E(A)$.



Remarque. $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Définition 7.5. Des parties A_1, A_2, ..., A_p d'un ensemble E constituent une *partition* de E si elles sont deux à deux disjointes et si leur réunion est E.
Ainsi :

- Pour tous i et j de $\{1 ; \dots ; p\}$: $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$;
- $\displaystyle\coprod_{i=1}^{p} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p = E$.



Définition 7.6 (Cardinal)**.** Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé *cardinal de E*. Ce nombre est noté Card(E). On convient que Card($\varnothing$)= 0.

Exemple 7.2. Si $E = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$ alors Card(E)= 6.

Remarque. La notion de cardinal ne s'applique pas aux ensembles infinis (comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc.).

7.2 Expériences aléatoires

7.2.1 Issues, univers

Définition 7.7. L'ensemble de toutes les *issues* d'une *expérience aléatoire* est appelé *univers* (ou univers des possibles). On note généralement cet ensemble Ω.

À notre niveau, Ω sera toujours un ensemble fini.

Exemples 7.3.

- On lance un dé et on regarde la face obtenue : $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$
- On lance un dé et on regarde si le numéro de la face obtenue est pair ou impair : $\Omega = \{P ; I\}$
- On lance une pièce de monnaie : $\Omega = \{P ; F\}$
- On lance deux pièces de monnaie : $\Omega = \{PP ; PF ; FP ; FF\}$
- On lance deux dés : $\Omega = \{(i ; j)$ où $1 \leqslant i \leqslant 6$ et $1 \leqslant j \leqslant 6\}$

Remarquons qu'une même expérience peut déboucher sur des univers différents suivant les hypothèses faites : par exemple, si on lance deux dés et qu'on fait le produit P ou la somme S des deux chiffres obtenus, on obtient respectivement :

- $\Omega_P = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 15 ; 16 ; 18 ; 20 ; 24 ; 25 ; 30 ; 36\}$;
- $\Omega_S = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12\}$.

Événements

Exemple : on lance deux dés et on considère la somme S obtenue. L'ensemble de toutes les issues possibles (univers) est $\Omega = \{2 ; 3 ; \cdots ; 11 ; 12\}$.

Le tableau 7.1 page suivante définit le vocabulaire relatif aux *événements* (en probabilité) :

TABLE 7.1 – Vocabulaire relatif aux événements en probabilité

Vocabulaire des probabilités	Vocabulaire des ensembles	Signification	Illustration
Événement élémentaire (noté ω)	Ensemble ne comportant qu'un élément de Ω	L'une des issues de la situation étudiée	Obtenir 7 : $\omega = \{7\}$
Événement (notation quelconque)	Ensemble comportant plusieurs éléments de Ω (partie de Ω)	Ensemble de plusieurs issues	Obtenir un nombre pair : $A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$ Obtenir un multiple de trois : $B = \{3; 6; 9; 12\}$ Obtenir une somme supérieure à 10 : $C = \{10; 11; 12\}$ Obtenir une somme inférieure à 6 : $D = \{2; 3; 4; 5; 6\}$
Événement impossible (noté $\varnothing$)	Ensemble vide	C'est un événement qui ne peut pas se produire	« Obtenir 13 » est un événement impossible.
Événement certain (noté Ω)	C'est l'ensemble Ω	C'est un événement qui se produira obligatoirement	« Obtenir entre 2 et 12 » est un événement certain.
Événement « A et B »(noté $A \cap B$)	Intersection des ensembles A et B	Événement constitué des issues communes aux 2 événements	$A \cap B = \{6; 12\}$
Événement « A ou B »(noté $A \cup B$)	Réunion des ensembles A et B	Événement constitué de toutes les issues des deux événements	$A \cup B = \{2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12\}$
Événements incompatibles (on note alors $A \cap B = \varnothing$)	Ensembles dont l'intersection est vide (ensembles disjoints)	Ce sont des événements qui n'ont pas d'éléments en commun	$C \cap D = \varnothing$ donc C et D sont incompatibles. Par contre, A et B ne le sont pas.
Événements contraires (l'événement contraire de A se note $\overline{A}$)	Ensembles disjoints et dont la réunion est Ω	Ce sont deux événements incompatibles dont la réunion forme la totalité des issues (Ω)	Ici, $\overline{A}$ représente l'événement « obtenir une somme impaire ». On a alors : • $A \cap \overline{A} = \varnothing$ (ensembles disjoints) • $A \cup \overline{A} = \Omega$

7.3 Probabilités

7.3.1 Loi de probabilité sur un univers Ω

Définition 7.8. Soit $\Omega = \{\omega_1 ; \omega_2 ; \cdots ; \omega_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire.
Définir une loi de probabilité P sur Ω, c'est associer, à chaque événement élémentaire w_i, des nombres $p_i \in [0; 1]$, appelés *probabilités*, tels que :
- $\sum_i p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$;
- la probabilité d'un événement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités p_i des événements élémentaires ω_i qui constituent A.

Remarque. On note aussi : $p_i = p(\{\omega_i\}) = p(\omega_i)$.

Exemple 7.4. Soit un dé truqué dont les probabilités d'apparitions des faces sont données par le tableau suivant :

Issue ω	1	2	3	4	5	6
Probabilité $p(\omega)$	0,05	0,05	0,1	0,1	0,2	inconnue

1. Calculer la probabilité de l'événement A = « obtenir un résultat inférieur ou égal à 4 ».

D'après la définition, $p(A) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 0,3$ [1].

2. Calculer la probabilité d'obtenir 6 :
D'après la définition, $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$, donc $p(6) = 0,5$.

Propriété 7.1. *Soit A et B deux événements de Ω, alors :*
- *La probabilité de l'événement certain est 1 : $p(\Omega) = 1$;*
- *La probabilité de l'événement impossible est 0 : $p(\varnothing) = 0$;*
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$;
- *Si A et B sont incompatibles , $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$;*
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Une situation fondamentale : l'équiprobabilité

Définition 7.9. Lorsque toutes les issues d'une expérience aléatoire ont même probabilité, on dit qu'il y a *équiprobabilité* ou que la loi de probabilité est *équirépartie*.

Dans ce cas, la règle de calcul de la probabilité d'un événement A est la suivante :

Propriété 7.2. *Dans une situation d'équiprobabilité sur un univers Ω, pour tout événement élémentaire ω et tout événement A on a :*
- $p(\omega) = \dfrac{1}{Card(\Omega)}$
- $p(A) = \dfrac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}} = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$

Certaines expériences ne sont pas des situations d'équiprobabilité, mais on peut parfois s'y ramener tout de même.

Exemple 7.5. On lance deux dés équilibrés et on s'intéresse à la somme des deux dés.
L'univers est $\Omega = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ mais il n'y a pas équiprobabilité car chaque événement n'a pas la même probabilité. Ainsi il est plus difficile d'obtenir 2 que 7.

On se ramène à une sitution d'équiprobabilité : chaque dé étant équilibré, on a équiprobabilité sur chaque dé (chaque face à une probabilité de $\frac{1}{6}$).

Il reste à déterminer la façon d'obtenir chaque somme. Le tableau ci-dessous résume les possibilités pour chaque dé et la somme obtenue :

dé 1 \ dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Chaque « case » étant équiprobable ($\frac{1}{36}$) on obtient :

ω_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

Loi des grands nombres

Définition 7.10. Lorsque qu'on répète une expérience aléatoire, on appelle *fréquence d'apparition* d'une éventualité ω donnée le nombre : $f_i = \dfrac{\text{nombre de fois où l'éventualité } \omega \text{ apparaît}}{\text{nombre de fois où l'expérience est répétée}}$

On constate que si l'on répète un grand nombre de fois l'expérience donnée, les différentes fréquences d'apparition ont tendance à se stabiliser. Ce constat est un résultat mathématique appelé *La loi des grands nombres* ; il se démontre, mais la démonstration est largement hors de nos compétences :

Théorème 7.3 (Loi des grands nombres)**.** *Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de la loi de probabilité quand n devient grand.*

1. La notation rigoureuse est $p(\{1\})$ mais on peut noter $p(1)$ quand il n'y a pas de risque de confusion.

Remarques.
- Dans certains cas, on utilise ce résultat pour valider ou rejeter un modèle (une loi de probabilité) choisi à priori.
- Dans d'autres cas, lorsqu'on ne connaît pas de loi de probabilité relativement à une expérience aléatoire, on peut ainsi en introduire une à partir des fréquences déterminées lors d'un grand nombre d'expériences

7.4 Exercices

EXERCICE 7.1.
On jette un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au numéro apparaissant sur la face supérieure.

1. Décrire l'ensemble Ω, univers associé à cette expérience aléatoire.
2. Écrire sous forme de partie (d'ensemble) de Ω les événements :
   - A : « obtenir un numéro inférieur ou égal à 2 » ;
   - B : « obtenir un numéro impair » ;
   - C : « obtenir un numéro strictement supérieur à 4 ».
3. Pour chacun des événements suivants, les écrire sous forme de partie de Ω et les décrire par une phrase la plus simple possible.
   - $A \cup B$;
   - $A \cup C$;
   - $C \cup B$;
   - $\overline{A}$;
   - $\overline{A} \cap C$;
   - $A \cap B$;
   - $A \cap C$;
   - $C \cap B$;
   - $\overline{A} \cup C$;

EXERCICE 7.2.
On choisit au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

1. Combien y a-t-il d'issues possibles ?
2. On considère les événements :
   - A : « obtenir un as » ;
   - P : « obtenir un pique ».

   (a) Combien y a-t-il d'éventualités dans A ?
   (b) Combien y a-t-il d'éventualités dans P ?
   (c) Traduire par une phrase les événements $A \cap P$ et $A \cup P$.
   (d) Déterminer Card$(A \cap P)$ et Card$(A \cup P)$.

EXERCICE 7.3.
Un dé (à 6 faces) est truqué de la façon suivante : chaque chiffre pair a deux fois plus de chance de sortir qu'un numéro impair.

1. Calculer la probabilité d'obtenir un 6.
2. On lance deux fois le dé.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un chiffre pair.
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un 6.

EXERCICE 7.4.
E est l'ensemble des nombres de 1 à 20 inclus. On choisit au hasard l'un de ces nombres.

1. Quelle est la probabilité des événements suivants :
   - A : « il est un multiple de 2 »
   - B : « il est un multiple de 4 »
   - C : « il est un multiple de 5 »
   - D : « il est un multiple de 2 mais pas de 4 »
2. Calculer la probabilité de :
   - $A \cap B$;
   - $A \cup B$;
   - $A \cap C$;
   - $A \cup C$.

EXERCICE 7.5.
Deux lignes téléphoniques A et B arrivent à un standard.
On note :
- E_1 : « la ligne A est occupé » ;
- E_2 : « la ligne B est occupée ».

Après étude statistique, on admet les probabilités :

- $p(E_1) = 0,5$;
- $p(E_2) = 0,6$;
- $p(E_1 \cap E_2) = 0,3$.

Calculer la probabilité des événements suivants :

- F : « la ligne A est libre » ;
- G : « une ligne au moins est occupée » ;
- H : « une ligne au moins est libre ».

EXERCICE 7.6.
On considère un jeu de 32 cartes (la composition d'un jeu de 32 cartes est la suivante : 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; valet ; dame ; roi ; as pour chacune des 4 « couleurs » : coeur ; carreau ; trèfle et pique.)
On tire, au hasard, une carte du paquet, chaque carte ayant autant de chance d'être choisie. On considère les événements suivants :

- V : « Obtenir un valet » ;
- F : « Obtenir une figure [2] » ;
- T : « Obtenir un trèfle ».

1. Calculer les probabilités suivantes :
   - $p(V)$;
   - $p(F)$;
   - $p(T)$.
2. Décrire l'événement $F \cap T$ puis calculer sa probabilité $p(F \cap T)$.
   En déduire la probabilité $p(F \cup T)$ d'obtenir une figure ou un trèfle.
3. Décrire l'événement F et calculer (simplement !) sa probabilité $p(F)$.

EXERCICE 7.7.
Un couple de futurs parents décide d'avoir trois enfants. On fait l'hypothèse qu'ils auront, à chaque fois, autant de chances d'avoir un garçon qu'une fille et qu'il n'y aura pas de jumeaux. Calculer la probabilité des événements :

- A : « ils auront trois filles » ;
- B : « ils auront trois enfants de même sexe » ;
- C : « ils auront au plus une fille » ;
- D : « les trois enfants seront de sexes différents ».

EXERCICE 7.8.
Pour se rendre à son travail, un automobiliste rencontre trois feux tricolores. On suppose que les feux fonctionnent de manière indépendante, que l'automobiliste s'arrête s'il voit le feu orange ou rouge et qu'il passe si le feu est vert. On suppose de plus que chaque feu est vert durant un temps égal à rouge et orange (autrement dit, l'automobiliste à autant de chance de passer que de s'arrêter).

1. Faire un arbre représentant toutes les situations possibles.
2. Quelle est la probabilité que l'automobiliste ait :
   (a) les trois feux verts ?
   (b) deux des trois feux verts ?

EXERCICE 7.9.
Un sac contient quatre jetons rouges, trois jetons verts et deux jetons bleus.

1. On tire des jetons, avec remise après tirage, jusqu'à obtention d'un jeton de même couleur qu'un des jetons précédemment tirés.
   Calculer la probabilité que les deux jetons de même couleur soient bleus.
2. Même question si on tire les jetons sans remise.

EXERCICE 7.10.
Dans une loterie, 100 billets sont vendus et il y a 7 billets gagnants. Quelle est la probabilité de gagner au moins un lot si on achète :

- Un billet ?
- Deux billets ?

2. Les figures sont les valets, les dames et les rois

Chapitre 8

Comportement asymptotique

Sommaire

8.1 Activités

ACTIVITÉ 8.1.
Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$ et h, définie sur $[0\,;+\infty[$, par $h(x) = \sqrt{x}$.

1. Compléter le tableau suivant :

x	10	10^2	10^6	10^{10}
$f(x)$				
$g(x)$				
$h(x)$				

2. Comment semblent se comporter ces trois fonctions quand x devient grand ?
3. Résoudre sur $[0\,;+\infty[$:
   - $f(x) > 10^{12}$
   - $f(x) > 10^{24}$
4. Faire de même pour g et h.

Finalement, on peut rendre $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ aussi .... que l'on veut : il suffit de prendre x suffisamment ....

On dira que leur limite, quand x tend vers $+\infty$, est $+\infty$ et on écrira : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ACTIVITÉ 8.2.
Soit f la fonction définie sur $]1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+2$.

1. (a) Compléter le tableau suivant :

x	10	10^2	10^6	10^{10}
$f(x)$				

   (b) Comment semble se comporter cette fonction quand x devient grand ?

   (c) Comment semble se comporter la courbe de cette fonction quand x devient grand ?
   On pourra s'aider d'une calculatrice graphique ou d'un grapheur.

   Finalement, on peut rendre $f(x)$ aussi .... que l'on veut : il suffit de prendre x suffisamment ....

   On dira que
   - la limite de f, quand x tend vers $+\infty$ est 2 et on écrira : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$;
   - la droite d'équation $y=2$ est une asymptote (horizontale) à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

2. (a) Compléter le tableau suivant :

x	1,5	1,1	1,01	1,0001
$f(x)$				

   (b) Comment semble se comporter cette fonction quand x se rapproche de 1 ?

   (c) Comment semble se comporter la courbe de cette fonction quand x se rapproche de 1 ?
   On pourra s'aider d'une calculatrice graphique ou d'un grapheur.

   Finalement, on peut rendre $f(x)$ aussi .... que l'on veut : il suffit de prendre x suffisamment ....

   On dira que
   - la limite de f, quand x tend vers 1 par valeurs supérieures à 1 est $+\infty$ et on écrira : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=+\infty$;
   - la droite d'équation $x=1$ est une asymptote (verticale) à la courbe $\mathscr{C}$ (forcément en 1).

8.2 Limite d'une fonction

8.2.1 En l'infini

Définition 8.1. Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle du type $[a\,;+\infty[$.
Lorsque x prend des valeurs *de plus en plus grandes en valeur absolue et positives*, on dit aussi *lorsque x tend vers $+\infty$*, si les nombres $f(x)$ deviennent de plus en plus :
- grands en valeur absolue et positifs (tendent vers $+\infty$), on dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$;
- grands en valeur absolue et négatifs (tendent vers $-\infty$), on dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$;
- proches d'un réel l (tendent vers l), on dit que f a pour limite l en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.

Remarques.
- Ces définitions sont, conformément au programme, très intuitives. Il en existe de plus rigoureuses, mais elles ne sont pas exigibles.
- On utilisera parfois dans la suite les termes de « limite infinie » quand la limite d'une fonction est $+\infty$ ou $-\infty$ et de « limite finie » quand la limite d'une fonction est un nombre l.

On a des définitions équivalentes en $-\infty$:

Définition 8.2. Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle du type $]-\infty\,;a]$.
Lorsque x tend vers $-\infty$, si les nombres $f(x)$:
- tendent vers $+\infty$, on dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$;
- tendent vers $-\infty$, on dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$;
- tendent vers un réel l, on dit que f a pour limite l en $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$.

Exemples 8.1. La figure 8.1 page ci-contre présente quatre exemples où le lien entre la limite de la fonction et l'allure de la courbe est souligné, sur la courbe, par une flèche :

Exemple 8.2. Certaines fonctions n'ont pas de limite en l'infini. C'est le cas, par exemple, de la fonction $\sin x$ (voir sa courbe représentative sur la figure 8.2 page suivante).

FIGURE 8.1 – Quatre exemples de limites en l'infini

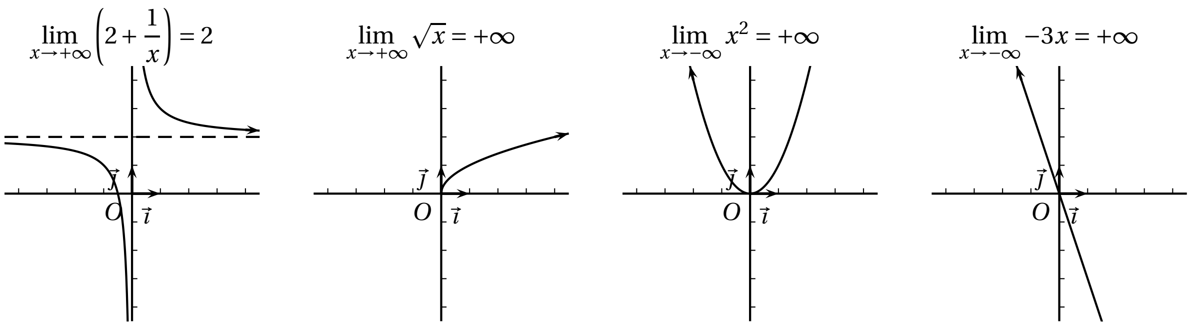
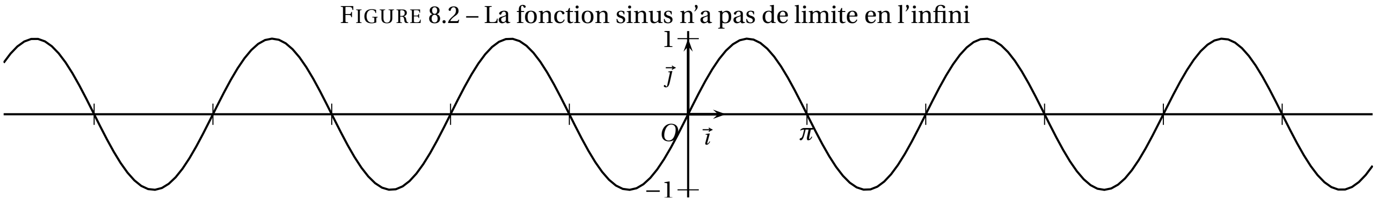


FIGURE 8.2 – La fonction sinus n'a pas de limite en l'infini



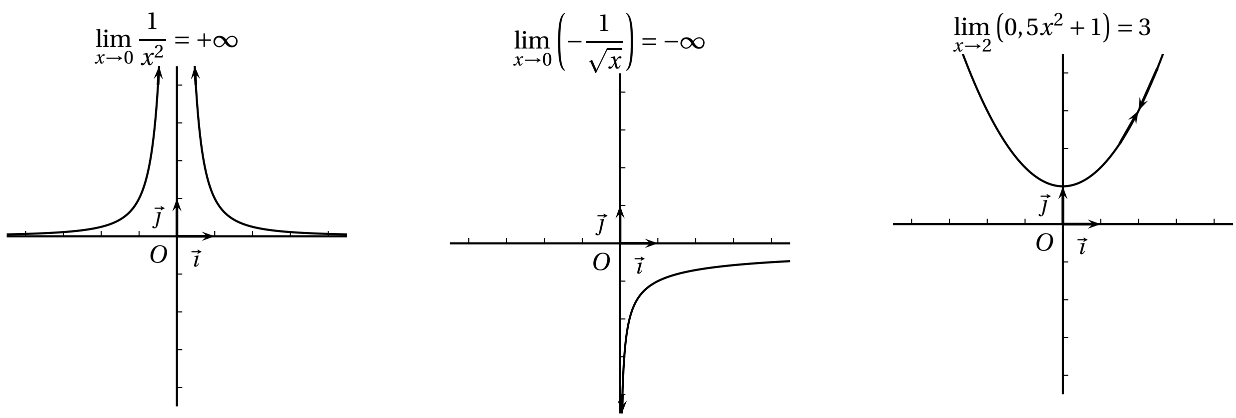
8.2.2 En un réel a

Définition 8.3. Soit f une fonction définie sur un domaine D contenant a ou tel que a soit une borne de D.
Lorsque x tend vers a, si les nombres $f(x)$:

- tendent vers $+\infty$, on dit que f a pour limite $+\infty$ en a et on note $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$;
- tendent vers $-\infty$, on dit que f a pour limite $-\infty$ en a et on note $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$;
- tendent vers un réel l, on dit que f a pour limite l en a et on note $\lim_{x\to a} f(x)=l$.

Exemples 8.3. La figure 8.3 de la présente page présente trois exemples où le lien entre la limite de la fonction et l'allure de la courbe est souligné, sur la courbe, par une flèche.

FIGURE 8.3 – Limites en a



En un réel a, à droite ou à gauche

Certaines fonctions n'ont pas de limite en un réel a, au sens de la définition précédente. C'est le cas de la fonction inverse.

Lorsque x tend vers 0, les nombres $\frac{1}{x}$ tendent vers $+\infty$ quand x est positif, et vers $-\infty$ quand x est négatif. On parle alors de « limite à droite de 0 » et de « limite à gauche de 0 » (les x positifs et les x négatifs étant situés en général respectivement à droite de 0 et à gauche de 0 sur l'axe des abscisses).

On dit aussi que la limite de la fonction inverse en 0^+ (quand x tend vers 0 et est positif) est $+\infty$ et que la limite de la fonction inverse en 0^- (quand x tend vers 0 et est négatif) est $-\infty$.

On notera alors indifféremment : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Par abus de langage, on écrira « $x \to a^+$ » pour dire « x tend vers a et $x > a$ » et « $x \to a^-$ » pour dire « x tend vers a et $x < a$ ».

Finalement, ce n'est que lorsque la limite à droite et à gauche de a sont égales qu'on dit que f admet une limite en a, comme par exemple la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en 0. Lorsque les limites à gauche et à droite sont différentes, la fonction n'a pas de limite en a.

Ainsi, comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$, on peut écrire $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \neq \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$, la fonction inverse n'a pas de limite en 0.

8.3 Limite des fonctions usuelles

Propriété 8.1. *Soit f une des fonctions usuelles (affine, carré, cube, inverse, racine carrée, sinus et cosinus) et D_f leurs ensembles de définition respectifs.*

- *Si $a \in D_f$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$*
- *Sinon, aux bornes de leur ensemble de définition, les fonctions usuelles ont les limites résumées dans le tableau ci-dessous :*

f	D_f	Limites
$f(x) = mx + p$	$\mathbb{R}$	*Si* $m > 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p) = -\infty$ *Si* $m < 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p) = +\infty$ *Si* $m = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(mx+p) = \lim\limits_{x\to-\infty}(mx+p) = p$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Les définitions rigoureuses des limites étant hors programme, les démonstrations de ces propriétés et des suivantes le sont aussi, mais les activités montrent comment elles peuvent se faire.

Remarques.
- Les fonctions constantes ($f(x) = k$) et linéaires ($f(x) = kx$) sont aussi des fonctions usuelles mais sont considérées comme des cas particuliers des fonctions affines $f(x) = mx + p$ avec, respectivement, $m = 0$ et $p = 0$.
- $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 4$ a les mêmes limites que $f(x) = x^2$ si n est pair et que $f(x) = x^3$ si n est impair (on l'admettra).
- $f(x) = \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 4$ a les mêmes limites que $f(x) = \frac{1}{x}$ si n est impair et que $f(x) = \frac{1}{x^2}$ si n est pair (on l'admettra).

8.4 Opérations sur les limites

Dans les paragraphes suivants, nous parlerons parfois de « forme indéterminée », notée F.I. Cela ne veut pas forcément dire qu'il n'y a pas de limite, mais que la règle énoncée ne permet pas de conclure dans le cas général, qu'il faut étudier chaque cas particulier.

8.4.1 Règle essentielle

On admettra que les sommes, les produits, les inverses, les quotients ou les composées des fonctions usuelles qui nous étudierons en première vérifient tous :

Si $a \in D_f$, où D_f est l'ensemble de définition de f, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Dans les autres cas, aux bornes de leur ensemble de définition, on appliquera les propriétés des paragraphes suivants.

8.4.2 Limite d'une somme

Propriété 8.2. *On note α ce vers quoi tend x, α pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f et g deux fonctions ayant en α une limite finie ou infinie.
La fonction somme $f+g$ admet une limite dans chacun des cas résumés par le tableau ci-dessous :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	*F.I.*
$-\infty$	$-\infty$	*F.I.*	$-\infty$

On l'admettra.

Exemples 8.4.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+\dfrac{1}{x}-1\right)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x-1)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(-x+\dfrac{1}{x}-1\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(-x-1)=-0-1=-1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x-1\right)$ est une forme indéterminée car $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty$. Nous verrons plus tard comment « lever l'indétermination ».

8.4.3 Limite d'un produit

Propriété 8.3. *On note α ce vers quoi tend x, α pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f et g deux fonctions ayant en α une limite finie ou infinie.
La fonction produit $f\times g$ admet une limite dans chacun des cas résumés par le tableau ci-dessous :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$l'\neq0$	$l'=0$	$\pm\infty$
$l\neq0$	$l\times l'$	0	$\pm\infty$
$l=0$	0	0	*F.I.*
$\pm\infty$	$\pm\infty$	*F.I.*	$\pm\infty$

On l'admettra.

Remarque. Le signe, lorsque la limite du produit est $\pm\infty$, est donné par la règle des signes des produits.

Exemples 8.5.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-5x^2\right)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(-5)=-5$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=-1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}\left(x^2+x\right)$ est indéterminée car $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(x^2+x\right)=0+0=0$. Nous verrons plus tard comment « lever l'indétermination ».

8.4.4 Limite de l'inverse

Propriété 8.4. *On note α ce vers quoi tend x, α pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f une fonction ayant en α une limite finie ou infinie.
La fonction $\dfrac{1}{f}$ admet une limite dans chacun des cas résumés par le tableau ci-dessous :

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	$l\neq0$	$l=0^+$	$l=0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{1}{f(x)}$	$\dfrac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0 *(0^+)*	0 *(0^-)*

On l'admettra.

Exemples 8.6.
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\neq0}}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$ et $x^2>0$ quand $x\in\mathbb{R}^*$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x^2+x+2}=\dfrac{1}{4}$ car $\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+x+2\right)=4$

8.4.5 Limite d'un quotient

Propriété 8.5. *On note α ce vers quoi tend x, α pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.*
Soit f et g deux fonctions ayant en α une limite finie ou infinie.
La fonction quotient $\dfrac{f}{g}$ admet une limite dans chacun des cas résumés par le tableau ci-dessous :

$\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)$	$l'\neq0$	$l'=0$	$\pm\infty$
$l\neq0$	$\dfrac{l}{l'}$	$\pm\infty$	0
$l=0$	0	F.I.	0
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.

Remarque. Le signe, lorsque la limite du quotient est $\pm\infty$, est donné par la règle des signes des produits (qui est aussi la règle des signes des quotients).

Preuve. $\dfrac{f}{g}=f\times\dfrac{1}{g}$ or, d'après les limites de l'inverse,

- si $\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)=l'\neq0$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{l'}$;
- si $\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{1}{g(x)}=\pm\infty$;
- si $\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)=\pm\infty$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{1}{g(x)}=0$.

En appliquant les propriétés des limites d'un produit, on obtient :

$\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)$	$l'\neq0$	$l'=0$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{1}{g(x)}$	$\dfrac{1}{l'}$ $(\neq0)$	$\pm\infty$	0
$l\neq0$	$l\times\dfrac{1}{l'}=\dfrac{l}{l'}$	$\pm\infty$	0
$l=0$	0	F.I.	0
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.

$\diamondsuit$

Exemple 8.7.
1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3}{2x^2+3}=0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}-3=-3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^2+3)=+\infty$
2. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{\cos x}{x^2-2x}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to0}\cos x=\cos 0=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(x^2-2x)=0$ et $x^2-2x=x(x-2)<0$ (négatif entre les racines 0 et 2)
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x}{x^3+x-1}$ est une forme indéterminée car $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-x\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+x-1\right)=+\infty$

8.4.6 Cas des formes indéterminées

Finalement, il y a quatre cas d'indétermination qui sont, **en utilisant un abus d'écriture qui ne vous sera pas autorisé sur vos copies** :

$$\text{« }\frac{0}{0}\text{ »}\qquad\text{« }0\times\infty\text{ »}\qquad\text{« }\frac{\infty}{\infty}\text{ »}\qquad\text{« }\infty-\infty\text{ »}$$

Pour lever l'indétermination, on peut tenter transformer l'expression (par exemple développer s'il s'agit d'un produit). Si cela ne donne rien, il est toujours possible de mettre en facteur le terme de plus haut degré (les termes quand il s'agit d'un quotient) : cela résoud la plupart des problèmes.

Quelques exemples

1. Nous avons vu que $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x-1\right)$ était une forme indéterminée.

   Comme $x\to-\infty$, on peut considérer que $x\neq 0$, et donc écrire, en factorisant le terme de plus haut degré :
$$x^2+x-1=x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$$
   or, comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$, on a :
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1+0+0=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+x-1\right)=+\infty$$

2. Nous avons vu que $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}\left(x^2+x\right)$ est une forme indéterminée.

   Avec $x>0$, donc $x\neq0$, on peut écrire, en développant : $\frac{1}{x}\left(x^2+x\right)=x+1$

   or $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(x+1)=0+1=1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}\left(x^2+x\right)=1$

3. Nous avons vu que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{x^3+x-1}$ est une forme indéterminée.
   Comme $x\to+\infty$ on peut considérer que $x\neq0$ et, en factorisant le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur, on obtient :
$$\frac{x^2-x}{x^3+x-1}=\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{1-\frac{1}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}$$
   or, comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$, on a :
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1-0=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=1+0-0=1\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{x^3+x-1}=0$$

4. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$ est une forme indéterminée car $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{1}{x^2}=+\infty$.
   En réduisant au même dénominateur, on obtient : $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$
   or
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(x-1)=0-1=-1\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x^2=0\text{ et }x^2>0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x-1}{x^2}=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$$

8.4.7 Fonctions polynôme et rationelle

On peut procèder de la même manière qu'aux exemples 1 et 3 du paragraphe précédent pour toute fonction polynôme ou rationelle et démontrer ainsi les propriétés suivantes :

Propriété 8.6. *Soit f une fonction polynôme de degré n :*
$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\ \textit{avec}\ a_n\neq0$$
Alors :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}a_nx^n=\pm\infty$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}a_nx^n=\pm\infty$.

qui s'énonce aussi de la façon suivante :

« La limite en l'infini d'une fonction polynôme est celle de son terme de plus haut degré. »

Propriété 8.7. *Soit f une fonction rationnelle :*

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$. Alors :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m}$.

Le détail de ces deux démonstrations est laissé en exercice au lecteur.

8.5 Asymptotes

Définition 8.4. On appelle courbe asymptote une courbe simple (droite, cercle, etc.) dont une courbe plus complexe peut s'approcher.

Nous ne parlerons au lycée que de droite asymptote, en omettant le plus souvent de préciser même le terme de droite. Une asymptote sera donc une droite dont la courbe représentative d'une fonction s'approche (sans forcément l'atteindre). Nous avons vu dans les activités les trois types d'asymptote.

8.5.1 Asymptote verticale

Elle traduit, graphiquement, le fait que la fonction f admet une limite infinie en un réel a.
On a alors :

Définition 8.5. Si f une fonction admet une limite infinie à gauche ou à droite de a, réel, on dit alors que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote (verticale) à la courbe de f.

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \infty \text{ ou } \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \infty \Leftrightarrow x = a \text{ asymptote à } \mathscr{C}$$

Remarque. Il suffit qu'on ait soit une limite à droite, soit une limite à gauche qui vaut $\pm\infty$ pour avoir une asymptote verticale.

8.5.2 Asymptote horizontale

Elle traduit, graphiquement, le fait que la fonction f admet une limite finie en l'infini.
On a alors :

Définition 8.6. Si f une fonction admet une limite finie b en l'infini, on dit alors que la droite d'équation $y = b$ est une asymptote (horizontale) à la courbe de f en l'infini.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \Leftrightarrow y = b \text{ asymptote à } \mathscr{C} \text{ en l'infini}$$

Remarque. Une courbe peut avoir une asymptote en $+\infty$ sans en avoir pour autant en $-\infty$: il faut faire l'étude aux deux bornes.

8.5.3 Asymptote oblique

Elle traduit, graphiquement, le fait que la fonction f se comporte de plus en plus comme une fonction affine.
On a alors :

Définition 8.7. Soit f une fonction. S'il existe une fonction affine $g(x) = mx + p$ telle que la fonction $f - g$ admet comme limite 0 en l'infini, on dit alors que la droite d'équation $y = mx + p$ est une asymptote (oblique) à la courbe de f en l'infini.

$$\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - (mx + p)\big) = 0 \Leftrightarrow y = mx + p \text{ asymptote à} \mathscr{C} \text{ en l'infini}$$

Remarque. Même remarque que ci-dessus.

8.6 Exercices

8.6.1 Technique

EXERCICE 8.1.
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\dfrac{1}{2}x^3\right)$
3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(x\sqrt{x}\right)$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\dfrac{-6}{x^2}\right)$

EXERCICE 8.2.
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}+2x+3\right)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3\sqrt{x}+x^2\right)$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{-5}{x}+x^2\right)$
4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\dfrac{1}{x}+3x^2-2\right)$
5. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \left(\dfrac{3}{x-2}+5x+7\right)$
6. $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} \left(\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{1}{2}\right)$

EXERCICE 8.3.
Déterminer les limites des fonctions polynômes suivantes :

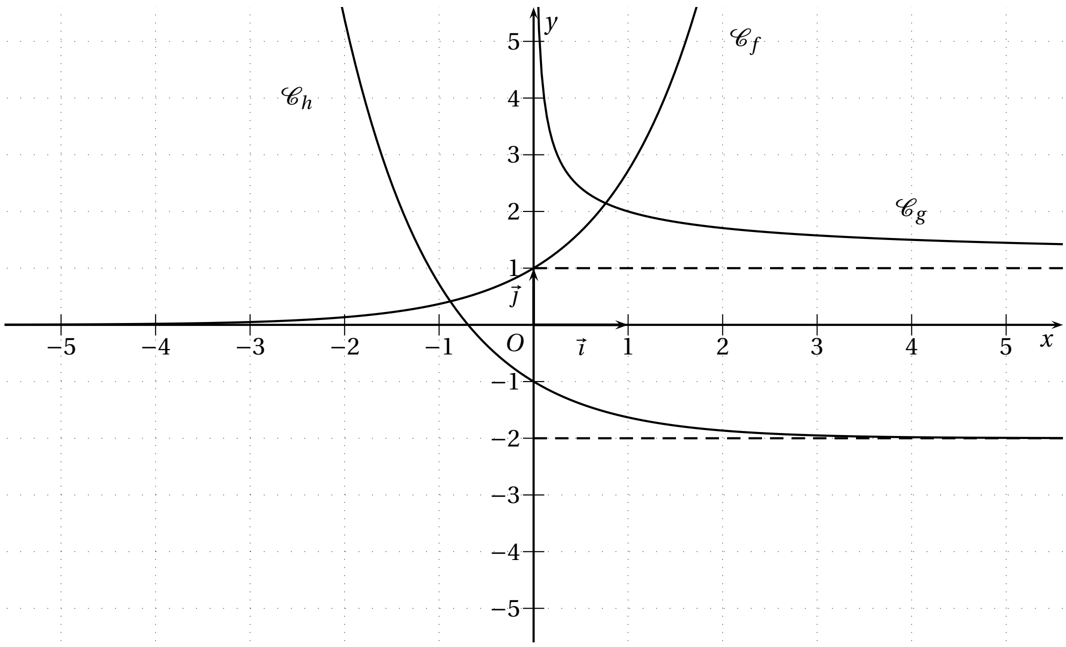
1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3+x\right)$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^3+x\right)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^4-2x^3+5x+4\right)$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^4-2x^3+5x+4\right)$

8.6.2 Lectures graphiques

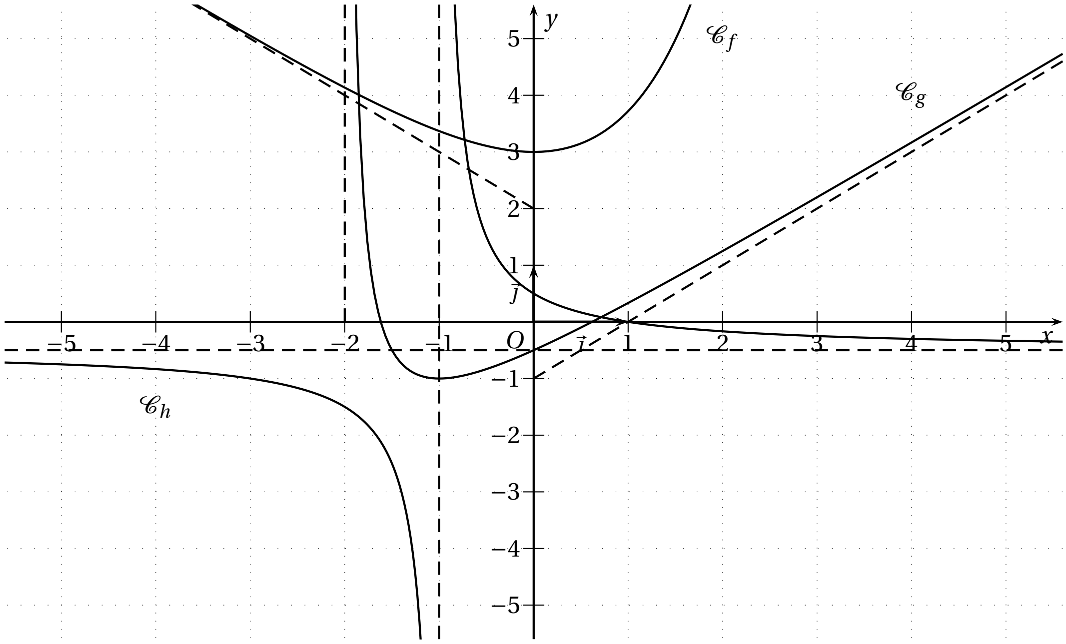
EXERCICE 8.4.
On donne sur la figure ci-dessous les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ de trois fonctions f, g et h.

Pour chacune des trois fonctions :

1. déterminer D, son ensemble de définition ;
2. conjecturer les limites de la fonction aux bornes de cet ensemble de définition.



EXERCICE 8.5.
Même exercice que le précédent (la courbe $\mathscr{C}_h$ est en deux parties).



8.6.3 Étude de fonctions

EXERCICE 8.6.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\left(x^2-1\right)(x-2001)}{2001}$$

Étudier la limite de f en $+\infty$.

EXERCICE 8.7.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

1. Étudier les variations de f.
2. Déterminer, si elles existent, les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$ et en 0.

EXERCICE 8.8.
Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{-x+1}{2x+3}$$

On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
2. Étudier les limites aux bornes de son ensemble de définition.
   En déduire les éventuelles asymptotes de $\mathscr{C}$.
3. Étudier les variations de f.
4. Dresser le tableau des variations de f en y faisant apparaître les limites aux bornes.

EXERCICE 8.9.
Le but de cet exercice est de déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition de la fonction :

$$f(x) = \frac{x^2-4x+2}{3-x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que :

$$f(x) = ax+b+\frac{c}{3-x}$$

3. Étude en l'infini.
   (a) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
   (b) $\mathscr{C}$ admet-elle une asymptote horizontale en l'infini ?
   (c) Montrer que la droite d'équation $y=-x+1$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.
4. Étude au voisinage de 3.
   (a) Déterminer la limite du numérateur lorsque x tend vers 3.
   (b) Étudier le signe du dénominateur.
   (c) Déterminer la limite du dénominateur lorsque x tend vers 3 par valeurs supérieures.
   (d) En déduire $\lim_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x)$.
   (e) Procéder de même pour déterminer $\lim_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x)$
   (f) $\mathscr{C}$ admet-elle une asymptote verticale ?

EXERCICE 8.10.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2+9x+2}{x^2+1}$$

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que :
$$f(x)=ax+b+\frac{cx}{x^2+1}$$
2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Montrer que la droite Δ d'équation $y=x+2$ est une asymptote de $\mathscr{C}$.
4. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.

EXERCICE 8.11.
Soit f la fonction qui a x associe

$$f(x)=\frac{1-2x}{-x^2+2x+3}$$

1. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   On commencera par étudier le signe de $-x^2+2x+3$ *selon les valeurs de* x.
3. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe représentative de f.

EXERCICE 8.12.
Soit f la fonction définie pour $x\in[1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la limite de f en $+\infty$.

1. Étudier $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}$ et $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x-1}$. Que peut-on en conclure ?
2. Montrer que, pour tous réels A et B strictement positifs, on a : $\sqrt{A}-\sqrt{B}=\dfrac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$
3. En déduire que, pour tout $x\in[1\,;+\infty[$, on a : $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$
4. En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

EXERCICE 8.13.
Soit f, u et v les fonctions définies sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{2x+\sin x}{x}\qquad u(x)=\frac{2x-1}{x}\qquad v(x)=\frac{2x+1}{x}$$

1. Montrer que, pour tout $x\in[1\,;+\infty[\,: u(x)\leqslant f(x)\leqslant v(x)$.
2. Étudier les limites en $+\infty$ de u et de v.
3. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Chapitre 9

Statistiques

Sommaire

9.1 Rappels de Seconde

9.1.1 Vocabulaire

Définition 9.1. Une série statistique est un ensemble d'observations collectées et on a les définitions suivantes :

- *Population* : C'est l'ensemble sur lequel porte une étude statistique, si elle est trop grande, on s'intéresse à un échantillon de cette population ;
- *Individu* : C'est un élément de la population ;
- *Caractère* : C'est ce qu'on observe chez l'individu ;
- *Modalité* : Ce sont les différentes valeurs prises par le caractère ;
- La série statistique est dite *quantitative* quand les modalités sont des nombres (nombre de frères et soeurs, dimensions d'une pièce) et *qualitative* sinon (candidat pour lequel un individu à l'intention de voter) ;
- Dans le cas d'une série quantitative, celle-ci est dite *discrète* si les modalités sont limitées à un ensemble fini de valeurs (le nombre de frères et soeurs ne peut être qu'un élément de l'ensemble $\{0; 1; \ldots; 10\}$) et *continue* si les modalités peuvent prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle (la taille d'un individu).

Exemples 9.1. On peut s'intéresser à une classe (population), comportant des élèves (individus) et observer leur nombre de frères et soeurs (caractère) qui peuvent être 0, 1, 2, ... (modalités), ces données formant alors une série statistique quantitative discrète.

On peut s'intéresser à une chaîne d'usine produisant des bras de suspension pour voiture (population), et observer sur chaque pièce (individu) ses dimensions exactes (caractère) qui peuvent varier entre 500 et 750 mm (modalités), ces données formant alors une série statistique quantitative continue.

On peut s'intéresser à la population française (population dont on prendra un échantillon) comportant des individus (individus) et estimer leur intention de vote (caractère) pouvant être n'importe lequel des candidats se présentant (modalités), ces données formant alors une série statistique qualitative.

Définition 9.2. On a aussi :
- Effectif d'une valeur : C'est le nombre de fois que la valeur d'un caractère (la modalité) revient dans la série ;
- Fréquence d'une valeur : C'est l'effectif de la modalité divisé par l'effectif total ; elle est comprise entre 0 et 1.
- Classes de valeurs : s'il y a trop de valeurs différentes, elles sont rangées par *classe* (intervalle), l'effectif de la classe étant alors le nombre de modalités appartenant à cet intervalle.

Pour faire parler ces (souvent longues) séries, il est nécessaire de les résumer : on produit alors *des* statistiques. Tout résumé met en évidence certaines caractéristiques de la série mais engendre une *perte d'information*, toutes les données n'étant plus accessibles.

Le résumé peut être un graphique : en Seconde vous avez vu le *diagramme en bâtons* et l'*histogramme* (pour des séries rangées en classes). Nous en verrons deux autres cette année.

Il peut aussi être numérique dans le cas d'une série satistique quantitative. Ces résumés numériques sont de deux types : les mesures centrales et les mesures de dispersion.

9.1.2 Mesures centrales

Elles visent à résumer la série par une seule valeur qu'on espère représentative de toutes les valeurs de la série.

En Seconde vous en avez vu trois : le mode, la moyenne, la médiane. Rappelons leur définition.

Définition 9.3 (Mode)**.** Le *mode* d'une série statistique est la donnée la plus fréquente de la série.

Remarques.
- S'il y a plusieurs données arrivant à égalité, il y a plusieurs modes.
- Si les données sont rangées en classe, on parle de *classe modale*.
- Le mode est défini aussi bien pour les séries quantitatives que qualitatives.

Le mode est un résumé sommaire d'une série qui fournit un type d'information assez limité. Il pourra intéresser un publicitaire.

Définition 9.4 (Moyenne arithmétique)**.** La *moyenne arithmétique* d'une série statistique quantitative $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est le nombre, souvent noté $\overline{x}$:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Remarques.
- La somme de toutes les valeurs de la série est inchangée si on remplace chaque valeur par $\overline{x}$.
- On note parfois $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$
- Si la série S comporte n données selon p modalités $x_1, x_2, \dots, x_p$ d'effectifs respectifs (ou de fréquences respectives) n_1, n_2, ..., n_p, alors $\overline{x} = \frac{n_1x_1+n_2x_2+\dots+n_px_p}{\underbrace{n_1 + n_2 + \dots + n_p}_{\text{effectif total}}}$

La moyenne a des avantages calculatoires : si l'on connaît les moyennes et les effectifs de deux séries (ou deux sous-séries), on peut obtenir la moyenne de la série constituée l'agrégation de ces deux séries. Elle a le défaut d'être très sensible aux valeurs extrêmes.

Définition 9.5 (Médiane)**.** On appelle *médiane* d'une série statistique quantitative tout nombre m tel que :
- la moitié au moins des valeurs de la série est inférieure à m
- la moitié au moins des valeurs de la série est supérieure à m

Remarques.
- Rappel : mathématiquement « inférieur » et « supérieur » signifient, en français, « inférieur ou égal » et « supérieur ou égal ».
- On admettra qu'un tel nombre existe toujours.
- Plusieurs valeurs peuvent parfois convenir pour la médiane.
- La médiane partage la série en deux sous-séries ayant *quasiment* le même effectif ; *quasiment* car si plusieurs valeurs de la série sont égales à la médiane, les données inférieures à la médiane et les données supérieures à la médiane ne seront pas forcément en nombre égal.
- Il faut comprendre la médiane comme « la valeur du milieu ».

Propriété 9.1. *Soit une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ telles que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$.*
- *Si n est impair,* ***la*** *médiane m de S est le $\frac{n+1}{2}$-ième élément de la série : $m = x_{\frac{n+1}{2}}$*
- *Si n est pair, tout nombre compris entre le $\frac{n}{2}$-ième et le $\left(\frac{n}{2}+1\right)$-ième élément de la série est* ***une*** *médiane. On prend généralement $m = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$*

On a aussi :

Propriété 9.2. *Soit une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ telles que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Alors la donnée de rang $E\left(\frac{1}{2}n\right)+1$ convient toujours comme médiane.*

Remarque. $E(x)$ est la partie entière de x, c'est-à-dire, pour un nombre positif, le nombre sans sa partie décimale.

La médiane a l'avantage de ne pas être influencée par les valeurs extrêmes. Elle n'a aucun avantage pratique dans les calculs, puisque pour connaître la médiane d'une série constituée de l'agrégation de deux séries, il faut nécessairement re-ordonner la nouvelle série pour trouver sa médiane, qui n'aura pas de lien avec les deux médianes des deux séries initiales.

9.1.3 Mesures de dispersion

En Seconde, les seules mesures de dispersion sont les valeurs extrêmes et l'étendue :

Définition 9.6. Les valeurs extrêmes d'une série sont ses valeurs minimale et maximale et l'étendue est la différence entre les valeurs extrêmes de la série.

Un des objectifs de la première est de les compléter par d'autres mesures plus fines.

9.2 Un problème

9.2.1 Le problème

Le couple moyenne-médiane fournit de bonnes informations sur une série dans certains cas :
- Si la moyenne est supérieure à la médiane, on peut conjecturer les données supérieures à la médiane sont éloignées de celle-ci ou que les données inférieures à la médiane sont proches de celle-ci (le mode peut alors indiquer laquelle de ces deux possibilités est la plus probable) ; si la moyenne est très supérieure à la médiane on peut conjecturer que les deux facteurs jouent.
- Si la moyenne est inférieure à la médiane, on peut conjecturer les données supérieures à la médiane sont proches de celle-ci ou que les données inférieures à la médiane sont éloignées de celle-ci (le mode peut alors indiquer laquelle de ces deux possibilités est la plus probable) ; si la moyenne est très inférieure à la médiane on peut conjecturer que les deux facteurs jouent.

Dans ces cas là, avec seulement 2 nombres (médiane et moyenne), on peut avoir un bon résumé de la série.

Par contre si moyenne et médiane sont proches, la seule chose qu'on peut dire c'est les données inférieures et supérieures à la médiane se compensent pour la moyenne. Soit pas grand chose.

On va voir dans le problème qui suit qu'il nous faut d'autres outils pour faire résumer une série.

PROBLÈME 9.1.
Soit S_1, S_2 et S_3 les trois séries de notes suivantes :

S_1	2; 2; 4; 4; 6; 10; 14; 16; 16; 18; 18
S_2	2; 8; 9; 10; 10; 10; 11; 12; 18
S_3	2; 5; 5; 5; 5; 6; 6; 7; 9; 10; 11; 13; 14; 14; 15; 15; 15; 15; 18

1. Pour chacune de ces séries, déterminer les valeurs extrêmes, la moyenne et la médiane.
   Que constate-t-on ?
2. Ces trois séries ont-elles la même allure ?
   Inventer des mesures permettant de témoigner des différences entre elles.

9.2.2 Résolution du problème

Les trois séries proposées ont les mêmes valeurs extrêmes, la même moyenne et la même médiane, cependant on peut observer qu'elles n'ont pas la même allure.

Dans S_1, deux blocs de notes extrêmes de part et d'autre des valeurs centrales et se compensent pour la moyenne.

Dans S_2, hormis les valeurs extrêmes, toutes les notes sont regroupées autour des valeurs centrales.

Dans S_3, deux gros blocs sont situés de part et d'autre des valeurs centrales, l'un autour de 5, l'autre autour de 15, et se compensent pour la moyenne et un petit bloc est centré sur 10.

Il s'agît donc d'inventer des mesures témoignant de la dispersion globale des données autour des valeurs centrales. Ce nouvel indicateur devra indiquer un écart important pour S_1, un écart réduit pour S_2 et un écart moyen pour S_3.

Première approche

Une autre façon de mesurer la dispersion d'une série est d'examiner comment sont réparties les plus petites valeurs d'une part, et les plus grandes valeurs d'autre part. Or on connait la valeur qui les sépare : c'est la médiane.

On s'intéresse alors, pour chaque série, aux deux sous-séries que constituent les données inférieures à la médiane et les données supérieures à la médiane.

Moyenne On peut en faire les moyennes qu'on peut appeler moyenne inférieure $\left(\overline{x^-}\right)$ et moyenne supérieure $\left(\overline{x^+}\right)$.

On obtient alors :

S_1	$\overline{x^-} \approx 4,7$; $\overline{x^+} \approx 15,3$
S_2	$\overline{x^-} = 7,8$; $\overline{x^+} = 12,2$
S_3	$\overline{x^-} = 6$; $\overline{x^+} = 14$

Ces indicateurs fournissent une bonne mesure de la dispersion de chacune des séries autour de la médiane.

Médiane On peut en faire les médianes qu'on peut appeler médiane inférieure (m^-) et médiane supérieure (m^+).

On obtient alors :

S_1	$m^- = 4$; $m^+ = 16$
S_2	$m^- = 9$; $m^+ = 11$
S_3	$m^- = 5$; $m^+ = 5$

Ces indicateurs fournissent là encore une bonne mesure de la dispersion de chacune des séries autour de la médiane.

On notera que au moins 25% des données de la série sont comprises entre la valeur minimale et m^-, 25% entre m^- et m, 25% entre m et m^+ et enfin 25% entre m^+ et la valeur maximale.

Ces trois nombres partagent donc la série en quarts et sont appelés *quartiles*. m^- est le premier quartile, noté Q_1, m est le deuxième quartile, noté m, et m^+ le troisième quartiel, noté Q_3.

C'est cette seconde mesure de dispersion qui a été retenue par les statisticiens.

Une seconde approche

Une façon de procéder est de mesurer l'écart de chaque donnée avec les valeurs centrales que sont la médiane et la moyenne en faisant la différence entre chaque donnée et ces valeurs centrales.

Ainsi on obtient :

S_1	-8 ; -8 ; -6 ; -6 ; -4 ; 0 ; $+4$; $+6$; $+6$; $+8$; $+8$
S_2	-8 ; -2 ; -1 ; 0 ; 0 ; 0 ; $+1$; $+2$; $+8$
S_3	-8 ; -5 ; -5 ; -5 ; -5 ; -4 ; -4 ; -3 ; -1 ; 0 ; $+1$; $+3$; $+4$; $+4$; $+5$; $+5$; $+5$; $+5$; $+8$

Le problème est que la somme de ces écarts est nulle (ou proche de 0 dans des cas moins particuliers que ces séries) !

Valeur absolue Une première solution est de prendre la valeur absolue de chacun de ces écarts.

Cet indicateur donne 64 pour S_1, 22 pour S_2 et 80 pour S_3 et témoigne que S_2 est moins dispersée que les autres, par contre il fournit une mauvaise indication pour S_1 et S_3. Cela est dû au fait que si les données de S_1 sont plus dispersées que celles de S_3, il y en a moins, donc cet indicateur est faussé par les effectifs.

Pour contourner ce problème, il suffit de passer à la moyenne de ces valeurs absolues. Ainsi la moyenne des écarts aux valeurs centrales est $\frac{64}{11} \approx 5,8$ pour S_1, $\frac{22}{9} \approx 2,4$ pour S_2 et $\frac{80}{19} \approx 4,2$ pour S_3.

On obtient ainsi une bonne mesure de la dispersion.

On admettra que pour cette mesure de dispersion c'est la médiane qui fournit la valeur la plus centrale.

Carré Une seconde solution est de prendre les carrés de chacun de ces écarts et d'en faire la moyenne pour compenser les différences d'effectifs comme précédemment.
On obtient $\frac{(-8)^2+(-8)^2+(-6)^2+\ldots+8^2}{11} \approx 39,3$ pour S_1, 15,3 pour S_2 et 21,7 pour S_3.
On obtient là encore ainsi une bonne mesure de la dispersion.
On démontre que pour cette mesure de dispersion, c'est la moyenne qui fournit la valeur la plus centrale.
C'est cette seconde mesure de dispersion qui a été choisie par les statisticiens. Elle est nommée *variance* de la série.
Dépendant des carrés des écarts à la moyenne, son unité peut parfois poser problème. Ainsi, si les données sont en mètre, la variance est en mètre carré. Par ailleurs, avec la mesure en valeur absolue, on obtenait des écarts à la médiane parlants (« les écarts à la médiane de S_1 sont en moyenne de 5,8 »est plus parlant que « la variance de S_1 est 39,3 »).
Pour toutes ces raisons, et d'autres encore, c'est la racine carrée de la variance qu'on fournit comme résumé et on appelle cette mesure de dispersion l'*écart-type* de la série.
Ainsi les écarts-types des séries S_1, S_2 et S_3 sont, respectivement, 6,3, 3,9 et 4,7.
Même si cela n'est pas tout à fait exact, on peut penser l'écart-type comme étant l'écart moyen à la moyenne de toutes les données de la série.

9.3 Médiane, quartiles et déciles

9.3.1 Définitions

Définition 9.7. Soit S une série statistique quantitative.
- On appelle *premier quartile*, noté Q_1, tout réel tel que
  - au moins 25% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à Q_1
  - au moins 75% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à Q_1
- On appelle *deuxième quartile* ou *médiane*, noté m (ou parfois Q_2), tout réel tel que
  - au moins 50% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à m
  - au moins 50% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à m
- On appelle *troisième quartile*, noté Q_3, tout réel tel que
  - au moins 75% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à Q_3
  - au moins 25% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à Q_3

De la même manière qu'on a défini les quartiles, on peut définir les *déciles* : ce sont les 9 nombres qui partagent la série en dixièmes (comme les trois quartiles partagent la série en quarts).

On s'intéressera à deux d'entre eux :

Définition 9.8. Soit S une série statistique quantitative.
- On appelle *premier décile*, noté D_1, tout réel tel que
  - au moins 10% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à D_1
  - au moins 90% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à D_1
- On appelle *neuvième décile*, noté D_9, tout réel tel que
  - au moins 90% des valeurs de la série ont une valeur inférieure ou égale à D_9
  - au moins 10% des valeurs de la série ont une valeur supérieure ou égale à D_9

On admettra que de tels nombres existent toujours.

Définition 9.9. Soit une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}$ telles que $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$. On appelle
- *étendue* de la série la différence $e = x_n - x_1$ (différence entre les termes extrêmes de la série) ;
- *écart interquartile* la différence $Q_3 - Q_1$;
- *intervalle interquartile* l'intervalle $[Q_1 ; Q_3]$.
- *écart interdécile* la différence $D_9 - D_1$;
- *intervalle interdécile* l'intervalle $[D_1 ; D_9]$.

Remarque. Toutes ces mesures statistiques sont dans la même unité que les valeurs de la série.

9.3.2 Propriétés

Comme pour la médiane, selon le nombre n de données dans la série, il y a parfois plusieurs possibilités pour Q_1 et Q_3 et parfois une seule, selon que n est ou n'est pas multiple de 4, ce qui peut compliquer leur recherche.

Heureusement, une formule permet de trouver une valeur convenable dans tous les cas :

Théorème 9.3. *Soit une série statistique quantitative comportant n données :* $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ *telles que* $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$.
- *La donnée de rang* $E\left(\frac{1}{10}n\right)+1$ *convient toujours comme premier décile.*
- *La donnée de rang* $E\left(\frac{1}{4}n\right)+1$ *convient toujours comme premier quartile.*
- *La donnée de rang* $E\left(\frac{3}{4}n\right)+1$ *convient toujours comme troisième quartile.*
- *La donnée de rang* $E\left(\frac{9}{10}n\right)+1$ *convient toujours comme neuvième décile.*

où $E(x)$ *est la partie entière de* x*, c'est-à-dire l'entier* n *tel que* $n \leqslant x < n+1$.

On l'admettra.

Remarques.
- $E(2,3) = 2$ et $E(3) = 3$.
- Les réels obtenus avec le théorème sont toujours des éléments de la série.

Exemple 9.2. S'il y a $n = 29$ données dans la série, rangées dans l'ordre croissant :
- $E\left(\frac{1}{10}\times 29\right)+1 = E(2,9)+1 = 2+1 = 3$ donc la troisième donnée de la série convient comme premier décile ;
- $E\left(\frac{1}{4}\times 29\right)+1 = E(7,25)+1 = 7+1 = 8$ donc la huitième donnée de la série convient comme premier quartile ;
- $E\left(\frac{1}{2}\times 29\right)+1 = E(14,5)+1 = 14+1 = 15$ donc la quinzième donnée de la série convient comme médiane ;
- $E\left(\frac{3}{4}\times 29\right)+1 = E(21,75)+1 = 21+1 = 22$ donc la vingt-deuxième donnée de la série convient comme troisième quartile ;
- $E\left(\frac{9}{10}\times 29\right)+1 = E(26,1)+1 = 26+1 = 27$ donc la vingt-septième donnée de la série convient comme neuvième décile quartile.

Propriété 9.4. *Soit une série statistique quantitative comportant n données :* $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ *avec* $n \geq 5$.
On ne change les déciles, les quartiles et la médiane si on remplace x_1 *par n'importe quel nombre de l'intervalle* $]-\infty\,; x_1]$ *et* x_n *par n'importe quel nombre de l'intervalle* $[x_n\,; +\infty[$.

Preuve. Comme on ne change pas le nombre de valeurs de la série, il y en aura toujours autant inférieures et supérieures à D_1, Q_1, m, Q_3 et D_9. ◇

9.4 Moyenne, variance et écart-type

9.4.1 Définitions

Définition 9.10. Soit S une série statistique quantitative comportant n données : $S = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$.
On appelle :
- *moyenne* de S, notée $\overline{x}$, le nombre $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$.
- *variance* de S, notée V, le nombre $V = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\overline{x}-x_i)^2}{n} = \frac{(\overline{x}-x_1)^2+\dots+(\overline{x}-x_n)^2}{n}$
- *écart-type* de S, noté s, le nombre $s = \sqrt{V}$.

Les formules de la définition sont équivalentes aux suivantes :

Propriété 9.5. *Soit S une série statistique quantitative comportant n données selon p modalités* $x_1, x_2, \dots, x_p$ *d'effectifs respectifs (ou de fréquences respectives)* n_1, n_2, …, n_p*, alors :*

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{p} n_i} = \frac{n_1x_1+n_2x_2+\dots+n_px_p}{n_1+n_2+\dots+n_p} \qquad V = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i\left(\overline{x}-x_i\right)^2}{n_1+n_2+\dots+n_p}$$

Preuve. **Dans le cas des effectifs** La valeur x_i ayant pour effectif n_i, pour chaque valeur on a : $\underbrace{x_i+x_i+\dots+x_i}_{n_i} = n_ix_i$ et la somme de toutes les valeurs est bien égale à la somme des n_ix_i.

On a aussi $n_1+n_2+\dots+n_p = n$. On a donc $\frac{\sum_{i=1}^{p} n_ix_i}{\sum_{i=1}^{p} n_i} = \overline{x}$.

Dans le cas des fréquences Si n_i est l'effectif de x_i alors $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_ix_i}{n} = \sum_{i=1}^{p}\frac{n_i}{n}x_i = \sum_{i=1}^{p} f_ix_i$ où f_i est la fréquence de x_i.

Par ailleurs la somme des fréquences, $\sum_{i=1}^{p} f_i$ est égale à 1 donc $\overline{x} = \sum_{i=1}^{p} f_ix_i = \frac{\sum_{i=1}^{p} f_ix_i}{1} = \frac{\sum_{i=1}^{p} f_ix_i}{\sum_{i=1}^{p} f_i}$.

La formule est donc valable avec les fréquences.

On démontre de même que la seconde formule donne bien la variance. ◇

Rappelons ce que nous avons vu dans le problème d'introduction.

La variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. Elle mesure donc la dispersion des valeurs autour de la moyenne. Elle n'est pas très parlante car elle s'exprime dans le carré de l'unité du caractère.

L'écart-type a l'avantage de s'exprimer dans la même unité que le caractère.

L'écart-type permet de comparer la dispersion de deux séries, quand l'ordre de grandeur des données des deux séries est le même. Contrairement à l'écart interquartile, il tient compte de l'ensemble de la population.

9.4.2 Propriétés

On dispose d'une formule plus pratique pour calculer la variance :

Théorème 9.6. *Soit S une série statistique quantitative comportant n données selon p modalités $x_1, x_2, \dots, x_p$ d'effectifs respectifs (ou de fréquences respectives) n_1, n_2, ..., n_p, alors :*

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{p} n_i} - \overline{x}^2$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
V &= \frac{\sum_i n_i \left(\overline{x} - x_i\right)^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_i n_i \left(\overline{x}^2 - 2\overline{x}x_i + x_i^2\right) \\
&= \frac{1}{n}\left[n_1\left(\overline{x}^2 - 2\overline{x}x_1 + x_1^2\right) + \dots + n_p\left(\overline{x}^2 - 2\overline{x}x_p + x_p^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{n}\left[(n_1 + \dots + n_p)\overline{x}^2 - 2\overline{x}(n_1x_1 + \dots + n_px_p) + n_1x_1^2 + \dots + n_px_p^2\right]
\end{aligned}$$

Or $n_1 + \dots + n_p = n$ car c'est la somme des effectifs de chaque valeur et $n_1x_1 + \dots + n_px_p = n\overline{x}$ par définition de la moyenne. On a donc :

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{n}\left[n\overline{x}^2 - 2\overline{x}(n\overline{x}) + n_1x_1^2 + \dots + n_px_p^2\right] = \frac{1}{n}\left[n\overline{x}^2 - 2n\overline{x}^2 + n_1x_1^2 + \dots + n_px_p^2\right] \\
&= \frac{1}{n}\left[-n\overline{x}^2 + n_1x_1^2 + \dots + n_px_p^2\right] = -\overline{x}^2 + \frac{1}{n}\left(n_1x_1^2 + \dots + n_px_p^2\right) \\
&= -\overline{x}^2 + \frac{1}{n}\sum_i n_i x_i^2
\end{aligned}$$

On démontre la formule avec les fréquences de la même manière que dans la démonstration de la propriété 6. ♢

9.4.3 Moyennes mobiles

Dans le cas d'une série chronologique, afin d'atténuer les variations saisonnières, on peut remplacer chaque donnée par la moyenne de cette donnée avec les $n-1$ précédentes données. On obtient alors *un lissage par moyenne mobile d'ordre n*.

Exemple 9.3. On donne les résultats de vente suivants :

Année	1 997				1 998				1 999				2 000			
Trimestre	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Ventes	36	44	45	106	38	46	47	112	42	49	48	118	42	50	51	118

1. Représenter ces données dans un repère. Qu'observe-t-on ?
2. Réaliser des lissages d'ordre 2, 3 et 4 (on pourra compléter le tableau ci-dessous).

Année	1 997				1 998				1 999				2 000			
Trimestre	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
Ventes	36	44	45	106	38	46	47	112	42	49	48	118	42	50	51	118
Lissage d'ordre 2																
Lissage d'ordre 3																
Lissage d'ordre 4																

3. Représenter ces lissages dans le repère précédent.
4. Qu'observe-ton ?

9.5 Représentations graphiques

9.5.1 Diagramme à bâtons, Histogramme

Si les données sont regroupées en classes (intervalles), la série peut-être représentée par un histogramme où chaque rectangle a son *aire* proportionnelle à l'effectif (ou à la fréquence) de la classe.

Ainsi si on considère la série :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_i	3	5	6	5	6	7	7	10	13	20	25	21	23	12	10	5	7	5	3	2	1

Et la même regroupée en classe :

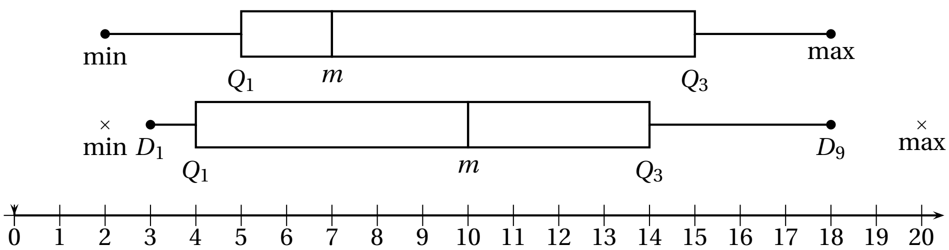
x_i	$[0; 5,5]$	$]5,5; 8,5]$	$]8,5; 11,5]$	$]11,5; 14,5]$	$]14,5; 20]$
n_i	30	30	66	45	23

On obtient les diagramme en bâtons et histogramme des figures 9.1 et 9.2 page suivante.

9.5.2 Diagramme en boite

On peut représenter graphiquement les valeurs extrêmes, les quartiles et la médiane par un diagramme en boite, appelé aussi boite à moustaches, conçues de la manière suivante :

- au centre une boite allant du premier au troisième quartile, séparée en deux par la médiane ;
- de chaque côté une moustache allant du minimum au premier quartile pour l'une, et du troisième quartile au maximum pour l'autre.



Ces diagrammes permettent une interprétation visuelle et rapide de la dispersion des séries statistiques. Ils permettent également d'apprécier des différences entre des séries (lorsqu'elles ont des ordres de grandeurs comparables).

Remarques.
- La hauteur des boites est arbitraire (on les fait parfois proportionnelles à l'effectif total de la série).
- La boite contient les 50% des données centrales.
- On coupe parfois les moustaches de part et d'autre à la hauteur du premier et neuvième décile ; on fait alors apparaître les minimum et maximum par un point (voir la seconde boite du schéma précédent).

9.6 Exercices

Exercice 9.1.
On a relevé le prix de vente d'un CD et le nombre de CD vendus chez différents fournisseurs. Les résultats forment une série statistique à une variable donnée par le tableau ci-dessous.

Prix de vente (en €)	15	16	17	18	19
Nombre de CD vendus	83	48	32	20	17

1. Quelles sont les différentes valeurs de la série.
2. Donner la fréquence correspondant à chacune de ces valeurs.
3. Donner la moyenne et l'écart-type de la série. Que représentent ces nombres ?
4. Représenter la série par un diagramme à bâtons.

Exercice 9.2.
Dans une classe de 30 élèves, la moyenne des 20 filles est 11,5 et la moyenne des 10 garçons est 8,5. Donner la moyenne de classe.

FIGURE 9.1 – Diagramme en bâtons

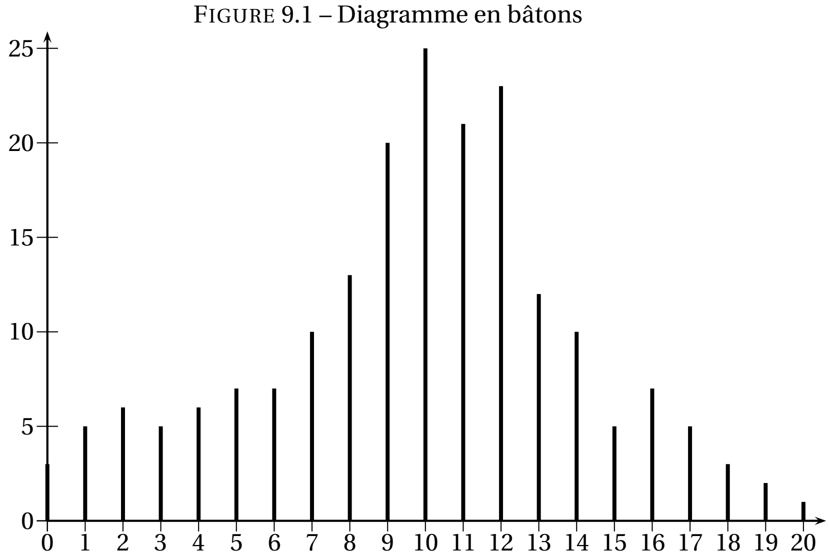
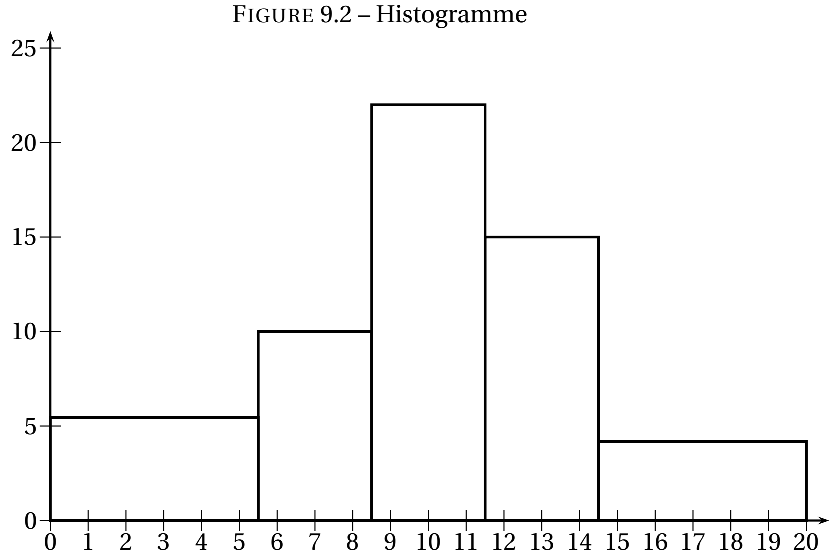


FIGURE 9.2 – Histogramme



x_i	$[0\,;5{,}5]$	$]5{,}5\,;8{,}5]$	$]8{,}5\,;11{,}5]$	$]11{,}5\,;14{,}5]$	$]14{,}5\,;20]$
n_i	30	30	66	45	23
Aire = n_i	30	30	66	45	23
Largeur = amplitude de la classe	5,5	3	3	3	5,5
Hauteur = $\dfrac{\text{Aire}}{\text{Largeur}}$	5,45	10	22	15	4,18

EXERCICE 9.3.
On donne la série suivante : 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 15, 15, 17.

1. Représenter le diagramme en boîte correspondant en coupant les moustaches aux premier et neuvième décile.
2. Quel est l'écart interquartile de la série ?
3. Quel est l'intervalle interdécile de la série ?

EXERCICE 9.4.
Le tableau ci-dessous donne une répartition des salaires mensuels en euros des employés dans une entreprise.

Salaire	$[1\,000;1\,200[$	$[1\,200;1\,500[$	$[1\,500;2\,000[$	$[2\,000;3\,000[$	$[3\,000;10\,000[$
Effectif	326	112	35	8	3

1. Quel est le nombre d'employés de l'entreprise ?
2. Quel est le nombre d'employés touchant un salaire mensuel supérieur ou égal à 1 200 € ?
3. Représenter les données par un histogramme.
4. Quel est le salaire moyen des employés de l'entreprise ?

EXERCICE 9.5.
Un entomologiste a fait des relevés sur la taille de 50 courtilières adultes.
33, 35, 36, 36, 37, 37, 37, 38, 38, 38, 39, 39, 39, 39, 40, 40, 40, 40, 40, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 41, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 43, 43, 43, 43, 44, 44, 44, 44, 45, 45, 45, 46, 46, 47, 47, 48, 48, 50.

1. Organiser les relevés dans le tableau d'effectifs suivant :

Valeur	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
Effectif																		
Effectif cumulé croissant																		

2. Représenter les données par un diagramme à bâtons. Un diagramme circulaire serait-il intéressant ?
3. Calculer la moyenne de la série. Déterminer sa médiane. Déterminer les premier et troisième quartiles puis les premier et neuvième déciles.
4. Construire le diagramme en boîte correspondant.
5. On regroupe les données en classes. Compléter le tableau des effectifs suivants :

Valeur	$[33;37[$	$[37;340[$	$[40;42[$	$[42;44[$	$[44;47[$	$[47;51[$
Effectif						

Dessiner l'histogramme correspondant.

EXERCICE 9.6.
Huit sprinters effectuent deux 100 m. Leurs temps sont donnés dans le tableau suivant :

Sprinter	A	B	C	D	E	F	G	H
Sprint 1	10"14	10" 17	9"94	10" 05	10"25	10" 09	9" 98	10"32
Sprint 2	10"41	9"97	9" 96	10" 12	10" 19	10" 24	10"12	10" 17

Soit (x_i) les temps respectifs des sprinters A, B, …, H au sprint 1 et (yi) les temps respectifs des sprinters A, B, …, H au sprint 2.

1. Calculer les moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$ des séries (x_i) et (y_i).
2. Calculer les écarts-types s_x et s_y des séries (x_i) et (y_i).
3. Lequel des deux sprints a été le plus homogène ?

EXERCICE 9.7.
Le tableau suivant donne les effectifs des notes obtenues dans une classe en Mathématiques et en Histoire-Géographie :

Notes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Maths	0	0	0	0	1	0	1	1	3	4	4	1	3	2	2	1	1	0	0	0	0
H.-G.	0	1	0	0	2	0	1	2	1	1	4	2	2	0	3	2	1	0	1	0	1

Le but de l'exercice est de comparer la dispersion des notes en Maths et en Histoire-Géographie.

1. Utilisation des quartiles
   (a) Calculer médiane m_e et quartiles Q_1 et Q_3 en Maths
   (b) Calculer médiane m'_e et quartiles Q'_1 et Q'_3 en Physique

(c) Représenter les diagrammes en boîte des notes en Maths et en Physique. Interpréter.

2. Utilisation des écarts-types
   (a) Calculer la moyenne $\overline{m}$ des notes en Maths et la moyenne des notes $\overline{m'}$ en Histoire-Géographie. Interpréter.
   (b) Calculer l'écart-type s des notes en Maths et l'écart-type s' des notes en Histoire-Géographie. Interpréter. (*On considérera que les notes en Maths et les notes en Histoire-Géographie sont des grandeurs comparables et qu'il n'y a pas lieu de relativiser les écarts-types*)

EXERCICE 9.8.
Le tableau suivant donne les effectifs des notes obtenues dans une classe en Mathématiques et en Sciences de la vie et de la terre :

Note	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Maths	0	1	0	2	0	1	3	0	5	0	2	1	1	0	0	0	2	1	1	0	2
SVT	0	1	0	0	0	0	0	4	4	1	0	3	1	4	2	0	1	0	0	0	1

1. (a) Déterminer les rangs des quartiles et de la médiane des deux séries puis donner leurs valeurs.
   (b) Faire le diagramme en boite des deux séries sur une même échelle puis commenter le diagramme.
2. (a) Déterminer la moyenne des notes de Mathématiques et la comparer à la médiane en expliquant ce qui cause cet écart.
   (b) Déterminer la moyenne des notes de Sciences de la vie et de la terre. L'écart avec la moyenne est-il le même ? Pourquoi ?
   (c) Déterminer les écarts types des deux séries (arrondis au dixième) et commenter vos résultats.

EXERCICE 9.9.
Le tableau suivant donne les temps de cinq sportifs qui ont couru un 1 500 m et un 5 000 m.

	Coureur 1	Coureur 2	Coureur 3	Coureur 4	Coureur 5
1 500 m	3'58"17	4'05"48	4'12"97	4'08"29	4'00"12
5 000 m	14'58"12	14'47"08	15'37"85	13'57"70	14'48"34

On veut déterminer quelle est la course la plus homogène.

Le problème est que les données de chaque série ne sont pas du même ordre de grandeur. En effet un écart moyen de la première série de 30 s sera proportionnellement plus important qu'un écart moyen de 1 min pour la seconde de 1 min.

Pour palier à cette difficulté on utilise l'écart-type relatif, noté C_v, appelé coefficient de variation définit par $C_v = \frac{s}{\overline{x}}$ et un écart interquartile relatif, définit par $\frac{Q_3-Q_1}{m}$.

1. Utilisation des coefficients de variation
   (a) Calculer le temps moyen $\overline{m}$, l'écart-type s puis le coefficient de variation $C_v = \frac{s}{\overline{m}}$ pour le 1 500 m. (*On pourra convertir tous les temps en secondes*).
   (b) Faire de même pour le 5 000 m.
   (c) Conclure.
2. Utilisation de l'interquartile relatif
   (a) Déterminer la médiane m_e et les quartiles Q_1 et Q_3 pour le 1 500 m. En déduire l'interquartile relatif $\frac{Q_3-Q_1}{m_e}$.
   (b) Faire de même pour le 5 000 m.
   (c) Conclure.
3. Donner une explication à la contradiction entre 1.c) et 2.c).