Corrigé du devoir surveillé n°8

Fonction dérivée – Fonctions de deux variables

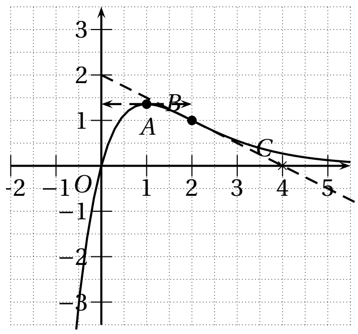
EXERCICE 8.1 (3 points)**.**
Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

- $f(x) = (2x+3)\sqrt{x}$
- $g(x) = (x^2+4x+3)^3$

- $f = u \times v$ avec $u(x) = 2x+3$ et $v(x) = \sqrt{x}$ or $f' = u'v + uv'$.
  Comme $u'(x) = 2$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ alors $f'(x) = 2\sqrt{x} + (2x+3)\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- $g = u^3$ avec $u(x) = x^2+4x+3$ or $g' = 3u'u^2$.
  Comme $u'(x) = 2x+4$ alors $g'(x) = 3(2x+4)\left(x^2+4x+3\right)^2$.

EXERCICE 8.2 (3 points)**.**
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure ci-contre est une partie de la courbe représentative, relativement à un repère orthogonal, d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne les renseignements suivants :

- la courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 ;
- le point $B(2;1)$ appartient à $\mathscr{C}$;
- la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B passe par le point $C(4;0)$;



1. Déterminer graphiquement $f(2)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.

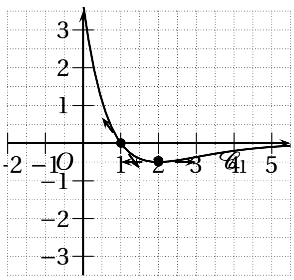
- Le point $B(2;1)$ appartient à $\mathscr{C}$ donc $f(2) = 1$.
- La courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 donc $f'(1) = 0$ car c'est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.
- La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B passe par le point $C(4;0)$ donc son coefficient directeur vaut $f'(2) = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{0-1}{4-2} = -\frac{1}{2}$.

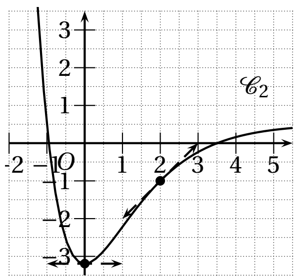
2. Une des représentations graphiques ci-dessous, représente la fonction dérivée f' de f. En justifiant votre choix *à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques*, déterminer la courbe associée à la fonction f'.

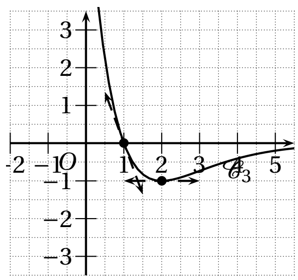
Les variations de f donnent le signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variations de f		↗		↘	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	

Donc la courbe de f' ne peut pas être la courbe $\mathscr{C}_2$, mais peut très bien être une des deux autres courbes. Il faut un argument supplémentaire.
On sait que $f'(2) = -\frac{1}{2}$ donc la courbe de f' passe par le point $\left(2;-\frac{1}{2}\right)$. Ce ne peut donc pas être la courbe $\mathscr{C}_3$.
La courbe de f' est donc la courbe $\mathscr{C}_1$.







EXERCICE 8.3 (8 points).

f est la fontion définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-11x+28}{x-3}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.
On donne en annexe page suivante un repère dans lequel une partie de $\mathscr{C}$ est déjà tracée.
On complètera le schéma avec les éléments rencontrés au fur et à mesure de l'exercice (points, tangentes, etc.).

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ et on note f' la fonction dérivée de f.

   (a) Justifer que $f'(x) = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$.

   $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 - 11x + 28$ et $v(x) = x - 3$. Or $f' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.
   Comme $u'(x) = 2x - 11$ et $v'(x) = 1$, alors $f'(x) = \frac{(2x-11)(x-3)-(x^2-11x+28)}{(x-3)^2} = \frac{2x^2-6x-11x+33-x^2+11x-28}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$.

   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x et établir le tableau de variation de la fonction f (on indiquera les extremums locaux de f).

   - Signe de $f'(x)$.
     · $x^2 - 6x + 5$ est un trinôme positif sauf entre les racines, si elles existent.
     $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 36 - 20 = 16 = 4^2 > 0$, il y a donc deux racines $x_1 = \frac{-(-6)-4}{2} = \frac{2}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{-(-6)+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$
     · $(x-3)^2$ est positif.
     On a donc :

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
x^2-6x+5		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$(x-3)^2$		$+$		$+$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

   - Le signe de $f'(x)$ donne les variations de f. On a donc :

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	-9	$\searrow$	‖	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

   Car $f(1) = \frac{1^2-11\times1+28}{1-3} = \frac{18}{-2} = -9$ et $f(5) = \frac{5^2-11\times5+28}{5-3} = \frac{-2}{2} = -1$.

2. (a) Déterminer, s'il y en a, les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

   On cherche les abscisses ou le coefficient directeur de la tangente est égal à zéro, donc on cherche les x tels que $f'(x) = 0$. Or on sait que $f'(x) = 0$ pour $x = 1$ ou pour $x = 5$.
   Donc les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses sont 1 et 5.

   (b) Soit T la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de T.

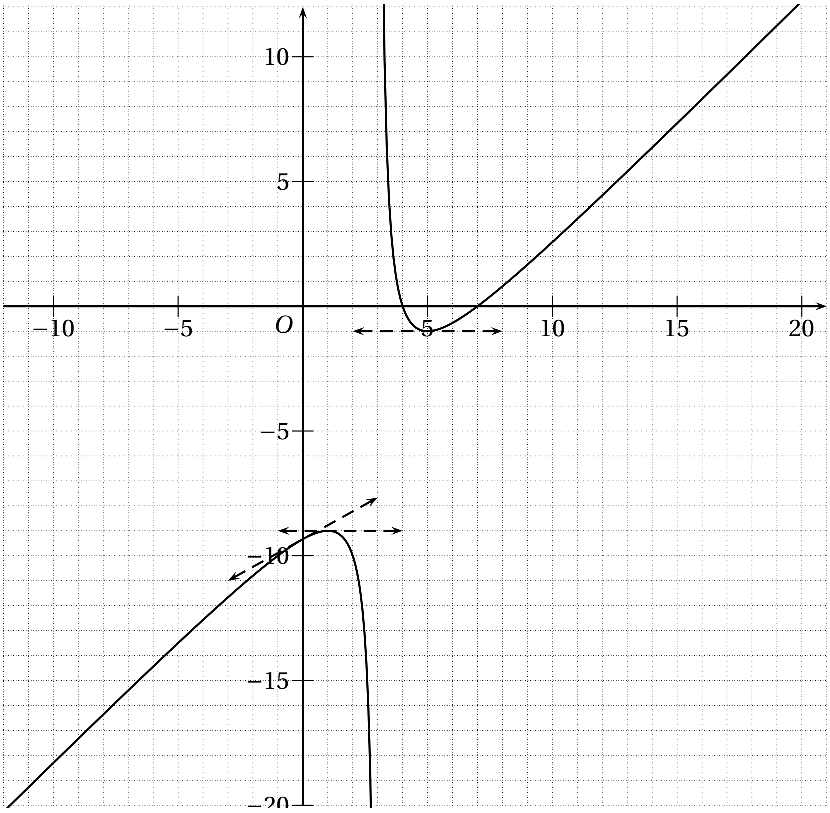
   On sait que la tangente au point d'abscisse a admet pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
   Donc $T : y = f'(0)(x-0) + f(0)$.
   Or $f'(0) = \frac{0^2-6\times0+5}{(0-3)^2} = \frac{5}{9}$ et $f(0) = \frac{0^2-11\times0+28}{0-3} = -\frac{28}{3}$.
   Donc $T : y = \frac{5}{9}x - \frac{28}{3}$.

3. (a) Tracer les tangentes de la question 2.

   (b) Compléter le tracé de $\mathscr{C}$.

Voir la figure 8.1 page ci-contre.

FIGURE 8.1 – Annexe de l'exercice 8.3



EXERCICE 8.4 (6 points)**.**
*Pour les élèves **n'ayant pas suivi** l'enseignement de spécialité.*
On considère un rectangle de dimensions ℓ et L. On appelle P son périmètre et S son aire.

1. Exprimer P en fonction de ℓ et L. Faire de même pour S.

   $P = 2(\ell + L)$ et $S = \ell \times L$

2. On suppose maintenant que son périmètre est égal à 8 cm et que son aire est égale à 3,75 cm^2.
   Déterminer ℓ et L.

   On a donc : $\begin{cases} 2(\ell + L) = 8 \\ \ell \times L = 3,75 \end{cases}$.
   De la première ligne il vient : $2(\ell + L) = 8 \Leftrightarrow \ell + L = 4 \Leftrightarrow \ell = 4 - L$.
   Remplaçons ℓ dans la seconde ligne : $\ell \times L = 3,75 \Leftrightarrow (4 - L) \times L = 3,75 \Leftrightarrow 4L - L^2 = 3,75 \Leftrightarrow -L^2 + 4L - 3,75 = 0$.
   Cherchons les éventuelles racines du trinôme : $\Delta = 4^2 - 4(-1)(-3,75) = 16 - 15 = 1 = 1^2 > 0$ donc il y a deux racines : $L_1 = \frac{-4-1}{-2} = 2,5$ (et dans ce cas $\ell_1 = 4 - L_1 = 1,5$) et $L_2 = \frac{-4+1}{-2} = 1,5$ (et dans ce cas $\ell_2 = 4 - L_2 = 2,5$).
   Finalement les dimensions de ce rectangle sont 1,5 cm et 2,5 cm.

3. On suppose que son périmètre est égal à 4 cm et on recherche maintenant les dimensions du rectangle de façon que son aire S soit maximale.

   (a) Expliquer pourquoi $L = 2 - \ell$.

   $P = 2(\ell + L) = 4 \Leftrightarrow \ell + L = 2 \Leftrightarrow L = 2 - \ell$.

   (b) En déduire une expression de S en fonction de ℓ.

   $S = \ell \times L = \ell(2 - \ell)$.

   (c) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2 - x)$.
   Calculer la dérivée f' et étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f.

Le plus simple est de développer f : $f(x) = 2x - x^2$ donc $f'(x) = 2 - 2x$, fonction affine décroissante s'annulant en 1 donc :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
f		$\nearrow$	1	$\searrow$	

Car $f(1) = 1(2-1) = 1$.

(d) En déduire les dimensions du rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm et l'aire S est maximale.

On remarque que $S = f(\ell)$ donc S est maximale quand $\ell = 1$ et dans ce cas $L = 2 - \ell = 1$.
Les dimensions du rectangle sont 1 cm sur 1 cm (c'est un carré).

EXERCICE 8.4 (6 points).
*Pour les élèves **ayant suivi** l'enseignement de spécialité.*
Une entreprise fabrique des savons et des bougies parfumées en quantités respectives x et y exprimées en tonnes.
Le coût total de production z, exprimé en milliers d'euros, est donné par la relation $z = 2x^2 - 8x + y^2 - 6y + 18$ avec $x \in [0\,;6]$ et $y \in [0\,;8]$.

1. La surface $\mathscr{S}$ représentant le coût en fonction de x et y dans un repère orthogonal $\left(\text{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ est donnée sur la figure 8.2 page suivante.

(a) Le point $A(3\,;2\,;3)$ appartient-il à la surface $\mathscr{S}$? Justifier.

Regardons si les coordonnées de A vérifient l'équation de la surface : $z = 2x^2 - 8x + y^2 - 6y + 18$.
$2x_A^2 - 8x_A + y_A^2 - 6y_A + 18 = 2\times 3^2 - 8\times 3 + 2^2 - 6\times 2 + 18 = 18 - 24 + 4 - 12 + 18 = 4 \neq z_A$ donc A n'appartient pas à la surface $\mathscr{S}$.

(b) Les points F et G sont sur la surface $\mathscr{S}$.
Donner sans justifier leurs coordonnées.

$F(5\,;4\,;20)$ et $G(4\,;2\,;10)$.

(c) Les points suivants appartiennent à $\mathscr{S}$:
- le point B d'abscisse 5 et d'ordonnée 1 ;
- le point C d'abscisse 4 et de cote 20 ;
- le point D d'ordonnée 5 et de cote 30.

Les placer sur la figure 8.2 page ci-contre.

Voir la figure.

(d) Soit $y = 2$. Exprimer alors z sous la forme $z = f(x)$ puis donner la nature de la section de la surface $\mathscr{S}$ par le plan d'équation $y = 2$ en justifiant.

$z = 2x^2 - 8x + y^2 - 6y + 18 = 2x^2 - 8x + 2^2 - 6\times 2 + 18 = 2x^2 - 8x + 10$ donc z est une fonction trinôme de x, donc la section est une parabole.

2. On donne, sur la figure 8.3 page suivante, la projection orthogonale de la surface $\mathscr{S}$ sur le plan $(x\text{O}y)$ (« vue de dessus de la surface $\mathscr{S}$ »).

(a) E' est la projection orthogonale dans le plan $(x\text{O}y)$ d'un point E situé sur la surface $\mathscr{S}$.

i. Déterminer les coordonnées de E.

E est le point de la surface qui a les mêmes abscisse et ordonnée que E'. Sa cote est donc $z_E = 2x^2 - 8x + y^2 - 6y + 18 = 2\times 4^2 - 8\times 4 + 5^2 - 6\times 5 + 18 = 13$.
Donc $E(4\,;5\,;13)$.

ii. On appelle E'' la projection orthogonale de E dans le plan $(y\text{O}z)$.
Donner les coordonnées de E''.

E'' étant dans le plan $(y\text{O}z)$, son abscisse est 0. Sinon ses coordonnées sont les mêmes que celles de E.
Donc $E''(0\,;5\,;13)$.

(b) Représenter sur la figure 8.3 page ci-contre les points B', C' et D', projections orthogonales respectives de B, C et D de la question 1c dans le plan $(x\text{O}y)$.

Voir la figure.

FIGURE 8.2 – Figure de l'exercice 8.4 (spécialité)

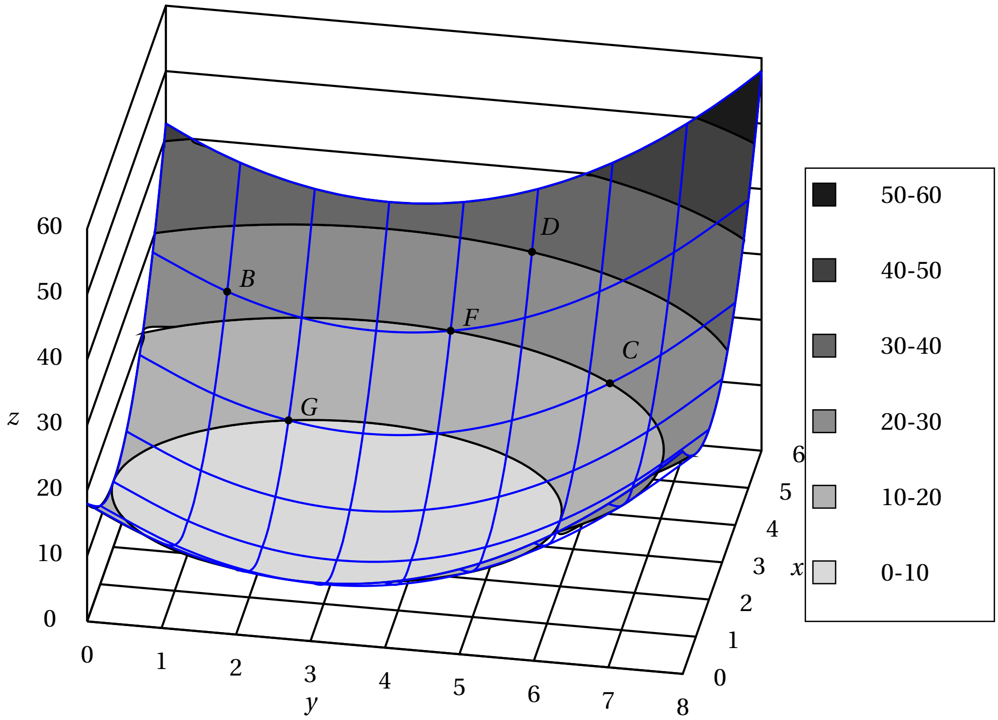


FIGURE 8.3 – Figure de l'exercice 8.4 (spécialité)