Chapitre 10

Optimisation à deux variables

Sommaire

10.1 Équations de droites

10.1.1 Activités

Activité 10.1 (Équations de droites (rappels)).
Dans toute l'activité le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ orthogonal.

1. Quelle est la nature de $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction $f(x)=-3x+0,5$, définie sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer si $A(150,5;-451)$ ou $B(-73,25;-219,5)$ appartiennent à $\mathscr{C}$.
2. La droite $\mathscr{D}$ est d'équation réduite : $y=\frac{5}{2}x-1$.
   (a) A est le point de $\mathscr{D}$ d'abscisse 12. Quelle est son ordonnée ?
   (b) B est le point de $\mathscr{D}$ d'ordonnée $-\frac{1}{2}$. Quelle est son abscisse ?
3. Dans un même repère, tracer les droites dont les équations sont les suivantes :
   - $\mathscr{D}_1 : y=-\frac{1}{2}x+5$;
   - $\mathscr{D}_2 : y=4x-2$;
   - $\mathscr{D}_3 : y=-3$;
   - $\mathscr{D}_4 : y=\frac{3}{4}x-4$;
   - $\mathscr{D}_5 : x=6$;
4. Dans un même repère, tracer les droites suivantes :
   - $\mathscr{D}_1$ passant par $A(3;1)$ et de coefficient directeur -1 ;
   - $\mathscr{D}_2$ passant par $B(-3;2)$ et de coefficient directeur $-\frac{1}{4}$;
   - $\mathscr{D}_3$ passant par $C(1;0)$ et de coefficient directeur 3 ;
   - $\mathscr{D}_4$ passant par $D(0;2)$ et de coefficient directeur $\frac{4}{3}$;
   - $\mathscr{D}_5$ passant par $E(-2;2)$ et de coefficient directeur 0 ;
5. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de la droite (AB) :
   (a) $A(1;2)$ et $B(3;-1)$;
   (b) $A(0;-1)$ et $B(2;3)$;
   (c) $A(-2;2)$ et $B(3;2)$;
   (d) $A(1;3)$ et $B(1;4)$;
6. Déterminer graphiquement les équations réduites des droites représentées sur la figure 10.1 page suivante.
7. Même question pour les droites représentées sur la figure 10.2 page suivante.

FIGURE 10.1 – Figure 1

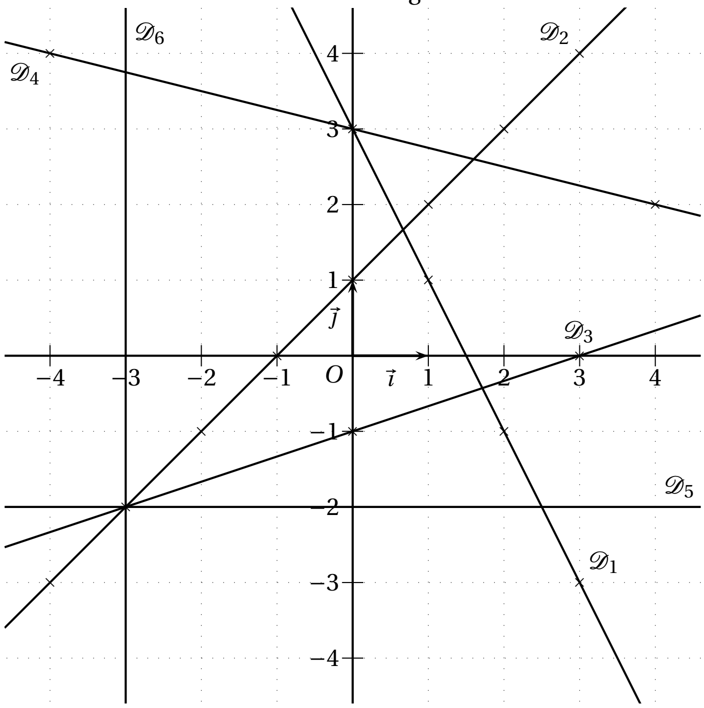
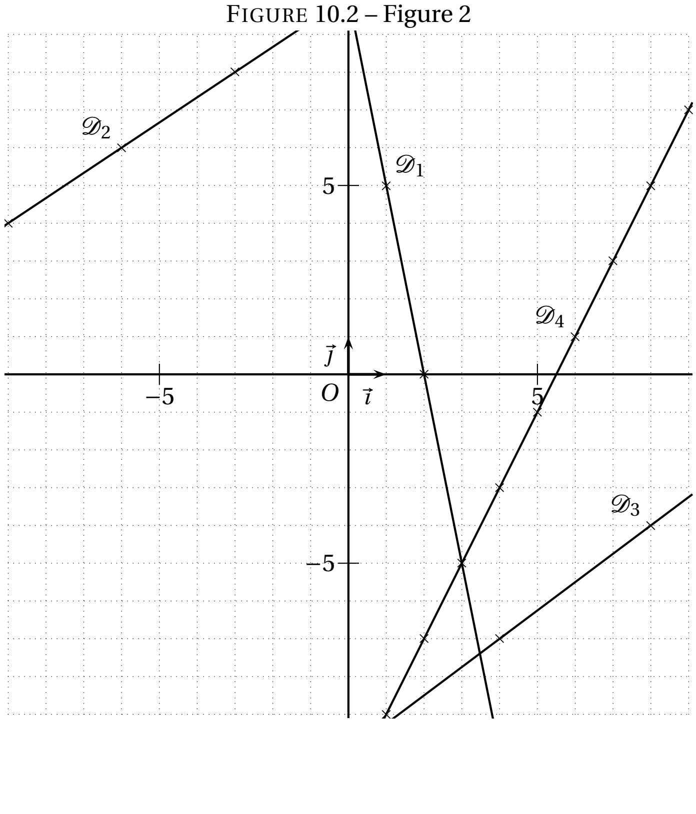


FIGURE 10.2 – Figure 2



ACTIVITÉ 10.2 (Autres équations)**.**
Dans toute l'activité le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ orthogonal.

1. On cherche à identifier quel est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x;y)$ tels que x et y vérifient la relation : $2x+y=3$.
   (a) Déterminer y lorsque $x=1$. Placer ce point dans le repère ; on le nommera A.
   (b) Déterminer y lorsque $x=0$. Placer ce point dans le repère ; on le nommera B.
   (c) Déterminer x lorsque $y=-3$. Placer ce point dans le repère ; on le nommera C.
   (d) Déterminer x lorsque $y=-1$. Placer ce point dans le repère ; on le nommera D.
   (e) Que constate-t-on concernant A, B, C et D ?
   (f) Choisir un autre point ayant la même caractéristique que A, B, C et D et regarder si ses coordonnées vérifient la relation : $2x+y=3$.
   (g) Choisir un autre point n'ayant pas la même caractéristique que A, B, C et D et regarder si ses coordonnées vérifient la relation : $2x+y=3$.
2. En vous inspirant de ce qui précède, représenter l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x;y)$ tels que x et y vérifient la relation : $3x-2y=4$.
3. Mêmes questions avec les relations suivantes :
   - $-x-2y=3$;
   - $2x+0y=5$;
   - $0x+3y=2$.

   Que constate-t-on dans les deux derniers cas ?

ACTIVITÉ 10.3 (Droites parallèles)**.**
Dans toute l'activité le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ orthogonal.

1. On considère les droites $(d_1): 2x+5=0$ et $(d_2): x=-1$.
   Expliquer pourquoi ces droites sont parallèles.
2. On donne $(d_3): y=3x+4$, $(d_4): 3x-y=9$ et $(d_5): 3x+y=0$.
   (a) Déterminer l'équation réduite des droites (d_4) et (d_5).
   (b) Parmi ces trois droites, quelles sont celles qui sont parallèles ?
3. On donne la droite $(d): 5x+2y=10$.
   (a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (d) avec les axes du repère et placer ces points.
   (b) Déterminer l'équation réduite de (d) et en déduire son coefficient directeur.
   (c) Tracer la droite (d') parallèle à (d) et passant par le point $K(1;-1)$ et déterminer son équation réduite.
   (d) Montrer qu'une équation de (d') est : $5x+2y=3$.
   (e) Montrer que la droite (d'') d'équation : $5x+2y=c$ (où c est un réel) est parallèle à la droite (d).

ACTIVITÉ 10.4 (Droites sécantes)**.**
Dans toute l'activité le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ orthogonal.
On considère les droites $(d_1): 2x+y=5$ et $(d_2): 3x-5y=3$.

1. Déterminer les équations réduites des droites (d_1) et (d_2) et en déduire qu'elles sont sécantes.
2. Tracer ces deux droites et lire graphiquement les coordonnées de leur point d'intersection I.
3. Soit $(x;y)$ les coordonnées du point I. Le point I appartient aux deux droites, par conséquent ses coordonnées vérifient simultanément les équations des deux droites, donc elles vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+y=5 \\ 3x-5y=3 \end{array}\right.$$

   Résoudre ce système par la méthode de votre choix.

10.1.2 Bilan et compléments

On admettra les propriétés suivantes :

Propriété 10.1. *Toute droite du plan admet une équation de la forme $ax+by=c$ où $(a;b)\neq(0;0)$.*
Si $a=0$ la droite est parallèle à l'axe des abscisses.
Si $b=0$ la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.
Si $a\neq 0$ et $b\neq 0$ la droite est sécante aux deux axes.

Propriété 10.2. *Soient $\mathscr{D} : y=mx+p$ et $\mathscr{D}' : y=m'x+p'$ deux droites.*
$\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles si et seulement si elles ont même coefficient directeur ($m=m'$).

Propriété 10.3. *Soit $\mathscr{D} : ax+by=c$.*
Toute droite parallèle à $\mathscr{D}$ admet une équation de la forme $ax+by=c'$.
Toute droite d'équation $ax+by=c'$ est parallèle à $\mathscr{D}$.

Propriété 10.4. *Si les droites $\mathscr{D} : ax+by=c$ et $\mathscr{D}' : a'x+b'y=c'$ sont sécantes, les coordonnées $(x;y)$ de leur point d'intersection I vérifient le système* $\left\{\begin{array}{l} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{array}\right.$

10.1.3 Exercices

Exercices 2, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 13 pages 170-171

10.2 Régions du plan

10.2.1 Activités

Activité 10.5.
Dans toute l'activité le plan est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthogonal.

1. (a) Dans un repère orthogonal tracer la droite $\mathscr{D}$ d'équation $2x-3y=6$.
   (b) Choisir quatre points à coordonnées entières situés du même côté de $\mathscr{D}$ et calculer $2x-3y$ pour chacun d'entre eux.
   (c) Faire de même avec quatre autres points à coordonnées entières situés de l'autre côté de $\mathscr{D}$.
   (d) Que constate-t-on ?
   (e) Identifier la région du plan dont les points ont leurs coordonnées vérifiant $2x-3y\geq 6$ (on hachurera le reste).
2. En vous inspirant de ce qui précède, faire de même pour la région caractérisée par l'inéquation $-3x-4y\geq -12$ (on hachurera le reste).
3. Même question pour les inéquations $x\geq 0$ et $y\geq 0$.
4. Quel système d'inéquations vérifie la région non hachurée ?

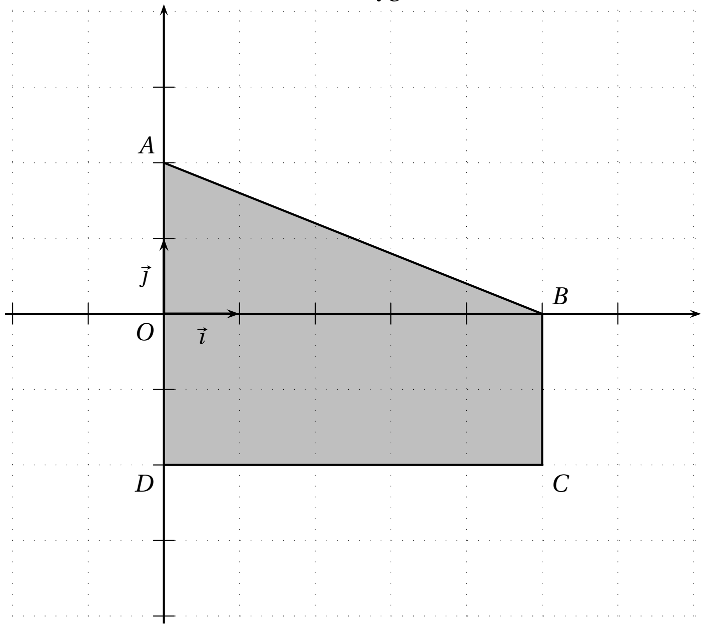
Activité 10.6 (Délimiter une région du plan)**.**
Pour visualiser un demi-plan $(\mathscr{P})$, on peut hachurer les points qui n'en font pas partie. Ainsi les points du demi-plan $(\mathscr{P})$ apparaissent en blanc.

1. On considère l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points $M(x;y)$ tels que : $\left\{\begin{array}{l} x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{array}\right.$
   Hachurer sur un graphique les points qui n'appartiennent pas à l'ensemble $(\mathscr{E})$.
2. On veut représenter les points $M(x;y)$ solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{l} x\geqslant 0, y\geqslant 0 \\ 2x+3y\leqslant 6 \\ x+y\leqslant 4 \end{array}\right.$$

   (a) Construire sur le graphique précédent la droite (d_1) d'équation : $2x+3y=6$.
   (b) Hachurer les points qui ne font pas partie du demi-plan (P_1) : $2x+3y\leqslant 6$.
   (c) Hachurer les points qui ne font pas partie du demi-plan (P_2) : $x+y\leqslant 4$.
   (d) Où se trouvent, sur le graphique, les points solutions du système ?

FIGURE 10.3 – Polygone $ABCD$



ACTIVITÉ 10.7 (Caractériser une région)**.**
On considère les points $A(0;2)$, $B(5;0)$, $C(5;-2)$ et $D(0;-2)$.
On veut caractériser les points qui se trouvent à l'intérieur du polygone $ABCD$ (frontières comprises). Voir la figure 10.3 de la présente page.

1. (a) Déterminer une équation de la droite (AB).
   (b) Caractériser par une inéquation le demi-plan situé en dessous de cette droite (frontière comprise).
2. (a) Déterminer une équation de chacune des droites (AD), (DC) et (BC).
   (b) Compléter les phrases :
   - Les points $M(x;y)$ situés à l'intérieur du polygone sont dans le demi-plan situé .... de la droite (AD), donc vérifient : ....
   - Les points $M(x;y)$ situés à l'intérieur du polygone sont dans le demi-plan situé .... de la droite (DC), donc vérifient : ....
   - Les points $M(x;y)$ situés à l'intérieur du polygone sont dans le demi-plan situé .... de la droite (BC), donc vérifient : ....
3. En déduire un système d'inéquations caractérisant l'intérieur du polygone $ABCD$ (frontières comprises).

10.2.2 Bilan

On admettra la propriété suivante :

Propriété 10.5. *Toute droite d'équation $ax+by=c$ partage le plan en deux demi-plans régions :*
- *un demi-plan dont les coordonnées des points vérifient l'inéquation $ax+by \geqslant c$;*
- *un demi-plan dont les coordonnées des points vérifient l'inéquation $ax+by \leqslant c$;*

La droite d'équation $ax+by=c$ est la frontière entre ces demi-plans.

10.2.3 Exercices

Exercices 15, 18 pages 174-175.

10.3 Programmation linéaire

10.3.1 Activités

ACTIVITÉ 10.8 (Traduction de contraintes)**.**
Un hôtel veut renouveler une partie de son équipement. Il faut changer au moins 72 coussins, 48 rideaux et 32 jetés de lit. Deux ateliers de confection font des offres par lots :

- l'atelier A propose un lot de 12 coussins, 4 rideaux et 4 jetés de lit pour un montant de 400 € ;
- l'atelier B propose un lot de 6 coussins, 6 rideaux et 2 jetés de lit pour un montant de 300 €.

1. On note x le nombre de lots A achetés et y le nombre de lots B achetés.
   (a) Compléter les phrases suivantes :
   - Dans un lot A, il y a 12 coussins.
     Si on achète 3 lots A, on dispose de .... coussins.
     Si on en achète 10, on dispose de .... coussins.
     Si on achète x lots, on dispose de .... coussins.
   - Dans un lot B, il y a 6 coussins.
     Si on achète y lots B, on dispose de .... coussins.
   - Au total, on dispose de : ...... + ... coussins.
   - Le texte impose une contrainte sur ce nombre : « il faut changer au moins 72 coussins », ce qui veut dire que le nombre total de coussins achetés doit être .... à 72 : ...... + ... $\geqslant 72$

   (b) Compléter le tableau suivant :

	Nombre de coussins achetés	Nombre de rideaux achetés	Nombre de jetés de lit achetés
x lots A			
y lots B			
Total			
Contraintes			

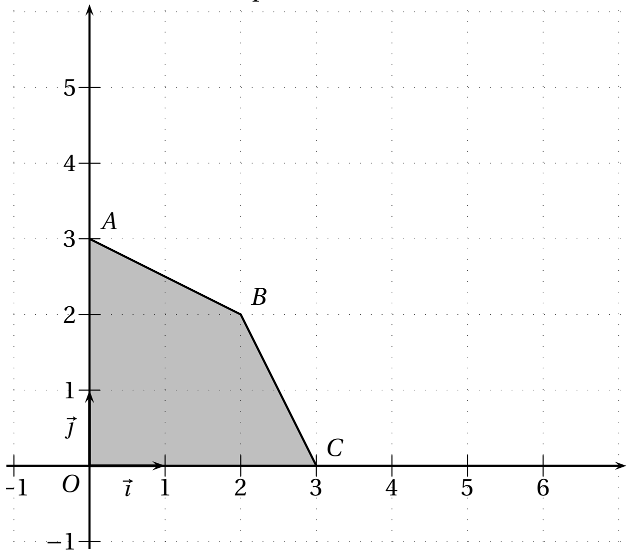
2. (a) Traduire les contraintes par un système d'inéquations.
   (b) Représenter graphiquement l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ solutions du système.
3. Respecte-t-on les contraintes si on achète :
   (a) 5 lots A et 4 lots B ? 5 lots A et 6 lots B ? 6 lots A et 7 lots B ?
   (b) Représenter les points correspondants sur le graphique.
4. Un lot A coûte 400 € et un lot B coûte 300 €.
   (a) Calculer le coût pour 5 lots A et 6 lots B achetés.
   (b) Calculer le coût pour x lots A et y lots B achetés.
   (c) Tracer sur le graphique la droite d'équation : $400x + 300y = 3800$.
   (d) Le gérant de l'hôtel dispose de 3800 € pour ses achats. Trouver les solutions qui s'offrent à lui.

ACTIVITÉ 10.9 (Rendre maximal un nombre soumis à une contrainte)**.**
La région coloriée représentée sur la figure 10.4 page suivante traduit les contraintes du système :

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ 2x + y \leqslant 6 \\ x + 2y \leqslant 6 \end{cases}$$

1. Tracer sur le graphique les droites $(d_1) : 2x + 3y = 12$ et $(d_2) : 2x + 3y = 6$.
2. Ces droites ont-elles des points communs avec la région coloriée ?
3. On veut rendre maximal le nombre $2x + 3y = b$, tout en respectant les contraintes du système.
   Soit (d) la droite d'équation : $2x + 3y = b$.
   (a) Comparer la droite (d) avec les droites (d_1) et (d_2).
   (b) Par quel point de coordonnées entières doit passer la droite (d) pour rendre b maximal, tout en respectant les contraintes du système ?
   (c) Tracer la droite ainsi trouvée et calculer le nombre b correspondant.

FIGURE 10.4 – Optimisation sous contrainte



ACTIVITÉ 10.10.
Le patron d'un restaurant prévoit d'acheter du mobilier de jardin en vue d'aménager un parc pour ses clients. Il prévoit deux modèles, l'un en bois, l'autre en métal.
Pour un modèle en bois, le lot comprend une table, trois chaises et quatre fauteuils.
Pour un modèle en métal, le lot comprend une table, neuf chaises et deux fauteuils.

Le projet est de disposer d'au moins 63 chaises et 30 fauteuils. Soit x le nombre de lots en bois (lots A) et y le nombre de lots en métal (lots B) achetés par le restaurateur.

1. Ecrire le système des contraintes correspondant à ce problème (on pourra s'aider du tableau ci-dessous).

	Nombre de chaises	Nombres de fauteuils
x lots A		
y lots B		
Total		
Contraintes		

2. Représenter dans un repère, l'ensemble des points $M(x; y)$ solutions de ce système. On prendra comme unités graphiques : 1 cm pour 2 unités en abscisses et en ordonnées.
3. Un lot en bois coûte 2 400 € et un lot en métal coûte 1 600 €.
   (a) Déterminer le coût c occasionné par l'achat de 5 lots en bois et 6 lots en métal.
   (b) Déterminer le coût c occasionné par l'achat de x lots en bois et y lots en métal.
   (c) Déterminer graphiquement le nombre de lots de chaque sorte pour que le coût c soit minimal.

10.3.2 Exercices

Exercices 20, 22 pages 178-179. Exercices 47 à 51 pages 186-188.