

Corrigé du devoir surveillé n°7

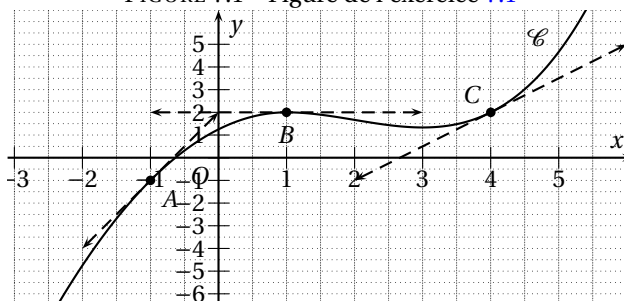
EXERCICE 7.1 (4 points).

Pour **tous** les élèves.

On donne sur la figure 7.1 de la présente page la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f en y indiquant les droites tangentes aux points A , B et C .

- Donner par lecture graphique $f(-1)$, $f(1)$ et $f(4)$.
 - $A(-1; -1) \in \mathcal{C}$ donc $f(-1) = -1$;
 - $B(1; 2) \in \mathcal{C}$ donc $f(1) = 2$;
 - $C(4; 2) \in \mathcal{C}$ donc $f(4) = 2$.
- Donner par lecture graphique $f'(-1)$, $f'(1)$ et $f'(4)$.
 - $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1 . On a donc $f'(-1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{1} = 3$;
 - $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 , or cette tangente est horizontale donc $f'(1) = 0$;
 - $f'(4)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 4 . On a donc $f'(4) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{2} = 1,5$.
- Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 4 .
Soit T_4 cette tangente. On a $T_4 : y = f'(4)(x - 4) + f(4) = 1,5(x - 4) + 2 = 1,5x - 6 + 2 = 1,5x - 4$.

FIGURE 7.1 – Figure de l'exercice 7.1



EXERCICE 7.2 (6 points).

Pour les élèves **ne suivant pas** l'enseignement de spécialité.

Tracer une courbe $\mathcal{C}$ dans le repère fourni sur la figure 7.2 page suivante représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-6; 6]$ ayant les propriétés suivantes (on tracera **toutes** les tangentes qu'on peut déduire de l'énoncé) :

- f est paire;
- $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$;
- $f(2) = 3$ et $f'(2) = 2$;
- $f(5) = 3$ et $f'(5) = -\frac{1}{2}$.
- f est définie sur l'intervalle $[-6; 6]$, la courbe doit donc aller d'un point d'abscisse -6 à un point d'abscisse 6 ;
- f est paire, la courbe doit donc être symétrique par rapport à l'axe des ordonnées;
- les autres informations nous permettent d'obtenir 3 points de la courbe et 3 tangentes en ces points et, comme la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on doit aussi tracer leurs symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, soit 5 points et 5 tangentes.

Voir la figure 7.2 page suivante pour un exemple de courbe.

EXERCICE 7.2 (6 points).

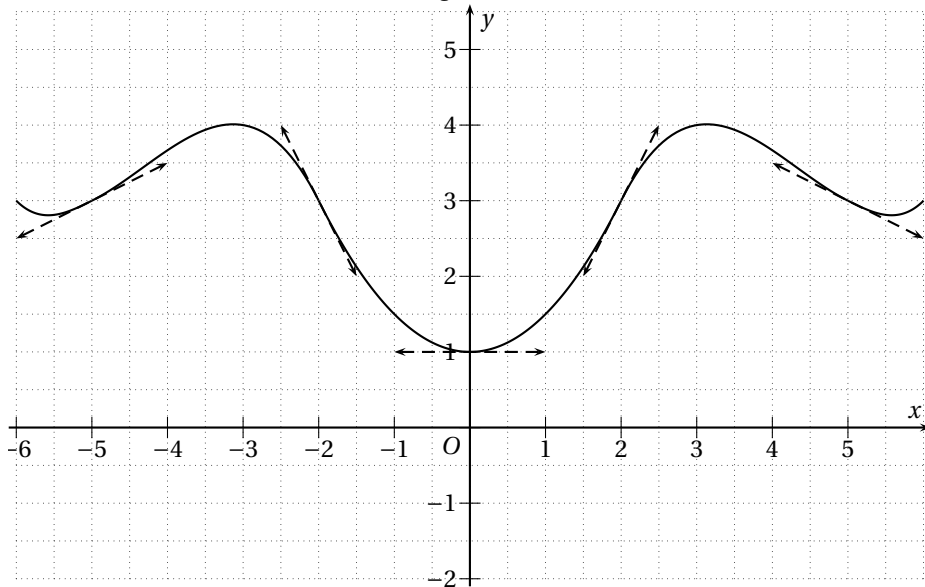
Pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité.

Le 1^{er} janvier 2005, une grande entreprise compte 1500 employés.

Une étude montre que lors de chaque année à venir, 20 % de l'effectif du 1^{er} janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 200 jeunes dans l'année. Pour tout entier n on appelle u_n le nombre d'employés le 1^{er} janvier de l'année $(2005 + n)$.

- Déterminer u_0 , u_1 et u_2 .
 - $u_0 = 1500$
 - $u_1 = (1 - \frac{20}{100})u_0 + 200 = (1 - \frac{20}{100})1500 + 200 = 1400$
 - $u_2 = (1 - \frac{20}{100})u_1 + 200 = (1 - \frac{20}{100})1400 + 200 = 1320$
- Montrer que $u_{n+1} = 0,8u_n + 200$.
 $u_{n+1} = (1 - \frac{20}{100})u_n + 200 = 0,8u_n + 200$
- On a tracé dans le repère de la figure 7.3 page 91 les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{B}$ d'équations respectives $y = 0,8x + 200$ et $y = x$.
 - Sans justifier, construire la « représentation en chemin » de la suite (u_n) .
Voir la figure 7.3 page 91.
 - Que peut-on conjecturer de la monotonie de la suite (u_n) ?
La suite semble décroissante.

FIGURE 7.2 – Figure de l'exercice 7.2



(c) Que peut-on conjecturer pour u_n quand n devient grand ?

Il semble que lorsque n devient grand, la représentation en chemin tend vers le point (1000; 1000) donc u_n tend vers 1000.

4. On pose $v_n = u_n - 1000$.

(a) Déterminer v_0 , v_1 et v_2 .

- $v_0 = u_0 - 1000 = 1500 - 1000 = 500$
- $v_1 = u_1 - 1000 = 1400 - 1000 = 400$
- $v_2 = u_2 - 1000 = 1320 - 1000 = 320$

(b) Montrer que $v_{n+1} = 0,8v_n$. Que peut-on en déduire pour la suite (v_n) ?

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= u_{n+1} - 1000 \\
 &= 0,8u_n + 200 - 1000 \\
 &= 0,8u_n - 800 \\
 &= 0,8(u_n - 1000) \\
 &= 0,8v_n
 \end{aligned}$$

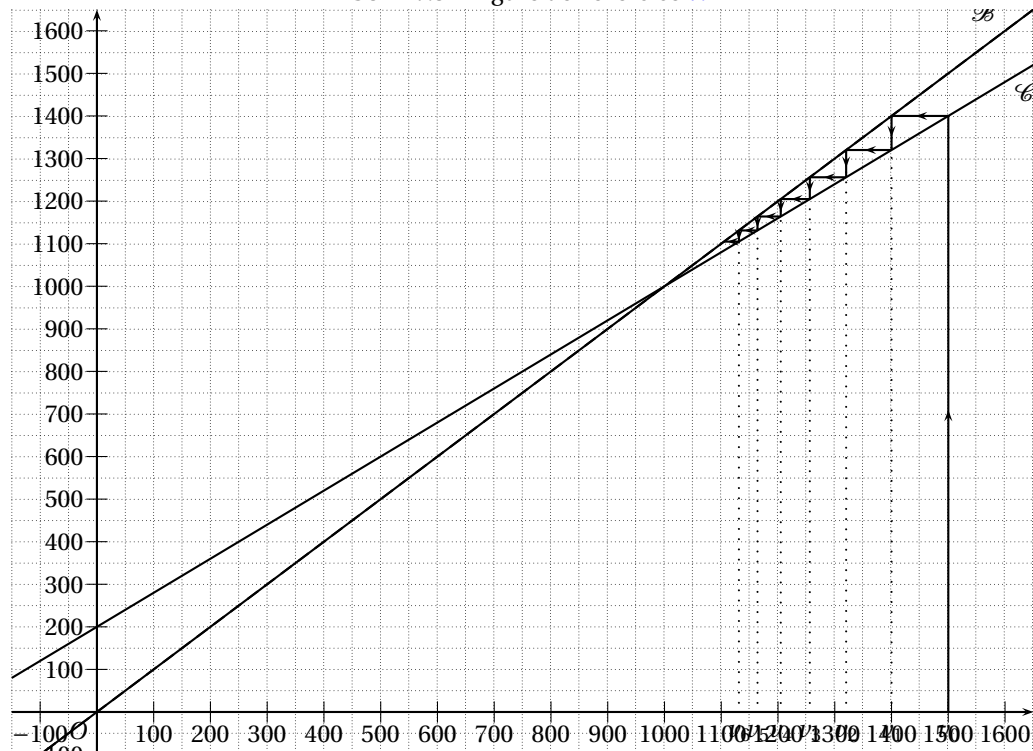
La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,8.

(c) En déduire la monotonie de (v_n) puis celle de (u_n) .

La suite (v_n) est géométrique de raison 0,8, or $0 < 0,8 < 1$ donc c'est une suite décroissante.

$u_n = v_n + 1000$ donc elle est aussi décroissante.

FIGURE 7.3 – Figure de l'exercice 7.2

**EXERCICE 7.3** (10 points).

Pour **tous** les élèves.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$. On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. (a) Déterminer les coordonnées de A , point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées.
On cherche les coordonnées du point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 0. Or tout point de la courbe a pour coordonnées $(x; f(x))$ donc $A(0; f(0)) = (0; -3)$.
- (b) Déterminer le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{C}$ en A .
Étudions le comportement de $\frac{f(0+h)-f(0)}{0+h-0}$ quand h tend vers 0.

$$\begin{aligned}
 \frac{f(0+h)-f(0)}{0+h-0} &= \frac{f(h)-f(0)}{h} \\
 &= \frac{h^2 - 2h - 3 - (-3)}{h} \\
 &= \frac{h^2 - 2h}{h} \\
 &= \frac{h(h-2)}{h} \\
 &= h-2
 \end{aligned}$$

Donc, quand h tend vers 0, $\frac{f(0+h)-f(0)}{0+h-0} = h-2$ tend vers -2 donc $f'(0) = -2$.

2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
On cherche les coordonnées des points de $\mathcal{C}$ d'ordonnée 0. Or tout point de la courbe a pour coordonnées $(x; f(x))$, donc il faut résoudre $f(x) = 0$.
 f est un trinôme avec $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 4 + 12 = 16 > 0$ donc il y a deux solutions à l'équation $f(x) = 0$: $x_1 = \frac{-(-2)-4}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{-(-2)+4}{2} = 3$.
On a donc deux points d'intersection avec l'axe des abscisses de coordonnées $(-1; 0)$ et $(3; 0)$.
3. Déterminer $f(1)$, $f'(1)$ et l'équation de la tangente $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
 - $f(1) = 1 - 2 - 3 = -4$
 - Étudions le comportement de $\frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1}$ quand h tend vers 0.

$$\begin{aligned}
 \frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1} &= \frac{(1+h)^2 - 2(1+h) - 3 - (-4)}{h} \\
 &= \frac{1+2h+h^2-2-2h-3+4}{h} \\
 &= \frac{h^2}{h} \\
 &= \frac{h \times h}{h} \\
 &= h
 \end{aligned}$$

Or, quand h tend vers 0, $\frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1} = h$ tend vers 0 donc $f'(1) = 0$.

4. (a) Placer tous les points qu'on peut déduire des questions précédentes dans le repère de la figure 7.4 de la présente page.
Quatre points à placer : $A(0; -3)$, $(-1; 0)$, $(3; 0)$ et $(1; -4)$.
- (b) Tracer toutes les tangentes qu'on peut déduire des questions précédentes dans le même repère.
Deux tangentes à tracer : celle en 0 et celle en 1.
- (c) Tracer $\mathcal{C}$ dans le même repère.
Voir la figure 7.4 de la présente page.

FIGURE 7.4 – Figure de l'exercice 7.3

