Chapitre 9

Fonction exponentielle

Sommaire

9.1 Vers une nouvelle fonction **71**
9.2 Fonction exponentielle **72**
9.2.1 Exponentielle et logarithme népérien 72
9.3 Relations algébriques **74**
9.3.1 Exponentielle d'une somme 74
9.3.2 Exponentielle d'un opposé 74
9.3.3 Exponentielle d'un produit 74
9.3.4 Exponentielle d'une différence 75
9.4 Équations et inéquations **75**
9.5 D'autres fonctions exponentielles **75**
9.6 Exercices **76**

9.1 Vers une nouvelle fonction

1. Compléter le tableau de valeurs de la fonction exponentielle suivant (exp en abrégé) en utilisant la touche $\boxed{e^x}$ de votre calculatrice. Vous donnerez les valeurs approchées à 10^{-1} près.

x	-2	-1	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	5	10
e^x									

2. Dans le repère de la figure 9.1, placer les points de coordonnées $(x; e^x)$ obtenus avec le tableau de valeurs et représenter graphiquement la fonction exp : $x \longmapsto e^x$.
3. Sur quel ensemble semble être définie cette nouvelle fonction ?
4. (a) Compléter le tableau suivant, en donnant les résultats avec la plus grande précision permise par la calculatrice.

x	-50	-100	-150	-500
e^x				

Vers quelle valeur semble tendre e^x lorsque x se rapproche de $-\infty$?

(b) Compléter le tableau suivant, en donnant les résultats avec la plus grande précision permise par la calculatrice.

x	50	100	150	500
e^x				

Vers quelle valeur semble tendre e^x lorsque x se rapproche de $+\infty$?

(c) i. Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x \geqslant 1$.

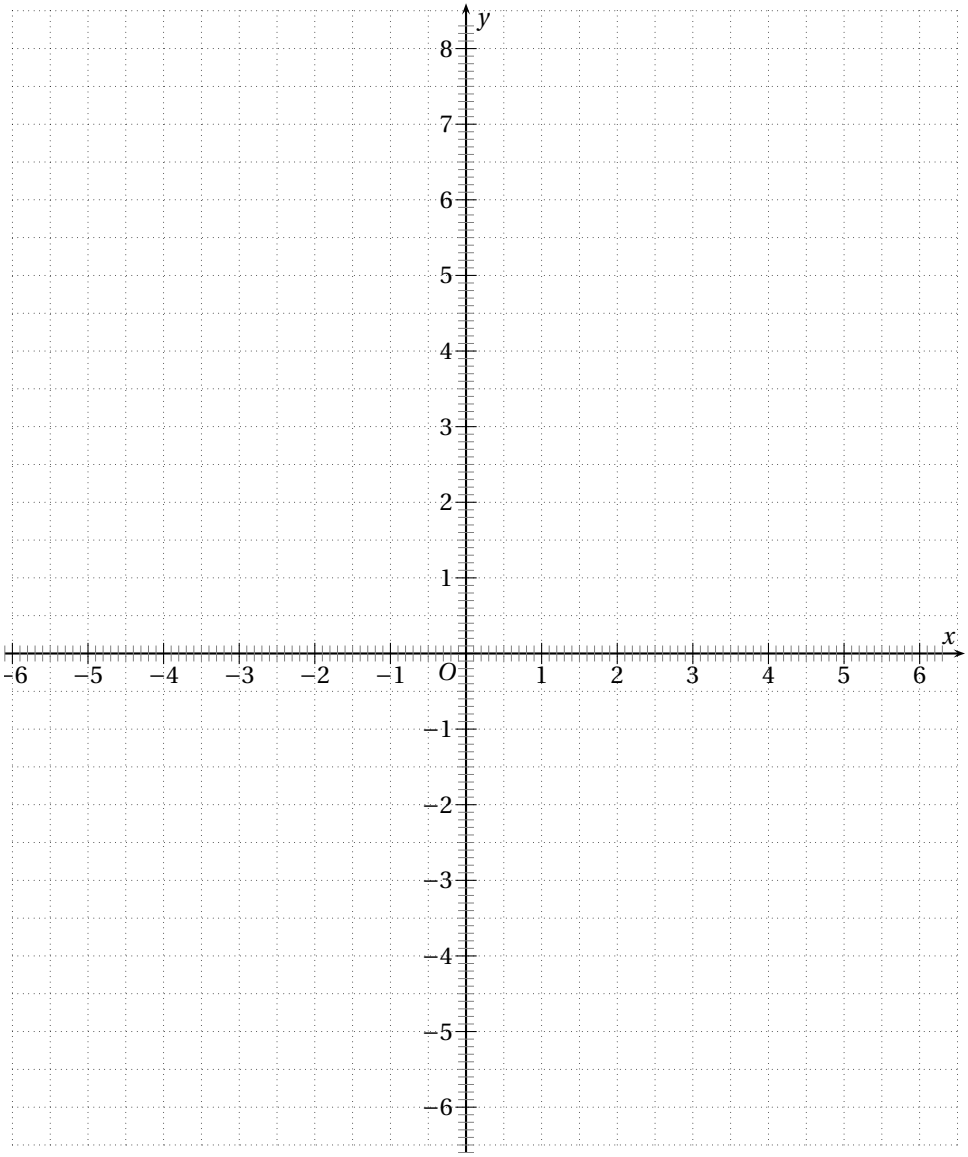
ii. Compléter : Si $x < 0$ alors ..... $< e^x <$ .....

iii. Compléter le tableau de signes de e^x lorsque $x \in \mathbb{R}$:

x	
e^x	

5. Quelles semblent être les variations de cette nouvelle fonction ?

FIG. 9.1 – Figure de la section 2



9.2 Fonction exponentielle

9.2.1 Exponentielle et logarithme népérien

Définition

À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant, en donnant les valeurs approchées à 10^{-1} près.

x	-2	0	1	5	20
$y = \mathrm{e}^x$					
$\ln y$					

Quelle remarque pouvez-vous faire ? Émettre une conjecture.
C'est de cette manière qu'on définit précisément la fonction exponentielle :

Définition 9.1. Pour tout réel x on note e^x, ou parfois $\exp x$, le nombre dont le logarithme népérien vaut x.

$$y = \mathrm{e}^x \quad \Leftrightarrow \quad \ln y = x$$

Remarque.
- $\mathrm{e}^0 =$ ..... car ln..... = ...
- $\mathrm{e}^1 =$ ..... car ln..... = ...

Fontions réciprocques

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de la figure 9.1.

1. Compléter le tableau de valeurs suivant (arrondir à 10^{-1} près) :

x	0,5	1	1,5	2	3	4
$\ln x$						

2. Placer les points de coordonnées $(x\,;\ln x)$ dans le repère de la figure 9.1 et construire la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ de la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \ln x$.
3. Tracer, dans le même repère, la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.
4. Quelle remarque peut-on faire sur les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et la droite $\mathscr{D}$?
5. (a) À l'aide de la calculatrice, compléter les tableaux suivants :

x	-2	-1	0	0,5	4
$\ln\left(\mathrm{e}^x\right)$					

x	0,5	1	2	4	10
$\mathrm{e}^{\ln x}$					

Pourquoi les valeurs de x choisies dans le deuxième sont-elles positives ?

(b) Quelles propriétés peut-on conjecturer au regard des résultats de ces tableaux ?

Propriété 9.1. *Pour tout nombre réel x on a :*

$$\ln\left(e^x\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Propriété 9.2. *Pour tout nombre réel x ..... on a :*

$$e^{\ln x} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

On dit aussi que les fonctions ln et exp sont réciproques l'une de l'autre.

Signe

e^x étant l'antécédant de x par la fonction logarithme népérien, et cette fonction n'étant définie que pour des réels strictements positifs, on a la propriété suivante :

Propriété 9.3. *Pour tout réel x, e^x est strictement positif.*

Dérivées

On admettra la propriété suivante :

Propriété 9.4. *La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et*

$$(e^x)' = e^x$$

Comme la dérivée de l'exponentielle est strictement positive, la fonction exponentielle est strictement croissante. Ainsi :

x	
$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	
e^x	

Propriété 9.5. *Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et*

$$f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)} \qquad \textit{ou encore} \qquad \left(e^u\right)' = u'e^u$$

9.3 Relations algébriques

À l'aide de la calculatrice, compléter les tableaux suivants en donnant les valeurs approchées à 10^{-2} près :

9.3.1 Exponentielle d'une somme

a	b	$a+b$	e^a	e^b		e^{a+b}
2	3					
-4	1					
0,2	15					

Propriété 9.6. *Pour tous nombres réels a et b, on a :*

$$e^{a+b} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

9.3.2 Exponentielle d'un opposé

a	$-a$	e^a		e^{-a}
2				
-4				
0,2				

Propriété 9.7. *Pour tout nombre réel a, on a :*

$$e^{-a} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

9.3.3 Exponentielle d'un produit

a	n	e^a	$\mathrm{e}^{a\times n}$	$\left(\mathrm{e}^a\right)^n$
2	3			
-4	2			
3	-2			

Propriété 9.8. *Pour tous nombres réels a et n, on a :*

$$\left(e^a\right)^n = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

9.3.4 Exponentielle d'une différence

a	b	$a-b$	e^a	e^b		e^{a-b}
2	3					
-44	5					
0,2	15					

Propriété 9.9. *Pour tout nombre réel a strictement positif et tout nombre entier relatif n, on a :*

$$e^{a-b} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

9.4 Équations et inéquations

On déduit du sens de variation de la fonction exponentielle, les équivalences suivantes :

Propriété 9.10. *Pour tous nombres a et b, on a :*
- $e^a = e^b$ *si et seulement si* $\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $e^a \leqslant e^b$ *si et seulement si* $\ldots\ldots\ldots\ldots$
- $e^a > e^b$ *si et seulement si* $\ldots\ldots\ldots\ldots$

EXERCICE 9.1.
Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\mathrm{e}^{2x+1} = 1$
2. $\mathrm{e}^{-2x+3} = 0$
3. $\mathrm{e}^{-3x} \geqslant 2$

9.5 D'autres fonctions exponentielles

Soit $a > 0$. Pour tout réel x, on pose $a^x = \mathrm{e}^{\ln(a^x)} = \mathrm{e}^{x\ln a}$.

Définition 9.2. Soit $a > 0$. La fonction définie par $x \longmapsto a^x$ est appelée *fonction exponentielle de base a.*

Remarque. La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$ est la fonction exponentielle de base e.

Propriété 9.11. *Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :*
- $a^x \ldots\ldots\ldots 0$
- $a^x \times a^y = \ldots\ldots\ldots$
- $\frac{a^x}{a^y} = \ldots\ldots\ldots$
- $(a^x)^y = \ldots\ldots\ldots$
- $(a \times b)^x = \ldots\ldots\ldots$
- $\ln(a^x) = \ldots\ldots\ldots$

Propriété 9.12. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a^x$, $(a > 0)$. Alors $f'(x) = \ln a \times a^x$ et :*
- *Si $a > 1$, alors f est strictement $\ldots\ldots\ldots$ (on parle alors de $\ldots\ldots\ldots$ exponentielle).*
- *Si $a = 1$, alors f est $\ldots\ldots\ldots$*
- *Si $0 < a < 1$, alors f est strictement $\ldots\ldots\ldots$ (on parle alors de $\ldots\ldots\ldots$ exponentielle).*

La figure 9.1 page suivante présente quelques exemples de telles fonctions.

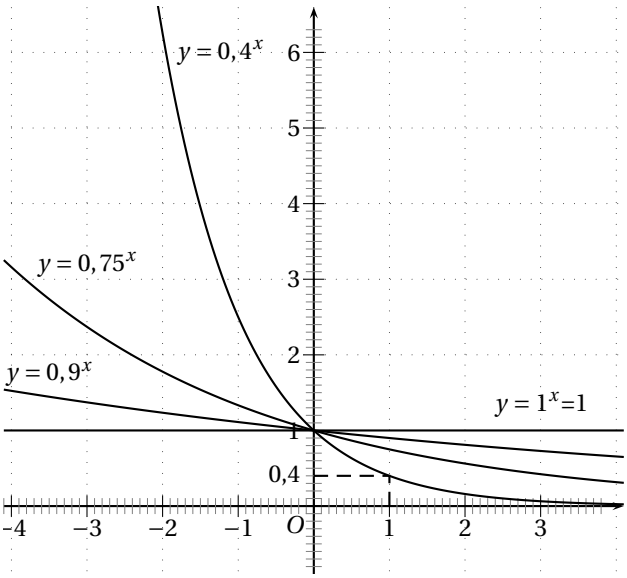
TAB. 9.1 – Tableaux de variations et courbes

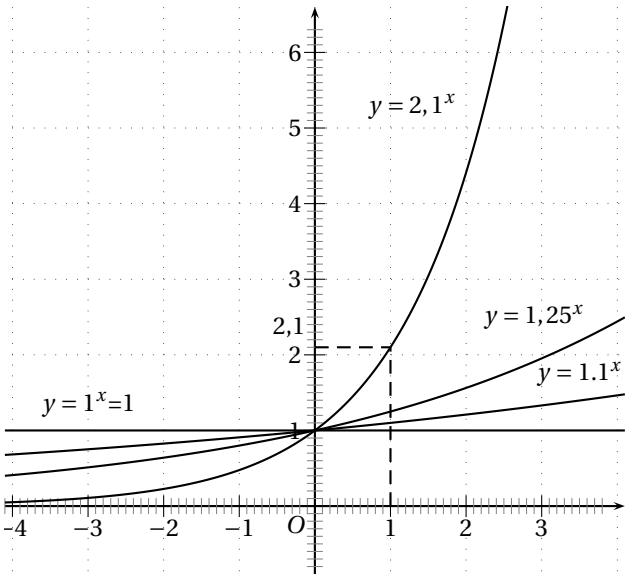
$0 < a < 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\ln a \times a^x$	$-$	
a^x	$+\infty$ ↘	0^+

$a > 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\ln a \times a^x$	$+$	
a^x	0^+ ↗	$+\infty$





9.6 Exercices

EXERCICE 9.2.

On étudie la croissance d'une culture bactérienne en milieu liquide non renouvelé. Le tableau ci-dessous donne à différents instants x (exprimés en heures), la masse m (exprimée en grammes) de cette culture.

x_i (en heures)	0	0,5	1	1,5	3	6
m_i (en grammes)	0,7	1,9	2,5	2,9	3,5	4,1

1. (a) Représenter le nuage de points de coordonnées $M_i(x_i\ ;\ m_i)$ dans le repère orthogonal de la figure 9.2 page ci-contre.
   (b) Un ajustement affine vous paraît-il justifié ? Expliquer.
2. (a) Compléter le tableau suivant où $y = \mathrm{e}^m$ (y est l'exponentielle de m).
   Les valeurs approchées des y_i seront données à l'unité près.

x_i (en heures)	0	0,5	1	1,5	3	6
$y_i = \mathrm{e}^{m_i}$ (en grammes)						

   (b) Représenter le nuage de points de coordonnées $N_i(x_i\ ;\ y_i)$ dans le repère orthogonal de la figure 9.3 page suivante.
   (c) Un ajustement affine vous paraît-il justifié ? Expliquer.
3. On note G_1 le point moyen des trois premiers points du nuage et G_2 celui des trois derniers.
   (a) Calculer les coordonnées des points G_1 et G_2.
   (b) Placer les points G_1 et G_2 et tracer la droite de MAYER (G_1G_2).
   (c) Déterminer une équation de la droite de MAYER sous la forme $y = ax + b$.
   (d) Déterminer, par le calcul, puis graphiquement une estimation de la valeur de y correspondant à la valeur $x = 7$.
   (e) En déduire une estimation à 10^{-1} près de la masse m de bactéries (en grammes) après 7 heures.

FIG. 9.2 – Figure de l'exercice 9.2

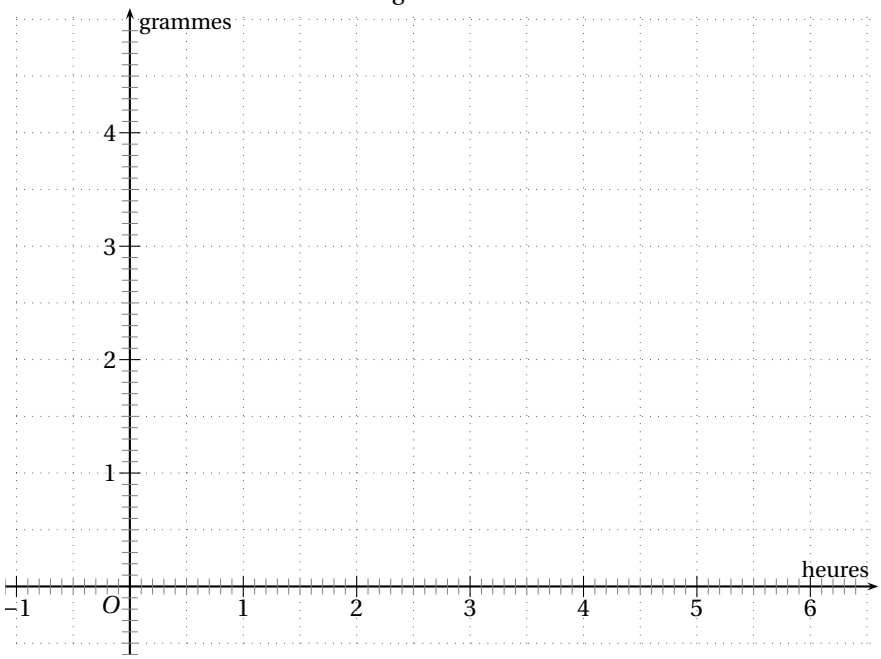
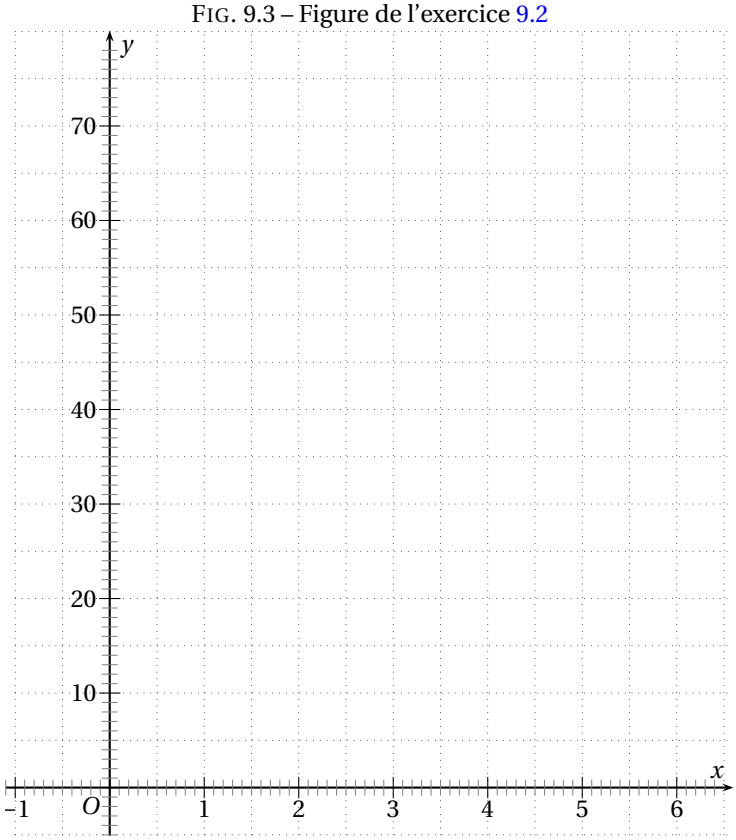


FIG. 9.3 – Figure de l'exercice 9.2



EXERCICE 9.3.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{4x-3}$.

1. Sur quel intervalle la fonction f est-elle dérivable ? Calculer sa dérivée.
2. En déduire le sens de variation de f.

EXERCICE 9.4.
Soit f la fonction définie par $f(x) = 0,3^x$.

1. Déterminer la dérivée $f'(x)$ de f et déterminer son signe.
2. En déduire le sens de variation de f.