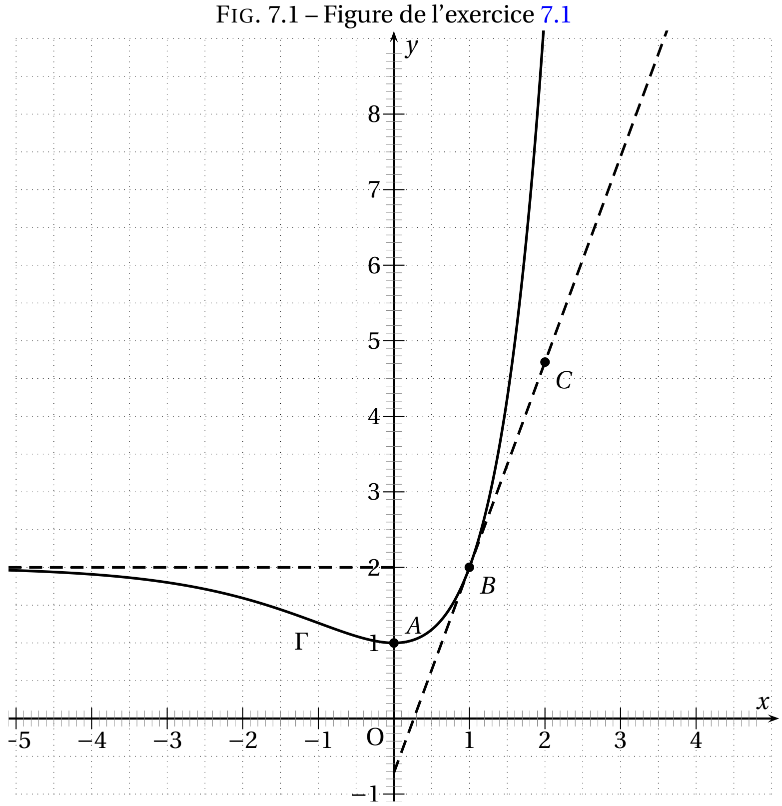
Devoir surveillé n°7

ln u, suites

EXERCICE 7.1 (10 points)**.**
Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée.
On note e le nombre tel que ln(e) = 1.
La courbe Γ représentative de la fonction f dans un repère orthonormal est tracée sur la figure 7.1 de la présente page.
On sait par ailleurs que :

- la courbe Γ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point $A(0;1)$;
- la droite (BC) est la tangente à la courbe Γ au point $B(1;2)$, C étant le point de coordonnées $(2;2+\text{e})$;
- la fonction f est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$;
- la courbe Γ admet, en $-\infty$, une asymptote d'équation $y=2$;
- la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$.

FIG. 7.1 – Figure de l'exercice 7.1



1. Dans cette question, déterminer par lecture graphique et sans justification :
   (a) les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$, $f(1)$ et $f'(1)$;
   (b) le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x ;
   (c) le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln[f(x)]$.
   (a) Expliquer pourquoi g est définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
   (c) Déterminer les variations de g (*on répondra à cette question sans faire de tableau de variations*).
   (d) Déterminer les valeurs exactes de $g(0)$, $g(1)$, $g'(0)$ et $g'(1)$.
   (e) Dresser le tableau des variations de g.

EXERCICE 7.2 (10 points).
La ville de Sirap étudie les flux de sa population et enregistre, chaque année, y centaines de nouveaux résidants et z centaines de résidants quittant la ville.
Le tableau ci-dessous indique les flux pour cinq années :

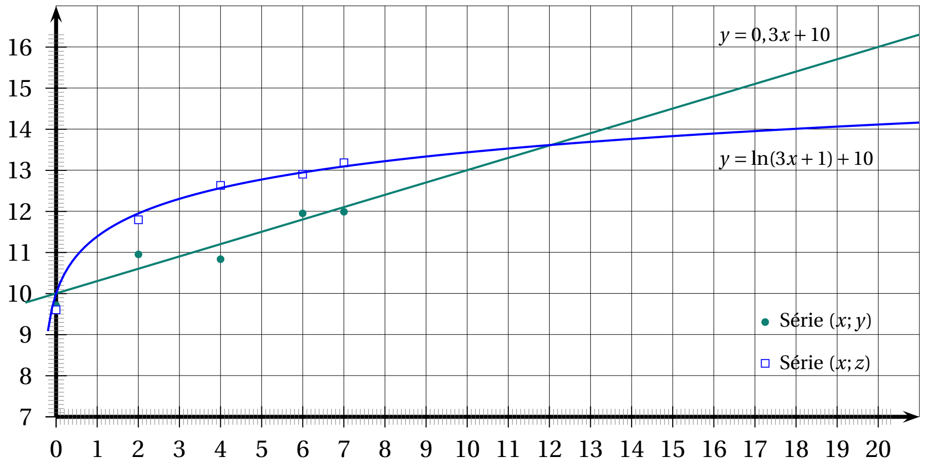
Année	2000	2002	2004	2006	2007
Rang de l'année : x_i	0	2	4	6	7
Nouveaux résidants (en centaines) : y_i	9,71	10,95	10,83	11,95	11,99
Départs de résidants (en centaines) : z_i	9,6	11,79	12,63	12,9	13,18

Partie A
Pour la série statistique $(x_i\,;\,y_i)$ donner une équation de la droite d'ajustement $\mathscr{D}$ de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients au centième).

Partie B
Dans toute la suite de l'exercice, on admettra le modèle d'ajustement $y = f(x)$ et $y = g(x)$ avec :

$$f(x) = 0{,}3x + 10 \text{ pour la série } (x_i\,;\,y_i) \text{ et } g(x) = \ln(3x+1) + 10 \text{ pour la série } (x_i\,;\,z_i).$$

Les nuages de points et les courbes représentatives de f et g sont donnés dans la figure ci-dessous :



1. En utilisant ces ajustements :
   (a) Calculer à partir de quelle année le nombre de nouveaux résidants dépasserait 1 400 (14 centaines).
   (b) Calculer à partir de quelle année le nombre de départs de résidants dépasserait 1 400 (14 centaines).
2. On considère la fonction d définie sur $[0\,;\,20]$ par

$$d(x) = g(x) - f(x) = \ln(3x+1) - 0{,}3x.$$

   On note d' la dérivée de d.
   (a) Calculer $d'(x)$ et montrer que $d'(x) = \frac{-0{,}9x+2{,}7}{3x+1}$.
   Étudier son signe et construire le tableau de variations de la fonction d.
   (b) Montrer que l'équation $d(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[3\,;\,20]$.
   À l'aide d'une calculatrice, donner un encadrement de α par deux entiers consécutifs.
   (c) En considérant ces ajustements et en tenant compte uniquement des départs et des arrivées de résidants :
      i. En quelle année la ville de Sirap enregistre la plus grande baisse de sa population ?
      Estimer alors cette baisse.
      ii. À partir de quelle année la ville de Sirap peut-elle prévoir une augmentation de sa population ?

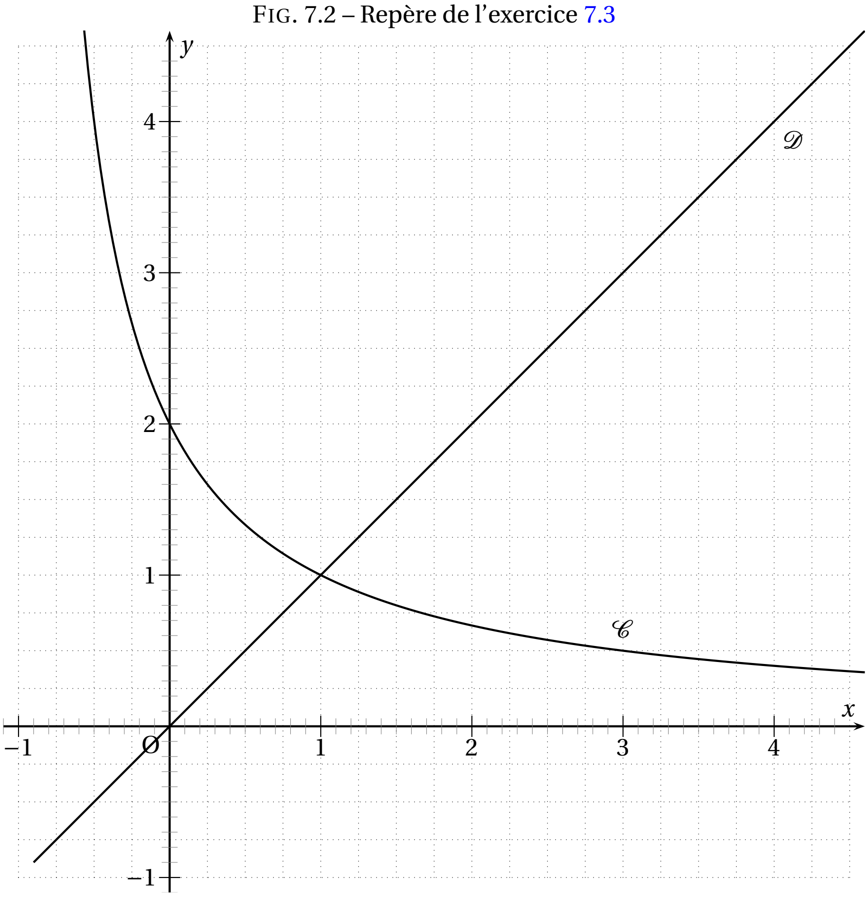
EXERCICE 7.3 (10 points)**.**
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n} \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Partie A
Dans le repère de la figure 7.2 de la présente page, on a représenté la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \frac{2}{1+x}$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

1. Compléter la figure par le tracé de la représentation en chemin de la suite (u_n).
2. Que peut-on conjecturer quand aux bornes de (u_n) ?
3. Que peut-on conjecturer quand à la limite de (u_n) ?

FIG. 7.2 – Repère de l'exercice 7.3



Partie B
On se propose de montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 3$.

1. Montrer que $0 \leqslant u_0 \leqslant 3$ et que $0 \leqslant u_1 \leqslant 3$.
2. (a) Montrer que si $0 \leqslant x \leqslant 3$ alors $0,5 \leqslant \frac{2}{1+x} \leqslant 2$.
   (b) En déduire que si $0 \leqslant u_p \leqslant 3$, alors $0 \leqslant u_{p+1} \leqslant 3$.
3. Conclure.

Partie C
On considère que la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

1. Démontrer que la suite $v_{n+1} = -\frac{1}{2} v_n$.
2. En déduire la nature de la suite (v_n).
3. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (v_n).
4. Montrer que $u_n = \frac{-2v_n - 1}{v_n - 1}$.
5. En déduire la limite de la suite (u_n)