Chapitre 5

Systèmes linéaires d'équations

Sommaire

5.1 Rappel du chapitre 3 : Inverse d'une matrice

Définition 5.1. Deux matrices carrées A et B sont dites inverses si $A \times B = B \times A = I$ où I est la matrice unité. On notera alors $B = A^{-1}$ (ou $A = B^{-1}$).

Remarque. Certaines matrices n'ont pas d'inverse. Celles qui en ont un sont dites *inversibles*.

5.2 Écriture matricielle d'un système linéaire d'équations

Soit le système de deux équations à deux inconnues $\left\{ \begin{array}{l} 6x+5y=2 \\ -x-y=3 \end{array} \right.$.

En posant $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, ce système s'écrit $A \times X = B$ (ou $AX = B$).

Propriété 5.1. *Tout système linéaire d'équations s'écrit sous la forme matricielle $AX = B$ où X est la matrice colonne des inconnues.*

Théorème 5.2. *Soit un système linéaire d'équations s'écrivant sous la forme matricielle $AX = B$ avec A matrice carrée d'ordre n. Alors ce système admet une solution unique si et seulement si la matrice A possède une matrice inverse A^{-1}. Dans ce cas, la solution est donnée par la matrice colonne $X = A^{-1}B$.*

Preuve. $AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$ ◊

5.3 Exercices

EXERCICE 5.1.
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice inverse de A est $\begin{pmatrix} 2,5 & -2 \\ 3,5 & -3 \end{pmatrix}$.
2. Soit le système $\left\{ \begin{array}{l} 6x-4y=7 \\ 7x-5y=8 \end{array} \right.$.
   En utilisant la matrice A^{-1}, chercher la solution de ce système.

EXERCICE 5.2.
Une entreprise de menuiserie fabrique 150 chaises par jour. Elle produit deux sortes de chaises, les unes vendues 30 €pièce, les autres 60 €pièce. La production d'une journée a été totalement vendue et le montant des ventes s'élève à 7 260 €.
On note x le nombre de chaises à 30 €et y le nombre de chaises à 60 €vendues dans la journée.

1. Montrer que :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 30 & 60 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 150 \\ 7260 \end{pmatrix}$$
2. Déterminer l'inverse de la matrice : $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 30 & 60 \end{pmatrix}$.
3. En déduire le nombre de chaises à 30 €et à 60 €qui ont été vendues.

EXERCICE 5.3.
Pour chacun des systèmes suivants, les écrire sous la forme matricielle $A\times X=B$, chercher la matrice inverse de A et, à l'aide de votre calculatrice, en déduire la solution du système.

1. $\begin{cases} -2x+5y=1 \\ 3x-8y=-3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x-5y+3z=1 \\ -x+y-2z=-5 \\ x+2y-z=2 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x-y+z=7 \\ x+2y-z=6 \\ -x+y+2z=11 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x+y+z+t=4 \\ 2x-y+z+2t=4 \\ 3x-2y+5z-2t=4 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$

EXERCICE 5.4.
Un triathlon comprend un parcours de natation, suivi d'un parcours à bicyclette, puis d'un parcours de course à pied. La distance totale est de 32 km. Le parcours de course à pied dépasse celui de natation de 8,8 km et le parcours à bicyclette est deux fois plus long que celui de course à pied.
On se propose de calculer la longueur de chacun des parcours.
On note n la longueur du parcours de natation, p celle du parcours de course à pied et b celle du parcours à bicyclette.

1. Montrer que :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ p \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 32 \\ 8,8 \\ 0 \end{pmatrix}$$
2. On pose $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et on admet que A est inversible. Montrer que : $\begin{pmatrix} n \\ p \\ b \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} 32 \\ 8,8 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. À l'aide de votre calcutrice, déterminer n, p et b.

EXERCICE 5.5.
L'espace est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. On donne $A(0;1;1)$, $B(1;2;-3)$ et $C(2;-1;0)$.

1. Montrer que A, B et C définissent un plan.
2. On pose $(ABC): ax+by+cz=d$.
   (a) Montrer que les réels a, b, c et d vérifient le système :
$$\begin{cases} b+c=d \\ a+2b-3c=d \\ 2a-b=d \end{cases}$$
   (b) En posant $d=11$ et en utilisant les matrices, déterminer une équation de (ABC).