Chapitre 6

Fonctions de deux variables

Sommaire

6.1 Activités

ACTIVITÉ 6.1.
Soit un triangle ABC rectangle en A. On note $x = AB$, $y = AC$ et $z = BC$.

1. (a) Exprimer z en fonction de x et de y.
   On notera $f(x, y)$ la fonction qui, à un couple $(x; y)$, associe la valeur z.
   On a donc $f(x, y) =$ ....
   (b) Calculer $f(3,4)$. Interpréter le résultat.
   (c) Calculer $f(8,6)$, $f(6,8)$ et $f(1,8)$.
2. On veut utiliser un tableur pour procéder aux calculs de $f(x, y)$ pour différentes valeurs de x et de y et pour représenter une telle fonction.
   On utilisera pour cela Excel (et non sur Calc qui ne gère pas de telles représentations graphiques).
   La colonne A sera réservée aux valeurs de x et la ligne 1 aux valeurs de y.
   La plage B2 : L12 sera destinée aux calculs de $f(x, y)$.
   (a) Entrer des valeurs de x et de y variant de 1 à 10
   (b) Quelle formule doit-on entrer en B2 qui, par copie automatique, permet d'obtenir tous les résultats jusqu'à L2 ? Le faire. Vérifier les résultats obtenus à la question 1c.
   (c) Sélectionner la plage B2 : L2 et, à l'aide de l'assistant graphique en utilisant le type de graphique *surface* puis *surface 3D*, représenter les données. Contempler votre œuvre.
   (d) On désire obtenir la représentation graphique de ces données mais *vue d'au-dessus*. Sélectionner la plage B2 : L2 et, à l'aide de l'assistant graphique en utilisant le type de graphique *surface* puis *contour*, représenter les données. Contempler votre œuvre.

ACTIVITÉ 6.2 (Utilisation du logiciel Gnuplot)**.**
L'ensemble de ce qui suit provient du site Calque.

1. **Prise en main**
   (a) *Précisions*
   Les captures d'écran qui suivent sont faites sous Windows et peuvent être légèrement différentes de ce que vous affichez.
   Une ligne de commande peut être corrigée tant qu'elle n'est pas validée avec la touche Entrée mais pas avec la souris : il faut utiliser les touches de déplacement horizontal.
   (b) *Ma première ligne de commande*
   On saisit plot x**2 (la double étoile signifiant *exposant*) et on valide avec la touche Entrée. Une fenêtre apparaît avec la courbe représentant la fonction $x \mapsto x^2$ sur l'intervalle $[-10; 10]$. On obtient la figure 6.1 page 38.

Par défaut, la plage des x est $[-10; 10]$ et la plage des y s'adapte. Si je veux une plage des x égale à $[-2; 3]$ je rajoute une nouvelle ligne set xrange [-2 :3] (attention au :) et si je valide, ça ne marche pas. La commande est bien enregistrée mais pour l'appliquer à la figure, il faut taper une ligne de plus : replot.

(c) *Améliorations*
- Pour dessiner plusieurs courbes, il suffit de les séparer par une virgule.
  Par exemple plot [-2 :3] x**2,-x+5.
  Il peut être pratique de les définir d'abord (faire Entrée après chaque ligne) :
  f(x)=x**2
  g(x)=-x+5
  set xrange [-2 :3]
  plot f(x),g(x)
- On obtient la palette des couleurs en tapant simplement test. Mais attention, ce test dépend du terminal (windows ou linux) qui a été défini. On tape test et on obtient une image de test avec les codes couleurs ou symboles affichés à droite.
  Pour donner à la courbe dessinée par une ligne de la couleur désirée, on peut taper plot f(x) 5. Si on veut une courbe dessinée avec un symbole, on tape plot f(x) with lines 5, g(x) with points 6. On obtient alors la figure 6.2 page 38.

2. **Surfaces dans l'espace**

(a) *Le fonctionnement de base*
Pour représenter la fonction $f(x; y) \mapsto x^2 - y^2$, on peut saisir (faire Entrée après chaque ligne) :
set xrange [-10 :10]
set yrange [-10 :10]
f(x,y)=x**2-y**2
splot f(x,y)
Ne pas oublier le s de splot (voir la figure 6.3 page 38).

Si on fait un clic droit sur la figure, on s'aperçoit qu'on peut manipuler la : la faire tourner, la voir par en dessous, du dessus etc.

(b) *Des améliorations*
- Pour que la surface ne soit plus transparente et que les zones cachées n'apparaissent pas :
  set hidden3d
  replot
- La figure 6.4 page 38, avec un gradient de couleur est obtenue avec :
  set pm3d
  replot
- Par défaut, l'intervalle des x et celui des y est divisé en 10. La surface est donc, vue du dessus composée de 100 carrés de de divisions des x, le second celui des y). On a donc les carrés qui indiquent par leur couleur, leur hauteur approximative. Attention toutefois à ne pas diviser excessivement : le logiciel se noierait dans les calculs. couleurs. Si on veut l'augmenter, il suffit de saisir set isosamples 30,30 (le premier nombre est le nombre

(c) *Faire apparaître les lignes de niveau*
- *Une surface*
  Représenter d'abord la fonction f définie pour $x \in [-2,5; 2,5]$ et $y \in [-2,5; 2,5]$ par $f(x, y) = (x^2+3y^2)\exp(1-(x^2+y^2))$ en saisissant :
  f(x,y)=(x**2+3*y**2)*exp(1-(x**2+y**2))
  set xrange [-2.5 :2.5]
  set yrange [-2.5 :2.5]
  set pm3d
  set isosamples 30,30
  set hidden3d
  splot f(x,y)
  On obtient la figure 6.5 page 38 qui va nous permettre, avec ces deux « pics » de mieux mettre en évidence la notion de ligne de niveau.
- *La commande de base*
  Pour faire apparaître les lignes de niveau, saisir :
  set contour both
  set key left bottom (pour mettre la légende en bas à gauche)
  replot
  On obtient la figure 6.6 page 38.
  À la place de contour both, qui met des lignes de niveau sur la surface et sur le plan du bas, on aurait pu mettre (*ne pas le faire*) :

  - contour surface qui met des lignes de niveau seulement sur la surface ;
  - contour base qui met des lignes de niveau seulement sur le plan du bas.
- *Choisir ses lignes de niveau*
  Si on désire représenter seulement les lignes de niveau correspondant à 2,5 et 2,6 on tapera le code set cntrparam levels discrete 2.5, 2.6 (*ne pas le faire*).
- *Lignes de niveau vues de dessus*
  Pour obtenir le gradient de couleur puis les lignes de niveau uniquement dans le plan du bas (comme une vue du dessus) :
  unset surface (supprime la surface)
  set pm3d map (met le gradient de couleur sur le plan de base)
  unset key (supprime la légende)
  set title "cartographie de la fonction f" (met un titre)
  replot
  Puis :
  unset pm3d (supprime le gradient)
  set isosamples 60,60 (augmente la définition)
  replot
  On obtient alors la figure 6.7 page suivante

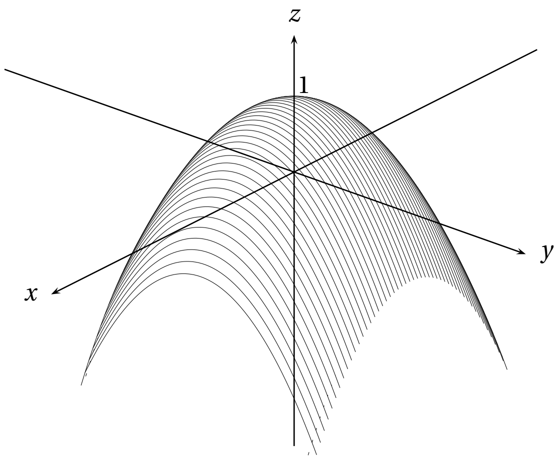
6.2 Fonctions de deux variables et surface

Définition 6.1. Une fonction numérique de deux variables est une fonction qui à deux nombres x et y associe un nombre z noté $z = f(x, y)$.
Une telle fonction est représentée dans l'espace par une surface d'équation $z = f(x, y)$.

Exemple 6.1. Pour toute la suite nous considèrerons la fonction de deux variables f définie par :

$$f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Un logiciel en donne la représentation suivante :



Une telle représentation n'est guère exploitable. Si l'on peut deviner (éventuellement) les coordonnées du sommet $(0; 0; 1)$, quasiment aucun autre point n'est lisible.

Pour pouvoir procéder plus facilement à des lectures graphiques, on fait apparaître sur cette surface des lignes de niveau $x = k$, $y = k$ et $z = k$ où k prend des valeurs entières (0, 1, 2, 3, etc. ou bien 0, 5, 10, etc.), c'est-à-dire l'ensemble des points appartenant à cette surface tels que $x = 0$, $x = 1$, etc. $y = 0$, $y = 1$ etc. et $z = 0$, $z = 1$ etc.

On colore en général les espaces entre deux lignes de niveau $z = 0$, $z = 1$ etc.

Enfin on place les axes à l'extérieur.

On obtient alors, avec un autre logiciel la figure 6.8 page 39.

Enfin un logiciel plus récent donne encore la figure 6.9 page 39 mettant en évidence par des couleurs les valeurs différentes prises par z.

EXERCICE.
Montrer, par le calcul, que les coordonnées du sommet sont bien $(0; 0; 1)$.

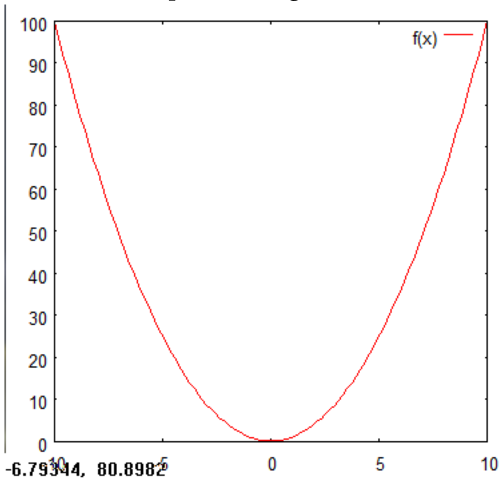


FIG. 6.1 – Ma première ligne de commande

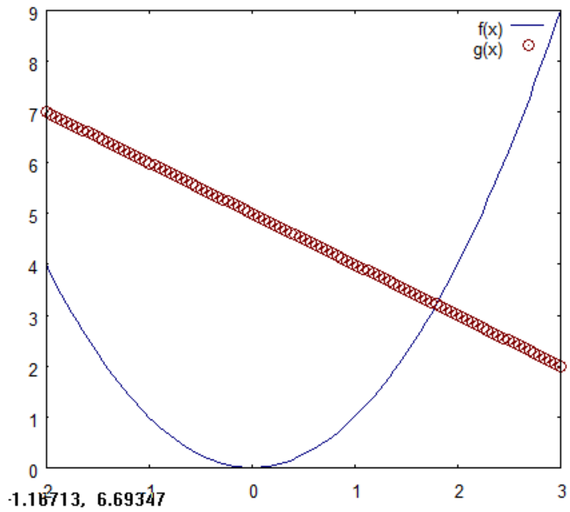


FIG. 6.2 – Couleurs et symboles

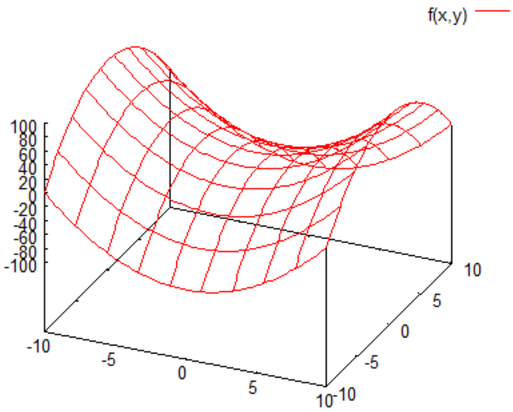


FIG. 6.3 – Surface

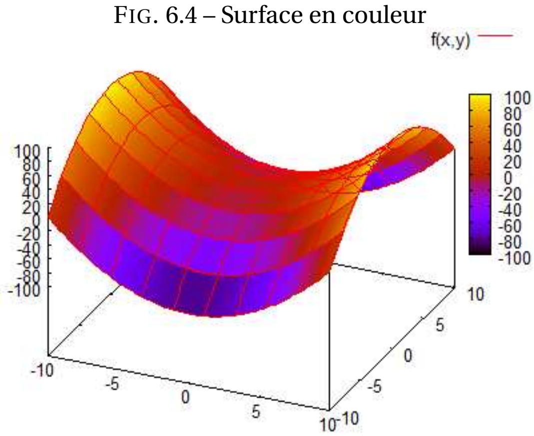


FIG. 6.4 – Surface en couleur

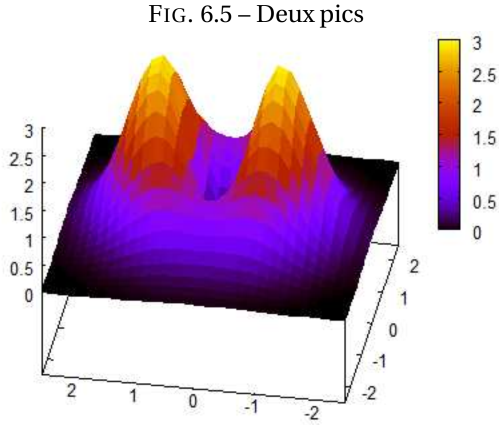


FIG. 6.5 – Deux pics

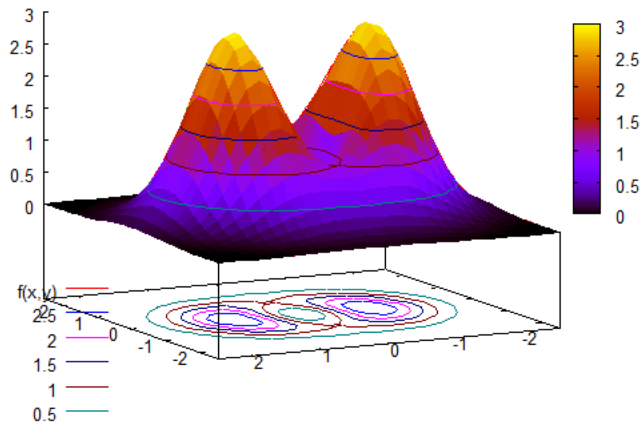


FIG. 6.6 – Lignes de niveau

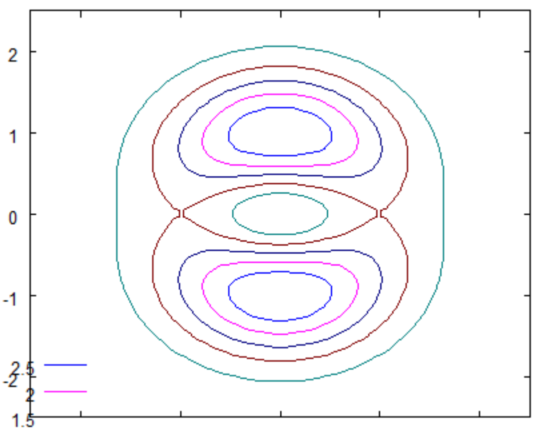
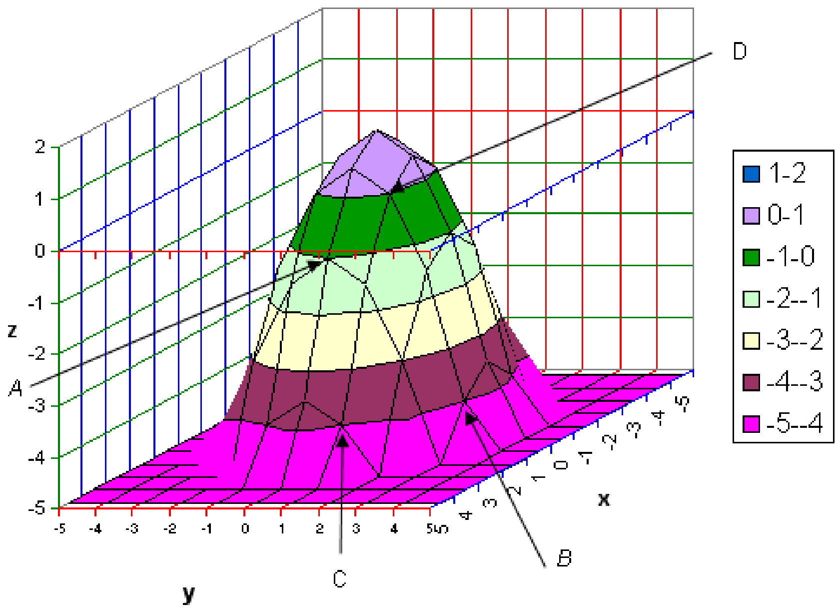


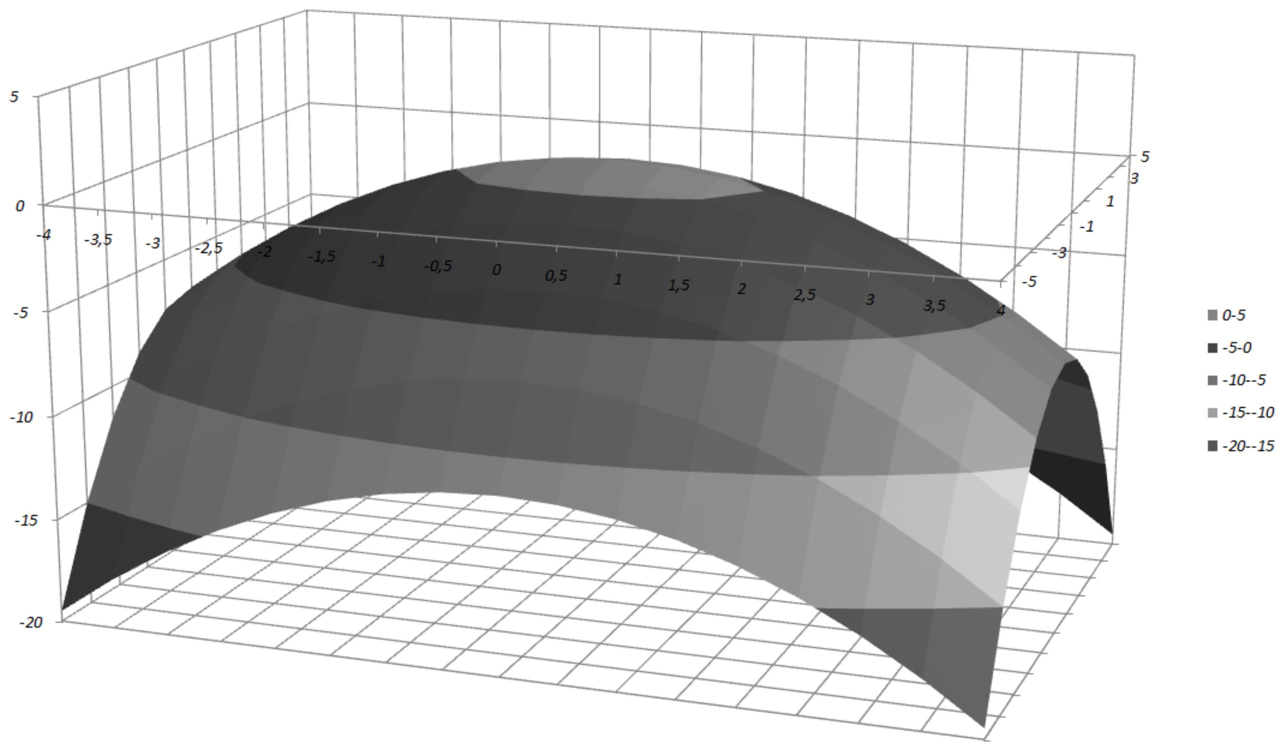
FIG. 6.7 – Lignes de niveau vues de haut

FIG. 6.8 – Un premier logiciel



Remarque. La surface semble présenter des « angles », mais cela est dû au logiciel, la surface étant parfaitement « lisse ».

FIG. 6.9 – Un second logiciel – Valeurs de z mises en évidence par des couleurs



6.3 Lectures graphiques

Les lignes joignant l'axe des x « de droite » à l'axe des x « de gauche » sont les lignes de niveau $x = k$, avec ici k variant de 5 (devant) à -5 (derrière).

Les lignes joignant l'axe des y « de devant » à l'axe des y « de derrière » sont les lignes de niveau $y = k$, avec ici k variant de -5 (gauche) à 5 (droite).

Enfin les autres lignes délimitant les couleurs sont les lignes de niveau $z = k$, avec ici k variant de -5 (bas) à 2 (haut).

Mathématiquement, les lignes de niveau se définissent comme suit :

Définition 6.2. Soit S une surface d'équation $z = f(x, y)$.
On appelle ligne de niveau $z = k$, la courbe formée par l'intersection du plan d'équation $z = k$ et de la surface d'équation $z = f(x, y)$.
C'est donc l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient le système $\begin{cases} z = k \\ z = f(x, y) \end{cases}$

Remarque. On définit de la même manière les lignes de niveau $x = k$ et $y = k$.

Exemple 6.2. Le point A est sur la surface aux croisements des lignes de niveau $x = 2$, $y = 0$ et $z = -1$. Ses coordonnées sont donc $A(2;0;-1)$. Le calcul le confirme : $f(x_A, y_A) = f(2,0) = 1 - \frac{1}{2}(2^2 + 0^2) = 1 - 2 = -1 = z_A$.

Le point B est sur la surface aux croisements des lignes de niveau $x = 1$, $y = 3$ et $z = -4$. Ses coordonnées sont donc $B(1;3;-4)$. Le calcul le confirme : $f(x_B, y_B) = f(1,3) = 1 - \frac{1}{2}(1^2 + 3^2) = 1 - 5 = -4 = z_B$.

Exercice.

1. Déterminer les coordonnées des points C et D.
2. Déterminer les côtes de $E(3;-1;z_E)$, $F(-1;3;z_F)$, $G(1;2;z_G)$ et $H(0;3;z_H)$ puis les placer sur la surface.

6.4 Tracer les lignes de niveau

On peut avoir besoin de visualiser la surface « d'en haut », « de droite » ou « de face ».

Cela revient, mathématiquement, à représenter, respectivement, les lignes de niveau $z = k$ dans le plan (xOy), les lignes de niveau $x = k$ dans le plan (yOz) et les lignes de niveau $y = k$ dans le plan (xOz).

On obtient les représentations de la figure page ci-contre (les « angles » sont dûs au logiciel).

On peut démontrer, dans certains cas, que les lignes de niveau sont des courbes connues, en général des droites, cercles ou paraboles. Plus précisément :

Propriété 6.1. *Soit S une surface d'équation $z = f(x, y)$.*
Si la ligne de niveau $z = k$ est équivalente à un système de la forme :

- $\begin{cases} z = k \\ y = mx + p \text{ ou } x = my + p \end{cases}$ *alors c'est une droite (contenue dans le plan d'équation $z = k$) ;*
- $\begin{cases} z = k \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$ *alors c'est un cercle de centre $\Omega(0;0\ k)$ et de rayon r (contenu dans le plan d'équation $z = k$) ;*
- $\begin{cases} z = k \\ y = ax^2 + bx + c \text{ ou } x = ay^2 + by + c \end{cases}$ *alors c'est une parabole (contenue dans le plan d'équation $z = k$) ;*
- $\begin{cases} z = k \\ y = u(x) \text{ ou } x = u(y) \end{cases}$ *où u est une fonction associée à la fonction inverse alors c'est une hyperbole (contenue dans le plan d'équation $z = k$).*

On l'admettra.

Remarque. On obtient des propriétés équivalentes pour les lignes de niveau $y = k$ et $x = k$ en permutant les lettres.

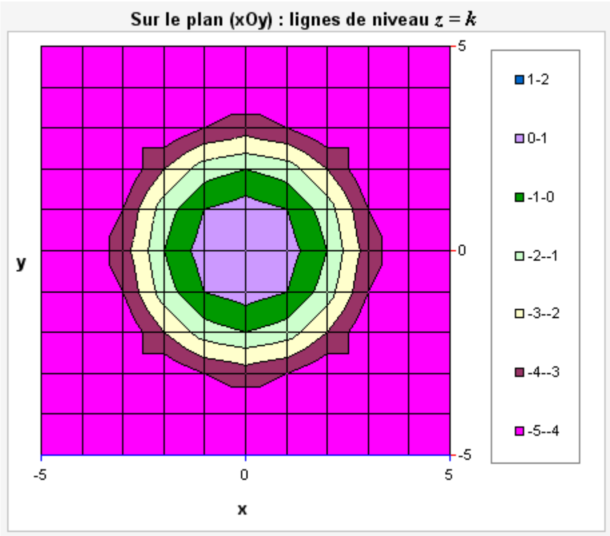
Exemple 6.3. Montrons que la ligne de niveau $z = -1$ est un cercle pour notre fonction $f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Par définition, la ligne de niveau $z = -1$ est constituée des points dont les coordonnées vérifient :

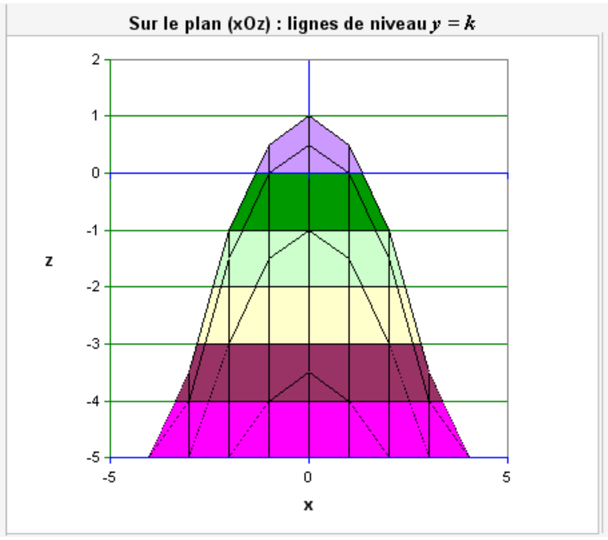
$$\begin{cases} z = -1 \\ z = f(x, y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ z = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ -1 = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ 4 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

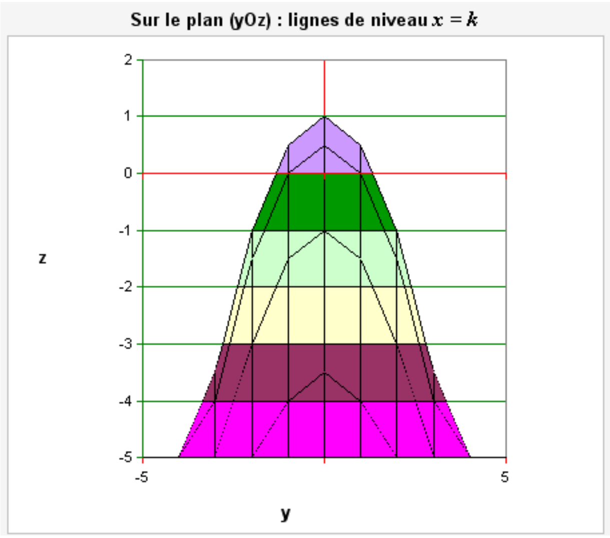
C'est donc un cercle de centre $(0;0;-1)$ et de rayon $\sqrt{4} = 2$.

Exercice.

1. (a) Montrer que les lignes de niveau $x = k$ sont des paraboles.
   (b) Représenter ces lignes pour $k = -2$, pour $k = 0$ et pour $k = 4$ dans le plan (yOz).
2. Mêmes questions pour les lignes de niveau $y = k$ (les représenter dans le plan (xOz)).


Sur le plan (xOy) : lignes de niveau $z = k$
y
x
5
0
-5
-5
0
5
1-2
0-1
-1-0
-2--1
-3--2
-4--3
-5--4


Sur le plan (xOz) : lignes de niveau $y = k$
z
x
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-5
0
5

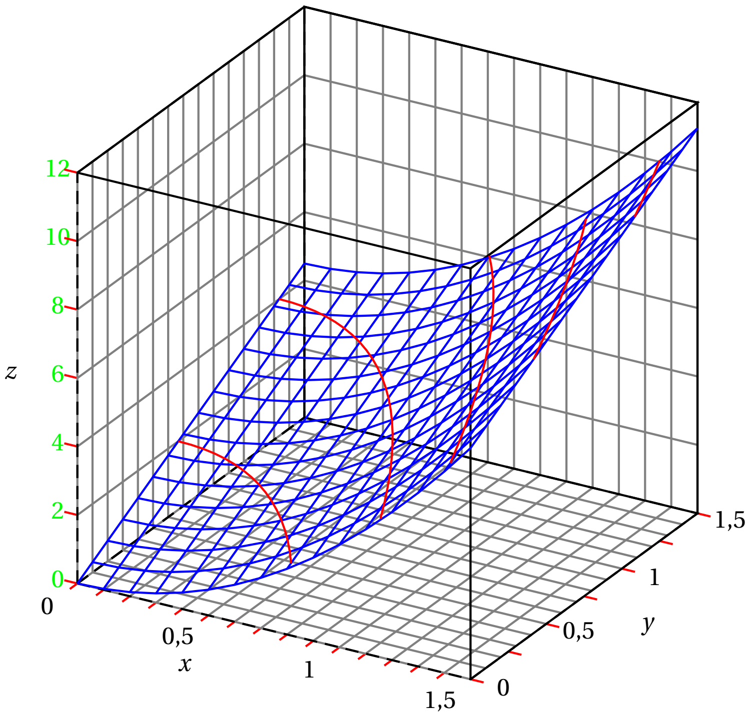

Sur le plan (yOz) : lignes de niveau $x = k$
z
y
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-5
5

6.5 Exercices

EXERCICE 6.1.
On a représenté su la figure 6.10 de la présente page la surface (S) d'équation $z = 3(x^2 + y)$, avec x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1,5]$, et y appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1,5]$.
On considère le plan (P) d'équation $z = 6$.

1. Sur la figure donnée, placer le point A de coordonnées $(1\,;\,1\,;\,6)$.
2. Surlignez en couleur la partie visible de l'intersection de la surface (S) et du plan (P) sur la figure donnée.

FIG. 6.10 – Figure de l'exercice 6.1



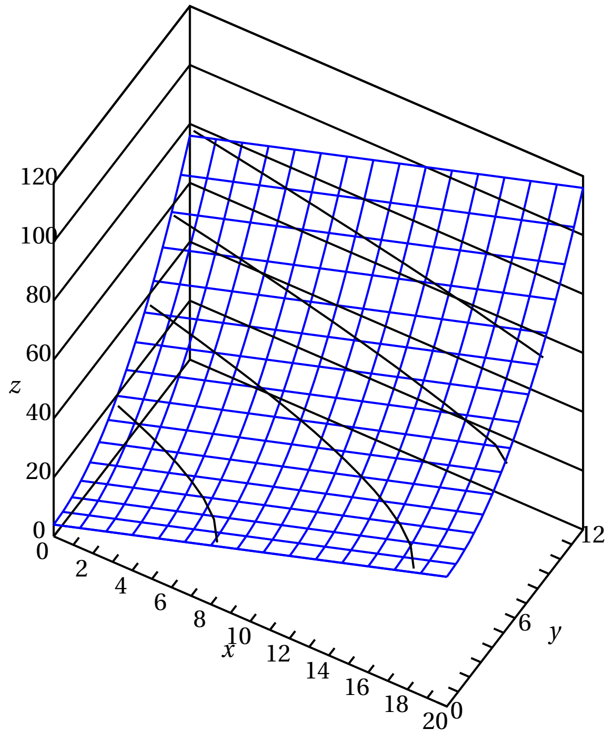
EXERCICE 6.2.
Pour fabriquer un alliage une usine utilise deux métaux A et B en quantités x et y exprimées en tonnes. Le coût de production qui en résulte, exprimé en milliers d'euros, est donné par la formule :

$$C(x\,;\,y) = 2x + 0,5y^2 + 4.$$

La figure 6.11 page ci-contre représente la surface d'équation $z = C(x\,;\,y)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 20$ et $0 \leqslant y \leqslant 12$.

1. Lequel des points donnés ci-dessous est un point de la surface d'équation $z = C(x\,;\,y)$?
   (a) $M(13\,;\,9\,;\,60)$ (b) $N(12\,;\,4\,;\,40)$ (c) $R(12\,;\,8\,;\,60)$ (d) $S(15\,;\,4\,;\,40)$
2. La courbe de niveau $x = 20$ est :
   (a) une parabole (b) une droite (c) une hyperbole (d) autre réponse
3. Déterminer la nature de la courbe de niveau $y = 10$.
4. (a) Déterminer la nature des courbes de niveau $z = k$ pour $k = 0$, $k = 5$, $k = 10$, $k = 15$, $k = 20$.
   (b) Représenter leurs projections dans le plan (xOy)

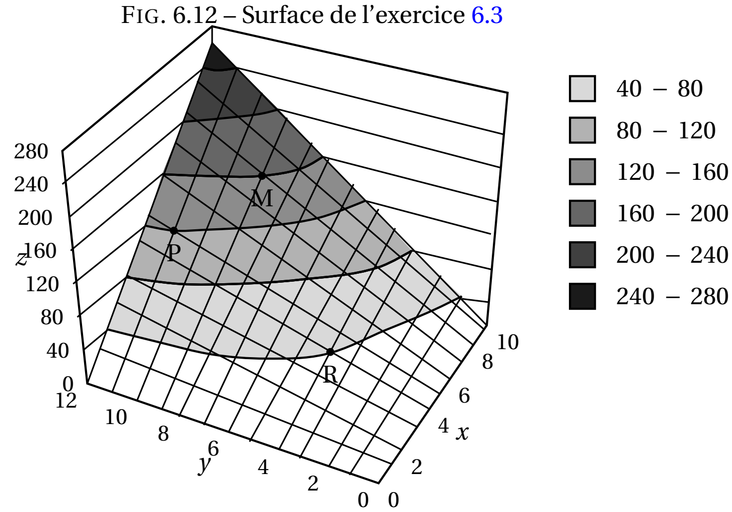
FIG. 6.11 – Surface d'équation $z = C(x; y)$



EXERCICE 6.3.
Soit f la fonction définie pour tout réel x élément de $[0\,;10]$ et pour tout réel y élément de $[0\,;12]$ par : $f(x;\ y) = 2x(y+1)$.
On donne sur la figure 6.12 de la présente page la représentation graphique de la surface $z = f(x;\ y)$ dans un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
Pour financer un projet humanitaire, les adhérents d'une association décident de fabriquer des cartes de voeux.
Pour produire une quantité z de paquets de cartes, ils utilisent x décilitres d'encre A et y décilitres d'encre B. On admet que x, y et z sont liés par la relation $z = 2x(y+1)$ où x est un nombre entier compris entre 0 et 10, et y un nombre entier compris entre 0 et 12.
Dans tout l'exercice, les quantités d'encre seront exprimées en décilitres.

1. (a) Combien de paquets de cartes peut-on fabriquer avec 7 décilitres d'encre A et 8 décilitres d'encre B ?
   (b) Donner la quantité d'encre A, la quantité d'encre B, et le nombre de paquets de cartes associés respectivement aux points M, P et R à coordonnées entières, de la surface donnée ci-dessous.
2. Quelle est la nature de la section de la surface par le plan d'équation $x = 4$, parallèle au plan $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$? Justifier la réponse.

FIG. 6.12 – Surface de l'exercice 6.3



EXERCICE 6.4 (Liban juin 2005)**.**
Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on désigne par $\mathcal{S}$ l'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ de l'espace tel que $z = 3xy$. On dit que $\mathcal{S}$ est la surface d'équation $z = 3xy$.
Une courbe de niveau de cote z_0 est l'intersection d'un plan d'équation $z = z_0$, parallèle au plan (xOy), avec la surface $\mathcal{S}$. On définit de façon identique une courbe de niveau d'abscisse x_0 et une courbe de niveau d'ordonnée y_0.

1. Soient les courbes de niveau d'abscisse 1, d'abscisse $\dfrac{3}{2}$ et d'abscisse 2.
   Tracer les projections orthogonales de ces courbes de niveau dans le plan (yOz).
2. (a) Quelle est la nature des courbes de niveau d'abscisse constante ?
   (b) Montrer que les courbes de niveau de cote constante non nulle sont des hyperboles.
3. Sur la figure 6.13 de la présente page sont représentées trois courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ représentant les projections orthogonales dans le plan $(x\text{O}y)$ de trois courbes de niveau de cote constante k.
   Préciser, en le justifiant, la valeur de k associée à chaque courbe.
4. Le point A$'$ représenté sur la courbe $\mathcal{C}_2$ de la figure ci-dessous est la projection orthogonale dans le plan (xOy) d'un point A$(x\,;\,y\,;\,z)$, de la surface $\mathcal{S}$.
   (a) Déterminer les coordonnées du point A dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
   (b) Préciser les coordonnées du point A$''$, projeté orthogonal de A dans le plan (yOz), puis placer ce point A$''$ sur la figure 6.13.
5. Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + 6y - z - 6 = 0$.
   (a) Montrer que le point A appartient au plan $\mathcal{P}$.
   (b) Montrer que le plan $\mathcal{P}$ contient la courbe de niveau d'abscisse 2.
   (c) Démontrer que l'intersection de la surface $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{P}$ est la réunion de deux droites : la courbe de niveau d'abscisse 2 et une autre droite que l'on déterminera par un système d'équations cartésiennes.
   On pourra utiliser la factorisation $x + 2y - xy - 2 = (x - 2)(1 - y)$.

FIG. 6.13 – Figure de l'exercice 6.4