

Chapitre 8

Probabilités

Sommaire

| | |
|---------------------|----|
| 8.1 Activités | 65 |
| 8.2 Bilan | 68 |

8.1 Activités

ACTIVITÉ 8.1 (Fréquences de populations).

Le tableau suivant donne la répartition des 35 élèves d'une terminale STG selon leur spécialité

| | Merc | CFE | GSI | Totaux |
|---------|------|-----|-----|--------|
| Filles | 12 | 4 | 5 | 21 |
| Garçons | 4 | 3 | 7 | 14 |
| Totaux | 16 | 7 | 12 | 35 |

On note :

- M la sous-population d'élèves suivant la spécialité Mercatique ;
- C la sous-population d'élèves suivant la spécialité Comptabilité et finances des entreprises ;
- I la sous-population d'élèves suivant la spécialité Gestion des systèmes d'information.

On note respectivement F et G les sous-populations de filles et de garçons.

- (a) Trouver la fréquence f_G de la population G de garçons dans la population totale.
Cette fréquence est appelée la fréquence marginale de G .
(b) En déduire la fréquence marginale f_F de la population F de filles.
(c) Trouver la fréquence marginale de la population I .
- Un élève fait partie de la sous-population $G \cap I$ s'il fait partie **simultanément** des deux sous-population G et I .
Trouver la fréquence marginale de $G \cap I$.
Cette fréquence est appelée fréquence conjointe de G et de I .
- Un élève fait partie de la sous-population $G \cup I$ s'il fait partie **soit** des garçons, **soit** des élèves suivant la spécialité Gestion des systèmes d'information.
Trouver le nombre d'élèves de cette sous-population et en déduire sa fréquence marginale.
- Exprimer $f_{G \cup I}$ en fonction de f_G , f_I et $f_{G \cap I}$.
- Trouver la fréquence de la spécialité Gestion des systèmes d'information dans la population de garçons.
Cette fréquence conditionnelle est notée $f_G(I)$ et elle se lit : « fréquence de I sachant G ».
- Vérifier que la fréquence de I sachant G est $f_G(I) = \frac{f_{G \cap I}}{f_G}$

ACTIVITÉ 8.2 (Probabilités et conditionnement).

La répartition des élèves d'une terminale STG est celle du tableau de l'activité 8.1.

On choisit un élève au hasard dans cette classe. On appelle **univers** U l'ensemble de toutes les **éventualités** à l'issue de ce choix.

Chaque élève de la classe est une éventualité. Le nombre d'éléments de l'univers est 35 et est noté $\text{card}(U) = 35$.

Si l'élève est choisi au hasard, chaque élève a la même probabilité d'être choisi, soit $\frac{1}{35}$: il y a **équiprobabilité**.

- On considère l'événement M « l'élève choisi suit la spécialité Mercatique ». Trouver la probabilité de M , notée $p(M)$
- On note \bar{M} l'événement contraire de M . Décrire cet événement par une phrase et trouver sa probabilité, notée $p(\bar{M})$.
- On donne l'événement F « l'élève choisi est une fille ». Décrire les événements $F \cap M$ et $F \cup M$ par des phrases puis déterminer leurs probabilités, notées $p(F \cap M)$ et $p(F \cup M)$. Quelle égalité relie les probabilités $p(F \cap M)$, $p(F \cup M)$, $p(F)$ et $p(M)$?
- Dans cette question, **on sait que** l'élève choisi est une fille. L'objectif est de trouver la probabilité qu'elle suive la spécialité Mercatique.

| | Merc | CFE | GSI | Totaux |
|--------|------|-----|-----|--------|
| Filles | 12 | 4 | 5 | 21 |

- Le problème revient à choisir un élève parmi les filles : quel est le nombre d'éventualités ?
- Comment se note l'événement « choisir une fille qui suit la spécialité Mercatique » ?
- Trouver la probabilité que l'élève choisi suive la spécialité Mercatique sachant que c'est une fille ; cette probabilité est notée $p_F(M)$.
- Calculer le quotient $\frac{p(F \cap M)}{p(F)}$. Que peut-on en déduire ?
- Trouver la probabilité que l'élève choisi soit une fille sachant que cet élève a choisi la spécialité Mercatique.

ACTIVITÉ 8.3 (Arbres pondérés).

Dans un établissement scolaire, 55 % des élèves sont des filles et 45 % sont des garçons. Parmi les filles, 10 % sont internes et, parmi les garçons, il y en a 20 %. On choisit un élève au hasard. On considère les événements suivants :

- F : « l'élève est une fille » ;
- G : « l'élève est un garçon » ;
- I : « l'élève est interne ».

- Interpréter la phrase « 55 % des élèves sont des filles et 45 % sont des garçons » par des probabilités.
- Les deux phrases suivantes sont équivalentes ; les compléter :
 - Dans l'univers des filles, la probabilité d'être interne est
 - La probabilité que l'élève choisi soit sachant que est
 Les traduire par une probabilité : $p_{\dots}(\dots) = \dots$
- (a) Décrire l'événement \bar{I} , contraire de I , par une phrase.

(b) Les phrases suivantes sont équivalentes ; les compléter :

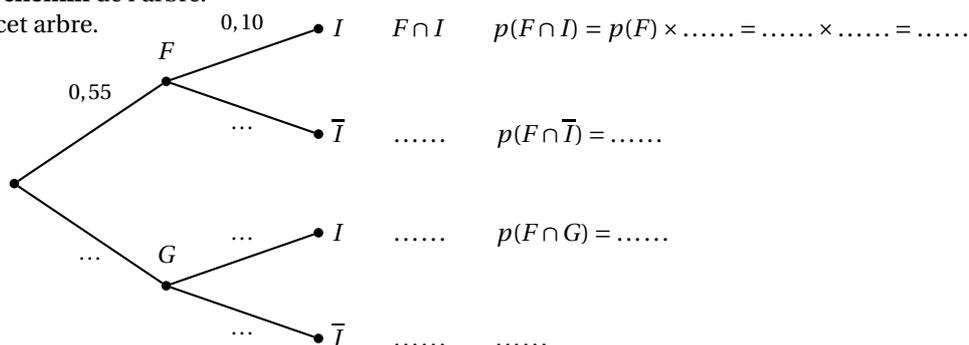
 - Parmi les filles, % ne sont pas internes.
 - La probabilité que l'élève choisi ne soit pas sachant que est
 - $p_{\dots}(\dots) = \dots$
- Compléter : $p_F(I) + p_F(\bar{I}) = \dots$
- Compléter : $p(F) = \dots$ $p_F(I) = \dots$

On rappelle que $p_F(I) = \frac{p(F \cap I)}{p(F)}$. Alors $p(F \cap I) = p(F) \times \dots$

L'arbre construit ci-dessous, appelé **arbre pondéré**, schématise la situation décrite dans cet exercice.

$F \cap I$ est un **chemin** de l'arbre.

Compléter cet arbre.



- Déterminer la probabilité que l'élève choisi soit un garçon non interne.

ACTIVITÉ 8.4 (Événements « conditionnés »).

On ne garde d'un jeu de 32 cartes que les 4 rois et les 4 dames.

Deux tirages successifs d'une carte **sans remise** sont effectués au hasard parmi ces huit cartes.

Soit A l'événement « obtenir un roi au premier tirage » et B l'événement « obtenir un roi au second tirage ».

1. Déterminer la probabilité des événements A et \bar{A} .
2. • Si A est réalisé à l'issue du premier tirage, il reste, avant le second tirage cartes dans le paquet doit rois. La probabilité que B soit réalisé, sachant que A est réalisé, est donc $p_{...}(\dots) = \dots\dots$
 • Si A n'est pas réalisé à l'issue du premier tirage, il reste, avant le second tirage cartes dans le paquet doit rois. La probabilité que B soit réalisé, sachant que A n'est pas réalisé, est donc $p_{...}(\dots) = \dots\dots$
 La probabilité de la réalisation de B est conditionnée par la réalisation de A .
 Par la suite, on dira que B est un événement conditionné.
3. Construire un arbre pondéré schématisant la situation décrite.
4. (a) Déterminer $p(A \cap B)$.
 (b) Soit E l'événement « obtenir une dame au premier tirage et un roi au second tirage ». Exprimer E à l'aide de A et de B puis trouver sa probabilité.
5. (a) Compléter la phrase : B c'est « obtenir un roi au premier tirage et un roi au second tirage, ou bien obtenir ».
 (b) En déduire $p(B) = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots$

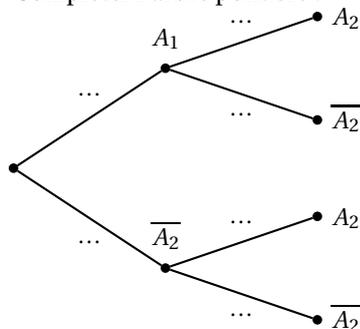
ACTIVITÉ 8.5 (Événements indépendants).

Sarah doit traverser régulièrement en voiture deux villes A et B comportant chacune une rue avec deux feux qui se suivent.

La couleur du deuxième feu dépend de celle du premier Dans la ville A , on note A_1 l'événement « Sarah est arrêtée par le premier feu » et A_2 l'événement « Sarah est arrêtée par le deuxième feu ».

La probabilité que Sarah soit arrêtée au premier feu est 0,125 et la probabilité que Sarah soit arrêtée au deuxième feu si elle l'a été au premier est 0,05. Si elle n'a pas été arrêtée au premier feu, elle est arrêtée par le deuxième dans 45 % des cas.

1. Compléter l'arbre pondéré :

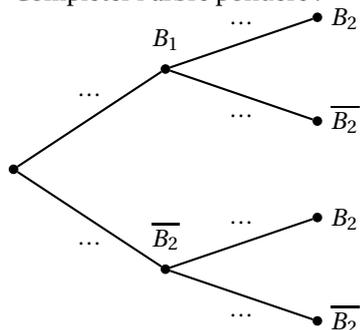


2. Déterminer $p(A_1 \cap A_2)$ et $p(\bar{A}_1 \cap A_2)$.
3. En déduire $p(A_2)$.
4. Calculer $p(A_1) \times p(A_2)$ et vérifier que $p(A_1) \times p(A_2) \neq p(A_1 \cap A_2)$.
5. A-t-on $p_{A_1}(A_2) = p(A_2)$?

La couleur du deuxième feu ne dépend pas de celle du premier Dans la ville B , on note B_1 l'événement « Sarah est arrêtée par le premier feu » et B_2 l'événement « Sarah est arrêtée par le deuxième feu ».

La probabilité que Sarah soit arrêtée au premier feu est 0,125 et la probabilité que Sarah soit arrêtée au deuxième feu si elle l'a été au premier est 0,05 et, si le premier feu est vert, la probabilité que le deuxième le soit aussi est 0,95.

1. Compléter l'arbre pondéré :



2. Déterminer $p(B_1 \cap B_2)$, $p_{\bar{B}_1}(B_2)$ et $p(\bar{B}_1 \cap B_2)$.
3. En déduire $p(B_2)$.
4. Vérifier que $p(B_1) \times p(B_2) \neq p(B_1 \cap B_2)$.
5. Comparer $p_{B_1}(B_2)$, $p_{\bar{B}_1}(B_2)$ et $p(B_2)$.

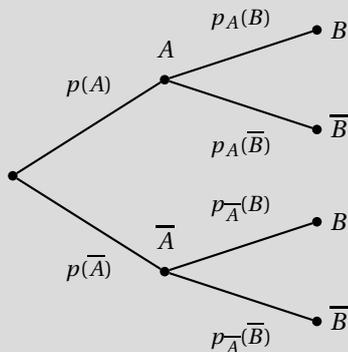
8.2 Bilan

Définition 8.1. Dans un univers donné où A et B sont deux événements tels que $p(A) \neq 0$. On appelle probabilité de B sachant A , notée $p_A(B)$, le nombre

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Cette probabilité est dite probabilité *conditionnelle*.

Propriété 8.1. Dans un univers donné, soit A et B deux événements non impossibles



$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$$

Il y a quatre chemins sur l'arbre : $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$.

La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses branches.

La somme des probabilités portées par les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

Propriété 8.2. Dans un univers donné, soient A et B deux événements. On a :

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$$

Définition 8.2. Dans un univers donné, on dit que deux événements A et B sont indépendants si

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$