BACCALAURÉAT GÉNÉRAL
Hiver 2010

Épreuve :
MATHÉMATIQUES

Série
SCIENCES ÉCONOMIQUES ET SOCIALES

Spécialités :

Sciences économiques et sociales (coefficient : 5)
Anglais renforcé (coefficient : 5)
Mathématiques (coefficient : 7)

Durée de l'épreuve : 3 heures.

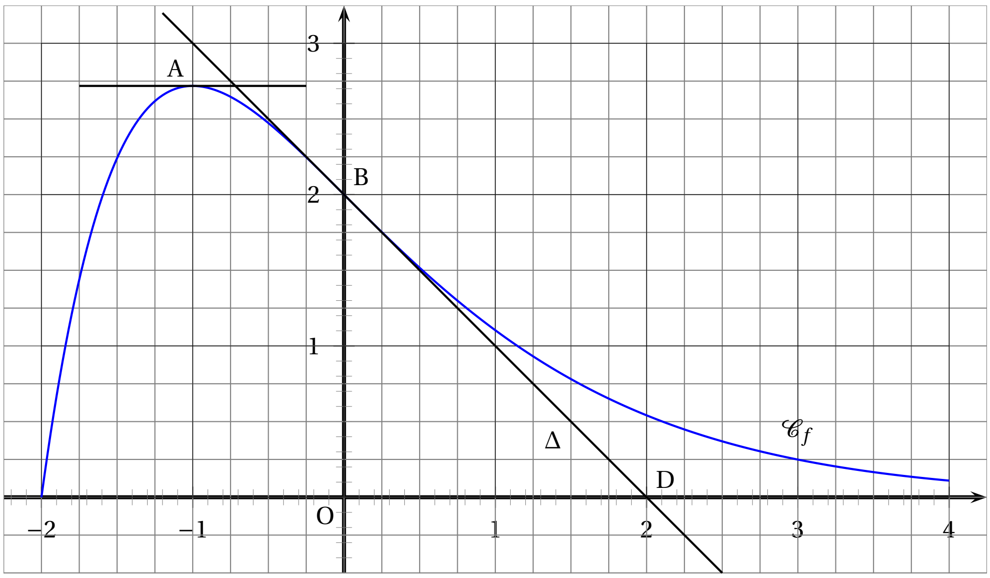
L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le sujet comporte 6 pages.

Exercice 1 (4 points).

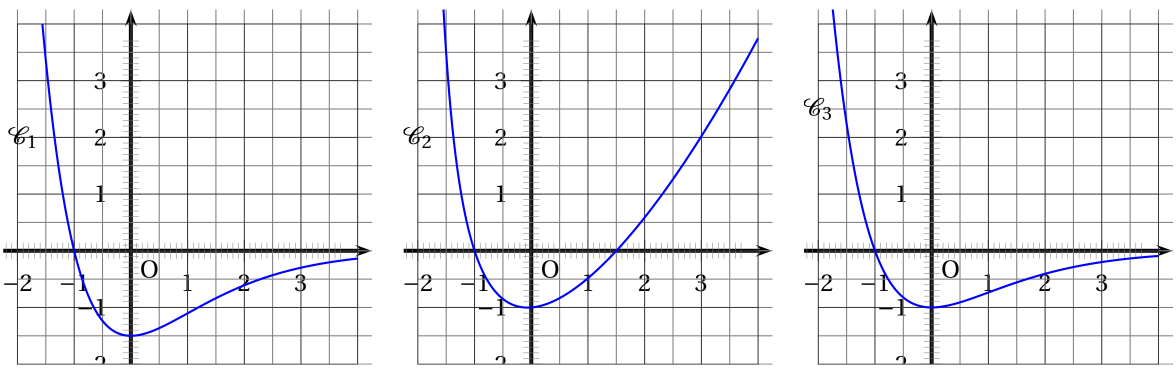
Commun à tous les candidats

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
La courbe $\mathscr{C}_f$, tracée ci-dessous, représente la fonction f dans le plan muni d'un repère orthormal d'unité graphique 2 cm.
On note e le nombre réel tel que $\ln \mathrm{e} = 1$. La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points B(0 ; 2) et A$(-1\,;\,\mathrm{e})$.
Elle admet au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
La tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}_f$ en B passe par le point D(2 ; 0).



1. En utilisant les données graphiques, donner sans justifier :
   (a) le nombre de solutions sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$ de l'équation $f(x) = 1$ et un encadrement d'amplitude 0,25 des solutions éventuelles.
   (b) la valeur de $f'(-1)$.
   (c) le signe de la dérivée f' de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Donner en justifiant :
   (a) le coefficient directeur de la tangente Δ.
   (b) l'encadrement par deux entiers naturels consécutifs de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (c) celle des trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ données ci-dessous qui représente la fonction dérivée f' de la fonction f.



EXERCICE 2 (5 points).
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.
Dans un lycée général et technologique, il y a 1 400 *lycéens* : des *élèves* (de seconde, première ou terminale) et des *étudiants* (en section de technicien supérieur – STS).
Pour pouvoir disposer des collections de manuels scolaires, tous les lycéens doivent adhérer à la coopérative scolaire et payer une location annuelle d'un montant de 50 € pour les élèves et 60 € pour les étudiants.
Sur l'ensemble des adhérents à la coopérative scolaire, 62,5 % sont les élèves de seconde, première ou terminale. Les autres sont les étudiants de STS.
Depuis quelques années, les élèves de seconde, première ou terminale disposent de chèques-lire avec lesquels ils peuvent régler cette location :

- 40 % paient leur location à l'aide de chèques-lire,
- 56 % paient par chèque bancaire,
- les autres paient par mandat ou en liquide.

Les étudiants de STS ne disposent pas de chèques-lire :

- 96 % paient par chèque bancaire,
- les autres paient par mandat ou en liquide.

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I
Tous les résultats seront arrondis au centième.
Les 1 400 lycéens, élèves comme étudiants, adhèrent à cette coopérative.

1. Calculer le montant des versements effectués par chèque bancaire.
2. Calculer le pourcentage du montant total des locations que cette somme représente.

Partie II
Tous les résultats seront arrondis au millième.
On prend au hasard la fiche d'un adhérent à la coopérative scolaire parmi les 1 400 fiches.
On note :

- L l'évènement « l'adhérent est un élève » ;
- E l'évènement « l'adhérent est un étudiant en STS » ;
- C l'évènement « l'adhérent paie avec ses chèques-lire » ;
- B l'évènement « l'adhérent paie avec un chèque bancaire » ;
- A l'évènement « l'adhérent paie par un autre moyen de paiement ».

1. Traduire à l'aide d'un arbre pondéré la situation décrite ci-dessus.
2. (a) Calculer la probabilité que l'adhérent soit un élève ayant payé sa location à l'aide de chèques-lire.
   (b) Calculer la probabilité que l'adhérent soit un étudiant en STS ayant payé sa location à l'aide d'un chèque bancaire.
   (c) Démontrer que la probabilité que l'adhérent ait payé par chèque bancaire est de 0,71.
3. Un adhérent a payé par chèque bancaire. Calculer le probabilité que ce soit un élève.

EXERCICE 2 (5 points).
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.
L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
Sur le dessin de la figure 1 joint en annexe page 5, on a placé les points $A(0\,;2\,;0)$, $B(0\,;0\,;6)$, $C(4\,;0\,;0)$, $D(0\,;4\,;0)$ et $E(0\,;0\,;4)$.
Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $3y+z=6$.
Il est représenté par ses traces sur les plans de base sur le dessin joint en annexe.

1. (a) Démontrer que les points C, D et E déterminent un plan que l'on notera (CDE).
   (b) Vérifier que le plan (CDE) a pour équation $x+y+z=4$.
2. (a) Justifier que les plans $\mathscr{P}$ et (CDE) sont sécants. On note Δ leur intersection.
   (b) Sans justifier, représenter Δ en couleur (ou à défaut en traits pointillés) sur la figure en annexe.
3. On considère les points $F(2\,;0\,;0)$ et $G(0\,;3\,;0)$.
   On note $\mathscr{P}'$ le plan parallèle à l'axe $\left(O\,;\overrightarrow{k}\right)$ et contenant les points F et G.
   (a) Placer sur la figure en annexe les points F et G.
   Sans justifier, représenter le plan $\mathscr{P}'$ par ses traces sur les plans de base, d'une autre couleur (ou à défaut en larges pointillés), sur la figure en annexe.

(b) Déterminer les réels a et b tels que $ax + by = 6$ soit une équation du plan $\mathcal{P}'$.

4. L'intersection des plans (CDE) et $\mathcal{P}'$ est la droite Δ'.
   Sans justifier, représenter la droite Δ', d'une troisième couleur (ou à défaut en très larges pointillés), sur la figure en annexe.

5. On considère le système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3y+z &=& 6\\ x+y+z &=& 4\\ 3x+2y &=& 6\end{array}\right.$$

   (a) Résoudre ce système.

   (b) Que peut-on alors en déduire pour les droites Δ et Δ' ?

EXERCICE 3 (5 points)**.**
Commun à tous les candidats.
Pour établir le prix unitaire le plus adapté d'un produit, une société effectue une étude statistique.
Le tableau suivant indique le nombre d'acheteurs, exprimé en milliers, correspondant à un prix unitaire donné, exprimé en euros :

Prix en euros : x_i	4	5	6	7	8	9	10	11
Nombre d'acheteurs en milliers : y_i	125	120	100	79	70	50	40	25

1. Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i\,;\,y_i\right)$ dans le repère de la figure 3 fourni en annexe page 6 (unités 1 cm pour un euro sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 milliers d'acheteurs sur l'axe des ordonnées).
2. Déterminer l'équation $y = ax + b$ de la droite $\mathcal{D}$ d'ajustement affine de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. *Les coefficients a et b seront arrondis au centième.*
3. Pour la suite, on prendra $y = -15x + 189$ comme équation de la droite $\mathcal{D}$ d'ajustement affine de y en x.
   (a) Tracer la droite $\mathcal{D}$ dans le repère de la figure 3 fourni en annexe page 6.
   (b) En utilisant l'ajustement affine, estimer graphiquement, à l'euro près, le prix unitaire maximum que la société peut fixer si elle veut conserver des acheteurs.
   (c) i. En utilisant l'ajustement affine précédent, justifier que la recette $R(x)$, exprimée en milliers d'euros, en fonction du prix unitaire x d'un objet, exprimé en euros, vérifie $R(x) = -15x^2 + 189x$.
   ii. Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = -15x^2 + 189x$.
   iii. Quel conseil peut-on donner à la société ? Argumenter la réponse.

EXERCICE 4 (6 points)**.**
Commun à tous les candidats.
Le plan est rapporté à un repère orthogonal.
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 2x(1 - \ln x)$.
On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f. Elle est donnée sur la figure 2 en annexe page suivante.

1. (a) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 0 (*on rappelle que la limite en* 0 *de la fonction u définie sur l'intervalle* $]0\,;\,+\infty[$ *par* $u(x) = x\ln x$ *est* 0).
   (b) Déterminer $f'(x)$ pour $x \in]0\,;\,+\infty[$ (où f' est la fonction dérivée de f).
   (c) Étudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in]0\,;\,+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
2. Résoudre sur $]0\,;\,+\infty[$ l'équation $f(x) = 0$. En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet un unique point d'intersection A avec l'axe des abscisses et donner les coordonnées du point A.
3. (a) Résoudre, par un calcul, l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?
   (b) Montrer que la fonction F définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = x^2\left(\dfrac{3}{2} - \ln x\right)$ est une primitive de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
   (c) On désigne par $\mathcal{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ (voir la figure 2 en annexe page ci-contre).
   Calculer en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire de $\mathcal{D}$ puis, en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

FIG. 1 – Figure de l'exercice 2 pour les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité

À rendre avec la copie

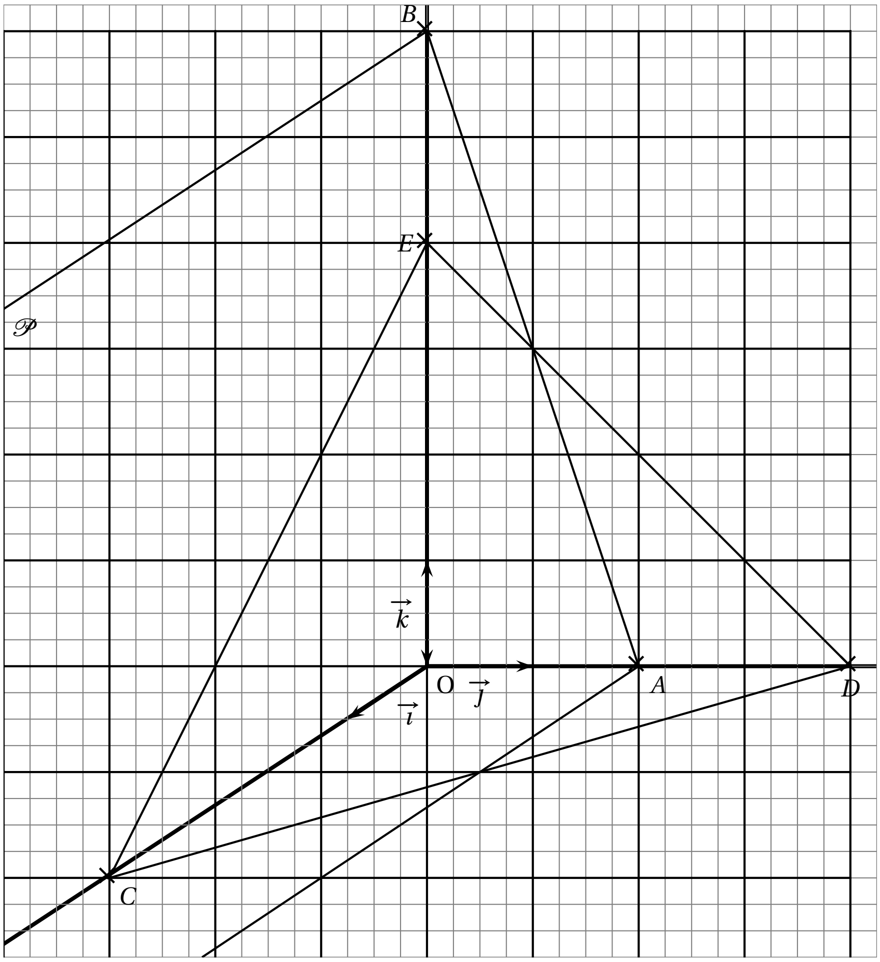


FIG. 2 – Figure de l'exercice 4

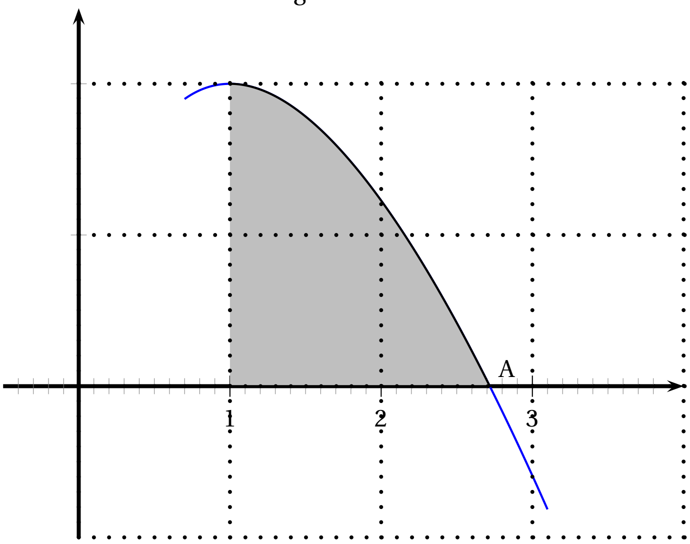


FIG. 3 – Repère de l'exercice 3

À rendre avec la copie