Devoir surveillé n°4

Second degré – Systèmes – Matrices

EXERCICE 4.1 (6 points).
*Pour **tous** les élèves.*
Le gérant d'une salle de cinéma de 300 places constate que le nombre x de spectateurs à une séance est une fonction affine du prix p du billet. Plus précisement on a : $x = 300 - 12p$.

1. Expliquer pourquoi on a obligatoirement $0 \leqslant p \leqslant 25$.
2. Sachant que les charges fixes pour chaque séance s'élèvent à 1632 €, montrer que le bénéfice $b(p)$ de chaque séance est égal à $b(p) = -12p^2 + 300p - 1632$.
3. En déduire pour quelles valeurs de p le séance est rentable.
4. Déterminer le prix du billet pour que le bénéfice soit maximum. Quel est alors le nombre de spectateurs et le bénéfice réalisé ?

EXERCICE 4.2 (6 points).
*Pour les élèves **ne suivant pas** l'enseignement de spécialité.*
Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\mathscr{S} : \begin{cases} 2x - 2y + z = -7 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ 3x + y + 2z = -1 \end{cases}$$

EXERCICE 4.2 (6 points).
*Pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité.*

1. Déterminer la matrice inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Les deux matrices suivantes sont-elles inverses l'une de l'autre ? (*Justifier*)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer A^2.
   (b) Développer le produit matriciel : $(I_2 - A) \times (I_2 + A)$ où $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (c) Calculer $I_2 - A$.
   (d) Déduire de ce qui précède l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

EXERCICE 4.3 (8 points).
*Pour **tous** les élèves.*
Un menuisier fabrique des tables et des buffets en bois.
Une table nécessite 3 heures de découpage et 2 heures de finition.
Un buffet nécessite 1 heure 30 minutes de découpage et 6 heures de finition.
Pour des raisons de commercialisation, ce menuisier ne peut pas produire plus de 18 meubles (tables et buffets) par mois. Les capacités de production sont de 45 heures pour le découpage et de 80 heures pour la finition.
Cet artisan réalise un bénéfice de 200 € par table et de 300 € par buffet.
On se propose de déterminer le nombre x de tables et le nombres y de buffets que ce menuisier doit fabriquer pour réaliser un bénéfice maximum.

1. Expliquer pourquoi les contraintes de production peuvent se traduire par le système :

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x + y \leqslant 18 \\ 2x + y \leqslant 30 \\ x + 3y \leqslant 40 \end{cases}$$

2. Dans le repère de la figure 4.1 de la présente page les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'équations respectives $2x + y = 30$ et $x + 3y = 40$ ont été tracées.
   Compléter le tracé si nécessaire et représenter le domaine des contraintes. **On hachurera la partie du plan qui ne convient pas.**
3. (a) Exprimer le bénéfice B en fonction de x et de y.
   (b) Représenter l'ensemble des points correspondants à un bénéfice de 2 400 €.
   (c) Déterminer graphiquement le point I du domaine des contraintes en lequel le bénéfice est maximum en expliquant votre méthode.
   Vérifier ce résultat par le calcul.
   (d) En déduire le nombre de tables et de buffets à produire pour que le bénéfice soit maximum et déterminer ce bénéfice maximum.
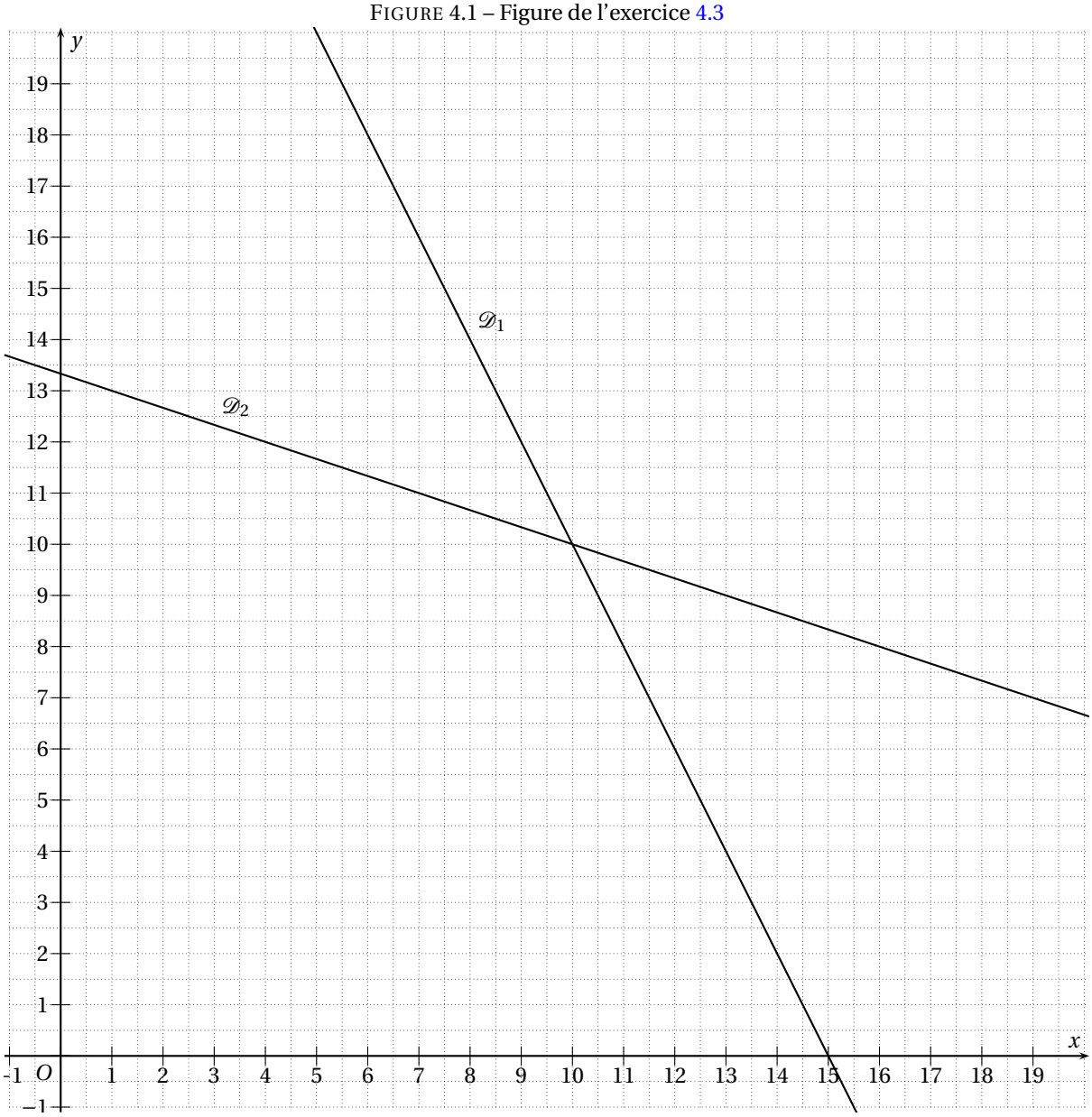
FIGURE 4.1 – Figure de l'exercice 4.3