Devoir surveillé n°3

Systèmes d'équations et d'inéquations

Exercice 3.1 (2 points).
Pour chacun des trois systèmes suivants :

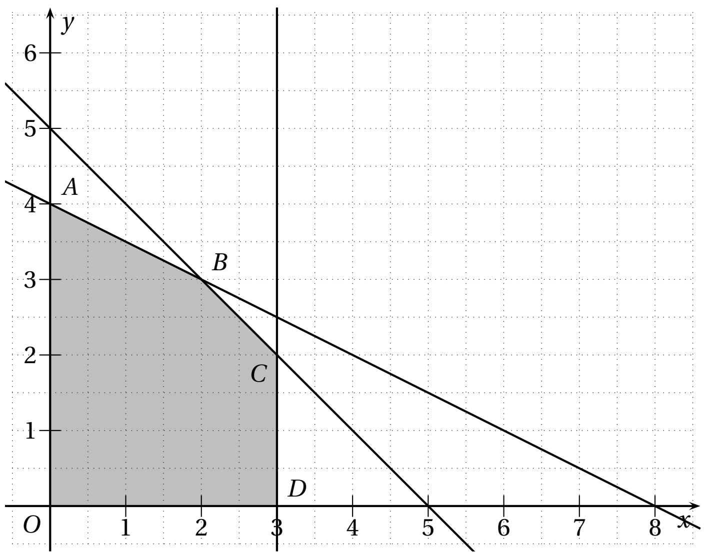
1. déterminer s'il a ou non une unique solution;
2. s'il a une unique solution, le résoudre.

- $\mathscr{S}_1 : \begin{cases} x-2y=3 \\ 4y-2x=1 \end{cases}$
- $\mathscr{S}_2 : \begin{cases} x+3y=-5 \\ 4x-2y=8 \end{cases}$
- $\mathscr{S}_3 : \begin{cases} 2x+3y=4 \\ 3x+4,5y=6 \end{cases}$

Exercice 3.2 (Caractériser une région du plan – 5 points).
Le plan est muni d'un repère orthonormal.
On considère le polygone OABCD représenté sur la figure 3.1 de la présente page, et on appelle $\mathscr{P}$ la partie grisée, bords compris.

1. On admettra que la droite (BC) a pour équation : $y=x+5$.
   Déterminer, en justifiant, une inéquation du demi-plan $\mathscr{P}_1$ de frontière (BC) correspondant à l'intérieur du polygone $OABCD$.
2. (a) Déterminer, par le calcul, l'équation réduite de la droite (AB).
   (b) Déterminer, en justifiant, une inéquation du demi-plan $\mathscr{P}_2$ de frontière (AB) correspondant à l'intérieur du polygone $OABCD$.
3. En déduire un système d'inéquations $\mathscr{S}$ caractérisant l'intérieur $\mathscr{P}$ du polygone $OABCD$ (frontières comprises).
4. Déterminer graphiquement en expliquant votre démarche :
   (a) Peut-on respecter les contraintes et avoir $x=3$ et $y=3$?
   (b) Peut-on respecter les contraintes et avoir $x=2$ et $y=3$?
   (c) Si l'on choisit $x=2$, quelles sont toutes les valeurs entières de y que l'on peut prendre tout en respectant les contraintes ?
   (d) Si l'on choisit $y=1$, quelle est la valeur entière maximale de x que l'on peut prendre tout en respectant les contraintes ?

FIGURE 3.1 – Figure de l'exercice 3.2



Exercice 3.3 (4,5 points).
*Pour les élèves **ne suivant pas** l'enseignement de spécialité.*
Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\mathscr{S} : \begin{cases} 2x-3y+z=-3 \\ x+2y-z=-3 \\ 4x+y+2z=1 \end{cases}$$

Exercice 3.3 (4,5 points).
Pour les élèves ***suivant*** *l'enseignement de spécialité.*
On justifiera toutes ses réponses.
L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
On donne les points $A(2\,;0\,;0)$, $B(1\,;3\,;4)$, $C(4\,;2\,;0)$, $D(3\,;3\,;3)$ et $E(4\,;2\,;4)$.

1. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?
2. La droite (DE) est-elle perpendiculaire au plan (ABC) ?
3. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice 3.4 (Résolutions de sytèmes – 4 points).
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
On donne deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'équations respectives : $x+2y=30$ et $2x+y=30$.

1. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection I de ces deux droites.
2. Représenter graphiquement dans le repère de la figure 3.2 page suivante l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient le système :
$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x+2y \geqslant 30 \\ 2x+y \geqslant 30 \end{cases}$$
On hachurera la partie du plan qui ne convient pas.

Exercice 3.5 (Optimisation à deux variables – 4,5 points).
Un artisan ferronnier doit fabriquer des tables et fauteuils métalliques pour un grand magasin.
Chaque table nécessite 10 kg de fer, 2 litres de peintures anti-corrosion et demande 3 heures de travail.
Chaque fauteuil nécessite 5 kg de fer, 4 litres de peintures anti-corrosion et demande 4 heures de travail.
Pour cet ouvrage, l'artisan reçoit 100 kg de fer et 36 litres de peintures anti-corrosion. Les délais imposés font qu'il ne dispose que de 40 heures de travail.
On note x le nombre de tables et y le nombre de fauteuils que l'artisan va réaliser.

1. Montrer que les contraintes de cette situation peuvent être traduites par le système d'inéquations :
$$\mathscr{S}\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ 2x+y \leqslant 20 \\ x+2y \leqslant 18 \\ 3x+4y \leqslant 40 \end{cases}$$
où x et y sont des entiers naturels. La figure 3.3 page 32 représente l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient le système $\mathscr{S}$ (polygone grisé).
2. L'artisan recevra 60 € pour chaque table produite et 40 € pour chaque fauteuil produit.
Soit S le salaire que l'artisan recevra pour la confection de x tables et de y fauteuils.
   (a) Exprimer S en fonction de x et y.
   (b) Déterminer une équation de la droite $\mathscr{D}$ correspondant à un salaire de 440 € et compléter le graphique de la figure 3.3 page 32 en traçant la droite $\mathscr{D}$.
   (c) En justifiant la démarche, déterminer le couple d'entiers x et y qui permettent à l'artisan d'obtenir le salaire le plus élevé.
   Préciser le montant de ce salaire maximum.
   À combien alors s'élève son salaire horaire ?

FIGURE 3.2 – Figure de l'exercice 3.4

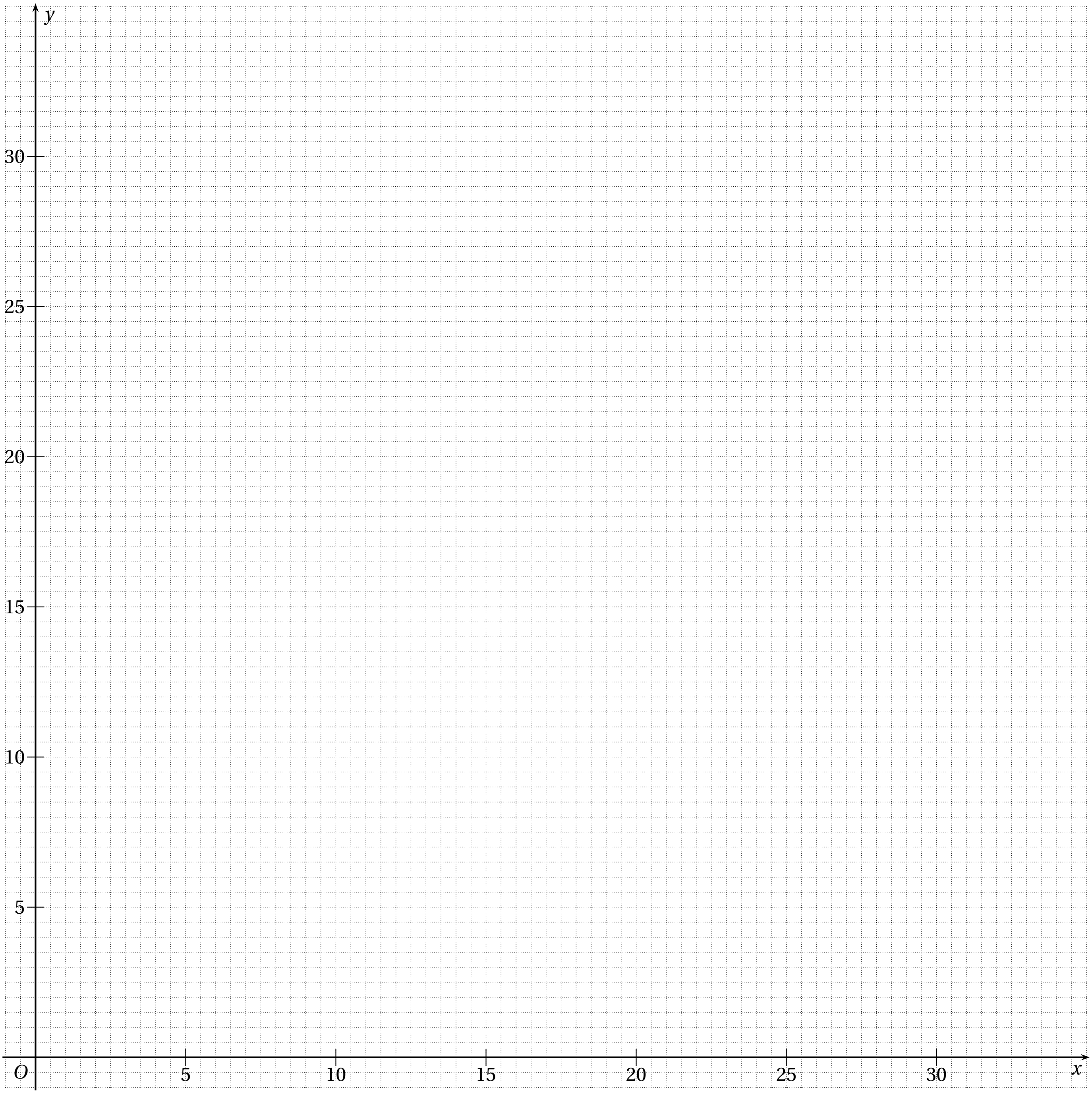


FIGURE 3.3 – Figure de l'exercice 3.5