Chapitre 3

Matrices

Sommaire

3.1 Activités

Activité 3.1 (Sommes et combinaisons linéaires de tableaux de nombres).
Un carré magique est un tableau carré dans lequel la somme des lignes, des colonnes ou des digonales est la même.

1. Montrer que le tableau ci-dessous est un carré magique.

2	−1	2
1	1	1
0	3	0

2. Montrer que le tableau précédent peut s'écrire sous la forme de la somme des trois tableaux ci-dessous.

1	1	1
1	1	1
1	1	1

1	−1	0
−1	0	1
0	1	−1

0	−1	1
1	0	−1
−1	1	0

3. Construire un autre tableau en multipliant le premier tableau par 2, le deuxième par 3 et le dernier par 4 et en ajoutant les trois tableaux obtenus. Ce tableau est-il un carré magique ?

Activité 3.2 (Sommes et multiplications de tableaux de nombres).
Le premier tableau contient les notes de quatre élèves lors de 3 devoirs.
Les élèves terminent la correction chez eux et gagnent de 0 à 2 points supplémentaires. Les gains des quatre élèves sont donnés par le deuxième tableau.
Les coefficients des trois devoirs sont donnés dans le troisième tableau.

Notes des quatre élèves

	D_1	D_2	D_3
Sarah	12	15	8
David	10	12	13
Nina	16	18	17
Louis	8	15	9

Gains des quatre élèves

	D_1	D_2	D_3
Sarah	1	0	2
David	2	1	0
Nina	1	0	2
Louis	2	2	2

Coefficients des devoirs

D_1	1
D_2	4
D_3	2

1. Calculer les notes finales obtenues par les élèves.
2. Calculer le total des points obtenu par chaque élève en tenant compte des coefficients, puis la moyenne de chacun.

Activité 3.3 (Produits de tableaux de nombres).
Le premier tableau ci-dessous donne les prix, en euros, de trois shampooings avec ou sans remise de fidélité.
Le second tableau indique les quantités achetées par deux clientes A et B.
Calculer le prix total payé par chaque cliente selon qu'elle bénéficie ou non de la remise.

	Nutri	Color	Milky
Prix unitaire	6	7	9
Prix avec remise	5	5	8

Quantités	A	B
Nutri	3	2
Color	1	1
Milky	2	2

3.2 Définitions

Définition 3.1. Une *matrice* A de dimension (ou d'ordre) $n \times p$ est un tableau de nombres comportant n lignes et p colonnes.
Les nombres sont appelés *coefficients* (ou éléments) de la matrice.
Le coefficient situé à l'intersection de la i$^{\text{e}}$ ligne et de la j$^{\text{e}}$ colonne est noté a_{ij}. On note parfois $A = \left(a_{ij}\right)$.

Définition 3.2. Certaines matrices particulières portent des noms :
- Matrice ligne : C'est une matrice qui ne comporte qu'une ligne ;
- Matrice colonne : C'est une matrice qui ne comporte qu'une colonne ;
- Matrice carrée : C'est une matrice qui comporte autant de lignes que de colonnes ; on dit qu'elle est d'ordre n (lorsqu'il y a n lignes et n colonnes) ;
- Matrice diagonale : C'est une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls en dehors de la première diagonale (celle issue du coin en haut à gauche) ;
- Matrice unité : C'est une matrice diagonale dont tous les coefficients de la diagonale sont égaux à 1 ; on note I_n la matrice unité d'ordre n ;
- Matrice nulle : C'est une matrice dont tous les coefficients sont égaux à zéro ;
- Transposée d'une matrice A : C'est la matrice dont les colonnes sont les lignes de A ; on la note ${}^{\mathrm{t}}A$.

3.3 Égalité de deux matrices

Définition 3.3. Deux matrices $A = \left(a_{ij}\right)$ et $B = \left(b_{ij}\right)$ sont égales si elles ont même dimension et si les coefficients situés à la même place sont égaux : $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout i et j.

3.4 Addition de matrices

Définition 3.4. La *somme de deux matrices* $A = \left(a_{ij}\right)$ et $B = \left(b_{ij}\right)$ de même dimension est la matrice $C = \left(c_{ij}\right)$ telle que les coefficients de C sont la somme des coefficients de A et de B situés à la même place : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tout i et j.

Définition 3.5. La *multiplication par un réel k d'une matrice* $A = \left(a_{ij}\right)$ est la matrice notée kA obtenue en multipliant chaque coefficient de A par k : $kA = \left(ka_{ij}\right)$

Théorème 3.1. *Soient A, B et C trois matrices de même dimension et k et k′ deux réels. On a :*
1. $A + B = B + A$ *(on dit que l'addition des matrices est commutative) ;*
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(on dit que l'addition des matrices est associative) ;*
3. $k(A + B) = kA + kB$ *;*
4. $(k + k')A = kA + k'A$ *;*
5. $k(k'A) = (kk')A$.

Preuve. 1. $A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)$ et $B + A = \left(b_{ij} + a_{ij}\right) = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)$
2. $(A + B) + C = \left(a_{ij} + b_{ij}\right) + \left(c_{ij}\right) = \left(a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}\right)$ et $A + (B + C) = \left(a_{ij}\right) + \left(b_{ij} + c_{ij}\right) = \left(a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}\right)$

3. $k(A+B) = k\left(a_{ij}+b_{ij}\right) = \left(k(a_{ij}+b_{ij})\right) = \left(ka_{ij}+kb_{ij}\right)$ et $kA+kB = \left(ka_{ij}\right)+\left(kb_{ij}\right) = \left(ka_{ij}+kb_{ij}\right)$
4. $(k+k')A = (k+k')\left(a_{ij}\right) = \left((k+k')a_{ij}\right) = \left(ka_{ij}+k'a_{ij}\right)$ et $kA+k'A = \left(ka_{ij}\right)+\left(k'a_{ij}\right) = \left(ka_{ij}+k'a_{ij}\right)$
5. $k(k'A) = k\left(k'a_{ij}\right) = \left(kk'a_{ij}\right)$ et $(kk')A = \left(kk'a_{ij}\right)$

◇

3.4.1 Matrices opposées, différence de deux matrices

Définition 3.6. Deux matrices A et B sont dites opposées si elles sont de même dimension et si $A+B$ est la matrice nulle.

Propriété 3.2. *Toute matrice A a une matrice opposée : la matrice $(-1)\times A$. On la notera $-A$.*

Preuve. $A+(-1)\times A = \left(a_{ij}\right)+\left(-a_{ij}\right) = (0)$ ◇

Définition 3.7. Soient A et B deux matrices de même dimension. Alors la différence de A et B, notée $A-B$, est la matrice $A+(-B)$.

3.5 Multiplication de matrices

3.5.1 Multiplication d'une matrice ligne par une matrice colonne

Définition 3.8. Soient A une matrice ligne de dimension $1\times p$ et B une matrice colonne de dimension $p\times 1$, telles que $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$. Alors le produit $A\times B$ de ces deux matrices est la matrice C de dimension 1×1 telle que : $C = \left(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_pb_p\right) = \left(\sum_{i=1}^{p} a_i\times b_i\right)$.

3.5.2 Multiplication d'une matrice par une matrice colonne

Définition 3.9. Soient A une matrice ligne de dimension $n\times p$ et B une matrice colonne de dimension $p\times 1$, telles que $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$. Alors le produit $A\times B$ de ces deux matrices est la matrice C de dimension $n\times 1$ telle que la première ligne de C est le produit de la première ligne de A par B, la deuxième ligne de C est le produit de la deuxième ligne de A par B, et ainsi de suite jusqu'à la dernière ligne.

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_1+a_{12}b_2+\cdots+a_{1p}b_p \\ a_{21}b_1+a_{22}b_2+\cdots+a_{2p}b_p \\ \vdots \\ a_{n1}b_1+a_{n2}b_2+\cdots+a_{np}b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{p} a_{1i}\times b_i \\ \sum_{i=1}^{p} a_{2i}\times b_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{p} a_{ni}\times b_i \end{pmatrix}.$$

3.5.3 Multiplication de deux matrices

Définition 3.10. Soient A une matrice ligne de dimension $n \times p$ et B une matrice colonne de dimension $p \times m$, telles que $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pm} \end{pmatrix}$. Alors le produit $A \times B$ de ces deux matrices est la matrice C de dimension $n \times m$ telle que le premier coefficient de C est le produit de la première ligne de A par la première colonne de B, le deuxième coefficient de C est le produit de la première ligne de A par la deuxième colonne de B, et ainsi de suite.

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1p}b_{p1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1p}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{1m} + a_{12}b_{2m} + \cdots + a_{1p}b_{pm} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2p}b_{p1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2p}b_{p2} & \cdots & a_{21}b_{1m} + a_{22}b_{2m} + \cdots + a_{2p}b_{pm} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \cdots + a_{np}b_{p1} & a_{n1}b_{12} + a_{n2}b_{22} + \cdots + a_{np}b_{p2} & \cdots & a_{n1}b_{1m} + a_{n2}b_{2m} + \cdots + a_{np}b_{pm} \end{pmatrix}.$$

3.5.4 Propriétés de la multiplication des matrices

Théorème 3.3. *Soient A, B et C trois matrices telles que les opérations suivantes existent. Alors :*

1. *En général $A \times B \neq B \times A$ (on dit que la multiplication des matrices n'est pas commutative) ;*
2. *$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ (on dit que la multiplication des matrices est associative) ;*
3. *$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$*
4. *$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$*

On l'admettra.

Remarque. On notera $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots A}_{n \text{ fois}}$ quand ce produit est défini.

3.5.5 Inverse d'une matrice

Définition 3.11. Deux matrices carrées A et B sont dites inverses si $A \times B = B \times A = I$ où I est la matrice unité. On notera alors $B = A^{-1}$ (ou $A = B^{-1}$).

Remarque. Certaines matrices n'ont pas d'inverse. Celles qui en ont un sont dites *inversibles*.

3.6 Exercices

Exercice 3.1.

Lors d'un examen, on a relevé les notes de langues vivantes LV1, LV2 et LV3 pour plusieurs élèves. Ces notes ont été placées dans la matrice M :

$$M = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 14 & 16 & 18 & 17 \\ 10 & 13 & 14 & 14 & 15 & 15 \\ 18 & 19 & 13 & 12 & 13 & 16 \end{pmatrix}$$

1. Donner l'ordre de cette matrice.
2. Combien d'élèves ont passé ces épreuves ?
3. Quelle est la note obtenue en LV1 par l'élève 3 ?
4. Donner la valeur des éléments a_{11}, a_{23}, a_{33} et a_{36}.

Exercice 3.2.

Préciser le type de chacune des matrices suivantes et déterminer sa transposée :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;
- $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$;
- $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;
- $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- $E = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.3.

On pose $A = \begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles $A = B$.

Exercice 3.4.
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $4A - 2B$.

Exercice 3.5.
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

1. Calculer $M = 4A + \sqrt{2}B$.
2. Déterminer la matrice X telle que $X - A = \sqrt{2}B$.

Exercice 3.6.
Dans chacun des cas suivants, préciser si le produit $A \times B$ existe et, si oui, le calculer.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$
7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
10. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$
11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 3.7.
On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer BC, puis $A(BC)$.
   (b) Calculer AB puis $(AB)C$.
   (c) Que constate-t-on ?.
   (d) Que peut-on dire de $(BC)A$?
2. (a) Calculer $(B + C)$, puis $A \times (B + C)$.
   (b) Calculer AB et AC puis $AB + AC$.
   (c) Que constate-t-on ?.
   (d) Que peut-on dire de $(B + C) \times A$?

Exercice 3.8.
Une petite entreprise commercialise trois produits P_1, P_2 et P_3. À la fin d'une période de quatre semaines, les quantités vendues par semaine sont données par la matrice des quantités Q suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} 45 & 120 & 10 \\ 50 & 90 & 15 \\ 32 & 132 & 12 \\ 40 & 98 & 9 \end{pmatrix}$$

Durant la période de quatre semaines, le prix unitaire hors taxe du produit P_1 est de 2 €, pour le produit P_2 de 1 €et pour le produit P_3 de 3 €.

1. Écrire la matrice colonne P des prix unitaires, puis déterminer la matrice V des prix de vente hors taxe pour ces quatre semaines.
2. Calculer le montant TTC que l'entreprise a encaissé pour la vente du produit P_2 durant la période étudiée, avec un taux de TVA de 19,6% sur ces produits.

Exercice 3.9.
Démontrer que les matrices A et B suivantes sont inverses l'une de l'autre.

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3.10.
1. Trouver l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ n'admet pas d'inverse.

Exercice 3.11.
À l'aide de la calculatice, déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et, si oui, donner leur inverse :

- $A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\3&1&-3\\5&-3&3\end{pmatrix}$;
- $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&2\\2&-1&1\end{pmatrix}$.

Exercice 3.12.
1. Soit $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}$.
   Calculer :
   - $A\times B$;
   - $B\times A$;
   - A^2 ;
   - A^3 ;
   - B^2 ;
   - B^3.
2. Mêmes questions avec $A=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}c&0\\0&d\end{pmatrix}$.

Exercice 3.13.
On donne $A=\begin{pmatrix}1&5&-3&2\\3&-2&-1&-2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2&6\\3&-1\\4&5\\-2&7\end{pmatrix}$.

1. Donner les dimensions de A, de B, de $A\times B$, de $B\times A$.
2. Calculer $A\times B$. Que constate-t-on ?
3. B est-elle la matrice inverse de A ?

Exercice 3.14.
Soit $A=\begin{pmatrix}3&2&0\\-2&0&1\\0&-4&-3\end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 puis A^3.
2. En déduire A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 3.15.
Soit $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et A^4.
2. En déduire A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 3.16.
Soit $J=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ et I_3 la matrice unité.
Calculer $J-I_3$ puis $(J-I_3)^2$ puis $(J-I_3)^3$.

Exercice 3.17.
On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$.
Vérifier que $A^{-1}={}^{t}A$.

Exercice 3.18.
On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}-2&-1\\5&2\end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et A^4.
2. En déduire l'inverse de la matrice A.
3. On pose $B=A^2$. Déterminer l'inverse de B.

Exercice 3.19.
Soit $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ et I_3 la matrice unité.

1. Vérifier que A^3 est la matrice nulle.
2. Développer le produit matriciel : $(I_3-A)(I_3+A+A^2)$.
3. Déduire des résultats précédents la matrice inverse de $\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Exercice 3.20.
On considère les matrices : $A=\begin{pmatrix}2&0\\-2&1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}0&-1\\1&2\end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P^{-1}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}$ et que $A=P\times D\times P^{-1}$.
2. Calculer D^2, D^3 et D^4.
3. Expliquer pourquoi $A^2=P\times D^2\times P^{-1}$, $A^3=P\times D^3\times P^{-1}$ et $A^4=P\times D^4\times P^{-1}$

Exercice 3.21.

Dans une usine de métallurgie, on s'intéresse à la fabrication de pièces mécaniques toutes semblables.
Cette usine possède cinq ateliers A, B, C, D et E et dans chacun de ces ateliers, la production est faite à l'aide de quatre types de machine, plus ou moins vieilles, si bien que la production ne se fait ni au même rythme, ni au même coût.
Le tableau 3.1 de la présente page donne les paramètres de fabrication par machine (le temps, le nombre de pièces produites pendant ce temps et le coût de fabrication de ces pièces) et le tableau 3.2 donne le nombre de machines de chaque type dans les ateliers.

TABLE 3.1 – Paramètres de fabrication

machine	temps (en min)	nombre de pièces	coût (en €)
1	10	120	10
2	7	100	15
3	6	80	12
4	8	110	11

Exemple : en 10 min, la machine 1 fabrique 120 pièces pour un coût total de 10 €

TABLE 3.2 – Nombre de machines par atelier

machine	atelier				
	A	B	C	D	E
1	3	0	2	0	0
2	0	4	2	0	0
3	0	0	0	4	0
4	1	0	0	1	5

1. À l'aide du produit de deux matrices, donner la tableau des paramètres de fabrication de chaque atelier.
   Quel sera le nombre de pièces fabriquées par l'atelier C en 34 min de fonctionnement de ses quatre machines ? Et pour quel coût ?
2. Quel sera la coût total sur les cinq ateliers ?
   Quel nombre de pièces au total pourront etre fabriquées ?
   Quel sera le temps total de fonctionnement des 22 machines ?

Exercice 3.22 (Chaîne de MARKOV).

Une marque a une clientèle fidèle avec un produit A. Elle a lancé sur le marché un nouveau produit B. Après quelques mois de vente, une enquête auprès de sa clientèle détermine que **chaque mois** :

- 20 % des acheteurs du produit A abandonnent A pour choisir le produit B ;
- 10 % des consommateurs du produit B sont déçus et reviennent au produit A.

On étudie une population fixe de 24 000 consommateurs de cette marque, répartis le mois de l'enquête en 15 000 personnes consommant le produit A et 9 000 consommant le produit B.
On note a_n et b_n les nombres de consommateurs de A et de B au bout de n mois. On a donc $a_0 = 15000$ et $b_0 = 9000$.
On a toujours $a_n + b_n = 24000$. On veut évaluer l'évolution de la distribution des consommateurs entre les produits A et B à long terme.

1. *À l'aide de la calculatrice.*
   (a) Montrer que $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.
   On notera $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.
   (b) Exprimer $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ en donction de $\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix}$ et de M.
   (c) Calculer, à l'aide de la calculatrice, les puissances successives de M et la répartition des consommateurs correspondante, jusqu'à $n = 20$.
   (d) Quelle semble être la distribution à long terme des consommateurs entre les deux produits ?
2. *À l'aide d'un tableur.*
   (a) i. Entrer les éléments de la matrice M dans la plage A2 : B3.
   Entrer les valeurs de a_0 et b_0 dans la plage D2 : E2.
   ii. Pour déterminer le produit $\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix} \times M$:
   - sélectionner la plage D3 : E3
   - entrer dans la barre de formule « =PRODUITMAT(D2 : E2 ; A2 :B3) »
   - Valider en appuyant sur les touches « CTRL + MAJ + Entrée »

   Vous devez alors lire la valeur a_1 en D3 et b_1 en E3.
   (b) i. Numéroter les mois en entrant en colonne C les valeurs de n (0 en C2 ; 1 en C3 puis sélection des deux cases et copier / coller vers le bas jusqu'à la valeur $n = 30$).
   ii. Copier coller les cases D3 : E3 jusqu'aux cases correspondant à $n = 30$
   (c) i. La distribution obtenue confirme-t-elle les résultats obtenus à la calculatrice ?
   ii. Le directeur voudrait savoir comment aurait évolué cette distribution si celle de départ avait été différente.
   En observant la distribution à $n = 30$ après chaque modification, modifier les cases correspondant à a_0 et b_0 de la façon suivante :

- $a_0 = 20\,000$ et $b_0 = 4\,000$;
- $a_0 = 24\,000$ et $b_0 = 0$;
- $a_0 = 10\,000$ et $b_0 = 14\,000$;
- $a_0 = 5\,000$ et $b_0 = 19\,000$;
- $a_0 = 0$ et $b_0 = 24\,000$.

Répondre alors au directeur.

3. *Travail théorique.*
L'état stable $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ pour le marché de ces deux produits vérifie $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \times M = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ et $a + b = 24\,000$.
Résoudre le système correspondant et retrouver les valeurs observées dans les questions précédentes.