# Corrigé du devoir surveillé n°2

Exercice 2.1 (1,5 points).
Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

- $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+3}$
- $g(x) = \sqrt{4x^2+x+1}$
- $h(x) = (3x^2+1)^3$

- $f = \frac{1}{u}$ donc $f' = -\frac{u'}{u^2}$ donc $f'(x) = -\frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2}$ (0,5 point)
- $g = \sqrt{u}$ donc $g' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ donc $g'(x) = \frac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x+1}}$ (0,5 point)
- $h = u^3$ donc $h' = 3u'u^2$ donc $h'(x) = 3(6x)(3x^2+1)^2$ (0,5 point)

Exercice 2.2 (6 points).

1. Sans justifier :
   (a) Déterminer graphiquement $f(-3)$, $f'(-3)$, $f(-1)$ et $f'(-1)$.
   - $f(-3) = 1$ (0,25 point)
   - $f'(-3)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse $-3$, c'est-à-dire de la droite $(D)$, donc $f'(-3) = 2$ (0,25 point)
   - $f(-1) = 3$ (0,25 point)
   - $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse $-1$, c'est-à-dire de la droite $(D')$, donc $f'(-1) = 0$ (0,25 point)

   (b) Déterminer graphiquement les signes de $f(x)$ et de $f'(x)$ selon les valeurs de $x$.

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | |

   (0,5 × 2 point)

2. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \big(f(x)\big)^2$.
   (a) Déterminer les variations de $g$.

   $g = f^2$ donc $g' = 2f'f$ donc :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $g'(x) = 2f'(x)f(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $g$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

   ($g'$ : 0,25 point ; signe de $g'(x)$ : 0,25 point ; variations de $g$ : 0,25 point)

   (b) Déterminer les limites de $g$ aux bornes de son ensemble de définition.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty\end{array}\right\} \text{donc, par composition, } \lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0\end{array}\right\} \text{donc, par composition, } \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

   (0,5 × 2 point)

   (c) Calculer $g'(-3)$.

   $g'(-3) = 2f'(-3)f(3) = 2\times2\times1 = 4$ (0,25 point)

3. Soit $h$ la fonction définie sur l'intervalle $]\alpha\,; +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
   (a) Déterminer les variations de $h$.

$h = \frac{1}{f}$ donc $h' = -\frac{f'}{f^2}$. $f^2 > 0$ donc $h'(x)$ est du signe de $-f'(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

($h'$ : 0,25 point ; signe de $h'(x)$ : 0,25 point ; variations de $h$ : 0,25 point)

(b) Déterminer les limites de $h$ aux bornes de son ensemble de définition.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\x>\alpha}} f(x) = 0^+\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty\end{array}\right\}\text{ donc, par composition, }\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\x>\alpha}} h(x) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^+\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty\end{array}\right\}\text{ donc, par composition, }\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

($0,5\times 2$ point)

(c) Calculer $h'(-3)$.

$h'(-3) = -\frac{f'(-3)}{(f(-3))^2} = -\frac{2}{1} = -2$ (0,25 point)

Exercice 2.3 (8,5 points).

**Partie A.**

Soit $g$ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^3 - 1200x - 100$.

1. Déterminer la limite de $g$ en $+\infty$. Étudier le sens de variation de $g$ et dresser son tableau de variation.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ (0,25 point)
- $g'(x) = 3x^2 - 1200$.
  $g'(x) = 3x^2 + 0x - 1200$ donc trinôme positif sauf entre les racines.
  Deux méthodes pour trouver les racines :
  (a) $\Delta = 14400$, $x_1 = -20$, $x_2 = -20$.
  (b) $g'(x) = 3x^2 - 1200 = 3(x^2 - 400) = 3(x-20)(x+20)$ donc les racines sont $-20$ et $20$
  D'où le signe de $g'(x)$ (0,5 point)
-

| $x$ | $0$ | | $20$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g$ | $-100$ | $\searrow$ | $-16100$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

(0,25 point)

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $[20\,;40]$.
   Donner, en justifiant, une valeur approchée de $\alpha$ à l'unité près.

- $g$ est une fonction polynôme donc continue sur son ensemble de définition et donc sur $[20\,;40]$ (0,25 point)
  $g$ est strictement croissante sur $[20\,;40]$ (0,25 point)
  $g(20) = -16100 < 0$ et $g(40) = 15900 > 0$ (0,5 point)
  Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [20\,;40]$ (0,5 point).
- D'après la calculatrice :

| $x$ | 34,6 | 34,7 |
|---|---|---|
| $g(x)$ | 198,2 | 41,9 |

Donc $\alpha \approx 35$ (0,5 point)

3. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de $x$.

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

(0,25 point)

**Partie B.**
Soit $f$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x+50+\frac{1200x+50}{x^2}$. La courbe $\mathscr{C}$, représentative de $f$, est donnée sur la figure 2.1 page 35.

1. Déterminer par le calcul la limite de $f$ en 0 et en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}(1200x+50)=50\\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}x^2=0^+\end{array}\right\}\Rightarrow \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{1200x+50}{x^2}=+\infty \text{ (par quotient)}\\ \displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}(x+50)=50\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}f(x)=+\infty \text{ (par somme) (0,75 point)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x+50)=+\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1200x+50}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1200x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1200}{x}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty \text{ (par somme) (0,75 point)}$$

2. Montrer que, pour tout $x$ de $]0\,;+\infty[$, on a $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$ où $g$ est la fonction définie dans la partie A.

Deux méthodes possibles (0,5 point) :

(a) $f(x)=x+50+\frac{1200x+50}{x^2}$ donc

$$\begin{aligned}f'(x)&=1+\frac{(1200)(x^2)-(1200x+50)(2x)}{(x^2)^2}=1+\frac{1200x^2-2400x^2-100x}{x^4}=1+\frac{-1200x^2-100x}{x^4}\\&=\frac{x^4}{x^4}+\frac{-1200x^2-100x}{x^4}=\frac{x^4-1200x^2-100x}{x^4}=\frac{x(x^3-1200x-100)}{x\times x^3}\\&=\frac{x^3-1200x-100}{x^3}=\frac{g(x)}{x^3}\end{aligned}$$

(b) $f(x)=x+50+\frac{1200x+50}{x^2}=\frac{(x+50)x^2}{x^2}+\frac{1200x+50}{x^2}=\frac{x^3+50x^2+1200x+50}{x^2}$ donc

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{(3x^2+100x+1200)(x^2)-(x^3+50x^2+1200x+50)(2x)}{(x^2)^2}\\&=\frac{3x^4+100x^3+1200x^2-2x^4-100x^3-2400x^2-100x}{x^4}\\&=\frac{x^4-1200x^2-100x}{x^4}=\frac{x(x^3-1200x-100)}{x\times x^3}=\frac{x^3-1200x-100}{x^3}=\frac{g(x)}{x^3}\end{aligned}$$

3. Étudier les variations de $f$.

Comme $x\in]0\,;+\infty[$, $x^3>0$ donc $f'(x)$ sera du signe de $g(x)$, obtenu dans la partie A, donc :

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

(0,5 point)

4. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=x+50$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ puis tracer $\mathscr{D}$ dans le repère de la figure 2.1 page 41.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+50)] = \lim_{x\to+\infty}\left[x+50+\frac{1200x+50}{x^2}-(x+50)\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1200x+50}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1200x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1200}{x} = 0$$

Donc la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x+50$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$ (0,75 point).
Tracé : voir la figure 2.1 page suivante (0,25 point).

5. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 130$.

$f(x) = 130 \Leftrightarrow x = 20$ ou $x = 60$ (0,5 point)

**Partie C.**
Pour $x$ centaines d'unités d'un produit, où $x \in ]0\,;\,100[$, $f(x)$ de la partie B donne le coût moyen de fabrication du produit, exprimé en centaines d'euros.

1. Déterminer la quantité d'objets, à la centaine près, à fabriquer pour avoir un coût moyen minimum.

D'après le tableau de variations de la fonction $f$, $f(x)$ est minimum pour $x = \alpha \approx 35$.
Il faut donc fabriquer 35 centaines d'objets, c'est-à-dire 3 500 pour avoir un coût moyen minimum. (0,5 point)

2. On suppose que le prix de vente d'une centaine d'objets est égal à 13 000 euros.
Déterminer graphiquement, à la centaine près, le nombre minimum et le nombre maximum d'objets que l'entreprise doit fabriquer pour être rentable.

Il faut que le coût moyen de fabrication soit inférieur ou égal au prix de vente pour que l'entreprise soit rentable. On cherche donc $x$ tel que $f(x) \leqslant 130$ centaines d'euros. Il faut donc que $x \in [20\,;\,60]$, c'est-à-dire qu'il faut fabriquer entre 20 centaines et 60 centaines d'objets, soit entre 2 000 et 6 000 objets. (0,5 point)

Exercice 2.4 (4 points).
Voici le plan d'un musée : les parties grisées matérialisent les portes et les visiteurs partent de l'accueil, visitent le musée et doivent terminer leur visite à la boutique.

1. Est-il possible de trouver un circuit où les visiteurs passent une fois et une seule par toutes les portes ?

Les visiteurs entrant par la porte extérieure de l'accueil et sortant par celle de la boutique, ces portes seront forcément franchies. Reste à savoir s'il existe un circuit parcourant les autres portes une seule fois.
En construisant le graphe où les sommets sont les pièces et les arêtes les portes les reliant, le problème revient à savoir si tous les arêtes peuvent être parcourue une seule fois, c'est-à-dire si le graphe est eulérien.
Or dans ce graphe 4 sommets sont impairs : l'accueil, la boutique, les pièces B et E. Il n'est donc pas eulérien.
Un circuit passant une fois et une seule par toutes les portes est donc impossible. (3 points).

2. Si oui, donner un tel circuit ; si non proposer une modification simple du musée permettant un tel circuit.

Il faut transformer le graphe de façon à ce qu'il ait au maximum deux sommets impairs et, de plus, que ces sommets impairs éventuels soient l'accueil et la boutique car une chaîne eulérienne débute et finit aux sommets impairs du graphe.
La transformation la plus simple est d'ajouter une arête entre les sommets B et E, qui deviendront alors pairs, ce qui revient à créer une porte entre les pièces B et E, ce qui est physiquement possible (voir le schéma). (1 point)

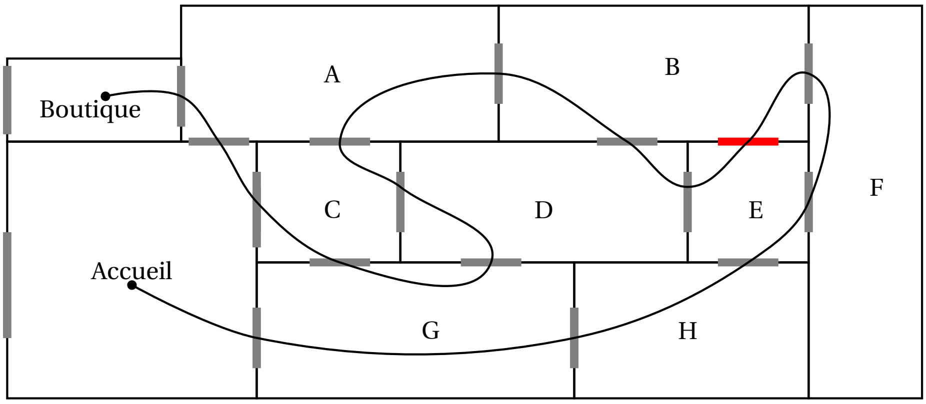

FIGURE 2.1 – Figure de l'exercice 2.3