Devoir surveillé n°2 – TES2

Fonctions composées – Limites

Exercice 2.1 (4,5 points).

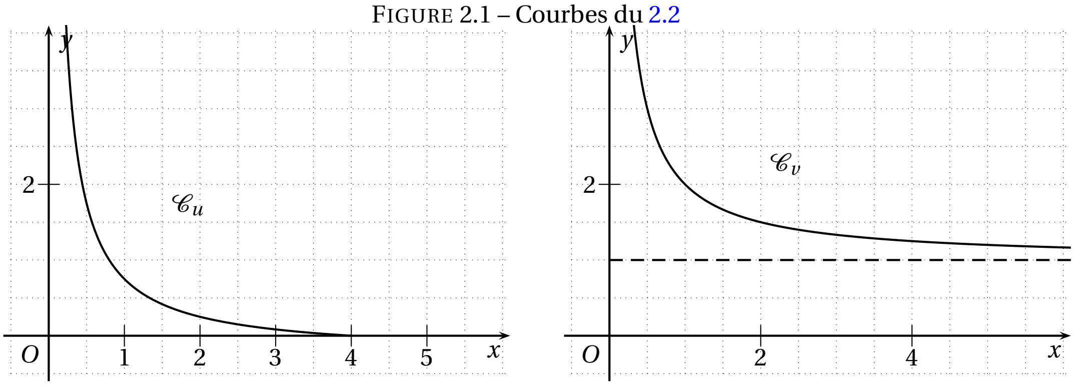
Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

- $f(x) = \sqrt{3x^2+1}$
- $g(x) = (x^2+2x+3)^3$
- $h(x) = \dfrac{1}{4x^2+x+1}$

Exercice 2.2 (4,5 points).

Les courbes $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_v$ de la figure 2.1 de la présente page représentent respectivement la fonction u définie sur $]0;4]$ et une fonction v définie sur $]0;+\infty[$.

FIGURE 2.1 – Courbes du 2.2



L'axe des ordonnées est une asymptote pour chacune des courbes.

On considère la fonction qui, pour tout $x \in]0;4[$, associe $f(x) = v(u(x))$.

1. Compléter :

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} u(x) = \ldots\ldots \\ \displaystyle\lim_{x\to \ldots\ldots} v(x) = \ldots\ldots\end{array}\right\} \text{donc, par } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \lim_{x\to\ldots\ldots} f(x) = \ldots\ldots$$

2. Compléter :

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{\substack{x\to 4\\ x<4}} u(x) = \ldots\ldots \\ \displaystyle\lim_{x\to \ldots\ldots} v(x) = \ldots\ldots\end{array}\right\} \text{donc, par } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \lim_{x\to\ldots\ldots} f(x) = \ldots\ldots$$

3. En déduire d'éventuelles asymptotes à la courbe de f dont on précisera l'équation.

Exercice 2.3 (6 points).

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3+3x+3$.

1. (a) Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   (b) Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe selon les valeurs de x.
   (c) Dresser le tableau des variations de f en y faisant apparaître les limites aux bornes et les valeurs des extremums locaux.
2. (a) Calculer $f(2)$ et $f(3)$.
   (b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à $[2;3]$.
   (c) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1}.
   (d) En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Exercice 2.4 (5 points).

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$$

1. Montrer que, pour $x \in]1;+\infty[$, $f(x) = x-1+\frac{1}{x-1}$.
2. Étudier les limites de $f(x)$ aux bornes de son ensemble de définition. En déduire des éventuelles asymptotes.
3. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x-1$ est une asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.
4. On donne $f'(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$ pour $x \in]1;+\infty[$.
   (a) Étudier son signe selon les valeurs de x.
   (b) Dresser le tableau des variations de f en y faisant apparaître les limites aux bornes et les extremums locaux.