# Devoir surveillé n°2 – TES1

## Fonctions composées – Limites – Graphes

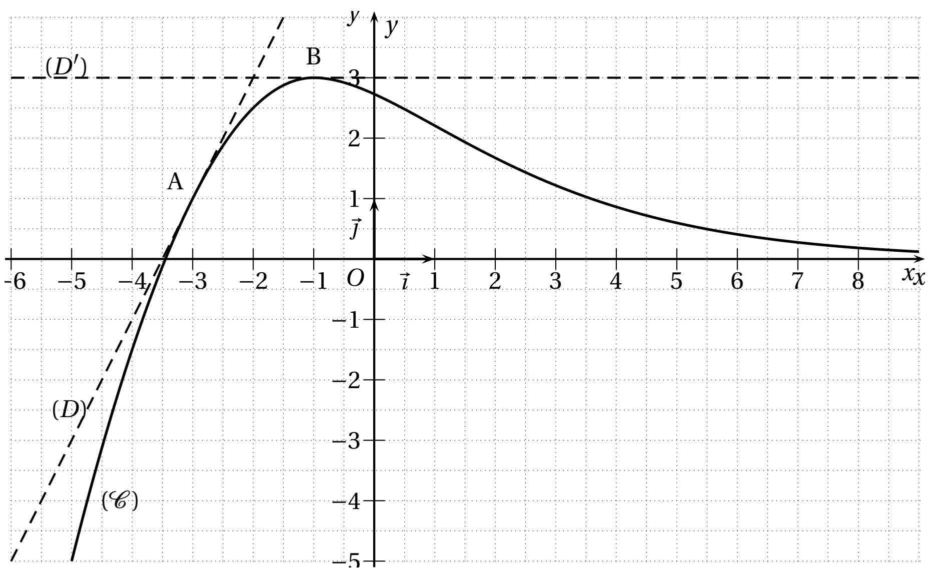
Exercice 2.1 (1,5 points).
Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

- $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+3}$
- $g(x) = \sqrt{4x^2+x+1}$
- $h(x) = (3x^2+1)^3$

Exercice 2.2 (6 points).
Soit une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. On donne son tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ $0$ |

La courbe $(\mathscr{C})$ donnée ci-après représente la fonction $f$ dans un repère orthonormal du plan. Cette courbe passe par les points A$(-3\,;1)$ et B$(-1\,;3)$ et son intersection avec l'axe des abscisses a pour abscisse $\alpha$. Les droites $(D)$ et $(D')$ sont les tangentes à la courbe respectivement en A et en B.




1. Sans justifier :
   (a) Déterminer graphiquement $f(-3)$, $f'(-3)$, $f(-1)$ et $f'(-1)$.
   (b) Déterminer graphiquement les signes de $f(x)$ et de $f'(x)$ selon les valeurs de $x$.
   *On pourra résumer ces résultats dans un unique tableau.*
2. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \big(f(x)\big)^2$.
   On admet que $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Déterminer les variations de $g$.
   (b) Déterminer les limites de $g$ aux bornes de son ensemble de définition. *On justifiera les résultats.*
   (c) Calculer $g'(-3)$.
3. Soit $h$ la fonction définie sur l'intervalle $]\alpha\,;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
   On admet que $h$ est dérivable sur l'intervalle $]\alpha\,;+\infty[$.
   (a) Déterminer les variations de $h$.
   (b) Déterminer les limites de $h$ aux bornes de son ensemble de définition. *On justifiera les résultats.*
   (c) Calculer $h'(-3)$.

Exercice 2.3 (8,5 points).

**Partie A.**

Soit $g$ la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x^3 - 1\,200x - 100$.

1. Déterminer la limite de $g$ en $+\infty$. Étudier le sens de variation de $g$ et dresser son tableau de variation.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans l'intervalle $[20\,;\,40]$.
   Donner, en justifiant, une valeur approchée de $\alpha$ à l'unité près.
3. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de $x$.

**Partie B.**

Soit $f$ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x + 50 + \frac{1200x+50}{x^2}$. La courbe $\mathscr{C}$, représentative de $f$, est donnée sur la figure 2.1 page suivante.

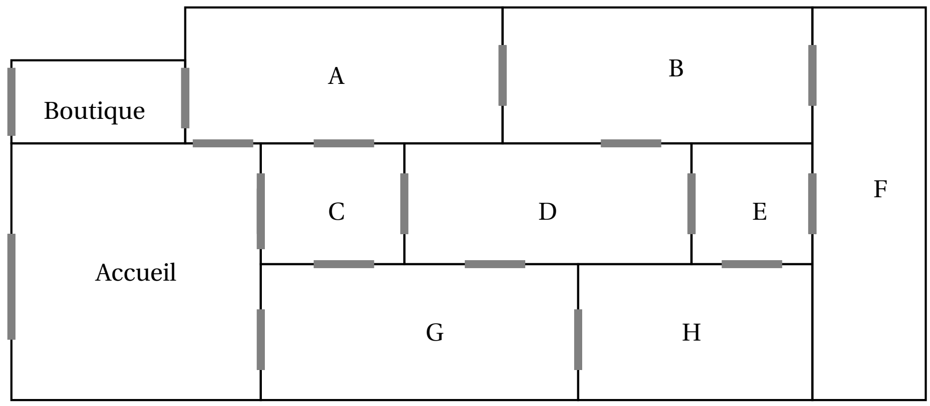
1. Déterminer par le calcul la limite de $f$ en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que, pour tout $x$ de $]0\,;\,+\infty[$, on a $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ où $g$ est la fonction définie dans la partie A.
3. Étudier les variations de $f$.
4. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x+50$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ puis tracer $\mathscr{D}$ dans le repère de la figure 2.1 page ci-contre.
5. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 130$. *On donnera les valeurs approchées des solutions à l'unité près.*

**Partie C.**

Pour $x$ centaines d'unités d'un produit, où $x \in ]0\,;\,100[$, $f(x)$ de la partie B donne le coût moyen de fabrication du produit, exprimé en centaines d'euros.

1. Déterminer la quantité d'objets, à la centaine près, à fabriquer pour avoir un coût moyen minimum.
2. On suppose que le prix de vente d'une centaine d'objets est égal à 13 000 euros.
   Déterminer graphiquement, à la centaine près, le nombre minimum et le nombre maximum d'objets que l'entreprise doit fabriquer pour être rentable.

Exercice 2.4 (4 points).




Voici le plan d'un musée : les parties grisées matérialisent les portes et les visiteurs partent de l'accueil, visitent le musée et doivent terminer leur visite à la boutique.

1. Est-il possible de trouver un circuit où les visiteurs passent une fois et une seule par toutes les portes ? *On justifiera très rigoureusement.*
2. Si oui, donner un tel circuit ; si non proposer une modification simple du musée permettant un tel circuit.

FIGURE 2.1 – Figure de l'exercice 2.3