

Devoir surveillé n°1

Généralités sur les fonctions – Dérivation – Graphes

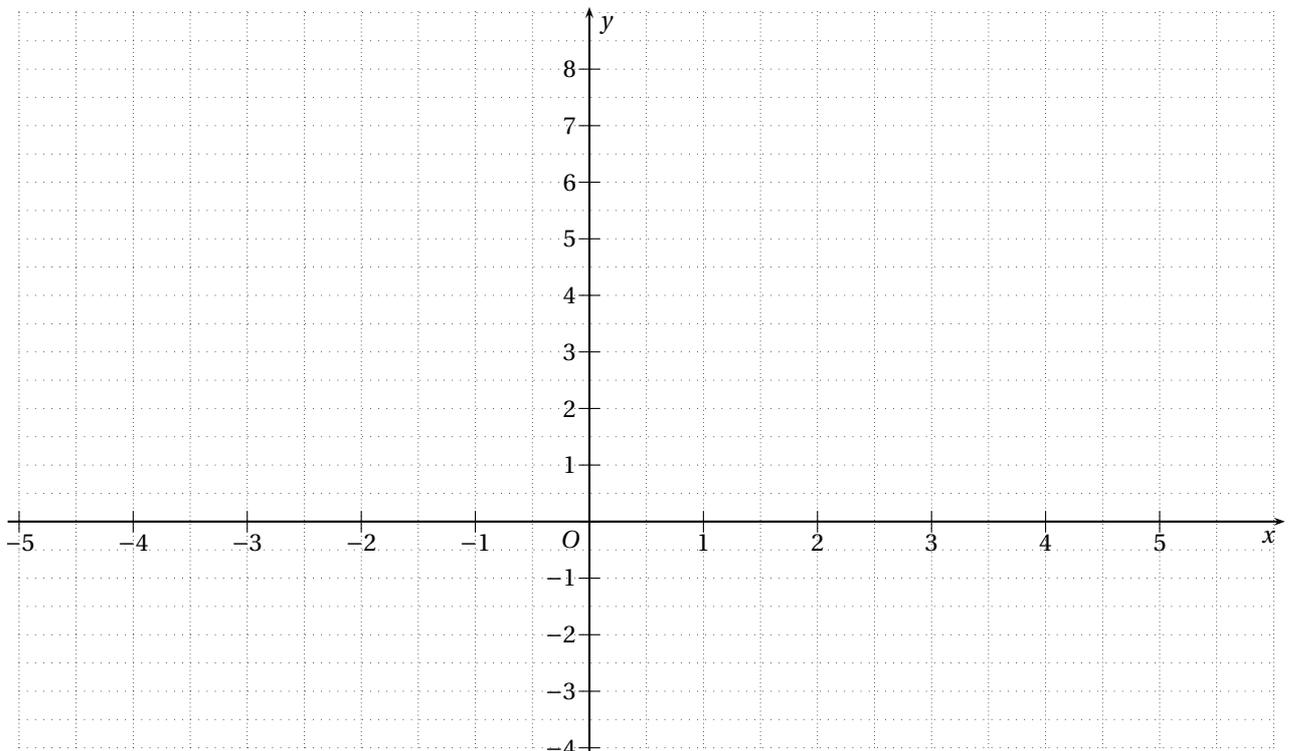
Exercice 1.1 (4 points).

La fonction f est définie sur $[-4; 5]$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } -4 \leq x < 1 \\ mx + 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$

On appelle \mathcal{C}_m sa représentation graphique.

1. Dans le repère de la figure 1.1 de la présente page tracer en bleu \mathcal{C}_{-1} , la représentation graphique de f pour $m = -1$.
2. Donner, sans justifier, les intervalles sur lesquels la fonction f est continue.
3. Déterminer m pour que f soit continue sur $[-4; 5]$. Tracer alors sa représentation en rouge dans le même repère.

FIGURE 1.1 – Repère de l'exercice 1.1



Exercice 1.2 (6 points).

Pour les élèves **ne suivant pas** l'enseignement de spécialité.

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-2; 5]$, décroissante sur chacun des intervalles $[-2; 0]$ et $[2; 5]$ et croissante sur l'intervalle $[0; 2]$.

On note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[-2; 5]$.

La courbe Γ représentative de la fonction f est tracée sur la figure 1.2 page 23 dans le plan muni d'un repère orthogonal. Elle passe par les points $A(-2; 9)$, $B(0; 4)$, $C(1; 4,5)$, $D(2; 5)$ et $E(4; 0)$.

En chacun des points B et D la tangente à la courbe Γ est parallèle à l'axe des abscisses.

On note F le point de coordonnées $(3; 6)$.

La droite (CF) est la tangente à la courbe Γ au point C .

1. À l'aide des informations précédentes et de la figure, préciser sans justifier :
 - (a) les valeurs de $f(0)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
 - (b) le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[-2; 5]$.
 - (c) le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x de l'intervalle $[-2; 5]$.
2. Parmi les trois représentations graphiques 1.3 page 23, une représente la fonction dérivée f' de f et une autre représente une fonction h telle que $h' = f$ sur $[-2; 5]$. Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction h . Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix

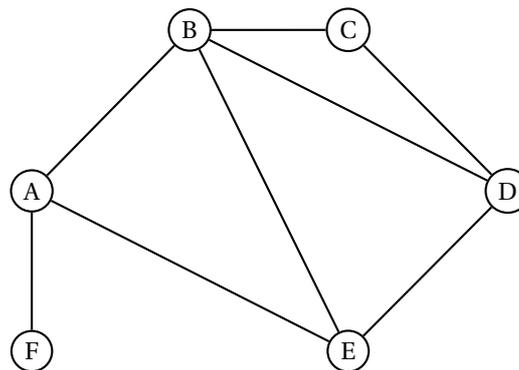
Exercice 1.2 (6 points).

Pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité.

Les questions sont indépendantes.

1. La figure ci-contre propose un graphe.

- Citer deux sommets adjacents (*justifier brièvement*).
- Ce graphe est-il connexe (*justifier brièvement*) ?
- Ce graphe contient-il un sous-graphe d'ordre 3 qui soit complet ? Et d'ordre 4 ? *Si oui le(les) citer.*
- Ce graphe contient-il un sous-graphe stable d'ordre 3 ? *Si oui le citer.*
- Déterminer graphiquement la distance entre chacun des sommets (*on pourra faire un tableau*).
- Déterminer le diamètre de ce graphe.



2. Est-il possible que dans un groupe de six personnes (*on justifiera chaque réponse*) :

- deux d'entre elles aient 5 amis, une d'entre elle ait 4 amis, deux d'entre elles aient 3 amis et la dernière ait 2 amis ?
- quatre d'entre elles aient 3 amis, une d'entre elles 2 amis et la dernière 1 ami ?
- quatre d'entre elles aient 2 amis, une d'entre elles 4 amis et la dernière 6 amis ?

3. Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Montrer que dans un graphe simple (sans boucle et sans arête parallèle) deux sommets ont toujours le même degré.

Exercice 1.3 (3 points).

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur \mathbb{R}^* et \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = x^2 + 2$ et soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = f(g(x))$.

- Déterminer $h(0)$, $h(1)$ et $h(-2)$.
- Déterminer l'expression de $h(x)$ en fonction de x .
- Déterminer l'expression de l définie sur \mathbb{R}^* par $l(x) = g(f(x))$. A-t-on $l = h$?

Exercice 1.4 (7 points).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par : $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$

On appelle f' sa fonction dérivée et \mathcal{C} sa représentation graphique.

- Montrer que, pour tout $x \neq 3$, $f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}$.
 - Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x .
 - Dresser le tableau des variations de f en indiquant les extremums locaux.
- Déterminer, s'il y en a, les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C} avec les axes de coordonnées.
- Déterminer, s'il y en a :
 - les abscisses des points de \mathcal{C} où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses ;
 - une équation de T_0 , la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 0.
- Dans le repère de la figure 1.4 page 24 :
 - placer les points de \mathcal{C} correspondant aux extremums locaux ;
 - placer les éventuelles intersections de \mathcal{C} avec les axes de coordonnées ;
 - tracer les tangentes de la question 3 ;
 - tracer la courbe \mathcal{C}

Annexes

FIGURE 1.2 – Repère de l'exercice 1.2

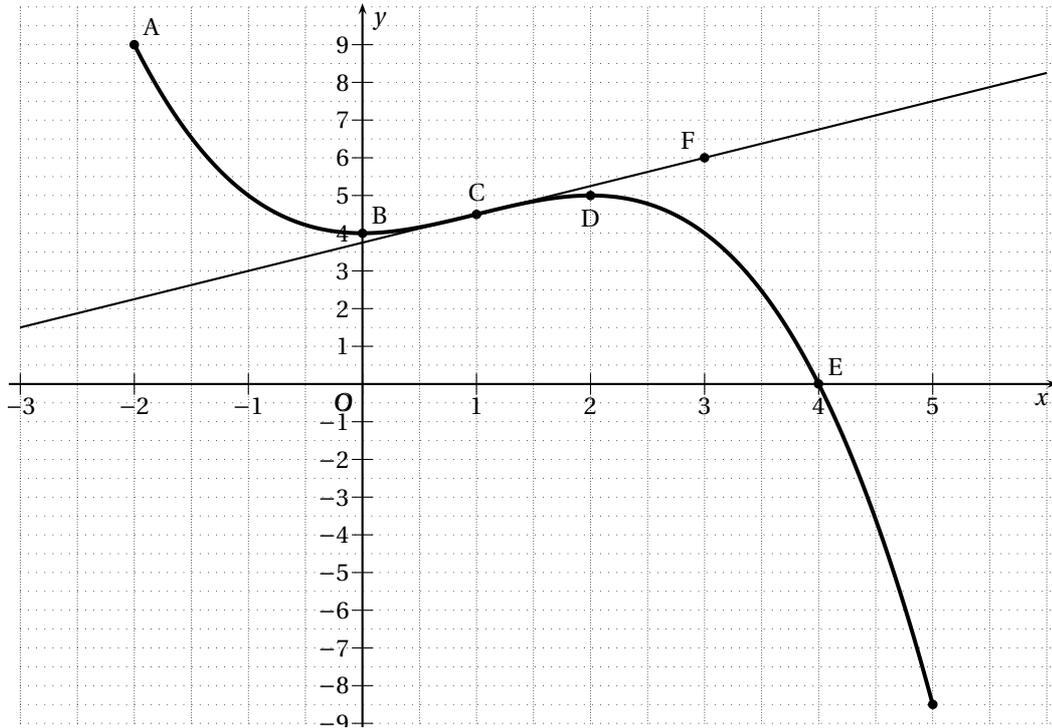


FIGURE 1.3 – Les trois courbes possibles de l'exercice 1.2

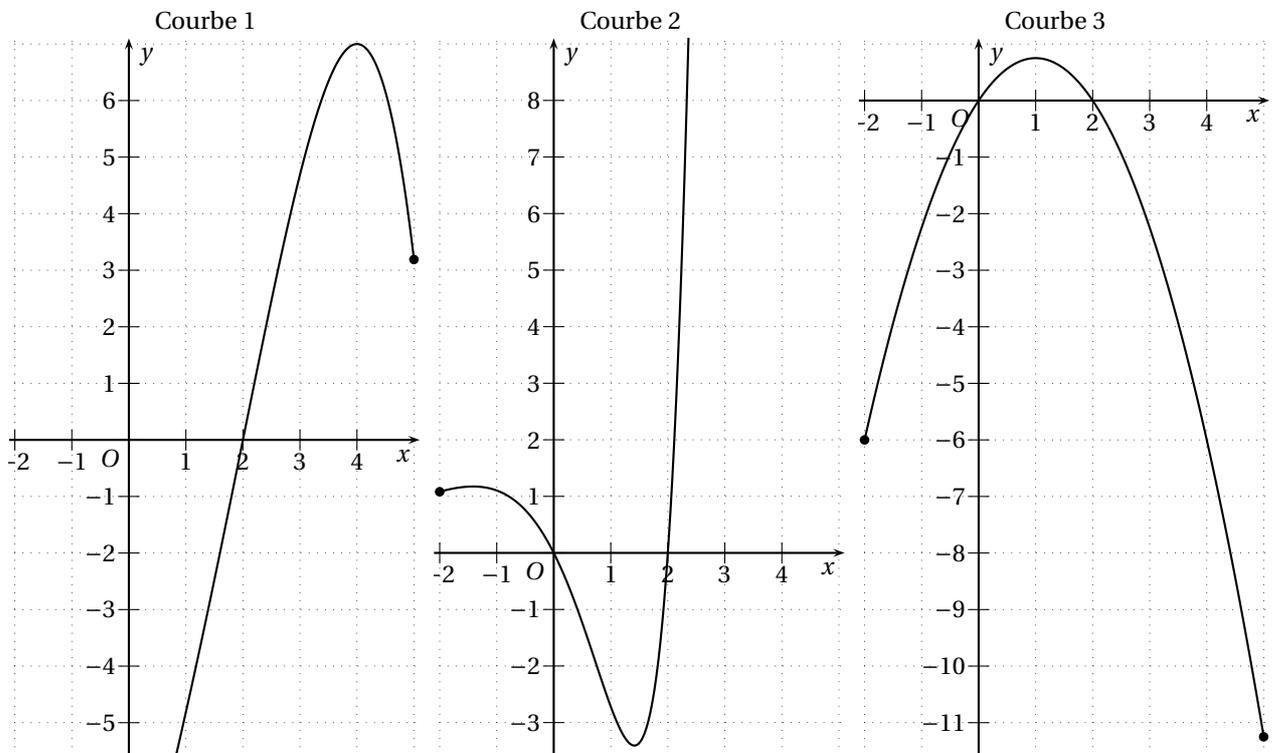


FIGURE 1.4 – Figure de l'exercice 1.4

