Chapitre 2

Vecteurs de l'espace

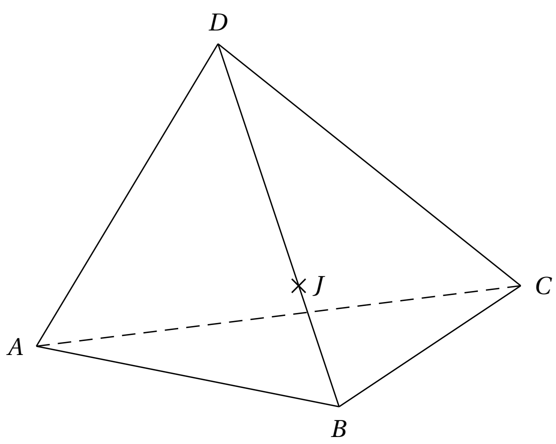
Sommaire

2.1 Activités

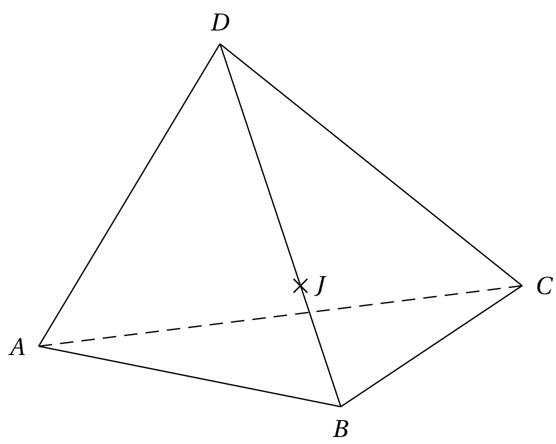
Il s'agit dans les deux premières activités de déterminer quelles peuvent être les intersections d'un *plan* et d'un solide usuel.[1] Plus précisément, on s'attachera à déterminer l'intersection du plan avec chacune des faces, l'ensemble formant une figure plane, puisqu'incluse dans le plan, qu'on appellera parfois la *trace* du plan sur le solide. Il s'agit avant tout de développer un *savoir-faire*, aucune notion ou propriété nouvelle n'étant au programme.

Activité 2.1 (Sections planes d'un tétraèdre).
Dans chacun des cas ci-dessous, placer les points I et K, puis, à l'aide des propriétés de géométrie dans l'espace vues en Seconde, construire sur le dessin en perspective la trace du plan (IJK) sur le tétraèdre $ABCD$. On donne $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

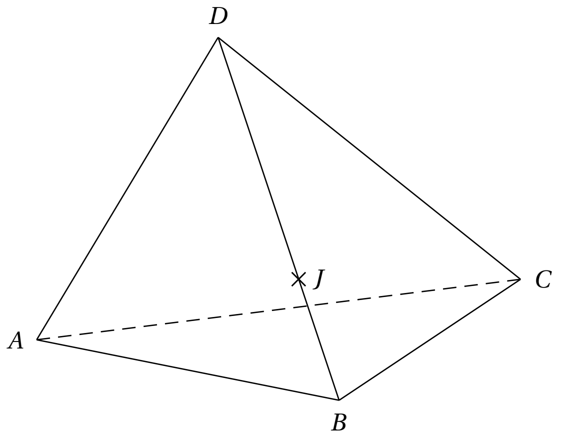


$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

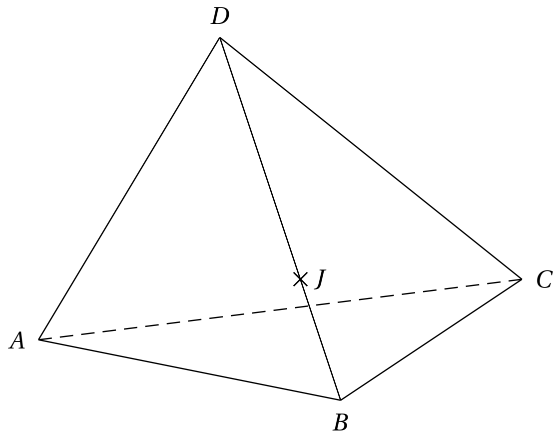


1. Conformément au programme, on se limitera aux cubes et aux tétraèdres.

$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et K centre de gravité de ABC



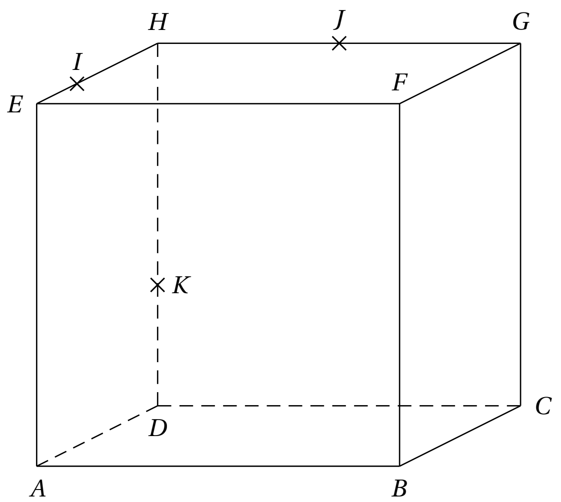
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$



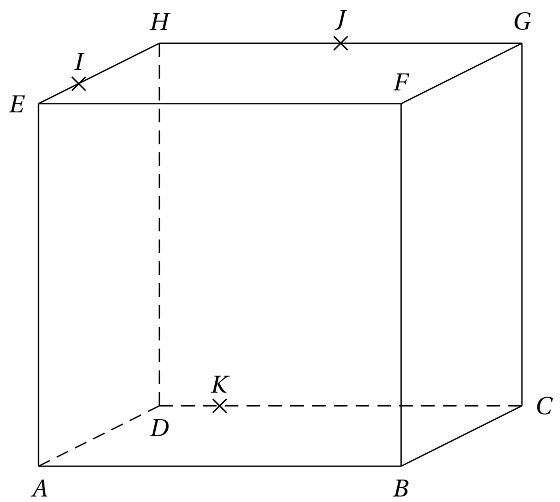
Activité 2.2 (Sections planes d'un cube).

Dans chacun des cas suivants ci-dessous, à l'aide des propriétés de géométrie dans l'espace vues en Seconde, construire sur le dessin en perspective la trace du plan (IJK) sur le cube $ABCDEFGH$. On donne : $AB = 6$ cm ; $EI = 2$ cm ; J milieu de $[HG]$.

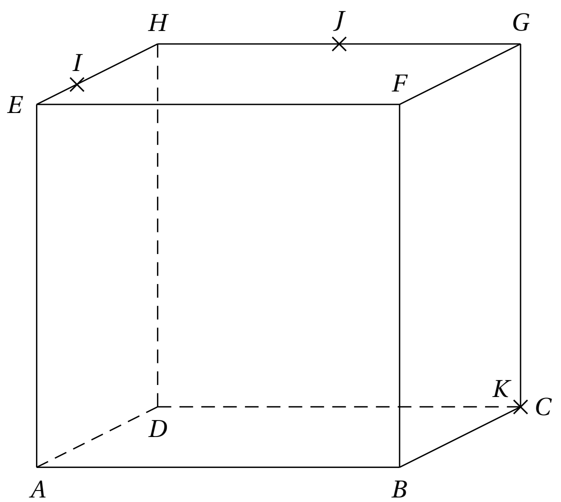
$DK = 2$ cm



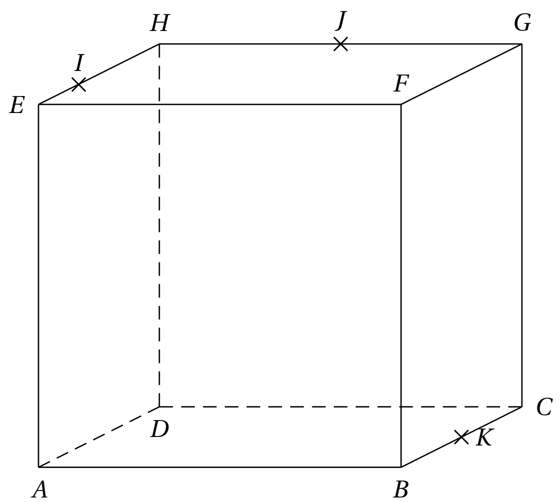
$KD = 1$ cm



$K = C$



K milieu de $[BC]$



Activité 2.3 (Vecteurs égaux).
$ABCDEFGH$ est un cube représenté sur la figure 2.1 de la présente page. Les points P et Q sont tels que : $\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{EC}$.

1. (a) Construire le point P.
   (b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{EP}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{EH}$.
2. Construire le point Q et expliquer pourquoi les vecteurs $\overrightarrow{BQ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
3. (a) Expliquer pourquoi $\overrightarrow{HP} = \overrightarrow{CQ}$.
   (b) Quelle est la nature du quadrilatère $HPQC$?

Activité 2.4.
$ABCD$ est un tétraèdre représenté sur la figure 2.2 de la présente page. I, J, K et L sont les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.

1. (a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IL}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BD}$.
   (b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{JK}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BD}$.
   (c) Que peut-on en conclure pour les points I, J, K et L ?
2. (a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.
   (b) Que peut-on alors dire de ces trois vecteurs ?

FIGURE 2.1 – Figure de l'activité 2.3

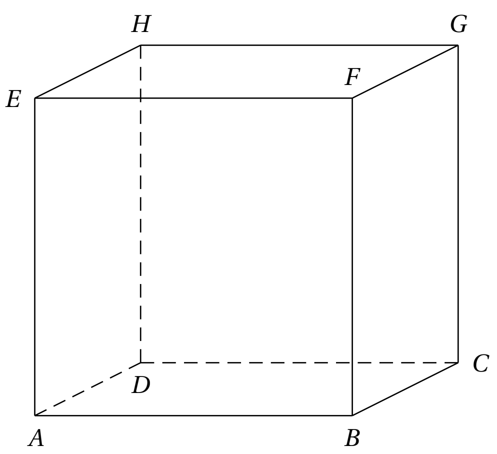
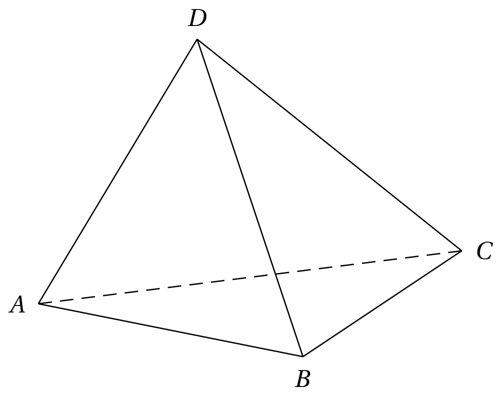


FIGURE 2.2 – Figure de l'activité 2.4



2.2 Vecteurs de l'espace

2.2.1 Généralisation à l'espace

Les définitions et propriétés concernant les vecteurs vues en Seconde dans le plan s'étendent naturellement à l'espace.

Il en va ainsi :
- de la définition d'un vecteur (direction, sens, norme) ;
- de la somme de deux vecteurs ;
- du produit d'un vecteur par un réel ;
- de la colinéarité de deux vecteurs ;
- de l'orthogonalité de deux vecteurs.

La seule nouveautée concerne la coplanarité de vecteurs.

2.2.2 Vecteurs coplanaires

Définition 2.1 (Coplanarité de vecteurs)**.** Des vecteurs de l'espace sont dits coplanaires si l'on peut trouver des représentants de ces vecteurs tels que leurs origines et leurs extrémités sont coplanaires.

Deux vecteurs sont toujours coplanaires puisqu'en prenant des représentants de ces vecteurs ayant la même origine on obtient trois points et trois points sont forcément coplanaires. La question ne se pose que lorsqu'il y a trois vecteurs (ou plus) et dans ce cas on a la propriété suivante :

Propriété 2.1 (Admise)**.** *Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Ces trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si il existe un couple $(\alpha;\beta)$ tel que $\vec{u}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}$ (ou bien $\vec{v}=\alpha\vec{w}+\beta\vec{u}$, ou bien $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$).*

On a les conséquences suivantes à la coplanarité de trois vecteurs :

Propriété 2.2. *Soit A, B, C, D, E et F des points distincts de l'espace tels que A, B et C non alignés.*
- *Il existe $(a;b)$ tels que $\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$ si et seulement si A, B, C et D sont coplanaires.*
- *Il existe $(a;b)$ tels que $\overrightarrow{EF}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$ si et seulement si la droite (EF) est parallèle au plan (ABC)*

Preuve.
- Le premier point découle de la définition des vecteurs coplanaires.
- $(EF)\parallel(ABC)\Leftrightarrow$ il existe une droite parallèle à (EF) contenu dans le plan $(ABC)\Leftrightarrow\overrightarrow{EF}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$.

◊

2.3 Repérage dans l'espace

De la même façon qu'on a défini un repère pour le plan, on définit un repère dans l'espace de la façon suivante :

Définition 2.2. Un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ est un repère de l'espace si les points O, I, J et K tels que $\overrightarrow{OI}=\vec{\imath}$, $\overrightarrow{OJ}=\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$ ne sont pas coplanaires.
O est appelé *origine du repère* et $\left(\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)$ est appelée la *base du repère.*
Si les droites (OI), (OJ) et (OK) sont perpendiculaires, le repère est dit *orthogonal.*
Si le repère est orthogonal et que $\|\vec{\imath}\|=\|\vec{\jmath}\|=\|\vec{k}\|=1$, le repère est dit *orthonormal* (ou orthonormé).

Propriété 2.3 (Définition, existence et unicité des coordonnées de vecteurs et de points)**.** *Le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.*
- *Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet $(x;y;z)$ tel que $\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$.*
- *Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x;y;z)$ tel que $\overrightarrow{OM}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$.*

On notera indifférement $\vec{u}\,(x;y;z)$, ou $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et, parfois, abusivement, $\vec{u}=(x;y;z)$, ou $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

On notera $M(x;y;z)$.

La notation en colonne, pratique pour les calculs, est en général réservée aux vecteurs, puisqu'on ne peut additionner des points.

Remarque. Par définition les coordonnées de M et de $\overrightarrow{OM}$ sont donc les mêmes.

Propriété 2.4 (Coordonnées du milieu, coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$)**.** *Si A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A;y_A;z_A)$ et $(x_B;y_B;z_B)$:*
- $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$;
- *les coordonnées de I, milieu de $[AB]$, sont $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$.*

Propriété 2.5 (Distance et norme dans un repère orthonormal)**.** *Soit $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $A(x_A;y_A;z_B)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$.*

Si le repère est orthonormal *alors :*
- $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;
- $AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

Propriété 2.6 (Condition d'orthogonalité dans un repère orthonormal)**.** *Soit $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$.*

Si le repère est orthonormal *alors* $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow xx'+yy'+zz'=0$

2.4 Exercices

Exercice 2.1.
Le plan est muni d'un repère orthonormal.

1. On donne $A(2;-1;3)$, $B(1;2;0)$, $C(-2;1;2)$ et $D(-1;-2;5)$.
   $ABCD$ est-il un parallélogramme ? Un rectangle ?
2. On donne $A(-3;1;4)$, $B(-2;-1;7)$, $C(-4;-1;-2)$ et $D(-5;-5;4)$.
   Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?
3. On donne $A(1;1;3)$, $B(\sqrt{2}+1;0;2)$ et $C(\sqrt{2}+1;2;2)$.
   Nature du triangle ABC ?
4. On donne $A(1;-2;3)$, $B(0;4;4)$ et $C(4;-20;0)$.
   Les points A, B et C sont-ils alignés ?

Exercice 2.2.
$ABCD$ est un tétraèdre.
I et L sont les milieux respectifs de $[AD]$ et $[DC]$, J est le point tel que $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et K est le point tel que $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.
Les points I, J, K et L sont-ils coplanaires ?

Exercice 2.3.
$ABCDEFGH$ est un cube. I, J et K sont les milieux respectifs de $[AD]$, $[BC]$ et $[FG]$.
On veut prouver que la droite (AK) est parallèle au plan (IJH).

1. Traduire par des relations vectorielles : « la droite (AK) est parallèle au plan (IJH). »
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AK}$ à l'aide de deux vecteurs formés avec les points I, J et K. Conclure.

Exercice 2.4.
$ABCDEFGH$ est un cube.
I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[AE]$, $[EH]$ et $[AD]$. G est le centre de gravité du triangle DCH.

1. Montrer que $(CK) \parallel (IJB)$.
2. Montrer que $(KL) \parallel (IJB)$.
3. Que peut-on en conclure ?
4. Tracer la trace de ces deux plans sur le cube.

Exercice 2.5.
Dans le repère orthonormal $\left(\text{O};\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on donne les points $A(2;0;0)$, $B(0;3;1)$ et $C(5;1;3)$.

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle. Préciser le sommet de l'angle droit.
2. Soit M le point de coordonnées $(1;7;5)$. Démontrer que M est un point du plan (ABC).
3. Soit D le point de coordonnées $(9;16;-6)$. Démontrer que la droite (DM) est perpendiculaire au plan (ABC).
4. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

Exercice 2.6.
$ABCD$ est un tétraèdre.
Soit I milieu de $[BC]$, J milieu de $[CD]$, H centre de gravité du triangle BCD et K centre de gravité du triangle ACD.

1. Exprimer, dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$, les coordonnées des points I, J, K et H.
2. Soit G le point tel que $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AH}$. Quelles sont les coordonnées de G ?
3. Démontrer que $\overrightarrow{BG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BK}$.
4. Démontrer que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Exercice 2.7.
$ABCDEFGH$ est un cube de côté égal à 1.
On considère le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Calculer les coordonnées du centre de gravité I de AHF et du centre de gravité J de BDG.
2. (a) Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (AHF) ainsi qu'au plan (BDG). (Rappel : pour montrer que d'une droite d est orthogonale à un plan P, on montre qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 de P).
   (b) Que peut-on en déduire pour les plans (AHF) et (BDG) ?

Exercice 2.8.
$ABCD$ est un tétraèdre.

1. Construire les points E, F, G et H tels que :
   - $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$;
   - $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$;
   - $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$;
   - $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$.
2. Que peut-on dire des points E, F, G et H ?

Exercice 2.9.
$ABCD$ est un tétraèdre tel que les faces ABC, ACD et ADB sont des triangles rectangles en A et tel que BCD est un triangle équilatéral.
Soit G le centre de gravité du triangle BCD.

1. Démontrer que les triangles ABC, ABD et ACD sont isocèles.
2. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale aux droites (BC) et (BD).
3. En déduire que (AG) est perpendiculaire au plan (BCD).

Exercice 2.10.
L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(A ; \overrightarrow{AI} ; \overrightarrow{AJ} ; \overrightarrow{AK}\right)$.
Le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$, représenté sur la figure 2.3 page suivante, est tel que $B(2 ; 0 ; 0)$, $D(0 ; 6 ; 0)$, $E(0 ; 0 ; 4)$.
Les points L et M sont les milieux respectifs des segments $[EF]$ et $[FB]$

1. Placer les points L et M sur la figure ci-dessous.
   Donner (sans justification) les coordonnées des points A, C, F, G et H, puis vérifier par le calcul que les points L et M ont respectivement pour coordonnées $(1 ; 0 ; 4)$ et $(2 ; 0 ; 2)$.
2. Déterminer s'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{DE} = a\overrightarrow{LM} + b\overrightarrow{LG}$.
   Que peut-on en déduire pour la droite (DE) et le plan (LMG) ?
3. (a) Montrer que les droites (LM) et (HC) sont parallèles.
   (b) Déterminer s'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{HI} = a\overrightarrow{LM} + b\overrightarrow{LG}$.
   Que peut-on en déduire pour la droite (HI) et le plan (LMG) ?
   (c) Que peut-on en déduire pour les plans (LMG) et (HCI) ?
4. Tracer, respectivement en rouge et en vert, les traces des plans (LMG) et (HCI) sur le parallélépipède $ABCDEFGH$.
   On ne demande aucune justification, mais on indiquera les éventuels parallélismes utilisés et on laissera les éventuels traits de construction.

Exercice 2.11.
$ABCDEFGH$ est un cube représenté sur la figure 2.4 page ci-contre.
I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[CD]$ et $[EF]$.
L est le milieu du segment $[HB]$.

1. Montrer que le triangle IJK est rectangle et préciser le sommet de l'angle droit.
2. Montrer que les points I, J, K et L sont coplanaires.
3. Montrer que la droite (HL) et le plan (IJK) sont perpendiculaires.
   On rappelle que pour montrer qu'une droite Δ est perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$, on montre qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de $\mathcal{P}$.
4. En déduire la volume du tétraèdre $IJKH$.
   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $V = \frac{1}{3}$Aire d'une base$\times$Hauteur relative à cette base.

FIGURE 2.3 – Figure de l'exercice 2.10

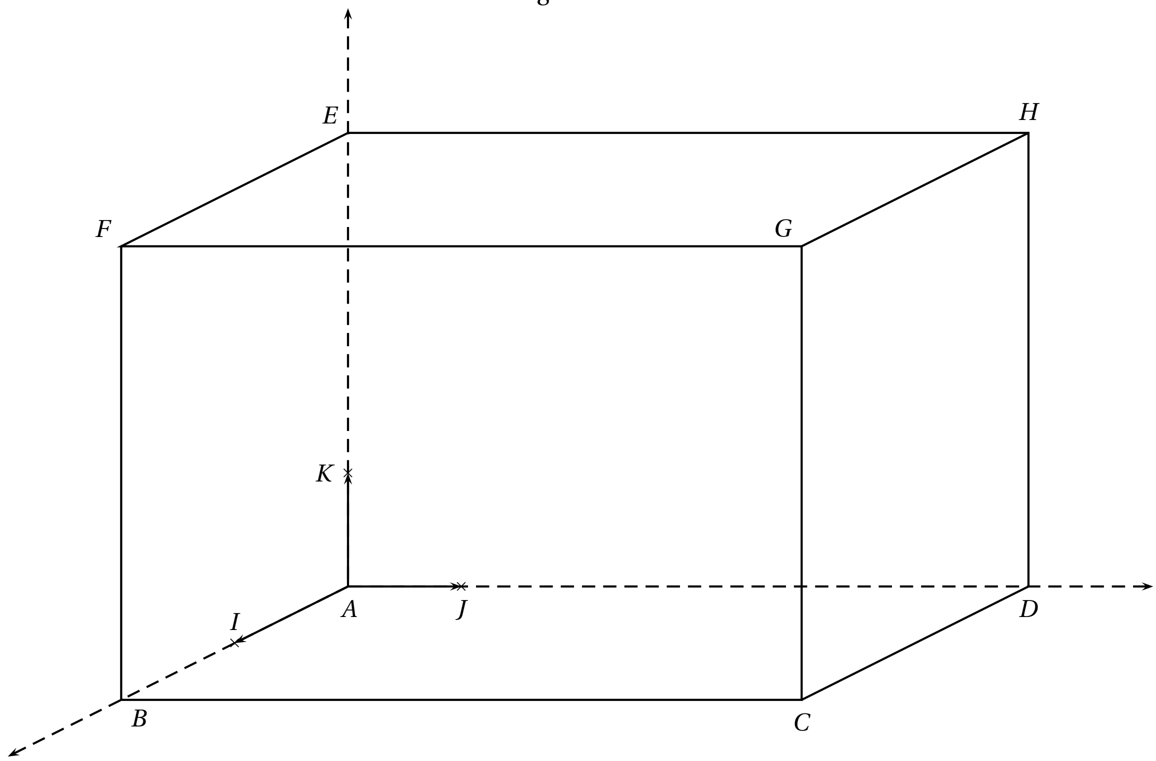


FIGURE 2.4 – Figure de l'exercice 2.11