# Chapitre 2

# Dérivation

## Sommaire



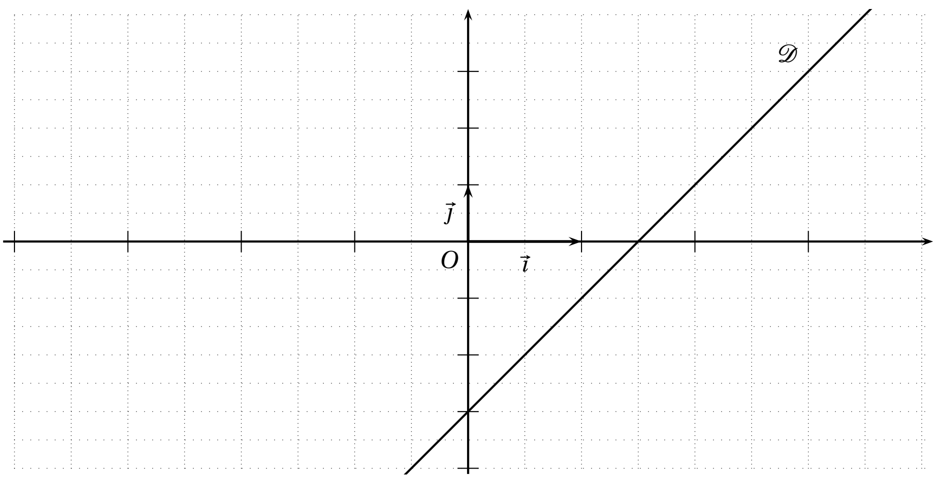
## 2.1 Nombre dérivé (rappels)

### 2.1.1 Activités

Activité 2.1.
On se place dans le plan muni du repère orthogonal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (voir la figure 2.1 de la présente page).

1. On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation : $y = 2x - 3$.
   (a) Déterminer l'ordonnée du point $A$ de $\mathscr{D}$ dont l'abscisse est 0.
   (b) Déterminer l'abscisse du point $B$ de $\mathscr{D}$ dont l'ordonnée est 0.
   (c) Déterminer l'abscisse du point $D$ de $\mathscr{D}$ dont l'ordonnée est 3.
   (d) Le point $E\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$ appartient-il à la droite $\mathscr{D}$ ?
2. (a) Placer dans le repère le point $F(-2; 1)$.
   (b) Tracer dans les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$ et $\mathscr{D}_4$ passant par $F$ et de coefficients directeurs respectifs 0, $-2$, $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$.

FIGURE 2.1 – Figure de l'activité 2.1

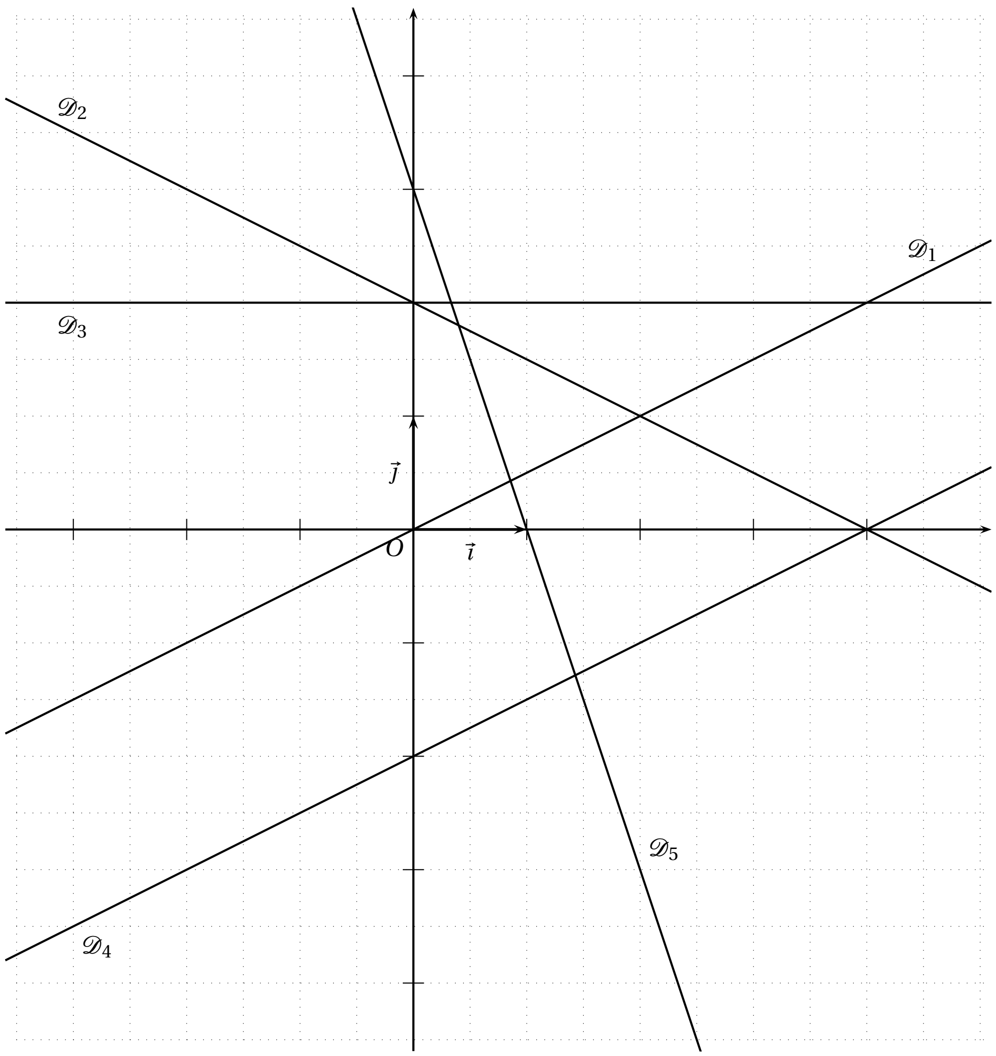


Activité 2.2.

On considère le repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ de la figure 2.2 de la présente page dans lequel on a représenté les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$, $\mathscr{D}_4$ et $\mathscr{D}_5$. Ces droites coupent l'axe des abscisses et des ordonnées en des points dont les coordonnées sont des nombres entiers.

1. (a) Indiquer, sans calcul, le signe des coefficients directeurs $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$ et $m_5$ respectifs de chacune des droites
   (b) Classer ces droites par ordre croissant de leur coefficient directeur.
2. (a) En utilisant les coordonnées de deux points d'une droite, déterminer, par le calcul, la valeur exacte du coefficient directeur de chacune de ces cinq droites.
   (b) Les résultats des questions 1 et 2 sont-ils en accord ?
3. Déterminer l'équation réduite de chacune des droites.
4. Déterminer algébriquement, puis graphiquement les coordonnées des points d'intersection des droites :
   (a) $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ (b) $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_3$ (c) $\mathscr{D}_4$ et $\mathscr{D}_5$

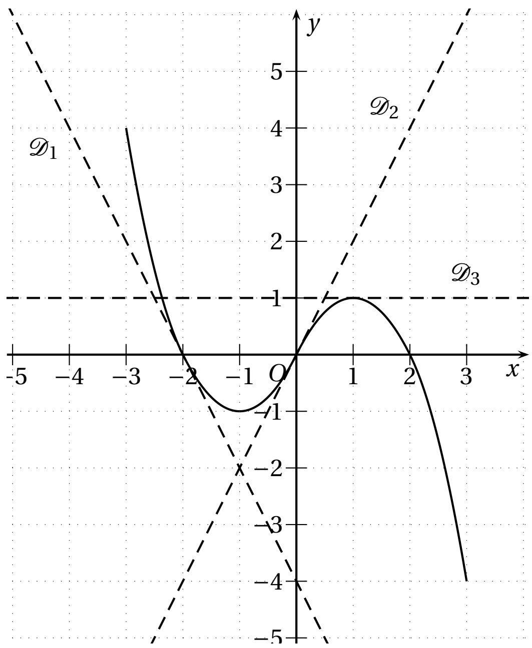
FIGURE 2.2 – Figure de l'activité 2.2



Activité 2.3.
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure 2.3 de la présente page représente graphiquement une fonction $f$.

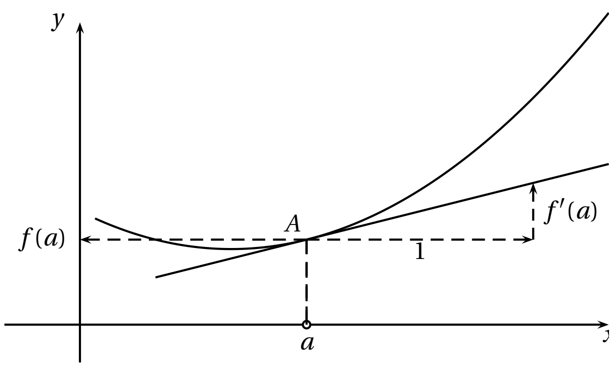
1. Les trois droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$ sont des tangentes à la courbe.
   En quels points les droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$ sont-elles tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ ? (indiquer leurs coordonnées)
2. Compléter la phrase : On peut interpréter graphiquement $f'(-2)$ comme ..............
   Donc $f'(-2) =$ .........
3. Donner par lecture graphique :
   - $f'(0) =$ .........
   - $f'(1) =$ .........

FIGURE 2.3 – Figure de l'activité 2.3




### 2.1.2 Bilan

**Définition 2.1.** Le *nombre dérivé* d'une fonction $f$ en $a$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point de coordonnées $\left(a\,;\,f(a)\right)$. Il se note $f'(a)$. On dit alors que $f$ est dérivable en $a$.




**Propriété 2.1.** *Par définition, la tangente au point $A\left(a\,;\,f(a)\right)$ a une équation de la forme $y = f'(a)x + p$.*

*Remarque.* Pour trouver $p$ on remplace $x$ et $y$ par les coordonnées de $A$.

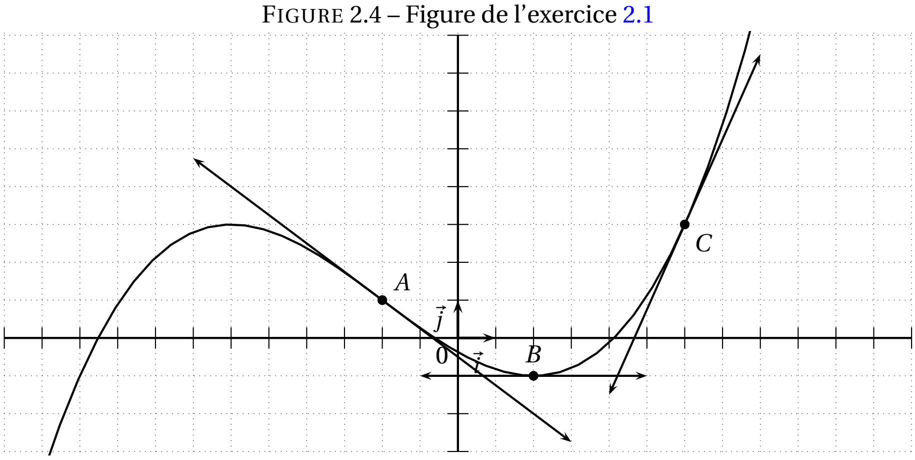
### 2.1.3 Exercices

Exercice 2.1.

On donne sur la figure 2.4 de la présente page la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction $f$ en y indiquant les droites tangentes aux points $A$, $B$ et $C$.

1. Donner par lecture graphique $f(-2)$ et $f(6)$
2. Donner par lecture graphique $f'(-2)$, $f'(6)$ et $f'(2)$
3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $-2$.

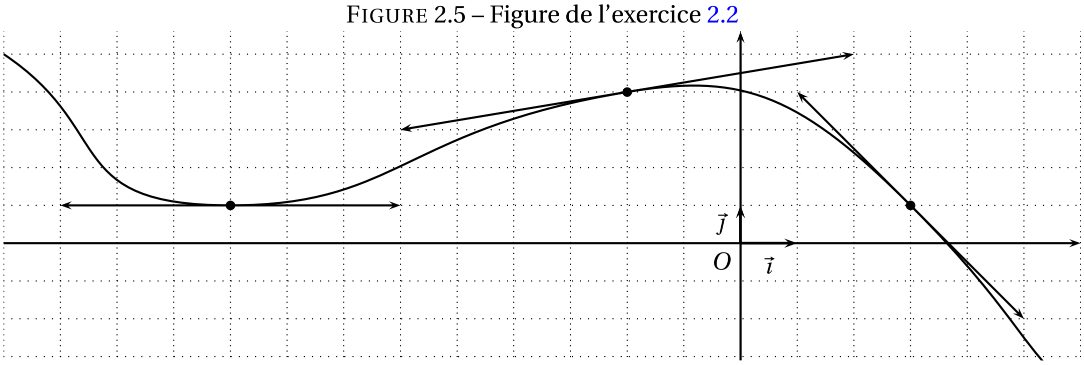
FIGURE 2.4 – Figure de l'exercice 2.1




Exercice 2.2.

On donne sur la figure 2.5 de la présente page la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction définie $f$ sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à cette courbe en certains points.

FIGURE 2.5 – Figure de l'exercice 2.2



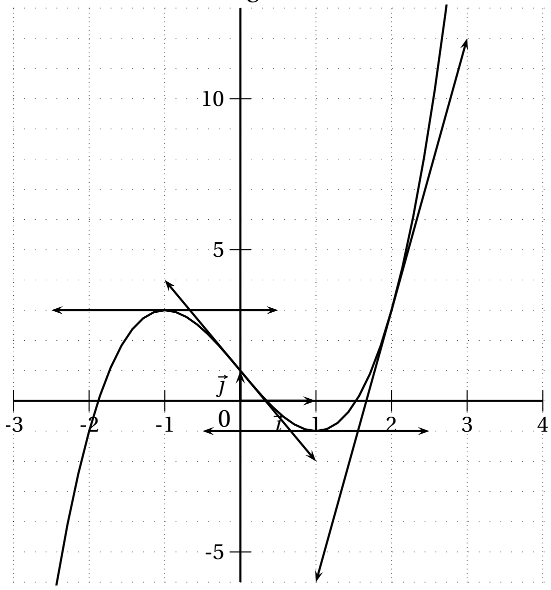

1. Donner par lecture graphique $f(3)$, $f(-2)$ et $f(-9)$.
2. Donner par lecture graphique $f'(3)$, $f'(-2)$ et $f'(-9)$.
3. Déterminer l'équation réduite de $T$, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.

Exercice 2.3.

La courbe $\mathscr{C}$ de la figure 2.6 page suivante est la représentation graphique d'une fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthogonal.

1. Déterminer graphiquement :
   (a) $f(0)$ et $f'(0)$ ;
   (b) $f(-1)$ et $f'(-1)$ ;
   (c) $f(2)$ et $f'(2)$ ;
   (d) L'équation de la tangente $T_{-1}$ au point d'abscisse $-1$ ;
   (e) L'équation de la tangente $T_0$ au point d'abscisse 0.
2. La droite $T$ tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $-2$ et d'ordonnée $-1$ passe par le point $A$ de coordonnées $(1 ; 26)$

FIGURE 2.6 – Figure de l'exercice 2.3




(a) Déterminer par le calcul une équation de $T$.

(b) En déduire $f'(-2)$.

Exercice 2.4.

Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction $f$ définie sur l'intervalle $[-3;3]$ ayant les propriétés suivantes :

- $f$ est décroissante sur $[-3;0]$ ;
- $f(0) = -2$ et $f'(0) = 0$ ;
- $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;
- $f(3) = 9$.

Exercice 2.5.

Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0;9]$ ayant les popriétés suivantes :

- $f(0) = 0$ ;
- $f(1) = 3$ et $f'(1) = 2$ ;
- $f(3) = 6$ et $f'(3) = 1$ ;
- $f(5) = 7$ et $f'(5) = 0$ ;
- $f(6) = 6$ et $f'(6) = -4$.

Exercice 2.6.

Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0;5]$ ayant les popriétés suivantes :

- $f(0) = 1$ ;
- $f$ est décroissante sur l'intervalle $[0;2]$ ;
- $f$ admet en 2 un minimum égal à -3 ;
- $f(3) = -1$ et $f(5) = -1$ ;
- $f'(2) = 0$, $f'(3) = 1$ et $f'(5) = -1$ ;
- pour tout $x \in [2;5]$, $f(x) < 0$.

Exercice 2.7.

Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction $f$ définie sur l'intervalle $[-5;5]$ ayant les popriétés suivantes :

- $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;
- $f(0) = 3$, $f(2) = 1$ et $f(4) = 2$ ;
- $f'(0) = 0$, $f'(2) = -\frac{1}{2}$ et $f'(4) = 3$.

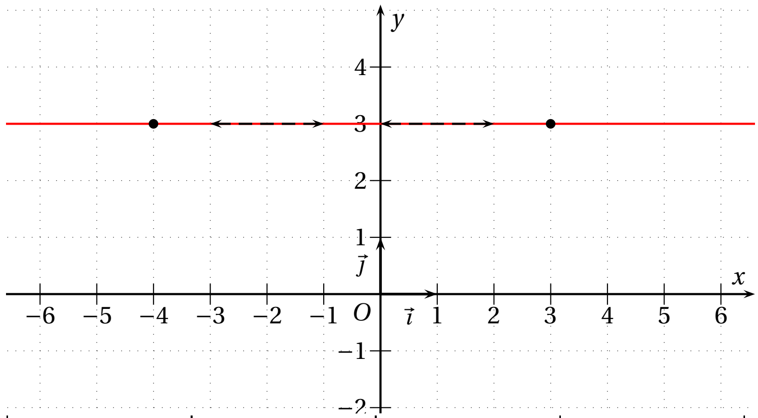
*On fera apparaître toutes les tangentes qu'on peut déduire de l'énoncé.*

## 2.2 Fonction dérivée

### 2.2.1 Activités

Activité 2.4 (Fonctions dérivées des fonctions usuelles).
Dans chacun des cas suivants, compléter le tableau et conjecturer l'expression de $f'(x)$.

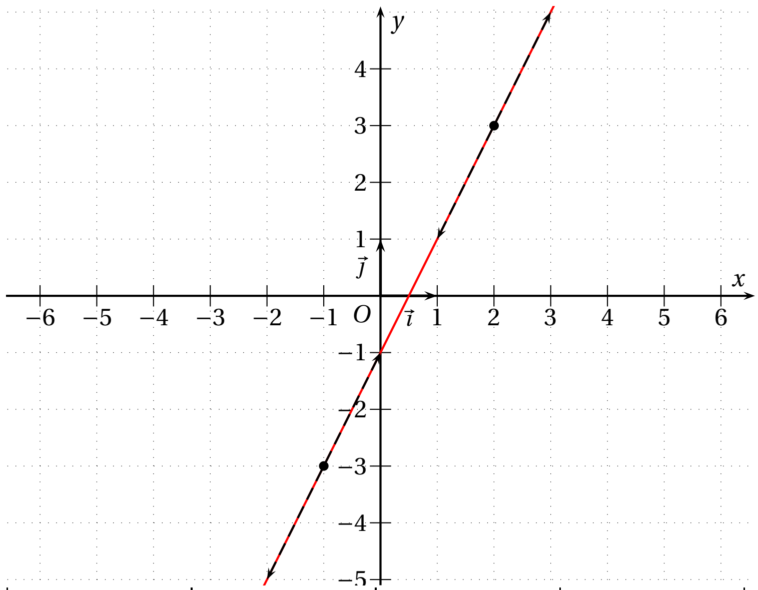
FIGURE 2.7 – Fonction constante : $f(x) = 3$



| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | | |

$f'(x) = \ldots\ldots$

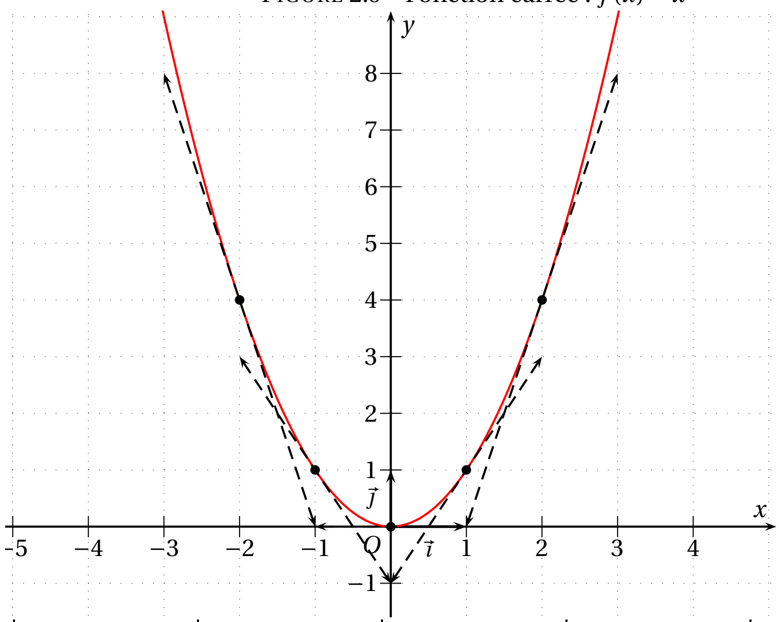
FIGURE 2.8 – Fonction affine : $f(x) = 2x - 1$



| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | | |

$f'(x) = \ldots\ldots$

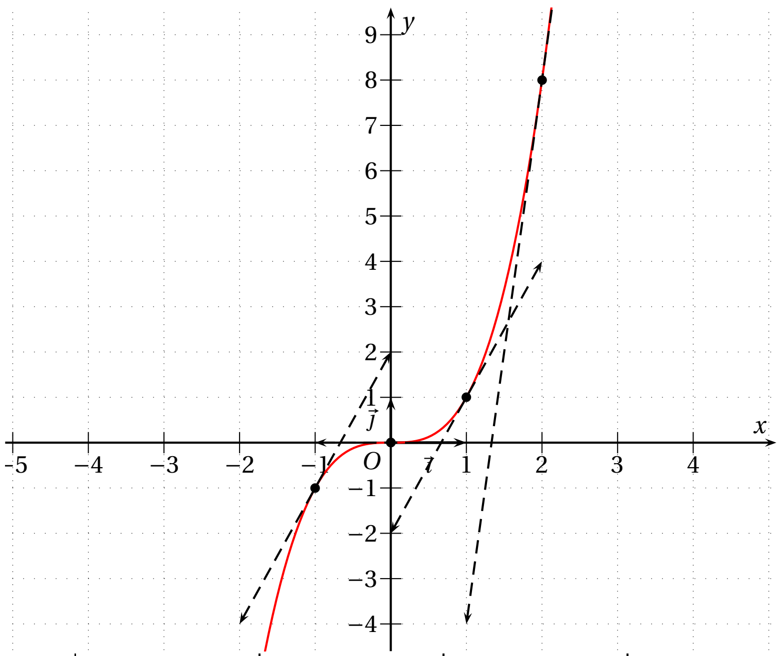
FIGURE 2.9 – Fonction carrée : $f(x) = x^2$




| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | | |

$f'(x) = \ldots\ldots$

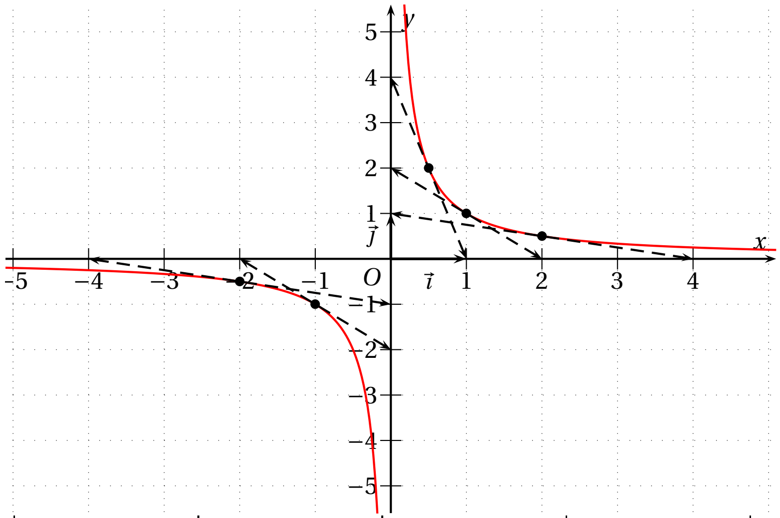
FIGURE 2.10 – Fonction cube : $f(x) = x^3$




| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | |

$f'(x) = \ldots\ldots$

FIGURE 2.11 – Fonction inverse : $f(x) = \dfrac{1}{x}$




| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0,5$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | | |

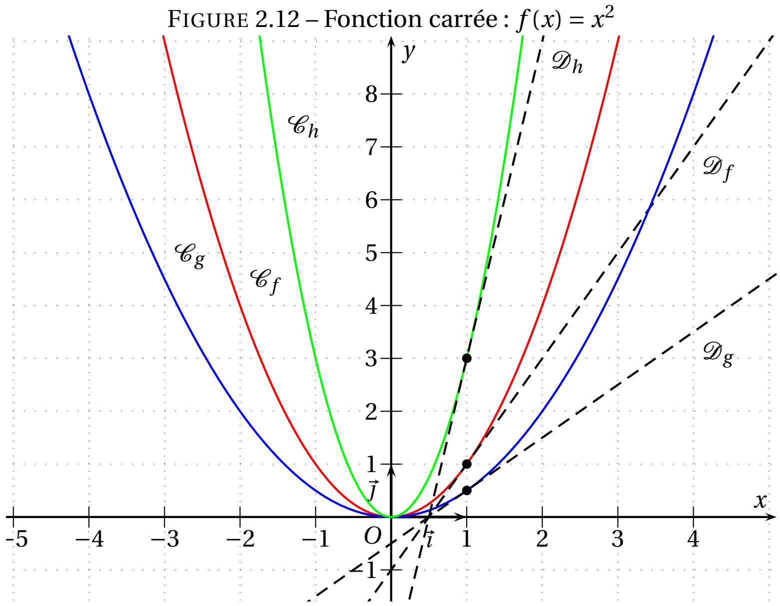
$$\boxed{f'(x) = \ldots\ldots}$$

Activité 2.5 (Fonction dérivée du produit d'une fonction par une constante).
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $\mathscr{D}_f$ sa tangente au point d'abscisse 1.

Soient $g$ et $h$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\dfrac{f(x)}{2}$ et $h(x) = 3f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On nomme $\mathscr{D}_g$ et $\mathscr{D}_h$ leurs tangentes respectives au point d'abscisse 1.
On nomme enfin $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ les courbes respectives de $f$, $g$ et $h$.

1. Déterminer par lecture graphique $f'(1)$, $g'(1)$ et $h'(1)$.
2. Conjecturer l'expression de $g'(x)$ et de $h'(x)$ en fonction de $f'(x)$.

FIGURE 2.12 – Fonction carrée : $f(x) = x^2$



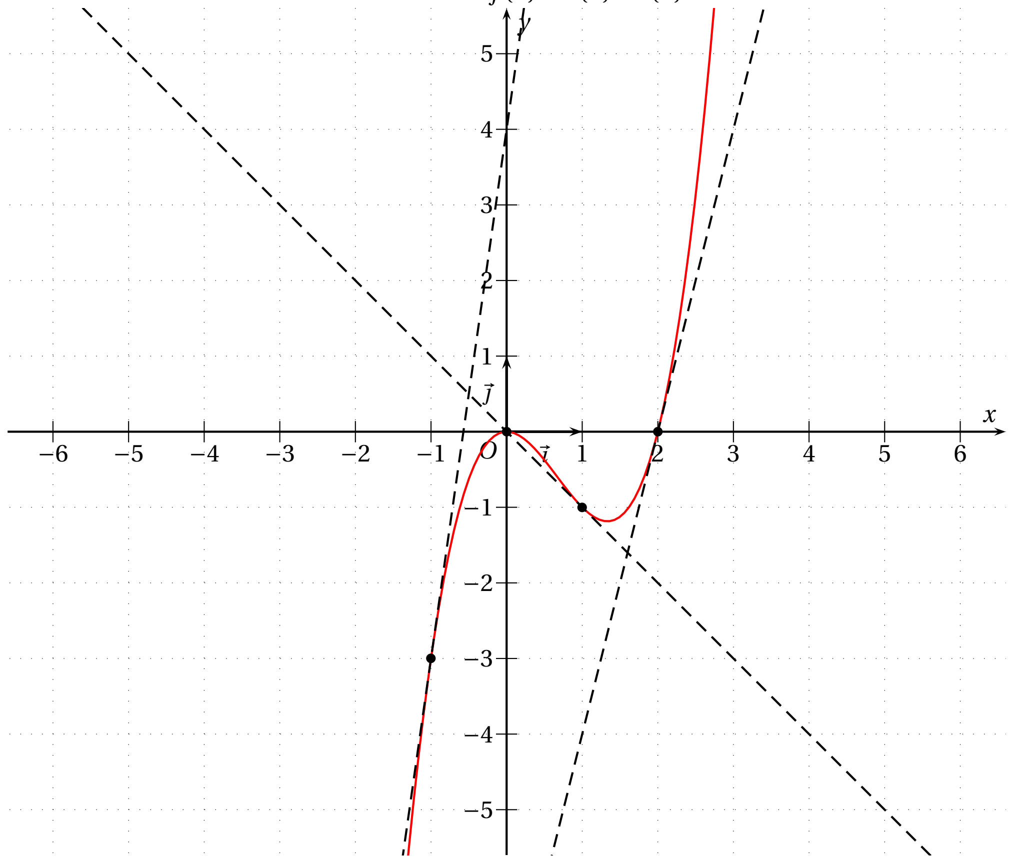
Activité 2.6 (Fonction dérivée d'une somme de fonction).

1. Soient $u$, $v$ et $f$ trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3$, $v(x) = -2x^2$ et $f(x) = u(x) + v(x)$.

   (a) Déterminer $u'(x)$ et $v'(x)$.

   (b) On donne sur la figure 2.13 de la présente page la courbe représentative de $f$ ainsi que quelques tangentes. À l'aide de la question précédente et de la figure, compléter le tableau suivant :

FIGURE 2.13 – $f(x) = u(x) + v(x)$




| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $u'(x)$ | | | | |
| $v'(x)$ | | | | |
| $f'(x)$ | | | | |

   (c) Conjecturer l'expression de $f'(x)$ en fonction de $u'(x)$ et de $v'(x)$.

2. Soient $l$, $m$ et $g$ trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $l(x) = x^2$, $m(x) = x - 2$ et $g(x) = l(x) \times m(x)$.

   (a) Déterminer $l'(x)$ et $m'(x)$.

   (b) Montrer que $g(x) = f(x)$.

   (c) Compléter alors le tableau suivant :

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $l'(x)$ | | | | |
| $m'(x)$ | | | | |
| $g'(x)$ | | | | |

(d) Quelle formule « intuitive » est fausse ?

### 2.2.2 Bilan et compléments

**Fonctions dérivées des fonctions usuelles**

Compléter le tableau 2.1 de la présente page.

TABLE 2.1 – Fonctions dérivées des fonctions usuelles

| Fonction $f$ | définie sur | Fonction dérivée $f'$ | définie sur |
|---|---|---|---|
| $f(x) = k$ (constante) | $\mathbb{R}$ | $f'(x) =$ | |
| $f(x) = mx + p$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) =$ | |
| $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ | $\mathbb{R}$ | $f'(x) =$ | |
| $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ | $\mathbb{R}^*$ | $f'(x) =$ | |
| $f(x) = \sqrt{x}$ | $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$ | $f'(x) =$ | |

**Opérations algébriques et dérivation**

Soient $u$ et $v$ définies et dérivables sur un même intervalle $I$. Compléter le tableau 2.2 de la présente page.

TABLE 2.2 – Opérations sur les fonctions dérivées

| Fonction | Fonction dérivée |
|---|---|
| $ku$ avec $k \in \mathbb{R}$ | |
| $u + v$ | |
| $u \times v$ | |
| $u^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ | |
| $\dfrac{1}{v}$ avec $v(x) \neq 0$ | |
| $\dfrac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$ | |

### 2.2.3 Exercices

Déterminer des fonctions dérivées

- Sommes : 30 à 33 page 71
- Produits : 35 à 37 page 71
- Puissances : 39 et 41 page 73
- Inverses : 44 et 46 page 73
- Quotients : 55, 56 et 58 page 74
- Problèmes : 83 à 88 page 82