tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Université Joseph Fourier – Grenoble I

Le graphe comme outil pour enseigner la preuve et la modélisation

Léa Cartier

Thèse présentée pour l'obtention du titre de Docteure de l'Université Joseph Fourier
École Doctorale Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique
Formation Didactique des mathématiques

Préparée à l'Institut Fourier, UMR 5582
Soutenue publiquement le 27 octobre 2008

Composition du jury :

Maggy Schneider-Gilot	Présidente du jury
Denis Tanguay	Rapporteur
Eric Sopena	Rapporteur
Roland Bacher	Examinateur
Charles Payan	Directeur de thèse
Denise Grenier	Directrice de thèse

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Table des matières

Remerciements **6**

Introduction **8**

1 Quelques éléments épistémologiques et historiques sur l'objet graphe **15**

1.1 Premières représentations de graphes 15

1.2 L'histoire des parcours eulériens dans les graphes 17

1.2.1 Les ponts de Königsberg et la géométrie de position 18

1.2.2 La modélisation du problème par Euler 19

1.2.3 Preuve proposée par Euler 21

1.2.4 Résolution du problème 22

1.3 Quelques dates clés 23

2 La théorie des graphes dans l'enseignement mathématique en France **25**

2.1 Intérêt d'un enseignement d'éléments de théorie des graphes 25

2.2 Les graphes dans l'enseignement général en France 27

2.2.1 En dehors des mathématiques 27

2.2.2 En mathématiques en dehors de la Terminale ES 28

2.3 Analyse d'une première transposition : le graphe au programme de la Terminale ES 29

2.3.1 Historique de l'introduction d'éléments de théorie des graphes dans le curriculum français 29

2.3.2 Présentation du programme de la spécialité mathématique 32

2.3.3 Construction d'une typologie 35

2.3.4 Analyse du document d'accompagnement des programmes et des manuels 40

2.4 Analyse des types d'énoncés et techniques de résolution attendues par le programme et les manuels . . . 44
2.4.1 Énoncés autour de la modélisation . . . 44
2.4.2 Énoncés autour de la preuve . . . 58
2.4.3 Énoncés autour de la structure d'un graphe . . . 61
2.4.4 Énoncés autour de l'algorithmique et du calcul . . . 66
2.5 Constats sur ce que permet l'enseignement des graphes en Terminale ES 71

3 Étude Expérimentale 73
3.1 Recherche de parcours eulériens . . . 73
3.1.1 Avec des supports matériels, en primaire . . . 74
3.1.2 En lycée, avec des musées puis des graphes . . . 83
3.1.3 Une étude de document en deuxième année d'école d'ingénieur . . 95
3.2 Formation d'enseignants . . . 101
3.2.1 Les poignées de mains . . . 102
3.2.2 Le problème de Ramsey (3, 3) . . . 106

4 Propositions de problèmes 111
4.1 Présentation des graphes . . . 112
4.2 Les poignées de mains . . . 115
4.2.1 On peut serrer plusieurs fois la main des personnes que l'on connaît : le cas des multigraphes . . . 116
4.2.2 Le cas des graphes simples avec boucles . . . 118
4.2.3 Le cas des multigraphes avec boucles . . . 121
4.2.4 Saluer plutôt que se serrer la main : le cas des graphes orientés . . 121
4.2.5 Connaissances mises en jeu dans le problème . . . 122
4.3 Le problème de Ramsey . . . 123
4.3.1 Énoncé et généralités . . . 123
4.3.2 Ramsey(3, 3) . . . 124
4.3.3 Ramsey(3, 4) . . . 129
4.3.4 Ramsey(1, q) et Ramsey(2, q) . . . 132
4.3.5 Existence des nombres de Ramsey dans le cas général . . . 132
4.3.6 Connaissances mises en jeu dans le problème . . . 133

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

4.4 Recherche de chemins eulériens dans les graphes 134
4.4.1 Résolution historique du problème 135
4.4.2 Problèmes eulériens 136
4.4.3 Modélisations des problèmes à l'aide de graphes 138
4.4.4 Preuves du théorème d'Euler 139
4.4.5 Connaissances mises en jeu dans le problème 145
4.5 Construction de graphes planaires réguliers 146
4.5.1 Énoncé et vocabulaire 146
4.5.2 De petits cas 149
4.5.3 Graphes d-réguliers dont les faces sont des triangles 150
4.5.4 Formule d'Euler pour les graphes planaires 160
4.5.5 Graphes d-réguliers dont les faces sont délimitées par p arêtes ($p > 3$) 161
4.5.6 Pour conclure 165
4.5.7 Connaissances mises en jeu dans le problème 167
4.6 Plus courts chemins dans un graphe 168
4.6.1 Situation introductive : propagation de la lumière dans un graphe 168
4.6.2 Algorithme de Dijkstra 170
4.6.3 Remarques et applications concrètes de l'algorithme 173
4.6.4 Connaissances mises en jeu dans le problème 189
4.7 Automates à états finis 190
4.7.1 Connaissances mises en jeu dans le problème 194
4.8 Nombre de parcours entre les sommets d'un graphe 194
4.8.1 Sur un exemple 194
4.8.2 Dans un graphe simple non orienté 196
4.8.3 Connaissances mises en jeu dans le problème 197
4.9 Coloration de graphes 197
4.9.1 Algorithme glouton et encadrement du nombre chromatique . . . 198
4.9.2 Chaînes et cycles 205
4.9.3 Coloration de graphes planaires 206
4.9.4 Un problème d'emploi du temps 209
4.9.5 Connaissances mises en jeu dans le problème 210

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Conclusion **212**

A Article d'Euler sur les ponts de Königsberg **219**

B Compte-rendu d'expérimentation en lycée - Parcours de musées et parcours de graphes **227**

B.1 Groupe A 228

B.1.1 Première séance 228

B.1.2 Seconde séance 229

B.2 Groupe B 233

B.2.1 Première séance 233

B.2.2 Seconde séance 234

B.3 Groupe C 235

B.3.1 Première séance 235

B.3.2 Seconde séance 237

B.4 Groupe D 241

B.4.1 Première séance 241

B.4.2 Seconde séance 241

B.5 Groupe F 245

B.5.1 Première séance 245

B.5.2 Seconde séance 251

C Compte-rendu de formations d'enseignants **297**

C.1 Une première session de formation 297

C.1.1 Premier problème : Poignées de mains 298

C.1.2 Deuxième problème : Ramsey(3, 3) 306

C.2 Une seconde session de formation 317

C.2.1 Présentation de la session de formation 317

C.2.2 Les poignées de main 318

C.2.3 Construction de graphes en lien avec les polyèdres 329

Index **336**

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Remerciements

Je remercie Denis Tanguay et Eric Sopena pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, Maggy Schneider-Gilot et Roland Bacher pour avoir accepté de l'examiner. Merci pour l'attention que vous avez porté à mon travail, pour vos remarques et vos suggestions.

Un grand merci à Denise Grenier pour son aide en particulier en didactique où nos échanges de point de vue ont été des plus motivants. Merci aussi pour toutes les questions qui ont, à plusieurs reprises, modifié ma vision des choses et initié une recherche complémentaire. Merci encore pour m'avoir invitée à participer au groupe de travail « preuve et modélisation » et accueillie à l'IREM.

Travailler avec Charles a été pour moi un vrai bonheur. Je me souviendrai des heures que nous avons passées au tableau en train de chercher des problèmes, de chercher des questions, de trouver des questions et même de résoudre des problèmes (!), comme d'heures de vrai plaisir et qui m'ont fait redécouvrir les mathématiques sous un jour plaisant et délectable... Merci beaucoup Charles.

Je tiens à remercier tous les enseignants qui ont ouvert la porte de leurs classes pour des expérimentations, Marie-Jo, Cécile, Julien et Christophe. Merci aussi à tous les élèves et étudiants qui ont joué le jeu et dont les yeux qui brillent sont pour moi la plus grande source de motivation.

Merci à l'équipe de Maths à Modeler pour son accueil. Un merci tout spécial à Sylvain qui m'a fait découvrir la théorie des graphes il y a plus de huit ans en encadrant mon mémoire de maîtrise, et qui a supporté depuis lors ma candidature à une allocation de recherche, mes recherches, mes participations à des colloques et conférences et parfois aussi mes états d'âme. De grands mercis à tous les doctorants et jeunes docteurs que j'ai pu rencontrer durant ces quatre années pour leur soutien, leurs conseils et leur enthousiasme, je pense tout particulièrement à Cécile, Julien, Karine, Eric, Michèle et Nicolas.

Merci à ma famille et à tous les amis qui m'ont accompagnée durant ces années. Un clin d'œil amical à Mehdi pour sa présence inconditionnelle et réconfortante.

Enfin, mes derniers remerciements vont aux deux hommes de ma vie, mon fils Louis dont la naissance a ensoleillé ces années de thèse, et Julien qui rend beau chaque jour de ma vie auprès de lui.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Introduction

Motivations personnelles à l'origine de ce travail

Ce travail est né de la rencontre de deux expériences personnelles. La première est la découverte de la théorie des graphes en Maîtrise qui m'a redonné envie de « faire des mathématiques » et qui a abouti à la rédaction d'un mémoire sur la coloration des graphes triangulés, comprenant une implémentation informatique. La seconde est une expérience d'enseignante en lycée avec (entre autres) deux classes de Première économique et sociale (ES) et une classe de Terminale ES[1], l'année de l'introduction de la théorie des graphes au programme. C'est au lycée que j'ai entendu les premières questions (souvent très critiques) d'enseignants par rapport à ce programme :

Pourquoi enseigne-t-on la théorie des graphes ? Quelle est la finalité de cet enseignement ? Les élèves font-ils des mathématiques ou résolvent-ils des « devinettes » ? (Suite à la première épreuve du baccalauréat contenant des graphes en 2003 :) Dans la mesure où toute personne douée de raison peut résoudre le problème posé, quel est l'intérêt d'un tel enseignement ?

C'est la surprise que j'ai ressentie à l'écoute de ces questions qui est la base de ce travail de recherche. Comment un enseignement issu d'un domaine aussi riche des mathématiques peut-il amener à de telles questions ?

Cadre et hypothèses de travail

La théorie des graphes a fait son apparition dans le curriculum français du secondaire en 2002. Elle ne concerne qu'une faible minorité d'élèves : les élèves de Terminale économique et sociale (ES) qui suivent un enseignement de spécialité[2] mathématique, la théorie des graphes représentant une vingtaine d'heures dans l'année. L'enseignement de ce nouvel objet mathématique est aussi particularisé dans sa mise en œuvre attendue : il se veut *axé sur la seule résolution de problèmes*[3].

Notre travail est ancré dans les théories développées par la didactique des mathématiques. Il ne vise pas à développer ces théories, mais elles fixent le cadre de notre recherche et de nos réflexions et elles en fournissent les outils. Notre but est d'être lisible par toute personne intéressée par l'enseignement des mathématiques. Nous limiterons donc l'usage du vocabulaire spécifique à la didactique des mathématique à celui qui peut être compris

[1] Sans l'enseignement de spécialité, malheureusement...

[2] Les élèves de Terminale ES ont le choix entre trois spécialités : mathématique, sciences économiques et langue vivante.

[3] B.O. hors-série n°4 du 30 août 2001, page 60.

dans son acception courante.
Nous exposons ici plusieurs des hypothèses (non hierarchisées) qui sous-tendent notre travail :

- L'élève n'est pas une page blanche que le professeur aurait pour mission de remplir. Une connaissance est une construction qui ne peut avoir lieu que si l'élève en prend au moins une partie à sa charge. C'est la responsabilité que prend l'élève dans cette construction qui lui permet de donner du sens aux notions, concepts, preuves, etc. abordés en classe de mathématiques.

- L'élève est capable de *chercher en mathématiques*, et ainsi *se retrouver dans la peau d'un chercheur en mathématiques et [tel que lui] s'interroger, essayer, tâtonner, observer, raisonner, émettre des conjectures, généraliser, prouver, s'accrocher, imaginer, trouver du plaisir, échanger avec autrui, partager ses découvertes, critiquer, argumenter...*[1].

- Les situations-recherche en classe (SiRC) sont bien adaptées à l'apprentissage de notions centrales à l'activité mathématique[2], en particulier elles permettent d'apprendre à *chercher en mathématiques*. Les SiRC peuvent être caractérisées[3] ainsi :
  - le problème abordé peut comporter une, plusieurs ou aucune solution et il peut être encore ouvert dans la recherche mathématique actuelle ;
  - le point de départ est une question facilement compréhensible par celui à qui elle est posée ; elle n'est pas formalisée en termes mathématiques ; c'est la situation qui amène l'élève à l'intérieur des mathématiques ;
  - les méthodes de résolution ne sont pas désignées ; plusieurs pistes peuvent être suivies ;
  - les connaissances scolaires nécessaires sont les plus élémentaires et réduites possibles ;
  - le domaine conceptuel dans lequel se trouve le problème, même s'il n'est pas familier, est d'un accès facile pour que l'on puisse prendre facilement possession de la situation, s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution ;

- La résolution de problèmes, comprise dans son sens le plus large, incluant une phase d'institutionnalisation des résultats obtenus dans la classe permet de construire des connaissances mathématiques. Sans cette phase d'institutionnalisation elle se limite à l'obtention de résultats locaux.

- L'expérimentation nous permet de tester la mise en œuvre d'un problème, en prenant en

[1] Citation de Karine Godot dans [29]. La définition de ce qu'est *chercher en mathématiques* est basée sur des entretiens avec des mathématiciens [42] sur leurs pratiques. K. Godot montre dans sa thèse [28] et dans l'article sus-mentionné que la recherche en mathématiques est possible dès le cycle 3 du primaire.

[2] D'autres types de mises en œuvre proches des SiRC existent. Des situations-recherche peuvent être proposées hors de la classe, comme lors d'animations scientifiques telles que la fête de la science. On pense aussi aux ateliers « Math.en.JEANS » (M.e.J) qui peuvent se rapprocher de situations-recherche selon le problème posé et la mise en oeuvre choisie par les encadrants. La participation des élèves (principalement du secondaire, mais aussi quelques uns de primaire) à un atelier M.e.J est basée sur le volontariat, et la durée de la recherche s'échelonne sur environ un semestre. Le site de l'association M.e.J contient différents supports dont l'ensemble des sujets traités dans les différents ateliers depuis 1989 : `http://mathenjeans.free.fr/amej/accueil.htm`.

[3] Adapté de [29].

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

compte l'influence d'un certain nombre de variables. Les variables sont multiples, certaines peuvent être liées à l'organisation pratique (travail individuel/en petits groupes, durée de la séance, nombre de « gestionnaires », d'observateurs, etc.) ou au problème posé (variations de l'énoncé, plus ou moins grande ouverture de la question, etc.). Une fois ces variables fixées, l'expérimentation va permettre de faire apparaître les connaissances qui sont accessibles aux élèves (dans les mêmes conditions, du même âge, du même niveau[1]), les obstacles rencontrés, les différentes stratégies mises en œuvre. Nous supposons alors une certaine stabilité dans ces constats qui prennent le statut de résultats expérimentaux.

– La théorie des graphes est peu enseignée dans les cursus traditionnels qu'ont suivis les professeurs de mathématiques[2]. Le graphe sera donc pour de nombreux enseignants un nouvel objet mathématique.

– Il est difficile de se donner une idée générale des pratiques enseignantes[3]. Les manuels scolaires en donnent un reflet, déformé certes, mais analysable. En particulier, l'étude des exercices et problèmes proposés par les manuels nous permet de connaître le type de questions qui sont ou peuvent être posées aux élèves. Le graphe étant un nouvel objet mathématique pour de nombreux enseignants, le document d'accompagnement et les manuels scolaires leur seront des outils de référence, même s'ils ne les utilisent pas de façon effective ou s'ils les adaptent dans leur cours.

Questions de la recherche et moyens d'y répondre

Comment la théorie des graphes a-t-elle été introduite et dans quel but ?

Nous chercherons et analyserons les rapports des commissions chargées de réfléchir ou d'établir les programmes de mathématiques du secondaire.

Les buts affichés par ces commissions (introduction de l'algorithmique, travail de la modélisation[4], utilisation des matrices, ...) sont-ils atteints ?

Nous étudierons et analyserons le programme, son document d'accompagnement et quelques manuels scolaires représentatifs, en nous penchant en particulier sur ces thèmes (algorithmique, modélisation et matrices).

La résolution de problèmes est-elle effective ? Propose-t-on des problèmes aux élèves ?

Nous chercherons à différencier exercices et problèmes, puis nous chercherons dans les

[1] Dans ce document, le terme *niveau* ne désignera jamais l'appréciation des capacités d'un élève, mais simplement son appartenance à une classe de Première, Terminale, etc.

[2] Depuis 2002, une leçon du CAPES de mathématiques porte sur la théorie des graphes, ce qui signifie qu'une connaissance minimale du sujet est attendue pour les « nouveaux » professeurs.

[3] Ce n'est pas impossible, mais sur le sujet qui nous intéresse, il s'agirait de suivre quelques professeurs (dans autant de lycées différents étant donné le peu de classes de Terminale ES suivant un enseignement de spécialité mathématiques) sur l'intégralité de leur enseignement de la théorie des graphes, ce qui est loin d'être simple.

[4] *La théorie des graphes ouvre un grand champ de modélisation conduisant à des solutions efficaces pour de nombreux problèmes* (Document d'accompagnement des programmes, page 107).

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

manuels les problèmes proposés aux élèves ainsi que les techniques qu'ils ont à leur disposition pour les résoudre.

Peut-on proposer aux élèves de véritables problèmes, en restant en accord avec les programmes ? Quelles connaissances visées par ces programmes leur sont ainsi accessibles ?

Nous mettrons en place des expérimentations en ce sens.

La formation des enseignants pouvant être insuffisante, que leur proposer pour la compléter du côté des mathématiques comme de celui de la résolution de problèmes ?

Nous chercherons d'une part à participer aux formations d'enseignants existantes, et d'autre part à créer un corpus de problèmes résolus et analysés à leur destination.

Structure du document

Nous conseillons au lecteur peu familier de la théorie des graphes de commencer sa lecture par le chapitre 4 de ce document.

Le premier chapitre propose un bref historique de la naissance de la théorie des graphes dans l'histoire à travers ses premières représentations, l'analyse d'un article de Leonhard Euler supposé être à l'origine de cette théorie et quelques dates-clés de l'émergence du concept de graphe.

Le deuxième chapitre traite de l'introduction d'éléments de la théorie des graphes dans le curriculum français du secondaire. Nous exposons les raisons qui ont motivées cette introduction, puis la mise en œuvre du programme de l'enseignement de spécialité de Terminale ES. Une typologie des énoncés que l'on trouve dans les manuels scolaires et le document d'accompagnement des programmes[1] est construite puis analysée.

Le troisième chapitre est une étude expérimentale regroupant des expérimentations auprès d'élèves et des formations d'enseignants. Nous y exposons le problème de recherche de parcours eulériens sous différentes formes (SiRC[2] et étude de documents) et dans différentes classes (cycle 2 du primaire, seconde générale et deuxième année d'école d'ingénieur). Puis nous analysons deux sessions de formation d'enseignants du secondaire autour de la théorie des graphes, en lien avec le programme de Terminale ES.

Le dernier chapitre propose un ensemble de problèmes commentés et accompagnés d'une résolution possible. Il est à destination des enseignants de Terminale ES. Son but est multiple. Il couvre les notions à aborder dans le programme. Les problèmes qui le composent peuvent être adaptés pour des élèves de Terminale ES. Leur traitement a pour ambition d'être assez large pour offrir un certain recul par rapport aux mathématiques qui y sont montrées. Il offre des pistes de réflexion par rapport aux concepts à développer (nous

[1] Ou plus précisément dans l'*annexe du document d'accompagnement des programmes de la classe terminale de la série économique et sociale et de la série scientifique* que nous nous permettrons d'abréger en « document d'accompagnement des programmes ». L'extrait concernant la théorie des graphes est disponible à l'adresse suivante : `http://www.eduscol.education.fr/D0015/graphes.pdf`.

[2] Situation-Recherche en Classe, telle que définie en [31], même si ce problème n'est pas ouvert (dans le sens non résolu).

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

pensons en particulier à l'algorithme de Dijkstra et au calcul de nombre de parcours non élémentaires).

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Chapitre 1

Quelques éléments épistémologiques et historiques sur l'objet graphe

Nous tracerons ici un bref historique de l'émergence du concept de graphe à travers l'histoire. Nous ne visons dans ce chapitre ni l'exhaustivité, ni l'originalité, et nous limiterons à proposer au lecteur quelques pistes de lecture ou de réflexion. Pour en connaître plus à ce sujet, un ouvrage, que nous recommandons, donne et commente les articles majeurs qui ont donné lieu à l'émergence de la théorie des graphes. Il s'agit d'un ouvrage collectif intitulé *Graph Theory 1736-1936* (voir [9]).

Nous survolerons l'histoire du problème des parcours eulériens dans les graphes, l'article dit des « ponts de Königsberg » par Euler étant considéré comme le premier article abordant cette théorie.

1.1 Premières représentations de graphes

À quand faire remonter la naissance des graphes ? Il y a deux façons d'aborder cette question. On peut considérer le graphe en tant qu'objet mathématique décrivant des relations entre objets, ou considérer sa représentation en tant qu'ensemble de points reliés ou non par des traits. Si l'on s'intéresse à cette représentation en tant que telle, on peut trouver dès l'Antiquité des dessins que l'on peut identifier à des graphes en particulier parmi les jeux. Le jeu du moulin[1], par exemple, est décrit par Louis Becq de Fouquières, qui en cite deux mentions dans *l'Art d'aimer* et les *Tristes* d'Ovide. Voici une illustration du treizième siècle de ce jeu :

[1]Les noms de ce jeu sont multiples. On trouve par exemple jeu de Merelles, jeu de Morris, jeu de mérelles, etc.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

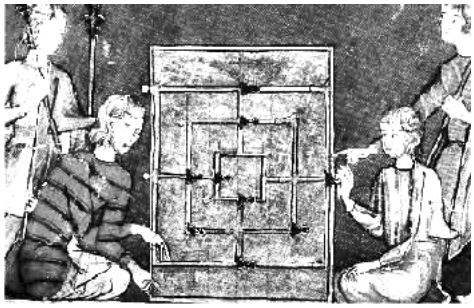


FIG. 1.1: *Une représentation du treizième siècle du jeu du moulin.*

Citons L. Becq de Fouquières énonçant les règles de ce jeu sur un plateau réduit :

> *Chaque joueur a dans la main trois pierres et l'on tire au sort à qui posera le premier. Pour plus de simplicité nous pouvons supposer une partie. Celui qui a les noires, devant poser le premier, placera naturellement sa pierre en A, le second joueur la placera soit en A', et alternativement chaque joueur posera une pierre, soit en B, B', C, C'. Lorsque toutes les pierres sont placées, on joue en poussant une pierre de la station qu'elle occupe à une station voisine inoccupée. La partie, par exemple, pourra continuer par les coups alternés des noires et des blanches, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Au septième coup, les noires gagneront se trouvant sur une seule et même ligne.*

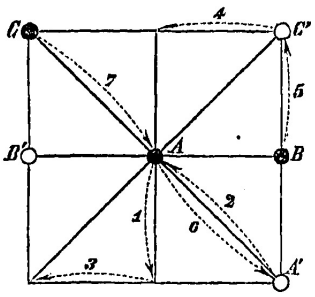


FIG. 1.2: *Une partie gagnante pour les noires.*

Ce jeu est un jeu de graphes. Les sommets sont les places sur lesquelles peuvent se poser les pierres, et les arêtes autorisent le déplacement d'un sommet à un autre.

Depuis l'Antiquité, il semble donc que des représentations de graphes aient existé. Tout comme Monsieur Jourdain et la prose, il y a des siècles que les humains dessinent des graphes sans le savoir.

Une autre représentation est répandue depuis le Moyen-Âge (et déjà décrite par Pline l'Ancien et Sénèque[1]). Il s'agit des arbres généalogiques[2]. Dans ce cas, la représentation

[1]D'après [35].

[2]Vous trouverez de très belles illustrations d'arbres généalogiques ainsi que d'autres graphes dans

a une signification forte. L'arbre[1] généalogique est orienté (même si ce n'est pas de façon explicite), la « racine » étant un couple et les « feuilles » les descendants sans enfant.

Mais à nouveau, si l'objet dessiné s'apparente à un graphe, ou même à un type particulier de graphes, il n'a pas le statut d'objet mathématique. Il faut attendre la fin du dix-huitième siècle, en 1771, pour rencontrer le dessin d'un graphe dont le but est de modéliser un problème mathématique. Ce graphe a été tracé par Vandermonde, qui l'utilisa pour illustrer une solution du problème du déplacement du cavalier sur l'échiquier[2]. Voici une reproduction (voir [9] page 24) de ce graphe[3] :

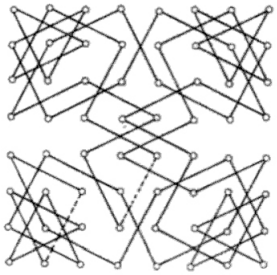


FIG. 1.3: *Une représentation du déplacement du cavalier sur un échiquier.*

1.2 L'histoire des parcours eulériens dans les graphes

La théorie des graphes est traditionnellement[4] considérée comme née sous la plume de Leonhard Euler en 1736[5].

[35]. Cet article aborde la représentation des graphes dans l'histoire de façon bien plus détaillée que la nôtre.

[1]Un arbre généalogique est-il un arbre au sens de la théorie des graphes ? Autrement dit existe-t-il une suite unique de parenté d'une personne à l'autre du même arbre généalogique ? En toute généralité la réponse est non.

[2]Le problème a été posé par Euler qui en a donné une solution : peut-on trouver un chemin passant une et une seule fois par chacune des cases de l'échiquier en suivant la règle de déplacement du cavalier ?

[3]Ce graphe est en fait un sous-graphe de G, le graphe des déplacements possibles du cavalier sur l'échiquier. Chercher un chemin passant par tous les sommets de G est équivalent à chercher un chemin hamiltonien dans G. Le graphe de la figure 1.3 est un exemple d'un tel chemin.

[4]Nous ne partageons pas forcément cet avis. Il est toujours difficile, voire impossible de savoir quand précisément un concept a émergé dans l'histoire. Mais comme nous le verrons, il n'y a dans cet article d'Euler ni représentation de type points reliés par des traits, ni idée de « description de relations entre objets ». Considérer le problème comme un problème de graphes nous semble être une reconstruction a posteriori. On pourrait même penser que faire remonter la naissance du concept de graphe à Euler est une façon de légitimer l'objet mathématique.

[5]Ou 1735, date d'une communication d'Euler à l'académie des sciences traitant de ce sujet.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

1.2.1 Les ponts de Königsberg et la géométrie de position

Le problème des ponts de Königsberg a été proposé à Euler par Karl Ehler en 1735. Ehler, féru de mathématiques, expose dans une lettre[1] le problème. Euler ébauche une solution, puis lui répond en ces termes :

> *Comme vous le voyez, noble Monsieur, ce type de solution entretient peu de lien avec les mathématiques, et je ne comprends pas pourquoi vous comptez sur un mathématicien plus que sur un autre pour le résoudre, car la solution est basée seulement sur la raison et sa découverte ne repose sur aucun principe mathématique.*

La motivation d'Euler pour publier un article à ce sujet semble être principalement liée à la volonté d'illustrer la géométrie de position[2] dont Leibniz avait pressenti l'existence sans en avoir donné d'exemple. En voici la description[3] par Leibniz :

> *Il nous faut encor une autre Analyse proprement geometrique ou lineaire, qui nous exprime directement* ***situm****, comme l'Algebre exprime* ***magnitudinem****. Et je croy d'en avoir le moyen et qu'on pourroit representer des figures et meme des machines et mouvemens en caracteres, comme l'Algebre represente les nombres ou grandeurs.*

Dans son article[4], Euler mentionna dès l'introduction le fait que, comme Ehler le lui avait suggéré, le problème relevait de la géométrie de position :

> *Outre cette partie de la géométrie qui traite des grandeurs et qui a été de tout temps cultivée avec beaucoup de zèle, il en est une autre, jusqu'à nos jours complètement inconnue, dont Leibnitz a fait le premier mention et qu'il appela géométrie de position. D'après lui, cette partie de la géométrie s'occupe de déterminer seulement la position et de chercher les propriétés qui résultent de cette position, dans ce travail, il n'est besoin, ni d'avoir égard aux grandeurs elles-mêmes, ni de les calculer, mais il n'est pas encore assez bien établi quels sont les problèmes de ce genre appartenant à la géométrie de position, et quelle méthode il faut employer pour les résoudre ; c'est pourquoi lorsque récemment il fut question d'un problème qui semblait, à la vérité, se rattacher à la géométrie ordinaire, mais dont cependant la solution ne dépendait, ni de la détermination de grandeurs, ni du calcul de quantités, je n'ai point balancé à le rapporter à la géométrie de position, d'autant plus que les considérations de position entrent seules dans la solution, tandis que le calcul n'y est pour rien. J'ai donc cru utile d'exposer ici, comme un exemple de géométrie de position, la méthode que j'ai trouvée pour résoudre les problèmes de ce genre.*

Suivons maintenant Euler à travers cet article. Voici l'énoncé de ce fameux problème :

---

[1] Voir l'article [47] dont est issue la citation suivante.

[2] Appelée aussi (entre autres) analys situs ou géométrie de situation.

[3] Voir [39] page 12.

[4] Les citations suivantes sont issues de la traduction du latin au français de l'article de L. Euler par E. Coupy [17], dont le lecteur trouvera l'intégralité en annexe A. Une autre traduction de l'article est donnée par Lucas, dans le tome 1 de ses *récréations mathématiques* [40].

À Kœnigsberg, en Prusse, il y a une île A appelée le Kneiphof, entourée d'un fleuve qui se partage en 2 bras, comme on peut le voir sur la figure 1, mais les bras de ce fleuve sont garnis de 7 ponts a, b, c, d, e, f, g, et l'on proposait cette question sur ces ponts : Une personne peut-elle s'arranger de manière à passer une fois sur chaque pont, mais une fois seulement ?

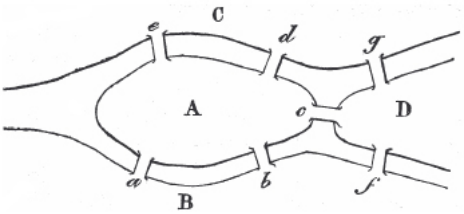


FIG. 1.4: *Figure 1*

Les uns affirmaient que cela était possible ; d'autres niaient, d'autres en doutaient ; mais personne ne pouvait prouver. Quant à moi, j'ai fait de ce problème le suivant beaucoup plus général :
Quelle que soit la figure du fleuve et sa distribution en bras, et quel que soit aussi le nombre des ponts, trouver si une personne peut traverser le fleuve en passant une seule fois sur chaque pont.

1.2.2 La modélisation du problème par Euler

Dans cette version originale du problème, Euler propose une modélisation qui consiste à désigner chacune des berges par une lettre majuscule, les ponts par une lettre minuscule et à étudier l'existence de listes d'une taille donnée de lettres majuscules. Par exemple, sur la figure précédente, la liste $CABD$ peut correspondre à un parcours de la berge C à la berge A par le pont e, puis de A vers B par le pont a, puis de B vers D par f.

L'impossibilité de passer deux fois par le même pont se traduit par l'impossibilité qu'une liste comporte plus de fois la séquence XY ou YX qu'il n'existe de ponts entre les berges X et Y. Pour illustrer cette règle, les séquences AD et DA, par exemple, ne peuvent pas exister conjointement dans une liste solution au problème des ponts de Königsberg, étant donné qu'il existe un seul pont entre A et D : ADA, DAD, $AD\ldots DA$, $AD\ldots AD$, $DA\ldots DA$ ou $DA\ldots AD$ ne peuvent être sous-séquences d'une liste solution.

Pour Euler, une solution est une liste comportant exactement une lettre de plus qu'il n'y a de ponts, et répondant aux contraintes précédentes.

Euler propose ensuite une règle pour répondre au problème général de promenades sur des ponts :

S'il y a plus de deux régions auxquelles conduisent un nombre impair de ponts, vous pouvez affirmer avec certitude qu'un tel passage est impossible. Mais si l'on est seulement conduit à deux régions par un nombre impair de ponts, le passage est possible, mais en commençant sa course par l'une ou l'autre de ces deux régions. Enfin, s'il n'y

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

a aucune région à laquelle on soit conduit par un nombre impair de ponts, alors le passage pourra avoir lieu, comme on le désire, et en commençant sa marche par telle région qu'on voudra.

Si l'on se hasarde à une « traduction » de ce paragraphe en utilisant une terminologie plus contemporaine, on pourra écrire que :

Un parcours eulérien est possible si, et seulement si, deux régions au plus ont un nombre impair de ponts y conduisant. Si deux régions ont un nombre impair de ponts y conduisant, le parcours commencera par l'une de ces deux régions.

Le parcours de chaque pont de Königsberg, où à chacune des quatre régions conduit un nombre impair de ponts, est donc impossible.

Quant à la détermination explicite d'une promenade, si elle est possible, Euler en dit, en conclusion de l'article :

[...] *qu'on néglige par la pensée, autant de fois qu'on peut le faire, 2 ponts conduisant d'une région à une autre ; par cette abstraction, le nombre des ponts se trouvera généralement de beaucoup réduit ; qu'on cherche alors, ce qui sera facile, la course demandée pour les ponts qui restent, et cela trouvé, les ponts enlevés par la pensée ne troubleront pas beaucoup le résultat obtenu, comme il est aisé de le voir avec un peu de réflexion ; et je crois inutile d'insister davantage pour trouver la marche qu'on devra suivre pour répondre à la question proposée.*

Une première remarque est que d'une façon générale, on ne peut pas « négliger » deux ponts conduisant d'une région à une autre, deux « ponts parallèles », au risque de « déconnecter » les différentes parties de la promenade.

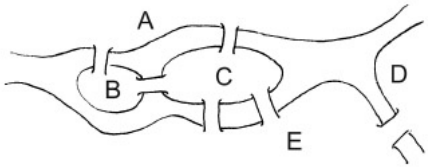


FIG. 1.5: *Une configuration avec des ponts parallèles*

Une promenade respectant les règles d'Euler est possible ici, en partant de D ou de E, deux régions auxquelles mène un nombre impair de ponts. Si l'on « néglige par la pensée » les ponts parallèles, c'est-à-dire les deux ponts entre C et E, le parcours n'est plus possible : il n'y a plus de chemin entre la région D et les régions A, B, C. Cela ne « troublera pas beaucoup le résultat obtenu » à la condition que l'on puisse et que l'on sache « recoller » les différents « bouts de promenades » effectués dans chacune des régions ainsi déconnectées. Pour reprendre les termes d'Euler, on peut « négliger par la pensée, autant de fois qu'on peut le faire, deux ponts conduisant d'une région à une autre », dès lors que trois ponts au moins relient ces deux régions.

Mais outre ce détail, il est surtout étonnant de constater dans cette conclusion qu'Euler

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

ne voit pas de nécessité d'écrire une stratégie générale de résolution permettant d'exhiber un parcours répondant à la question qu'il se posait. Cela est-il réellement « aisé avec un peu de réflexion » ? Si la configuration comporte moins de quinze ponts (ce qui est le maximum dans les exemples donnés par Euler dans cet article), sûrement ; si les ponts sont au nombre d'une centaine, le « peu de réflexion » pourrait être quelque peu systématisé.

1.2.3 Preuve proposée par Euler

Comment prouver la conjecture : « Un parcours eulérien est possible si, et seulement si, deux régions au plus ont un nombre impair de ponts y conduisant » ?

Euler propose au cours de son article plusieurs pistes. Il évoque l'application d'une méthode exhaustive, mais la rejette immédiatement :

> *Mais ce mode de solution, à cause du si grand nombre de combinaisons, serait trop difficile et trop laborieux, et ne pourrait même plus s'appliquer dans les autres questions où il y aurait beaucoup plus de ponts.*

Euler propose et montre en outre une propriété :

> *Je remarque d'abord que la somme des nombres de ponts écrits à côté de chaque lettre A, B, C, D,..., est double du nombre total des ponts ; la raison en est que dans le calcul qui donne tous les ponts conduisant à une région donnée, un pont quelconque est compté deux fois, c'est-à-dire que chaque pont est rapporté à l'une et l'autre des deux régions qu'il joint.*

Dans un graphe non orienté cette propriété est une propriété sur la somme des degrés des sommets d'un graphe qui peut s'énoncer ainsi : la somme des degrés des sommets d'un graphe est le double du nombre d'arêtes.

Du théorème qu'Euler propose, celui-ci démontre un sens de l'équivalence, le sens « standard », à savoir : pour qu'un parcours eulérien soit possible, il faut que zéro ou deux régions aient un nombre impair de ponts y conduisant.

Sa démonstration repose sur le nombre de lettres nécessaires dans une liste pour que celle-ci soit solution :

> Si le nombre de ponts est p, la solution est une liste de $p+1$ lettres majuscules répondant aux contraintes décrites précédemment. Si i_R ponts conduisent à une région R, le nombre de fois où son nom apparaîtra dans la liste est égal à :
> – la moitié des ponts y conduisant plus 1 si ce nombre est impair, c'est-à-dire $(i_R+1)/2$
> – la moitié s'il est pair, et que le parcours ne commence ou ne termine pas par cette région, c'est-à-dire $i_R/2$
> – la moitié plus un sinon, c'est-à-dire $(i_R/2)+1$.
> Sachant de plus que la somme du nombre de ponts conduisant à chaque région est égale à $2p$, on obtient la conclusion désirée, c'est-à-dire qu'il est nécessaire que 2 régions au plus soient de degré impair pour qu'un parcours soit envisageable. En effet, on doit

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

avoir :
- La somme, pour tous les R, des $(i_R + 1)/2$ pour i_R impair et des $i_R/2$ pour i_R pair doit être inférieure à $p + 1$.
- La somme des i_R doit être égale à $2p$.

Ces deux conditions sont remplies seulement si deux régions au plus ont un nombre impair de ponts y conduisant.

On peut remarquer que la nécessité de « connexité » de la configuration de ponts et de régions n'est pas évoquée dans cette règle. Cette absence résulte sûrement de la genèse même de la question : implicitement on peut toujours se déplacer entre les différentes régions d'une même ville, on s'interroge alors sur l'existence d'une promenade eulérienne. La connexité va donc ici de soi, ce qui ne sera pas le cas pour une « promenade » dans un graphe.

Reste maintenant la preuve de la réciproque, soit : si une configuration de ponts et de berges est telle que soit zéro, soit deux régions ont un nombre impair de ponts y conduisant, alors une promenade passant par tous les ponts est possible. Cette preuve ne fait pas partie de l'article qu'Euler publie, il semble qu'il a considéré cette réciproque comme évidente. À propos de cette réciproque, les auteurs de *Graph theory 1736-1936* [9] écrivent :

> *Unfortunately, Euler did not give a proof of the latter result, presumably because he considered it to be self-evident. This lack of precision was quite common among eighteenth-century mathematicians, and occasionally it led them into the realm of fantasy, as when Euler asserted the truth of the equation*
>
> $$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots = 1/2.$$

1.2.4 Résolution du problème

La preuve complète[1] du théorème d'Euler sera apportée par Carl Hierholzer (1873), plus de 100 ans plus tard, indépendamment de l'article d'Euler sur les ponts de Königsberg, dont il n'avait a priori pas connaissance. Le terme de graphe n'y est pas utilisé, le problème étant de parcourir un « réseau de lignes », « sans interruption ni répétition », les sommets sont nommés « nœuds », et les arêtes « branchements ». La preuve s'appuie sur la possibilité de « rattacher » à la partie du réseau qui a déjà été parcourue, les parties qui ne l'ont pas été.

La représentation du problème des ponts de Königsberg par un graphe apparaîtra en 1892, soit 156 ans après la publication d'Euler. C'est W.W. Rouse Ball qui proposera le premier[2] ce graphe au cours de l'une de ses *récréations mathématiques* [46].

[1] Une traduction en anglais de l'article de Hierholzer [33] est donnée page 11 dans [9].

[2] Même si la rumeur, non justifiée, circule sur l'internet à propos d'un certain « petit dessin » qu'Euler aurait fait dans l'une des marges de son papier sur les ponts de Königsberg.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

1.3 Quelques dates clés

Nous donnerons ici quelques repères concernant des problèmes ayant une importance historique pour la théorie des graphes.

Le problème hamiltonien : Le problème hamiltonien peut paraître proche du problème eulérien. Il s'énonce ainsi : *Existe-t-il un chemin ou un circuit passant par tous les sommets d'un graphe une et une seule fois ?* Ce problème n'a pas de solution générale aujourd'hui. On ne connaît pas de critères simples sur la structure des graphes permettant d'affirmer l'existence d'un tel chemin. Ce type de problème a été proposé par Euler en 1759 dans un article intitulé *Solution d'une question curieuse qui ne paroit soumise à aucune analyse* [24]. Il s'agissait de déterminer la possibilité du déplacement d'un cavalier passant une et une seule fois sur chacune des cases d'un échiquier. Le nom du problème fait référence[1] à William Rowan Hamilton, fameux astronome et mathématicien du dix-neuvième siècle, qui a, entre autres, proposé ce problème sur le graphe représentant le squelette du dodécaèdre.

Le concept d'arbre : Le terme arbre (que nous pouvons définir comme un graphe connexe sans cycle) a été utilisé dans cette acception dès 1847 par Gustav Robert Kirchhoff, lors d'un article[2] traitant des circuits électriques ; il a été repris dix ans plus tard par Cayley, qui a cherché à dénombrer les arbres isomorphes d'une certaine taille et pour lesquels un sommet appelé *racine* est particularisé.

Le concept de graphe : La paternité du terme *graphe*, ou plutôt *graph* en anglais, peut être attribuée à James Joseph Sylvester. Il est le premier, en 1877, à l'utiliser dans le sens où nous le connaissons actuellement. Son utilisation provient d'un article intitulé *Chemistry and Algebra*[3]. L'essor de la théorie des graphes peut être situé durant le vingtième siècle, lorsque le graphe s'est détaché du modèle pour devenir un objet mathématique indépendant. Le graphe peut en effet être considéré comme modèle d'une relation binaire. Pourquoi alors ne pas le voir comme une application de la théorie des relations ? Le graphe en tant que « dessin de points reliés par des traits » permet de se poser des questions qui ne prennent pas sens dans la théorie des relations. La planarité, par exemple, est une notion intimement liée à la représentation même de la relation.

Le théorème des 4 couleurs : Énoncé en 1852 par Francis Guthrie, ce problème a été résolu à la fin du vingtième siècle. Dans sa première forme, il s'énonçait ainsi : peut-on colorier avec quatre couleurs une carte géographique de telle façon que deux régions limitrophes[4] aient une couleur différente ? Ce problème a donné lieu à une littérature prolifique composée de preuves fausses du théorème des 4 couleurs, de théorèmes des 6 ou 5 couleurs et, finalement de la contreverse qui a agité la communauté mathématique à

[1] Même si la paternité du problème reviendrait plutôt à Thomas Penyngton Kirkman, d'après [9], page 31.

[2] *Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei des Untersuchung des linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird*, Ann. Phys. Chem. 72, pp. 497–508.

[3] Publié en 1878 dans *Nature* n°17 p 284. Cet article est reproduit dans [9] page 65.

[4] Deux régions sont considérées comme limitrophes si leurs frontières communes ne se limitent pas à un point ou un ensemble de points. Chaque région est connexe.

la publication[1] d'une preuve de Kenneth Appel et Wolfgang Haken utilisant l'ordinateur pour le résoudre en 1976.

La théorie des graphes en France : La théorie des graphes a connu un développement dès le dix-neuvième en France, autour de la géométrie de position et des recréations mathématiques[2]. Mais les graphes ont eu du mal à s'imposer comme une théorie[3]. Le terme même de graphe était refusé par la communauté mathématique française, étant déjà utilisé pour désigner la représentation graphique d'une fonction. Le changement de point de vue sur le graphe et sa sortie du champ des récréations mathématiques a été initié en France par Claude Berge : « il fallut attendre Claude Berge pour s'apercevoir que ces théorèmes pouvaient être généralisés et former une véritable théorie mathématique au même titre que la Théorie des Ensembles ; avec en outre des algorithmes permettant de résoudre des problèmes pratiques »[4]. Le nom de Claude Berge est intimement lié à celui de la conjecture des graphes parfaits[5], qu'il a émise dans un article publié en 1963, et qui vient seulement d'être résolue en 2002[6].

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

[1]Publié en 1977 *Solution of the Four Color Map Problem*, Scientific American, vol.237 n°4, pp. 108–121.

[2]En témoignent la liste d'articles contenus dans [9] pp. 223–234.

[3]Voir ce qu'en disait Claude Berge dans [42] pp. 27–39.

[4]Par Daniel Dugué en 1961 : *Présentation d'une conférence de C. Berge sur la Théorie des Graphes*, Palais de la découverte, Paris.

[5]Un graphe parfait est un graphe pour lequel le nombre chromatique est égal à la taille de sa plus grande clique et ce de façon héréditaire. La conjecture porte sur la caractérisation de ces graphes par des configurations exclues.

[6]Par Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul D. Seymour et Robin Thomas ; publié en 2003 dans *Progress on perfect graphs* Mathematical Programming 97, no. 1-2, Ser. B, pp. 405–422. Consultable à l'adresse suivante : `http://www.math.gatech.edu/~thomas/PAP/perfsur.pdf`.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Chapitre 2

La théorie des graphes dans l'enseignement mathématique en France

Depuis la rentrée 2002, des éléments de théorie des graphes ont été introduits dans l'enseignement de spécialité mathématique de la Terminale économique et sociale (ES) en France. Avant de revenir sur le programme en lui-même et sa mise en place, nous étudierons la place des graphes dans l'enseignement en France, que ce soit en mathématiques ou dans d'autres disciplines. Puis nous indiquerons la façon par laquelle les graphes sont apparus dans le curriculum français, en décrivant succinctement le travail de différentes commissions qui a abouti à cette apparition. Enfin nous analyserons le programme en cherchant à recenser les énoncés des problèmes proposés aux élèves et à décrire les techniques qui leur sont présentées permettant de les résoudre.

2.1 Intérêt d'un enseignement d'éléments de théorie des graphes

L'introduction d'un enseignement de la théorie des graphes peut être motivée par plusieurs arguments. La théorie des graphes est un domaine récent des mathématiques. Elle permet l'enseignement de mathématiques vivantes, pour lesquelles des questions ouvertes[1] compréhensibles existent. Les obstacles notionnels y sont souvent moins importants que dans d'autres branches des mathématiques. De plus, c'est une discipline qui connaît de nombreuses applications concrètes dont on peut voir les résultats à l'œuvre dans la vie courante, que ce soit le routage dans les réseaux de télécommunication, la régulation du trafic aérien, l'allocation de fréquences, la gestion de files d'attente pour les distributeurs automatiques ou le calcul d'itinéraires routiers par exemples.

De façon plus générale, il a été montré[2] que l'enseignement d'éléments de mathématiques

[1] Dans le sens où elles ne sont pas résolues.

[2] Voir entre autres à ce sujet la thèse de Julien Rolland [45] et l'article [30] de Charles Payan et Denise

discrètes permet l'accès à des notions et pratiques centrales de l'activité mathématique telles que l'argumentation, la conjecture, la distinction entre condition nécessaire et condition suffisante (CN, CS), la preuve, la modélisation, etc. Nous reprendrons un paragraphe de la conclusion à laquelle est arrivé Julien Rolland dans sa thèse intitulée « Pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentissage de la modélisation et de l'implication » :

> *Nous montrons en quoi, d'un point de vue théorique et en l'illustrant avec une proposition d'ingénierie, les mathématiques discrètes offrent un cadre favorable pour les choix de variables qui nous intéressent ce qui nous permet de confirmer nos thèses quant à la pertinence des mathématiques discrètes :*
> – *pour l'évolution du rapport à la modélisation dans le sens d'une meilleure conformité à celui de l'institution savante ;*
> – *pour faire le lien entre modélisation et distinction CN/CS ;*
> – *et, puisque les notions sont liées, pour problématiser cette distinction CN/CS.*

La théorie des graphes est souvent considérée comme un domaine « ludique » des mathématiques. Les premiers livres de « récréations mathématiques », tels ceux de Rouse Ball [46], Lucas [40] et [41] ou Sainte-Lagüe [48], offrent tous des problèmes de graphes ou du moins, des problèmes que l'on peut modéliser et résoudre à l'aide de graphes. Cet aspect ludique nous semble trompeur, même s'il est souvent avancé pour promouvoir l'intérêt de l'enseignement des graphes ou des mathématiques discrètes en général. L'argument a un caractère quelque peu démagogique, qui peut faire perdre l'intérêt de ces champs des mathématiques, pour les transformer en une compilation d'énigmes ou de « casse-têtes », pour lesquels on ne recherche qu'une réponse locale. La présentation de problèmes de graphes sous forme de « jeux », matériels ou non, pourra être utilisée pour faciliter l'entrée des élèves dans l'activité, mais c'est lorsque celle-ci se sépare du jeu que commence généralement l'activité mathématique en tant que telle[1].

On peut aussi voir l'enseignement d'éléments de théorie des graphes comme une façon d'introduire aux élèves des notions d'algorithmique. Cela a été, semble-t-il, une grande motivation pour l'introduction de cet enseignement au programme de la Terminale ES, comme nous le verrons par la suite. En effet, parmi les nombreuses applications pratiques des graphes, la plupart sont algorithmiques. Les algorithmes développés par les mathématiciens discrets se prêtent bien à l'implémentation informatique, dans la mesure où le graphe est un objet discret aisément représentable de façon matricielle ou par listes chaînées par exemple.

De nombreuses raisons existent pour justifier l'introduction dans l'enseignement secondaire d'éléments de mathématiques discrètes en général, et de théorie des graphes en particulier. Nous donnerons dans le paragraphe 2.3.1 celles qui ont motivées les concepteurs du programme français en 2001.

Grenier.

[1]Ce qui n'implique pas que les mathématiques ne puissent être « plaisantes et délectables », bien entendu.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

2.2 Les graphes dans l'enseignement général en France

2.2.1 En dehors des mathématiques

Nous avons recherché dans les programmes du lycée et leurs documents d'accompagnement[1] les mots et expressions « graphe », « représentation graphique », « schéma » ainsi que les termes en dérivant. Nous avons aussi recherché, parmi les illustrations des documents d'accompagnement, des représentations arborescentes ou des schémas pouvant être considérés comme des graphes. Cette recherche s'est révélée infructueuse. Nous n'avons trouvé aucune occurrence du terme « graphe », seulement quelques représentations pouvant en évoquer un, mais dont l'utilisation se limitait à être un support lisible d'informations. Une trace de l'utilisation de graphes se trouve dans le programme de seconde Productique, en enseignement de détermination : « informatique et systèmes de production ». Depuis 2001, on y fait mention des diagrammes de Gantt[2], souvent associés en gestion de production à la méthode PERT[3] permettant d'ordonnancer efficacement des tâches. Les graphes de dépendances, utilisé par la méthode PERT, ne sont pas présents en tant que tels dans le programme, même si l'on peut imaginer que, lors de la présentation en classe du problème, ils soient proposés par le professeur comme une bonne façon de présenter les contraintes d'ordonnancement. On trouve aussi la mention de l'utilisation des grafcets[4] dans le programme de sciences de l'ingénieur en cycle terminal[5] :

> *Pour une application donnée sur un système séquentiel mis à disposition et/ou défini par un dossier, le cahier des charges et les frontières de l'étude étant précisés et le grafcet fourni :*
> – *analyser et interpréter le grafcet fourni en décrivant, depuis une situation donnée, la suite des situations atteintes au cours de l'évolution ;*
> – *vérifier le respect de certaines contraintes formulées dans le cahier des charges (temporelles, de sécurité) ;*
> – *élaborer un diagramme décrivant l'enchaînement temporel des différentes tâches.*

Le grafcet permet de représenter et d'analyser le fonctionnement d'un automatisme ; on l'utilise en particulier pour décrire les systèmes pour lesquels les actions sont décomposables en étapes. En voici un exemple[6] :

[1] Cette recherche a été menée dans les disciplines suivantes : économie, sciences de la vie et de la Terre, physique, sciences de l'ingénieur et différentes spécialités de la série STI.

[2] Du nom de l'ingénieur les ayant mis au point dans les années 1910, Henry Laurence Gantt.

[3] Acronyme de « Program (ou Project) Evaluation and Review Technique », soit « technique d'évaluation et d'examen de programmes » ou « de projets ».

[4] Acronyme de « GRAphe Fonctionnel de Commandes Etapes/Transitions ».

[5] Voir le B.O. hors-série n°3 du 30 août 2001, page 71, disponible à l'adresse suivante : `ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/bo/2001/hs3/inge.pdf`.

[6] Vous trouverez le dispositif détaillé sur : `http://www.si.ens-cachan.fr/ressource/r12/r12_STEP_bis.htm`.

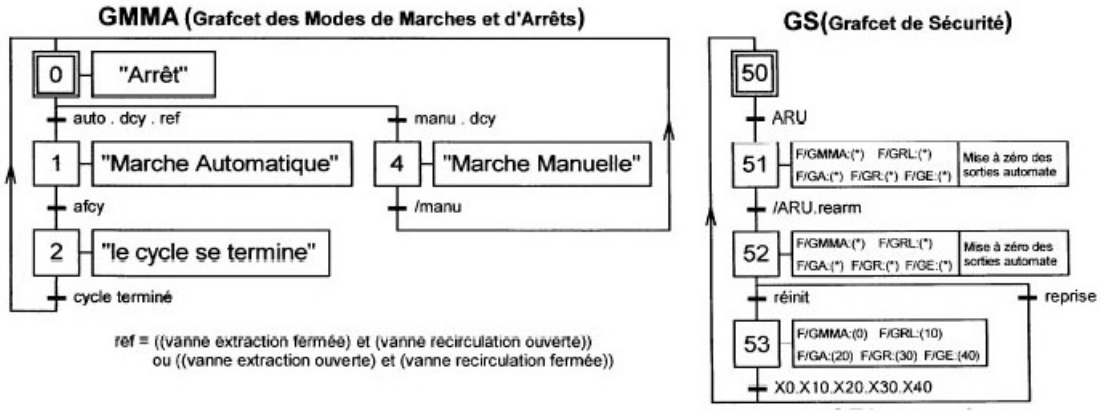


FIG. 2.1: *Exemples de grafcet issus de ressources à destination des enseignants de lycée et concernant le fonctionnement d'une station d'épuration.*

Le grafcet est un graphe bien particulier. Il est orienté, ses sommets sont des étapes qui représentent des actions ou des ensembles d'étapes, et ses arêtes, nommées transitions, sont étiquetées (par des tests booléens, par exemple). Ce graphe demeure un simple outil de représentation, il nous paraît difficile, dans la façon dont il est présenté aux élèves, de le considérer comme un objet mathématique.

2.2.2 En mathématiques en dehors de la Terminale ES

Nous reprendrons ici principalement les conclusions du travail de Laure Balmand (voir [5]) traitant de la place de l'objet graphe dans les manuels scolaires et des rapports d'enseignants à cet objet. Son mémoire porte sur les manuels en vigueur en 1997. À l'époque, les graphes n'apparaissent pas dans les programmes, mais certains manuels contiennent des schémas ou des graphiques qui, même s'ils n'en portent pas explicitement le nom, sont des graphes. On les trouve dans deux lieux principaux : d'une part l'organisation de calculs au collège (ordre des opérations arithmétiques lié au parenthésage), d'autre part le dénombrement et les probabilités en classe de Première et de Terminale pour présenter les différents cas possibles, ou les différentes issues possibles d'une expérience aléatoire. La plupart sont donc de fait le plus souvent des arbres, comme les arbres de calculs, d'opérateurs, les arbres de choix ou les arbres de probabilités. Il ressort de cette étude que les propriétés des graphes, même quand elles sont utiles à la résolution des exercices, ne sont pas explicitées.

Laure Balmand conclut son étude de manuels scolaires ainsi :

> *L'étude des programmes nous montre que les graphes sont absents de la scolarité du secondaire. Les cas que nous avons recensés dans les manuels scolaires sont des cas marginaux.*
>
> *Les graphes ne sont pas explicitement présents comme objets qu'au niveau du lycée sous*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

forme d'arbres. Les arbres ne sont pas considérés comme des graphes. L'arbre est un objet à part entière, indépendant et non pas un cas particulier d'un autre objet mathématique. Les arbres présentés dans les manuels scolaires sont en fait des arborescences (et donc orientées) qui vont de soi et ne présentent qu'une seule racine qui est immuable. Les arbres sont soit pendus à partir de cette racine soit développés à droite à partir de la racine. Ils ne sont pas explicitement fléchés mais le sens des arcs est sous-entendu. Derrière cet objet naturel utilisé dans l'enseignement, il existe une propriété importante qui ne paraît pas figurer dans la théorie : l'aspect inductif [...]

Les propriétés mathématiques des graphes sont utilisées mais jamais exprimées. [...]

L'analyse écologique que nous avons menée est tournée vers ce que les manuels font du graphe et non pas vers l'objet lui-même. Pourquoi l'arbre existe-t-il et est-il utilisé ? Pourquoi est-il pertinent ? [...] *Dans les manuels étudiés figurent des discours sur l'arbre. Une impression ressort : les auteurs semblent s'interdire de parler de l'arbre en tant qu'objet mathématique.* [...]

Depuis 1997 (et en dehors de l'option mathématique de Terminale ES), on note peu de changements dans la place qu'occupe le graphe dans l'enseignement des mathématiques. On notera tout de même une modification du statut de l'arbre de probabilité en Terminale Scientifique dans les commentaires du programme[1] : « *Un arbre de probabilité correctement construit constitue une preuve* ».

En dehors de ces infimes changements, nous reprenons les conclusions de L. Balmand à notre compte : le graphe en tant qu'objet mathématique est absent de l'enseignement secondaire français, en dehors de la spécialité mathématique de Terminale ES.

2.3 Analyse d'une première transposition : le graphe au programme de la Terminale ES

2.3.1 Historique de l'introduction d'éléments de théorie des graphes dans le curriculum français

En 1999, à l'initiative du ministère de l'Education Nationale, une commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques[2] (CREM) a été créée à la demande de plusieurs associations : APMEP, SMAI, SMF et UPS[3]. Sa mission était de « conduire, en amont du conseil national des programmes et du groupe d'experts chargés d'élaborer les programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire, une réflexion globale et à

[1] B.O. hors série n°4 du 30 août 2001 page 70, disponible à l'adresse suivante : `http://www.education.gouv.fr/bo/2001/hs4/default.htm`.

[2] Aussi nommée Commission Kahane.

[3] APMEP : Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public, SMAI : Société de Mathématique Appliquées et Industrielles, SMF : Société Mathématique de France, UPS : Union des Professeurs de Spéciales.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

long terme sur l'enseignement des mathématiques de l'école élémentaire à l'université ». Elle était composée en majorité d'enseignants de mathématiques et de chercheurs. Trois d'entre eux appartenaient parallèlement au Conseil National des Programmes (CNP), et un autre membre présidait le groupe d'experts pour les programmes du secondaire (GEPS) de mathématiques. Nous avons recherché, parmi les interventions des personnes auditionnées par la CREM, celles montrant une volonté d'introduction de la théorie des graphes. Dans les résumés à notre disposition, nous n'avons pas vu cette volonté exprimée directement, mais deux interventions peuvent s'en rapprocher. Le 13 mai 2000, Frédéric Bonnans, directeur de recherche à l'INRIA[1], et Christian Saguez, directeur de recherche au CNES[2], ont mentionné les besoins des entreprises pour des mathématiques industrielles.

F. Bonnans a parlé des mathématiques industrielles basées sur la Recherche Opérationnelle et la simulation physique en ces termes :

> *L'université forme des étudiants en mathématiques à vocation industrielle, à travers les maîtrises de maths appliquées et les DESS. Il n'en reste pas moins que les concours de recrutement de professeurs tendent à piloter le système dans un sens peu favorable aux mathématiques industrielles. L'université pourrait former beaucoup plus d'étudiants en mathématiques, à condition de leur donner une formation plus solide en informatique et algorithmique et, soit en physique, soit en gestion.*
> *Dans le secondaire, il semble utile d'effectuer une sensibilisation des élèves à la modélisation. Plus généralement, il serait bon de faire mieux connaître différents aspects des mathématiques industrielles pour faire évoluer l'image de la discipline.*

C. Saguez a quant à lui évoqué :

> *le rôle des mathématiques dans tous les domaines de la vie personnelle et professionnelle – message important dans le cadre d'un enseignement – pour les implications pratiques des mathématiques* et
> *les besoins de l'industrie en compétences mathématiques dans de nombreux secteurs, notamment autour des technologies de l'information et de la communication.*

La CREM a produit quatre rapports d'étapes : « La géométrie et son enseignement », « Informatique et enseignement des mathématiques », « Calcul », « Statistique et Probabilités » qui ont été publiés, puis un cinquième rapport intitulé « Formation des maîtres et recommandations associées ».

Il semble que la motivation principale d'une introduction d'éléments de théorie des graphes soit essentiellement liée à la volonté d'introduire un enseignement d'informatique en mathématiques. Le rapport[3] « Informatique et enseignement des mathématiques » est le seul traitant explicitement des graphes :

> **Un exemple : étude des graphes**
> – *Un très grand nombre de problèmes ou de situations peuvent être modélisés par des*

[1]Institut National de Recherche en Informatique et Automatique.
[2]Centre National d'Études Spatiales.
[3]Ce rapport est disponible à l'adresse suivante : `http://eduscol.education.fr/D0015/informatique.pdf`. Le texte qui suit est extrait des pages 14 et 15.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

graphes. Un plan de métro ou une carte routière sont des exemples de graphes utilisés quotidiennement, l'ensemble des nombres entiers reliés avec les règles de la suite de Syracuse en est un autre, moins usité.
Les graphes sont sans doute un des exemples les plus simples pour lesquels plusieurs représentations d'un même objet sont naturelles. Un graphe peut être défini par la liste de ses sommets et de ses arêtes mais aussi par la liste de ses sommets et pour chacun d'eux la liste de ses successeurs ou bien encore par sa matrice d'adjacence. On peut illustrer l'influence du choix d'une structure de données particulière sur les algorithmes et initier à la notion de complexité en tentant de répondre à des questions simples comme : « deux sommets donnés sont ils voisins ? » ou « combien y a-t-il de chemins de longueur donnée entre deux sommets donnés ? »
Notons qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser un langage de programmation réel pour mener à bien une telle démarche, mais que les graphes se prêtent parfaitement bien à une introduction naturelle et progressive des structures de contrôle de base (si... alors... sinon..., tant que... faire..., boucles pour) et des types de données (tableaux, listes chaînées) présentes dans tout langage évolué.
Citons quelques exemples de questions ou problèmes :

- *Si le graphe modélise un réseau (les sommets représentant les sites et les arêtes les liens de communication),*
  - *deux sites donnés peuvent-ils communiquer ?*
  - *quel est le chemin le plus court entre deux sites donnés ?*
  - *calcul d'un arbre du réseau.*
- *Si le graphe représente le déroulement d'un jeu,*
  - *le jeu est-il équitable ?*
  - *à partir de quand un joueur a-t-il irrémédiablement perdu ?*
  - *mise au point de stratégies gagnantes.*
- *Si le graphe modélise un système de contrôle-commande,*
  - *tout état de danger conduit-il à un état d'alerte ?*
  - *ne alarme ne peut-elle être éteinte qu'après intervention d'un opérateur ?*
- *Si le graphe est un plan de métro,*
  - *quel est le nombre minimal de changements entre deux stations données ?*
  - *quelles sont les stations que l'on peut rejoindre à partir d'une station donnée, avec un changement au plus ?*

À partir de ces différents rapports, la CNP a rédigé une lettre de cadrage sur la rédaction, par le Groupe d'Experts pour les Programmes Scolaires (GEPS), de nouveaux programmes de mathématiques dans le secondaire. Cette lettre de cadrage indiquait que des éléments de la théorie des graphes devaient apparaître et ce, en Terminale ES. Le choix de la Terminale ES était cohérent avec le développement historique de la théorie des graphes en France dans la communauté des sciences économiques, et il offrait à la filière ES une spécificité en mathématiques par rapport à la filière scientifique. Le GEPS a donc eu la responsabilité de la première transposition de la théorie des graphes dans l'enseignement secondaire en France. Nous ne donnerons ici que les résultats de cette transposition en reproduisant des extraits du programme[1] et de son document d'accompagnement[2], les

[1]Ce programme est publié dans le B.O. hors-série n°4 du 30 août 2001, pages 57 à 62.
[2]Le document d'accompagnement du programme de la Terminale ES est disponible à l'adresse sui-

seuls éléments, à notre connaissance, à avoir été publiés par cette commission.

2.3.2 Présentation du programme de la spécialité mathématique

Le GEPS Mathématiques a donc rédigé en 2000–2001 un nouveau programme contenant, dans l'enseignement de la spécialité mathématiques de la Terminale ES, des éléments de théorie des graphes. Dans l'introduction du programme, les rédacteurs sont explicites quant à leurs intentions :

> *Pour l'enseignement de spécialité, le programme est résolument novateur. Cet aspect novateur garde toutefois une dimension raisonnable, eu égard à l'horaire en jeu ; il valorise par ailleurs la série ES qui aborde ainsi des objets mathématiques originaux. Ce programme de spécialité se situe dans le prolongement de celui de l'option de première ES ; les élèves voulant choisir la spécialité « mathématiques » en terminale ES auront donc tout intérêt à suivre l'option « mathématiques » en première, sauf à rattraper quelques notions, en particulier le calcul matriciel.*
>
> B.O. hors-série n°4 du 30 août 2001, page 60.

Nous reprenons ici l'intégralité du paragraphe du programme concernant les graphes.

> **Une ouverture sur la théorie des graphes**
> *Ce choix est cohérent tant avec le programme de la classe antérieure qu'avec les exigences de formation ultérieure : on trouve en effet ici quelques applications intéressantes du calcul matriciel développé dans l'option de première ES ; par ailleurs, les problèmes résolus constituent une première approche, volontairement modeste, de situations complexes (d'ordonnancement, d'optimisation de flux, de recherche de fichiers informatiques, d'études de migrations de populations...) auxquelles de nombreux élèves seront par la suite confrontés, notamment en gestion ou en informatique. Ce thème sensibilise naturellement à l'algorithmique et, en montrant la puissance de la théorie des graphes pour la modélisation, permet un autre regard mathématique sur diverses situations.*
> *Enfin, la présence des graphes dans les programmes permettra ultérieurement de définir des thèmes de TPE faisant intervenir des mathématiques consistantes.*
>
> B.O. hors-série n°4 du 30 août 2001, page 60.

Nous noterons ici en particulier la justification d'introduire la théorie des graphes dans le curriculum, comme application du calcul matriciel, pour approcher des problèmes issus de la gestion[1] ou de l'informatique, et enfin pour sensibiliser les élèves à l'algorithmique et à la modélisation.

> **Un travail axé sur la seule résolution de problèmes**
> *Il n'est pas question de retomber dans les pièges du langage ensembliste des années 1970 : toute présentation magistrale ou théorique des graphes serait contraire au choix fait ici. L'essentiel du travail réside dans la résolution de problèmes : résolution à l'initiative des élèves, avec ses*

vante : `http://www.eduscol.education.fr/D0015/graphes.pdf`.

[1]Nous n'avons pas trouvé d'exemple de tels problèmes ni dans le document d'accompagnement, ni dans les manuels.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

essais et tâtonnements, ses hésitations pour le choix de la représentation en termes de graphe (quels objets deviennent arêtes ? lesquels deviennent sommets ?), la recherche d'une solution et d'un raisonnement pour conclure. Toute notion relative à la théorie des graphes absente de la liste de vocabulaire élémentaire du tableau ci-après est clairement hors programme. Cette liste doit suffire pour traiter tous les exercices proposés. On trouvera dans le document d'accompagnement des éléments de théorie des graphes nécessaires à la formation des enseignants ainsi qu'une liste d'exemples sans caractère normatif, couvrant largement le programme et illustrant le type de travail attendu ; chaque exemple est suivi d'une liste de contenus (termes ou propriétés) que celui-ci permet d'aborder ; un lexique en fin de ce document reprend la totalité des termes et propriétés du programme ainsi introduits. L'optique première étant la résolution de problèmes, on insistera plus sur le bon usage des mots que sur leur définition formelle. L'intérêt du lexique est de bien marquer des limites à ce qui est proposé.
À titre indicatif, la répartition horaire entre les différents chapitres peut être : 40 % pour les graphes ; 35 % pour les suites ; 25 % pour la géométrie dans l'espace.

B.O. hors-série n°4 du 30 août 2001, page 60.

La lecture de ce paragraphe appelle trois remarques.

– *Toute présentation magistrale ou théorique des graphes serait contraire au choix fait ici. L'essentiel du travail réside dans la résolution de problèmes.* La résolution de problèmes a souvent été décriée en France, à plus ou moins juste titre à notre avis. La critique majeure qui lui est faite est de ne proposer aux élèves que la résolution de problèmes locaux, de ne pas aboutir à la généralisation et finalement de ne pas permettre l'accès à des connaissances mathématiques. Pour nous, cela révèle surtout l'absence d'institutionnalisation des connaissances après cette phase de résolution de problèmes. Or, le programme impose d'éviter toute présentation théorique des graphes. Comment institutionnaliser des connaissances sans passer par la théorie ? Il y a ici, à notre avis, un grand risque que ces deux phrases juxtaposées n'amènent à une interprétation visant à supprimer la phase d'institutionnalisation qui est déjà trop souvent absente de la classe pratiquant la résolution de problèmes.

– *Chaque exemple est suivi d'une liste de contenus (termes ou propriétés) que celui-ci permet d'aborder ; un lexique en fin de ce document reprend la totalité des termes et propriétés du programme ainsi introduits. L'optique première étant la résolution de problèmes, on insistera plus sur le bon usage des mots que sur leur définition formelle.* Ce qui est frappant est que ce qui paraît important à donner aux élèves est une liste de mots sans définition formelle. On peut interpréter cela en pensant que la manipulation du graphe durant la résolution de problèmes va permettre l'accès aux concepts, et que le « bon usage des mots » ne viendra que confirmer la connaissance conceptuelle ainsi construite. L'interprétation peut malheureusement être bien plus minimale, et laisse à craindre une mise en œuvre du programme amenant à une pauvreté conceptuelle préjudiciable pour cet enseignement.

– *Toute notion relative à la théorie des graphes absente de la liste de vocabulaire élémentaire du tableau ci-après est clairement hors programme. Cette liste doit suffire pour traiter tous les exercices proposés.* Soulignons deux points dans cette phrase : on ne parle plus de *problèmes* mais d'*exercices* ; les *notions* à aborder sont identifiées à une

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

liste de vocabulaire élémentaire.

Contenus	**Modalités de mise en œuvre**	**Commentaires**
Résolution de problèmes conduisant à la modélisation d'une situation par un graphe orienté ou non, éventuellement étiqueté ou pondéré et dont la solution est associée : – à la coloration d'un graphe, – à la recherche du nombre chromatique, – à l'existence d'une chaîne ou d'un cycle eulérien, – à la recherche d'une plus courte chaîne d'un graphe pondéré ou non, – à la caractérisation des mots reconnus par un graphe étiqueté et, réciproquement, à la construction d'un graphe étiqueté reconnaissant une famille de mots, – à la recherche d'un état stable d'un graphe probabiliste à 2 ou 3 sommets.	Les problèmes proposés mettront en jeu des graphes simples, la résolution pouvant le plus souvent être faite sans recours à des algorithmes. On indiquera que pour des graphes complexes, des algorithmes de résolutions de certains problèmes sont absolument nécessaires. On présentera un algorithme simple de coloriage des graphes et un algorithme de recherche de plus courte chaîne.	Il s'agit d'un enseignement entièrement fondé sur la résolution de problèmes. L'objectif est de savoir modéliser des situations par des graphes et d'identifier en terme de propriétés de graphes la question à résoudre. Ces algorithmes seront présentés dans les documents d'accompagnement et on restera très modeste quant à leurs conditions de mise en oeuvre.
Vocabulaire élémentaire des graphes : sommets, sommets adjacents, arêtes, degré d'un sommet, ordre d'un graphe, chaîne, longueur d'une chaîne, graphe complet, distance entre deux sommets, diamètre, sous-graphe stable, graphe connexe, nombre chromatique, chaîne eulérienne, matrice associée à un graphe, matrice de transition pour un graphe pondéré par des probabilités.	Les termes seront introduits à l'occasion de résolution de problèmes et ne feront pas l'objet d'une définition formelle, sauf lorsque cette définition est simple et courte (degré d'un sommet, ordre d'un graphe par exemple).	Les élèves devront savoir utiliser à bon escient le vocabulaire élémentaire des graphes, vocabulaire qui sera réduit au minimum nécessaire à la résolution des problèmes constituant l'enseignement de cette partie.
Résultats élémentaires sur les graphes : – lien entre la somme des degrés des sommets et le nombre d'arêtes d'un graphe, – conditions d'existence de chaînes et cycles eulériens, – exemples de convergence pour des graphes probabilistes à deux sommets pondérés par des probabilités.	On pourra, dans des cas élémentaires, interpréter les termes de la puissance n-ième de la matrice associée à un graphe.	

B.O. hors-série n°4 du 30 août 2001, page 60.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Remarquons que ce programme semble être composé d'une liste de compétences (connaissances de résultats élémentaires à savoir appliquer dans un cadre fixé) associée à une liste de termes sur les graphes.

Au niveau du contenu, une partie du programme se détache nettement des autres : la partie « graphes probabilistes ». Ici, le graphe n'est plus qu'un support de représentation de données. Les « graphes probabilistes », plus communément appelés diagrammes ou chaînes de Markov, ne font pas partie de la théorie des graphes, ils appartiennent au domaine de la statistique et des probabilités. Cette partie du programme sera évoquée dans la suite de ce document, mais nous la considérons comme hors du champ de notre étude.

2.3.3 Construction d'une typologie

Pour analyser l'adéquation entre les attendus du programme et les manuels[1] scolaires, nous avons précédemment cherché à établir une typologie nous permettant cette étude (voir [13]). Cette typologie reposait sur le découpage d'un corpus d'exercices[2] en une série de *tâches*, que nous avons regroupées lorsqu'elles étaient similaires en un *type de tâches*, la résolution de chacun de ces types de tâches reposant sur une technique que nous avons cherché à définir. Ce type d'analyse, initié en didactique des mathématiques par Yves Chevallard[3], pourrait se résumer de façon grossière comme une analyse du *savoir-faire* constitué de *types de tâches* que l'on accomplit à l'aide de *technique(s)* associée(s), ce savoir-faire ne pouvant vivre indépendamment d'un *savoir* que l'on peut décomposer en une *technologie*, discours rationnel justifiant la (ou les) technique(s) et une *théorie* justifiant et éclairant cette technologie.

Le but de l'analyse était de mettre en lumière les articulations entre les savoir-faire et les savoirs proposés par les manuels, articulations qui sont au cœur de la compréhension que l'élève peut avoir du savoir-faire en question. Une telle étude permet alors aussi d'évaluer l'apprentissage attendu par les auteurs de manuels. En parcourant de façon rapide les chapitres des manuels scolaires[4] traitant des graphes, il nous semblait qu'une certaine vacuité conceptuelle se faisait jour autour de ce nouvel objet. Pourtant, les chapitres étaient étoffés, le nombre d'exercices assez conséquent.

Malheureusement ce travail s'est heurté à un sérieux obstacle. Nous voulions en particulier étudier la modélisation et la preuve. Mais comment découper l'activité mathématique de modélisation ou de preuve en *tâches* ? La difficulté n'est pas le découpage en tant que tel[5], mais la perte de toute la dimension épistémologique du problème posé.

[1] Le terme de manuel sera exclusivement utilisé ici pour désigner un ouvrage à destination des élèves.

[2] Ce corpus consistant en l'ensemble des 168 exercices proposés par le manuel Déclic [53].

[3] Voir [15] ou, par exemple, le point 2.1 « la notion de praxéologie » dans `www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/fdf/textes/YC_1999_Ecole_ete.doc`.

[4] Les manuels que nous avons étudiés dans le détail sont les manuels Déclic [53], Dimathème [54] et Transmath [55].

[5] Modéliser le problème du parcours des ponts de Königsberg, par exemple, peut être considéré comme une succession de tâches du type : identifier les objets, identifier les relations, tracer un graphe tel que les sommets sont les objets et les arêtes les relations, étudier l'existence d'un parcours eulérien dans un graphe, etc.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Nous avons donc modifié notre analyse pour tenir compte des réserves qui sont apparues lors de ce premier travail. Nous avons pour cela procédé en plusieurs étapes :

Dans un premier temps, nous avons réfléchi à ce que nous nous attendions à trouver dans les programmes et manuels traitant de théorie des graphes. Il nous a semblé que nous pourrions trouver des problèmes ou des questions mathématiques relevant de quatre catégories.
– *modélisation :* la modélisation et la représentation d'une situation par un graphe ;
– *preuve :* l'argumentation, l'élaboration d'une preuve, ... ;
– *structure :* l'étude des propriétés structurelles des graphes ;
– *algorithme :* l'algorithmique et le calcul.
Bien entendu l'intersection entre ces différentes catégories est loin d'être vide. Utiliser un modèle pour représenter un système[1] par un graphe attend une preuve de l'adéquation entre le modèle et le représenté ; algorithme et preuve sont intimement liés[2] ; l'étude structurelle des graphes ou l'étude de propriétés des graphes étant le but et le moyen des preuves. Nous nous attendons donc à trouver dans les exercices et problèmes proposés par les manuels des éléments de ces différentes catégories qui ont une pertinence en théorie des graphes, et que l'on retrouve autant en recherche que pour des applications pratiques à usage industriel, par exemple. L'étude de ces exercices ou problèmes à travers le prisme de quatre grandes catégories nous permettra de voir le travail qui est demandé aux élèves, même si l'on prend le risque de perdre la dimension épistémologique à regarder « de trop près » l'activité mathématique attendue.

Dans un deuxième temps, nous avons repris le corpus des exercices et problèmes du manuel Déclic. Pour chacun, nous avons pris chaque question posée aux élèves et nous l'avons décontextualisée. Nous avons obtenu ainsi un certain nombre de ce que nous qualifierons d'*énoncés*, qui peuvent pour certains être assimilés à des *types de tâches* ou à des *genres de tâches*. Puis nous avons cherché à regrouper les énoncés similaires sous chacune des catégories que nous avions prédéfinies. La catégorie *preuve* s'est alors avérée quasi vide. De fait, les verbes « prouver », « montrer » et « démontrer » se sont révélés quasiment absents de notre corpus[3]. Tout au plus, nous les avons rencontrés dans des questions appelant la citation du nom d'un théorème. Nous avons donc imaginé quelques énoncés pour cette catégorie.

Cette typologie d'énoncés nous permettra d'étudier les connaissances qui semblent attendues des élèves.

2.3.3.1 Premiers types d'énoncés : Autour de la modélisation

M1 : Modéliser une situation par un graphe.
Pour ce type de problème, une situation de relation entre objets est décrite. La modélisa-

[1]Système dans le sens d'« ensemble d'éléments et des relations qu'ils entretiennent entre eux », tel que défini dans la thèse de Julien Rolland [45], page 138.

[2]Voir par exemple à ce sujet l'algorithme glouton de coloration qui donne (la preuve d') un majorant du nombre chromatique ou pour lequel on montre qu'un ordre bien choisi des sommets donne la meilleure coloration des graphes triangulés.

[3]Les autres manuels étudiés ont donné les mêmes résultats.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tion par un graphe est attendue mais le rôle respectif de sommet ou arête n'est pas donné, le type de graphe (orienté ou non, pondéré ou étiqueté, simple,...) non plus. C'est le type de problème qui se pose à l'élève qui, par contrat didactique, sait que l'objet attendu est un graphe, mais qui rencontre pour la première fois la situation à modéliser. Précisons dès maintenant que cet énoncé est quasiment absent des manuels étudiés. On le trouve presque exclusivement parmi les exercices de type « pour aller plus loin » des manuels.

M2 : Représenter une situation par un graphe.
Une situation est donnée. C'est une situation « classique » (carte géographique, compatibilité/incompatibilité entre personnes, animaux ou objets, lien de connaissance entre personnes, distances entre lieux,...), ou bien le rôle des sommets et/ou des arêtes est donné. Dans ce cas, le terme que nous utiliserons est « représentation » d'une situation par un graphe, même si la tâche à résoudre devant ce type d'énoncé se restreint souvent en la « traduction » d'un problème en termes de graphe comme nous le verrons par la suite.

M3 : Reconnaître le graphe modélisant une situation donnée.
Cet énoncé a été retrouvé plusieurs fois, bien qu'il ne semble attendre aucune action de l'élève. Une situation et un graphe sont donnés, on demande à l'élève de faire le lien entre ces deux descriptions. Cette reconnaissance peut parfois se traduire par l'étiquetage conjoint des sommets (et/ou des arêtes) et des objets (et/ou des relations) de la situation décrite.

M4 : Reconnaître différentes représentations d'un même graphe.
Plusieurs graphes sont donnés, on demande de reconnaître les graphes modélisant la même situation, ou on se demande si deux graphes peuvent représenter la même situation.

M5 : « Passer » d'une représentation graphique à une représentation matricielle pour un graphe donné.
Un graphe est donné, il est demandé d'en donner une représentation matricielle, ou sous forme de tableau. L'ordre des sommets peut être fixé ou non.

M6 : « Passer » d'une représentation matricielle à une représentation graphique pour un graphe donné.
Une représentation matricielle ou sous forme de tableau est donnée, le graphe correspondant est attendu. Le nom des sommets peut être donné ou non dans l'énoncé, voire dans le tableau même.

M7 : Construire un graphe probabiliste.
La construction d'un graphe correspondant à une situation donnée est attendue. Le graphe doit être un « graphe probabiliste », appelé diagramme de Markov, graphe orienté et pouvant contenir des boucles pour lequel la somme des étiquettes positives des arcs sortant d'un sommet doit être égale à 1.

M8 : Reconnaître un graphe probabiliste.
Étant donné un graphe, ce type de problème consiste à vérifier que le graphe est un diagramme de Markov.

M9 : Passer d'un graphe probabiliste à une matrice de transition et inversement.
Ce type de problème est identique à M5, seul le nom de la matrice diffère (*matrice de*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

transition pour les graphes probabilistes, les autres graphes étant représentés par leurs *matrices d'adjacence*).

2.3.3.2 Deuxièmes types d'énoncés : Autour de la preuve

Cette catégorie étant restée quasiment vide après l'étude des exercices et problèmes des manuels, nous donnons ici ce que nous pensions trouver.

P1 : Démontrer qu'un graphe admet un circuit (ou un chemin) eulérien. Nous concevons cet énoncé et le suivant dans l'optique où le théorème d'Euler n'est pas connu des élèves.

P2 : Démontrer qu'un graphe n'admet ni chemin ni circuit eulérien.

P3 : Démontrer qu'un graphe est k-colorable.

P4 : Déterminer le nombre chromatique d'un graphe.

P5 : Démontrer que le nombre d'arêtes d'un graphe est égal à la moitié de la somme des degrés de ses sommets.

P6 : Démontrer que le nombre de sommets de degré impair est pair.

2.3.3.3 Troisièmes types d'énoncés : Autour de la structure d'un graphe

S1 : Étudier l'existence d'un circuit ou d'un chemin eulérien.
Un graphe est donné (ce graphe est toujours non orienté dans les manuels étudiés), il est demandé de déterminer l'existence d'un circuit ou d'un chemin eulérien et/ou de décrire ce chemin en explicitant une séquence de sommets et/ou d'arêtes.

S2 : Étudier des éléments simples de la structure d'un graphe (nombre de sommets, d'arêtes, ...).
Ces énoncés ont été regroupés par la similarité des actions qu'ils engagent : connaître la définition de ce qui est recherché, puis compter ou lire.

S3 : Étudier des éléments non triviaux de la structure d'un graphe (planarité, diamètre d'un graphe, niveau d'un sommet, ...).
Ces énoncés sont proches des énoncés de type S2. Ils en diffèrent par les actions qu'ils engagent qui peuvent impliquer un enchaînement de tâches plus ou moins complexes. Ils nécessiteront par exemple de modifier la représentation du graphe pour en faire apparaître la structure, ou d'appliquer un algorithme.

S4 : Étudier des éléments de la structure d'un graphe représenté par sa matrice d'adjacence.
Ce type d'énoncé est créé a priori. Nous faisons l'hypothèse que nous ne le trouverons pas, ce qui nous montrera peut-être que la représentation matricielle se prête mal à l'étude structurelle de graphes mais surtout que cette représentation n'est utilisée de façon effective que pour A7, interpréter les puissances d'une matrice.

S5 : Construire un automate acceptant certains mots.
Un ensemble de mots (mots pouvant être formés de lettres ou de chiffres) est donné.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Un automate[1] reconnaissant cet ensemble est attendu. Cet énoncé est créé à la lecture du programme : *Résolution de problèmes conduisant à la modélisation d'une situation par un graphe [...] et dont la solution est associée : [...] à la caractérisation des mots reconnus par un graphe étiqueté et, réciproquement, à la construction d'un graphe étiqueté reconnaissant une famille de mots.*

S6 : Reconnaître si un mot est accepté par un automate donné.
Un automate est donné. Une réponse de type oui ou non est attendue.

2.3.3.4 Quatrièmes types d'énoncés : Autour de l'algorithmique et du calcul

A1 : Construire un algorithme
Ce type d'énoncé n'a été rencontré qu'une fois.

A2 : Appliquer l'algorithme de Dijkstra.
Un graphe est donné. Il est demandé d'appliquer « l' »algorithme de recherche de plus court chemin.

A3 : Colorer un graphe en utilisant un algorithme de coloration.
On demande de colorer un graphe en utilisant un algorithme. L'algorithme attendu est celui de Welsh et Powell, c'est-à-dire un algorithme glouton pour lequel les sommets à colorer sont ordonnés par degrés décroissants.

A4 : Trouver le plus court chemin entre deux sommets d'un graphe.
Un graphe est donné pour lequel deux sommets sont identifiés. On demande de déterminer le plus court chemin entre ces deux sommets.

A5 : Résoudre un problème d'ordonnancement.
Une série de tâches[2] dépendantes est donnée. On demande de les ordonnancer en minimisant le temps nécessaire à la réalisation de l'ensemble de ces tâches.

A6 : Effectuer des calculs matriciels.
Le plus fréquemment, une matrice étant donnée, on demande de calculer sa puissance n-ième. Des produits ou des sommes de matrices de petites taille pourront aussi être demandés.

A7 : Interpréter les puissances d'une matrice.
À partir de la matrice d'adjacence d'un graphe, on demande l'interprétation de ses puissances en terme de nombre de parcours d'une longueur donnée.

A8 : Interpréter des calculs matriciels sur des graphes probabilistes.
L'interprétation de calculs matriciels en termes de probabilité est attendue.

[1] Ce terme n'est pas celui du programme qui parle de *graphe étiqueté*.
[2] Tâche dans son acception ordinaire.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

2.3.4 Analyse du document d'accompagnement des programmes et des manuels

2.3.4.1 Exercices et problèmes

La distinction faite dans les manuels scolaires entre *exercice* et *problème* n'est pas explicitée et ne semble pas évidente à l'analyse. Leurs présentations et leurs places dans les chapitres suggèrent que la différence se situe à plusieurs niveaux : complexité des énoncés, longueur du texte, difficulté supposée des solutions.

Revenons aux définitions[1] de ces termes.

> *exercice : Action ou moyen d'exercer ou de s'exercer.*

> *exercices scolaires : Devoirs écrits ou oraux donnés aux élèves en vue de les préparer à satisfaire aux épreuves de contrôle d'un enseignement.*

L'exercice est donc du domaine de l'action. Il appartient à l'outillage pédagogique et a un but précis : la préparation aux *épreuves de contrôle*. *Exercice*, dans l'acception que nous utilisons ici, appartient à l'univers scolaire ; un mathématicien « ne fait pas d'exercices ».

> *problème :* ÉPISTÉMOL. *Question à résoudre par des méthodes rationnelles ou scientifiques.* MATH. *Question pouvant être résolue à partir des éléments donnés dans l'énoncé.*

Problème a deux acceptions qui nous intéressent ici. Dans les deux cas, un problème est avant tout une question. Son acception mathématique (que nous aurions plutôt qualifiée de mathématique scolaire) laisse à penser que la question a déjà été résolue. Cela nous semble quelque peu réducteur dans le sens où les mathématiciens sont confrontés à des *problèmes mathématiques* dont personne ne connaît de solution. Nous conserverons la définition « épistémologique » de *problème* comme *question à résoudre par des méthodes rationnelles.*

2.3.4.2 Les énoncés contenus dans le document d'accompagnement

Prenons maintenant le document d'accompagnement des programmes. Ce document de 22 pages propose 25 problèmes accompagnés d'éléments de résolution et suivis de quelques définitions et propriétés. Nous utiliserons la typologie construite précédemment sur ces exemples. Certains se prêtent assez mal à ce type d'analyse, dans la mesure où ce sont des présentations de problèmes plus que des énoncés en tant que tels. Au niveau de la modélisation en particulier, il est souvent difficile de savoir si les graphes dessinés appartiennent à l'énoncé ou aux éléments de résolution qui l'accompagnent. Nous noterons les énoncés entre parenthèses lorsque nous ne pouvons déterminer si leur résolution est à la charge de l'élève ou non.

(Les numéros et titres sont ceux du document d'accompagnement.)

[1] Les définitions en italiques sont issues du dictionnaire TLF (Trésor de la Langue Française).

N°	Titre	T_i	Énoncés
1	Les enveloppes	S1, (P1, P2)	Étudier l'existence d'un circuit ou d'un chemin eulérien dans un graphe. (Démontrer qu'un graphe admet un circuit (ou un chemin) eulérien. Démontrer qu'un graphe n'admet ni chemin ni circuit eulérien).
2	Les ponts de Königsberg	(M1), S1, (P1, P2)	(Modéliser une situation par un graphe). Étudier l'existence d'un circuit ou d'un chemin eulérien dans un graphe. (Démontrer qu'un graphe admet un circuit (ou un chemin) eulérien. Démontrer qu'un graphe n'admet ni chemin ni circuit eulérien).
3	Dominos	(M1), S1, (P1, P2)	(Modéliser une situation par un graphe). Étudier l'existence d'un circuit ou d'un chemin eulérien dans un graphe. (Démontrer qu'un graphe admet un circuit (ou un chemin) eulérien. Démontrer qu'un graphe n'admet ni chemin ni circuit eulérien).
4	Traversée de frontières	(M1), S1, (P1, P2)	(Modéliser une situation par un graphe). Étudier l'existence d'un circuit ou d'un chemin eulérien dans un graphe. (Démontrer qu'un graphe admet un circuit (ou un chemin) eulérien. Démontrer qu'un graphe n'admet ni chemin ni circuit eulérien).
5	Dessins de graphes	M4, S3	Reconnaître différentes représentations d'un même graphe. Étudier l'existence de graphe(s) dont une liste des degrés est donnée.
6	Associer un graphe à une situation	M2	Représenter une situation par un graphe.
7	Matches de football	M2, S2	Représenter une situation par un graphe. Tracer un graphe dont les sommets répondent à des contraintes de degrés.
8	Poignées de main	(T1), S2	(Modéliser une situation par un graphe). Tracer un graphe dont les sommets répondent à des contraintes de degrés. Étudier des éléments non triviaux de la structure d'un graphe.
9	Transport de produits chimiques	(A3), P4	Déterminer le nombre chromatique d'un graphe d'incompatibilité.
10	Coloration de la carte de l'Europe	A3, P4, (M1)	Déterminer le nombre chromatique d'un graphe modélisant une carte géographique.
11	Un problème d'aquariophile	A3, P4, (M1)	Déterminer le nombre chromatique d'un graphe donné par un « tableau d'incompatibilité ».
12	Nombre chromatique	A3, M5, M6, (A3), P4	Tracer le graphe correspondant à une matrice donnée. Déterminer le nombre chromatique d'un graphe. Associer un graphe à une matrice. Donner la matrice associée à un graphe.
13	Organisation d'un examen	P4, (M1, A3)	(Modéliser une situation par un graphe.) Déterminer le nombre chromatique d'un graphe.
14	Ouverture de magasins	M1 ou M2, (A3), P4	Modéliser ou représenter une situation par un graphe. Déterminer le nombre chromatique d'un graphe.
15	Puissance de la matrice associée à un graphe	M6, A7	(Matrice d'adjacence et puissances de la matrice sont données). Tracer le graphe associé à la matrice d'adjacence. Interpréter les termes des puissances de la matrice.
16	Circuits touristiques	A7	(Graphe et matrice d'adjacence associée sont donnés, ainsi que les puissances de la matrice). Combien de chemins existent de ... à ....

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

17	Coloration de graphes	P3, P2, Dén, (A3)	Démontrer qu'un graphe est k-colorable. (Dén est une tâche unique de dénombrement). Dénombrer les 3-colorations d'un graphe donné.
18	Algorithme de coloration d'un graphe	M1 ou M2, A3, P2, P3	Représenter une situation (carte géographique) par un graphe. Démontrer qu'un graphe est k-colorable. Appliquer l'algorithme de coloration.
19	Diamètre d'un graphe	S3	Déterminer le diamètre d'un graphe. Caractériser les graphes de diamètre 1. Donner le nombre de sommets et d'arêtes d'un graphe en fonction de son diamètre.
20	Parcours autoroutier	A4	(Graphe à double pondération) Trouver le plus court chemin entre 2 sommets avec chacune des pondérations.
21	Algorithme de Dijkstra	(A2, A4)	(Pas d'énoncé : présentation de l'algorithme de Dijkstra sur un exemple).
22	Reconnaissance de codes	S5	Les mots ... sont-ils acceptés par l'automate donné ? Donner la liste des mots de k lettres acceptés par un automate. Caractériser l'ensemble des mots acceptés par un automate.
23	L'allumeur de réverbère	M2, M5, A6, A8	« Qu'observe-t-on en simulant une grande population de réverbères régis par le même système probabiliste de changements d'états ? » Représenter une situation par un graphe. Calculer la puissance n-ième d'une matrice. Calculer la probabilité que ... à la n-ième étape.
24	Transfert de population	M2, A6, A8	Calculer une probabilité. (Quatre fois le même exercice en modifiant les conditions de départ).
25	Un problème d'endémie	M2, M5, A6, A8	Tracer le graphe probabiliste décrivant une situation et écrire la matrice de transition. Calculer une probabilité en effectuant des calculs matriciels.

En appliquant notre typologie aux problèmes du document d'accompagnement, nous avons constaté que cette application était bien plus complexe que pour les exercices de manuels. L'explication nous paraît assez simple et elle pourrait presque permettre de redéfinir[1] *exercice* et *problème*.
Un exercice est un ensemble de tâches aisément repérables, chaque tâche étant associée à une technique unique qu'il permet ainsi d'exercer.
Un problème est une question dont **seule la résolution** peut amener à un « découpage » en terme de tâches à résoudre, ce « découpage » étant à la charge de l'élève et pouvant varier d'un élève à l'autre.

Le programme se voulant basé sur la résolution de problèmes, le travail à proposer en classe est censé être composé majoritairement de problèmes, au sens où nous l'entendons, et, pour être pragmatique, l'année de Terminale étant celle du baccalauréat, de quelques exercices bien choisis. Or, nous avons constaté que les manuels offrent quantité d'exercices et très peu de problèmes.

[1] Voir section 2.3.4.1.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

2.3.4.3 Adéquation entre les manuels et le programme

La différence principale que nous avons constatée, dans les manuels, entre le chapitre traitant des graphes et les autres concerne le « cours »[1] : ce cours est en effet présenté sur des exemples, il est très illustré[2]. Ce chapitre contient aussi un nombre d'exercices bien supérieur aux autres. Pourquoi la différentiation ne se situe-t-elle pas sur les problèmes ? Comment aurions-nous traité ce chapitre ?

Plaçons-nous du point de vue de l'enseignant. Si nous interprétons les termes du programme tels que nous les voyons, le déroulement « idéal » de cet enseignement s'effectuerait ainsi. L'enseignant choisit un ensemble de problèmes[3] couvrant les notions données par le programme. Le travail des élèves, qu'il soit individuel ou en petits groupes, n'est pas guidé pour permettre un vrai travail de recherche *avec ses essais et tâtonnements*[4] menant à conjecturer des résultats et à les argumenter. Une mise en commun, qui pourra inclure un débat scientifique[5], suit cette phase de recherche. L'institutionnalisation, phase essentielle, permet alors à l'enseignant :
– de valider les arguments pertinents des élèves,
– d'apporter des éléments de preuve lorsque ceux-ci ne sont pas apparus dans la classe,
– de valider certaines conjectures qui prendront alors le statut de théorèmes,
– de fixer le vocabulaire qui sera utilisé par la suite.

Pour qu'une disposition de ce type puisse vivre en classe, un manuel n'apparaît pas indispensable à l'enseignant. Dans l'idéal, le manuel ne contiendrait que des problèmes, et aucun résultat qui puisse induire les élèves dans une direction ou une autre, ce qui pourrait nuire au fonctionnement du dispositif décrit ci-dessus. Un « livre du maître » détaillé pourrait indiquer les différentes pistes de résolution qui peuvent apparaître en classe, il donnerait les arguments principaux nécessaires à la résolution locale des problèmes, et proposerait les preuves conférant un caractère général à ces arguments.

Plaçons-nous maintenant du point de vue des concepteurs de manuels. Comment réaliser un manuel respectant les contraintes du programme ? Peut-on imaginer un manuel qui ne contiendrait que des problèmes sans éléments de résolution, ni vocabulaire, ni preuve ? Le manuel est un outil diversement utilisé par les enseignants. Son rôle est multiple :
– Il est une banque d'exercices et de problèmes pour l'enseignant.
– Il est un cours supplémentaire pour l'élève, avec une approche qui peut être différente de celle de son professeur.

[1] Les manuels de mathématiques du secondaire ont sensiblement la même organisation. Ils comportent pour chaque chapitre 4 ou 5 sections : une ou plusieurs activités préparatoires, un cours, éventuellement des travaux dirigés ou de nouvelles activités, puis des exercices et enfin des problèmes.

[2] Dans le manuel Transmath [55] par exemple, le terme « cours » n'apparaît pas dans le chapitre consacré à la théorie des graphes, alors qu'il apparaît dans tous les autres chapitres. Les notions nouvelles apparaissent à l'intérieur d'activités, une section nommée « des idées, des réflexes » résume les « propriétés » à connaître, et les démonstrations apparaissent dans une section clairement délimitée. La volonté des auteurs de différencier ce chapitre des autres est indéniable.

[3] De façon idéale, cet ensemble est un ensemble de *situations didactiques fondamentales* telles que définies par Guy Brousseau dans [11].

[4] Voir le programme page 60 du B.O. hors-série n°4, du 30 août 2001.

[5] En référence au débat scientifique défini par Marc Legrand [38].

– Il est un moyen pour les parents de savoir ce qui est vu ou doit être vu par leurs enfants en classe.
– Il est un moyen pour le professeur de bâtir son propre cours.
– ...

Dans le cadre de l'introduction d'un nouvel objet mathématique, que les enseignants n'ont pour la plupart jamais rencontrés durant leur scolarité, le manuel est aussi un moyen pour compléter leur propre formation. Il nous semble peu réaliste qu'un éditeur prenne le parti de ne pas chercher à remplir au mieux ces différentes attentes et ne propose ainsi qu'un chapitre composé exclusivement de problèmes sans élément de résolution.

2.4 Analyse des types d'énoncés et techniques de résolution attendues par le programme et les manuels

2.4.1 Énoncés autour de la modélisation

2.4.1.1 M1 et M2 : Modéliser ou représenter une situation par un graphe

Il n'existe pas de caractéristiques simples permettant de dire que les données d'un problème pourront être représentées par un graphe, ou qu'une modélisation du problème utilisant les graphes existe. Un mathématicien ou tout autre professionnel amené à modéliser une situation concrète ne sait pas quel objet mathématique lui permettra de le faire. Le fait que la situation soit discrète et qu'elle représente une relation entre des objets est un indice fort pour la possibilité d'utilisation d'un graphe, mais cela nécessite une première épure du problème. Nous nous cantonnerons donc ici à la sphère « scolaire », comportant des problèmes dont on connaît une modélisation par un graphe efficace (ce qui ne signifie pas que les problèmes en question soient résolus).

Les techniques de modélisation par un graphe ne peuvent pas non plus être explicitées, la modélisation étant contextuelle et souvent complexe. On peut tout de même dégager des éléments de technique : un graphe modélise une relation entre des objets ; modéliser une situation par un graphe nécessite donc de définir quels sont les objets et quelle est la relation entre ces objets.

Le choix du terme de *modélisation* plutôt que de celui de *représentation* dans la classification en M1 ou M2 dépend d'une part du contexte dans lequel le problème est posé, d'autre part de l'énoncé du problème lui-même. Par exemple, pour illustrer la différence de contextes, si nous sommes en Terminale ES dans une séance introductive d'une séquence sur les graphes, ou a fortiori, dans un contexte hors classe, le problème de coloration de cartes géographiques comportera une tâche de modélisation, alors que dans une classe de Terminale ES après quelques semaines de travail sur les graphes, il nous semble que cette tâche se limitera à une tâche de représentation. Il y aura eu en effet dans cette classe une sorte d'« apprentissage de la modélisation des cartes géographiques », pour lesquelles chaque sommet sera une capitale et une arête entre deux sommets représentera une frontière commune. De la même façon, une question du type « modéliser la situation par un graphe » réduit à elle seule une bonne part de la modélisation : un élève comprendra

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

dans cet énoncé qu'un graphe suffit à modéliser cette situation, ou qu'il faut utiliser un graphe pour la modéliser.

Graphe et graphe-arête associé : une double représentation toujours possible

Une difficulté inhérente à ce type de problèmes peut être illustré par l'exemple classique des ponts de Königsberg. Voici une représentation de la ville :

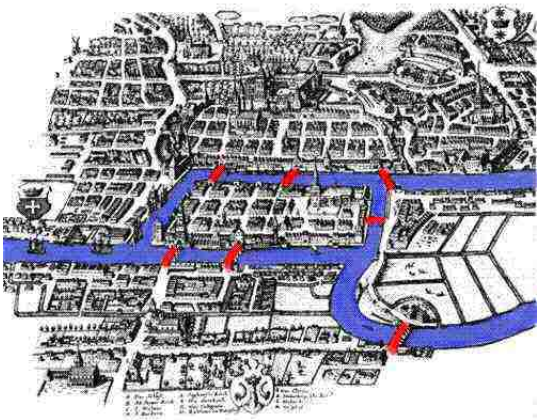


FIG. 2.2: *Une représentation de la ville de Königsberg du temps de L. Euler.*

Le problème est de déterminer s'il est possible de se promener dans cette ville en passant une et une seule fois par chacun des 7 ponts.

On a donc une rivière, un ensemble de 7 ponts et 4 berges (une île, une presqu'île et deux berges proprement dites). Deux modélisations différentes sous forme de graphes peuvent apparaître :
– Les sommets peuvent être les berges, et les arêtes les ponts entre deux berges.
– Les sommets peuvent être les ponts, et les arêtes les berges communes entre deux ponts.
On obtient deux modélisations différentes, une modélisation que nous qualifierons d'*eulérienne* qui peut permettre l'aller-retour de la situation au modèle et la résolution du problème posé, et une autre modélisation que nous qualifierons d'*hamiltonienne*. Nous utilisons ces qualificatifs car pour la première représentation, le problème revient à chercher un chemin eulérien dans le graphe (passant une et une fois par chaque arête), le second revient à chercher un chemin hamiltonien (passant une et une fois par chaque sommet).

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

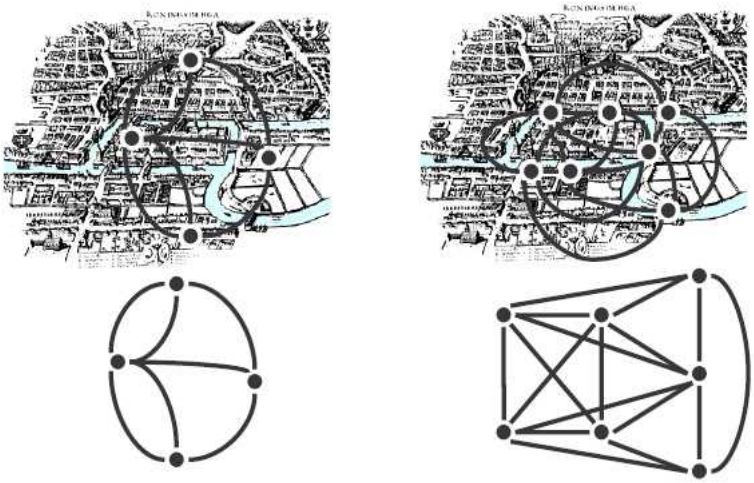


FIG. 2.3: *Deux modélisations de la ville de Königsberg. Nous qualifierons la première de modélisation « eulérienne » et la seconde de modélisation « hamiltonienne ».*

En fait, le graphe de la représentation *hamiltonienne* est le *graphe-arête* du graphe de la représentation *eulérienne*. De façon générale, on peut à partir de tout graphe G déterminer son **graphe-arête** G' correspondant. Chaque arête de G devient un sommet de G', et deux sommets de G' sont reliés par une arête si les deux arêtes correspondantes dans G ont une extrémité commune.

Voici un exemple de construction d'un graphe-arête à partir d'un graphe G :

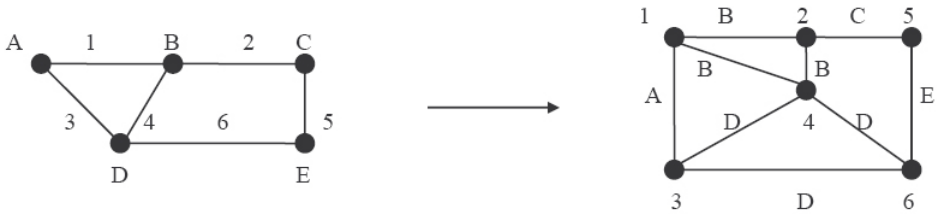


FIG. 2.4: *Un graphe G et son graphe-arête G' associé*

La construction est toujours possible et il y a unicité du graphe-arête obtenu, mais sans la « trace des sommets » de G sur les arêtes de G', on ne peut généralement pas revenir au graphe dont il est issu. (Un sommet isolé par exemple n'apparaît pas dans le graphe-arête associé).

Pour revenir à la figure 2.3, la seconde modélisation peut permettre de répondre à un certain nombre de questions (par exemple y a-t-il des ponts « parallèles » dans la ville ?),

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

mais ne permet pas[1] de revenir à la situation de départ, ce « retour » n'étant pas unique. En voici un exemple :

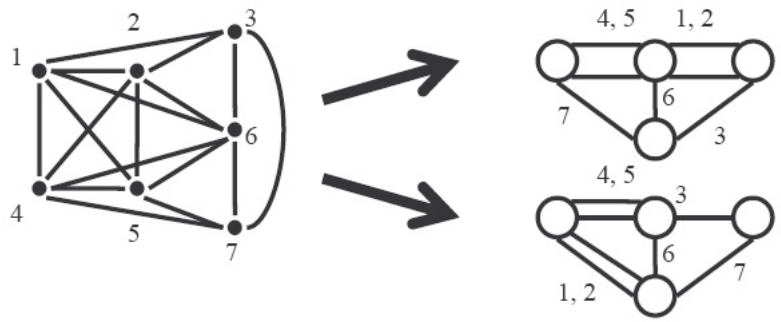


FIG. 2.5: *Le « retour » d'un graphe-arête vers un graphe dont il pourrait être issu : on obtient deux graphes non isomorphes. (En prenant le graphe-arête des deux graphes de droite, on vérifie que l'on obtient bien deux fois le graphe de gauche).*

Si l'on observe les deux graphes de droite sur cette figure 2.5, le premier (équivalent à la représentation *eulérienne* des ponts de Königsberg) ne contient pas de chemin eulérien, ses quatre sommets étant de degré impair, alors que le second en contient un. Un chemin hamiltonien dans le graphe ne correspond pas à un chemin dans la ville. Cette modélisation « hamiltonienne » ne permet donc pas (ou très difficilement) de répondre à la question posée, la perte d'information étant trop importante, alors que l'information, pour la question posée, est intégralement conservée dans la modélisation eulérienne.

Prenons un autre exemple, celui des dominos[2] :

Peut-on aligner tous les pions d'un jeu de domino suivant la règle du domino ?
On commencera par étudier la question avec un jeu dont les dominos comportent les chiffres jusqu'à n, pour $n = 2, 3, 4$.

Considérons que chaque domino est un sommet, et que 2 sommets sont reliés par une arête s'ils peuvent être voisins. Le graphe obtenu pour $n = 2$ est celui-ci :

[1]Ou du moins pas de façon triviale. On peut en fait « revenir au graphe » dont ce graphe arête est issu pour ce graphe particulier. Pour cela, on recherche toutes les cliques non contenues dans d'autres et on les contracte en un sommet.

[2]Ce problème, illustré par exemple par Lucas [40], se trouve aussi dans le document d'accompagnement des programmes, page 6.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

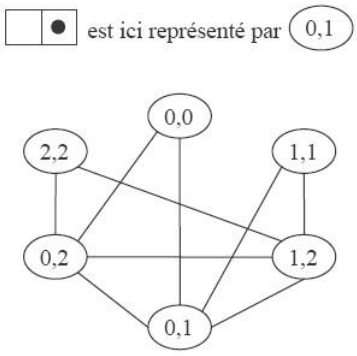


FIG. 2.6: *Une modélisation du jeu de dominos pour n égal à 2.*

Comment traduire sur ce graphe le fait que tous les pions sont alignés ? Un chemin passant par tous les sommets du graphe, c'est-à-dire un **chemin hamiltonien**, peut être vu comme un alignement de dominos. On trouve facilement[1] un tel chemin partant du sommet (0,2) :

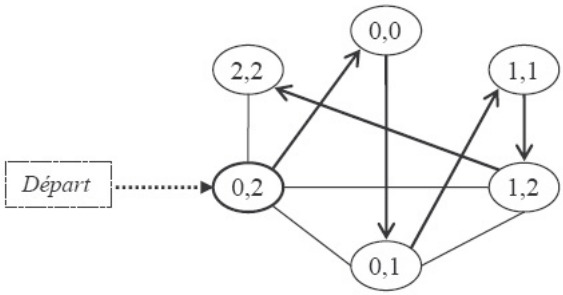


FIG. 2.7: *Un chemin dans un graphe pour modéliser l'alignement de dominos pour n égal à 2.*

Partant de ce chemin dans le graphe on revient à la situation de départ nous donnant l'alignement de dominos suivant :

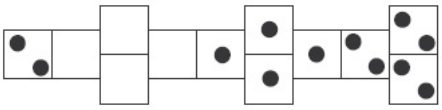


FIG. 2.8: *Du modèle de graphe vers la situation*

[1]Les sommets étant pour la plupart de degré 2, le chemin s'impose. Seuls le point de départ et l'orientation du chemin sont en fait des choix.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Procédons de la même façon pour $n = 3$:

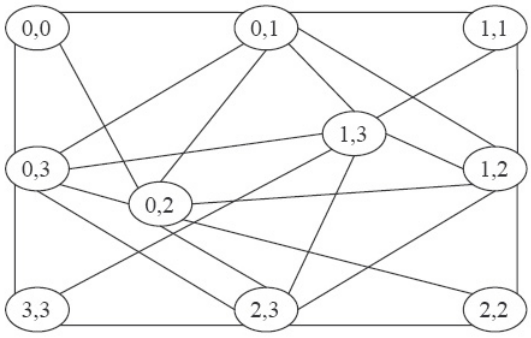


FIG. 2.9: *Le graphe A : une modélisation du jeu de dominos pour n égal à 3.*

Malgré la plus grande complexité du graphe, on peut par tâtonnement trouver un chemin passant par tous ses sommets, par exemple :

$$(0,0)(0,1)(1,1)(1,2)(2,2)(2,3)(0,2)(0,3)(1,3)(3,3)$$

Ce chemin ne permet pas de construire un alignement de dominos, la séquence $(2,2)$ $(2,3)$ $(0,2)$, par exemple, le montre. On ne peut pas en effet aligner les trois dominos dans cet ordre :

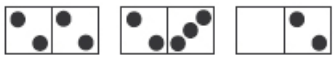


FIG. 2.10: *La séquence ordonnée* $(2,2)(2,3)(0,2)$ *ne correspond pas à un alignement de dominos valide.*

L'existence d'un chemin hamiltonien dans le graphe ne suffit donc pas à garantir l'existence d'un alignement de dominos dans la situation.
On peut penser que si un tel problème est proposé en situation de classe, et que cette modélisation est utilisée par des élèves, rien ne leur permet de l'invalider. (Même si le graphe obtenu n'est pas un « bon modèle », dans le sens où il ne suffit pas à résoudre la tâche, l'aller-retour entre la situation et le modèle est assez simple pour que cette représentation du problème ne soit pas remise en question).

Dans le processus de modélisation, si le type de modèle choisi est un graphe (ce qui est, par contrat didactique, naturellement le cas dans une séance de classe consacrée aux graphes), celui-ci paraît être celui qui sera spontanément tracé par les élèves[1]. Les sommets sont des objets matériels, et les arêtes sont les liens qui peuvent être établis entre ces objets matériels, ce qui est très classique dans les situations de modélisation

[1]Ce que confirment les professeurs rencontrés individuellement, et lors des stages de formation.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

(ou de représentation) tant du document d'accompagnement des programmes que des manuels. Or, dans cet ensemble de documents, la modélisation qui est proposée comme évidente pour la résolution de ce problème, se traduit par la construction d'un graphe pour lequel : « les sommets sont les nombres de 0 à n, les arêtes sont les dominos ».

Pour $n = 3$ voici le graphe construit :

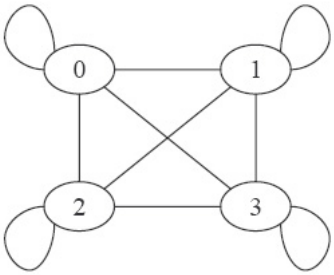


FIG. 2.11: *La modélisation du jeu de dominos attendue pour n égal à 3.*

Arrêtons-nous sur quelques remarques à propos de ce dernier graphe.

- Le graphe A (de la figure 2.9) est le graphe-arête de celui-ci.
- Il est peu habituel de voir des boucles dans des graphes non orientés, et dans l'articulation des notions à l'œuvre dans les manuels, on peut penser que ces boucles représenteront un obstacle pour certains apprenants (les boucles apparaissant exclusivement dans le cas des graphes orientés, qu'ils soient probabilistes ou étiquetés).
- Dans l'ensemble des situations qui sont proposées dans les manuels et le document d'accompagnement, c'est le seul graphe, à notre connaissance, dont les sommets ne sont pas des objets matériels, et les arêtes le sont. (Il arrive que les arêtes soient des entités matérielles comme des chemins, des routes, des tuyaux, des ponts ; mais elles représentent toujours des relations entre des objets matériels ou des lieux). Cette représentation nous semble donc loin d'être évidente. Elle mérite au moins d'être sérieusement questionnée.
- Pour répondre à la question posée, il faut voir qu'un alignement de dominos dans la situation est équivalent à un chemin eulérien dans le graphe. On revient à un exercice classique d'existence de chemins eulériens dans les graphes complets (les boucles ne changent pas le problème), selon la parité du degré des sommets du graphe.
- Dans une situation de classe, rien ne permet d'envisager qu'une telle représentation/modélisation eulérienne du problème apparaîtrait.

En résumé, *un certain nombre de problèmes proposés comme simples posent de fait de réelles difficultés de modélisation et/ou de représentation. Entre un graphe et son graphe-arête associé, le choix pertinent n'apparaît souvent qu'à la résolution du problème. Le caractère de non unicité d'une modélisation par un graphe est un fait dont il faut tenir compte dans la préparation d'une situation sur les graphes. En particulier, il faudra prendre garde de ne pas masquer la modélisation en donnant « le » graphe aux élèves.*

Le cas des graphes de compatibilité ou d'incompatibilité

Les « problèmes d'incompatibilité » sont très présents dans le document d'accompagne-

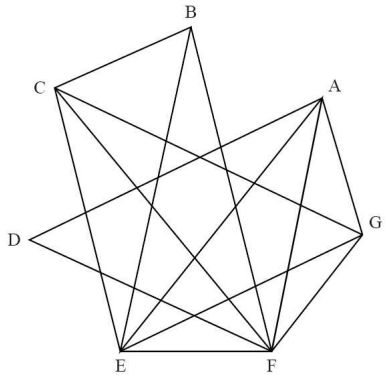
tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

ment et dans les manuels. En fait, comme nous allons le voir, il s'agit le plus souvent d'*exercices* autour d'un *problème* d'incompatibilité.

Pour les illustrer, en voici un, issu du baccalauréat de juin 2003[1].

Un concert de solidarité est organisé dans une grande salle de spectacle.
À ce concert sont conviés sept artistes de renommée internationale Luther Allunison (A)*, John Biaise* (B)*, Phil Colline* (C)*, Bob Ditlâne* (D)*, Jimi Endisque* (E)*, Robert Fripe* (F) *et Rory Garaguerre* (G)*. Les différents musiciens invités refusant de jouer avec certains autres, l'organisateur du concert doit prévoir plusieurs parties de spectacle. Les arêtes du graphe* Γ *ci-dessous indiquent quels sont les musiciens qui refusent de jouer entre eux.*



Graphe Γ

1) Déterminer la matrice associée au graphe Γ *(les sommets de* Γ *étant classés dans l'ordre alphabétique).*
2) Quelle est la nature du sous-graphe de Γ *constitué des sommets* A, E, F *et* G *? Que peut-on en déduire pour le nombre chromatique* $\chi(\Gamma)$ *du graphe* Γ *?*
3) Quel est le sommet de plus haut degré de Γ *? En déduire un encadrement de* $\chi(\Gamma)$*.*
4) Après avoir classé l'ensemble des sommets de Γ *par ordre de degré décroissant, colorier le graphe* Γ *figurant en annexe.*
5) Combien de parties l'organisateur du concert doit-il prévoir ? Proposer une répartition des musiciens pour chacune de ces parties.

Tout l'exercice (sauf la première question qui est de l'ordre des questions de cours et qui ne joue aucun rôle dans la résolution par la suite) amène à la dernière question : « combien de parties l'organisateur du concert doit-il prévoir ? ». Cette question, si elle était posée seule, permettrait de considérer cet énoncé comme un *problème* d'incompatibilité.

La modélisation n'est pas à la charge des élèves, et la représentation qui est donnée pose question. Dans un premier temps, nous allons résoudre l'exercice posé, tel que l'énoncé

[1]Sujet de mathématiques du Baccalauréat ES, enseignement de spécialité, juin 2003. Les sujets des différentes années sont disponibles ici : `www.maths.ac-aix-marseille.fr/annales/bac/annales03.htm`.

l'appelle, puis proposer une autre forme de réponse, basée sur une représentation différente du problème.

Types de réponses « attendues » :

Voici la matrice associée au graphe Γ. L'intersection entre la ligne i et la colonne j contient 1 s'il existe une arête entre le sommet i et le sommet j, 0 sinon. (Question 1)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le sous-graphe induit par les sommets A, E, F et G est celui-ci :

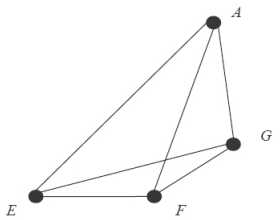


FIG. 2.12: *La plus grande clique du graphe* Γ.

C'est un graphe complet, c'est-à-dire que chacun des sommets est relié à tous les autres. Par définition de la coloration (chaque sommet ne peut avoir la même couleur que ses voisins), celle de ce sous-graphe nécessite 4 couleurs, le graphe Γ dont il est issu en nécessite donc au moins quatre[1]. Le nombre chromatique du graphe Γ est supérieur ou égal à 4. (Question 2)

Le sommet F est le sommet de plus haut degré. Il est relié aux 6 autres sommets, il est de degré 6. Nous pouvons en déduire[2] que le nombre chromatique du graphe Γ est inférieur ou égal à 7, ce qui ne nous apprend pas grand-chose étant donné que Γ a 7 sommets : tout graphe à n sommets peut être coloré avec n couleurs... (Question 3)

Classons les sommets par ordre de degré croissant : D, B, A, C, G, E, F. En appliquant un algorithme de coloration[3], nous obtenons une coloration à 4 couleurs :

[1]D'après l'une des propriétés du cours, le nombre chromatique d'un graphe G est supérieur ou égal au nombre chromatique de chacun de ses sous-graphes.

[2]D'après l'une des propriétés du cours, le nombre chromatique d'un graphe G est inférieur à 1+le plus haut degré de ses sommets.

[3]Par exemple l'algorithme page 12 du document d'accompagnement des programmes :

Algorithme de coloration d'un graphe :

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

– D, B et G prennent la couleur 1.
– A et C prennent la couleur 2.
– E prend la couleur 3.
– F prend la couleur 4.

(Question 4)

Nous avons trouvé une coloration à 4 couleurs. Or grâce à la question 2 nous savons que le nombre chromatique du graphe Γ est supérieur ou égal à 4. Donc le nombre chromatique du graphe est égal à 4. Ce nombre correspond au nombre de parties que l'organisateur doit prévoir : si deux musiciens refusent de jouer entre eux (ce qui dans le graphe est représenté par une arête) alors ils doivent jouer dans des parties différentes (ce qui dans le graphe correspond à des couleurs différentes).
La répartition peut donc être faite de cette manière :
– D, B et G jouent dans la partie 1.
– A et C jouent dans la partie 2.
– E joue dans la partie 3.
– F joue dans la partie 4.

Voici maintenant une manière de résoudre ce problème en utilisant une autre forme de représentation de la situation :
Les arêtes du graphe Γ' ci-dessous indiquent quels sont les musiciens qui acceptent de jouer entre eux.

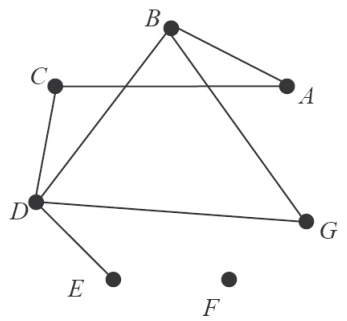


FIG. 2.13: *Le graphe de compatibilité : le graphe complémentaire de* Γ.

À l'aide de ce graphe, on peut facilement lire que :
– Le musicien F ne peut jouer que seul.
– On ne peut pas former de groupe avec 4 musiciens ou plus.

Classer les sommets du graphe par ordre de degré croissant.
Tant qu'il reste des sommets à colorer, effectuer les actions suivantes :
- *choisir une nouvelle couleur appelée* couleur d'usage *;*
- *chercher dans la liste des sommets le premier sommet non coloré et le colorer avec la couleur d'usage ;*
- *examiner tour à tour, dans l'ordre de la liste, tous les sommets non colorés et, pour chacun d'eux, le colorer lorsqu'il n'est adjacent à aucun sommet coloré avec la couleur d'usage.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

- Le plus grand groupe que l'on peut former comporte trois musiciens. C'est le groupe (B, D, G).
- Les groupes possibles de deux musiciens sont (A, B), (A, C), (C, D), (D, E) et (B, D), (B, G), (D, G).
- Chaque musicien peut aussi jouer seul.
- Quatre parties suffisent pour que chaque musicien joue, (F), (B, D, G), (A, C), (E) par exemple, ou bien (F), (D, E), (A, C) et (B, G).
- Aucun des sommets A, G, E et F ne sont adjacents, il faudra donc au minimum 4 parties pour ce concert.

On peut « colorier »[1] les sommets de ce graphe de telle façon que deux sommets ne peuvent avoir la même couleur que s'ils sont adjacents, ce qui est l'équivalent de la coloration « habituelle » dans le graphe complémentaire. De la même façon on peut expliciter un algorithme de « *coloration* » basé sur celui proposé dans le document d'accompagnement :

Classer les sommets du graphe par ordre de degré décroissant.
Tant qu'il reste des sommets non colorés effectuer les actions suivantes :
- *choisir une nouvelle couleur appelée « couleur d'usage » ;*
- *colorer le premier sommet non coloré de la liste avec la « couleur d'usage » ;*
- *examiner tout à tour, dans l'ordre de la liste, tous les sommets non colorés et, pour chacun d'eux, le colorer avec la couleur d'usage lorsqu'il est adjacent à tous les sommets déjà colorés avec cette couleur.*

La question se pose alors : est-il préférable de choisir le graphe proposé par l'énoncé ou le graphe de compatibilité qui comporte deux fois moins d'arêtes, et qui est, par conséquent, beaucoup plus lisible ?

Spontanément, il semble plus simple de travailler sur les relations de compatibilité : lors d'une expérimentation auprès de PLC2[2] comportant un problème d'incompatibilité entre personnes pour la constitution de groupes de travail, sur la soixantaine de participants, aucun n'a conservé l'incompatibilité qui était pourtant donnée dans l'énoncé. L'un d'eux expliquait pourquoi : « On veut que les personnes travaillent ensemble. C'est logique de regarder celles qui sont d'accord pour le faire ». Travailler sur la relation d'incompatibilité offre toutefois un avantage, il semble plus facile, d'un point de vue visuel, de repérer une clique[3] qu'un stable.

Est-il préférable de travailler sur la relation de compatibilité ou d'incompatibilité ? La seule réponse donnée aux apprenants à ce sujet semble être que la technique de coloration enseignée ne fonctionne que sur les graphes représentant des relations d'incompatibilité. Le choix repose donc sur l'utilisation d'une technique de résolution unique, technique qui n'est pas construite pour la situation comme le laissaient entendre les instructions officielles, mais enseignée, apprise et semble-t-il peu interrogée.

De façon générale, les mathématiciens travaillent-ils sur les relations de compatibilité ou d'incompatibilité ? Encore une fois, il n'y a pas de réponse unique à ce genre de questions.

[1] Les termes entre guillemets ne correspondent pas à la définition classique de la coloration pour les graphes.

[2] Autrement dit les professeurs de lycée et collège « stagiaires », qui enseignent pour la première année et poursuivent leur formation en Institut Universitaire de Formation des Maîtres.

[3] C'est-à-dire un sous-graphe complet induit.

La modélisation ou la représentation d'une situation par un graphe est contextuelle. Le type de problème et l'utilisation qui sera faite du graphe considéré permettront de justifier l'utilisation d'une représentation ou d'une autre pour un type de problème donné.

Le fait que ce questionnement n'apparaisse pas dans les manuels montre, semble-t-il, que la « modélisation » n'est jamais à la charge de l'élève de Terminale ES. En fait, les énoncés qu'il y rencontre sont du type : « Représenter cette situation par un graphe G dans lequel les sommets sont S et les arêtes sont A ». En voici quelques exemples :

> (Une carte d'une partie de l'Europe est donnée.)
> *Représentez cette situation par un graphe d'ordre 11 dans lequel les sommets sont les pays et chaque arête relie deux pays voisins.*
>
> Transmath page 348 n°41.

> *Représentez cette situation à l'aide d'un graphe G dans lequel chaque arête est un domino et les deux extrémités sont les chiffres figurant sur le domino.*
>
> Transmath page 349 n°48.

> *On considère un octaèdre ; un sommet du graphe est associé à un sommet de l'octaèdre et une arête correspond à une arête de l'octaèdre.*
>
> Document d'accompagnement des programmes. Exemple 6.

On remarque sur ces exemples que la tâche laissée à la charge de l'élève n'est pas de la modélisation et se limite le plus souvent à la « traduction » d'un énoncé en terme de graphes.

On a l'impression que les règles du contrat didactique sur les graphes imposent de partir d'une situation réelle, même si finalement cette situation n'est pas utilisée dans la résolution du problème posé. Les situations présentées semblent souvent être de simples prétextes pseudo-concrets. Comment éviter l'écueil du pseudo-concret ? La question reste ouverte pour nous, dans la mesure où l'habillage d'un problème, même si elle ne correspond pas à une vraie situation concrète, peut malgré tout permettre de donner du sens au problème, là où un énoncé purement mathématique peut en paraître dépourvu.

2.4.1.2 M3 : reconnaître le graphe modélisant une situation donnée

Prenons un exemple d'un tel énoncé. Celui-ci est issu d'une activité au sujet des ponts de Königsberg :

> *Convenons :*
> 1. *de représenter chacune des quatre parties de la ville par un sommet ;*
> 2. *de représenter chacun des ponts reliant deux parties par une arête.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Vérifiez que l'on obtient le graphe ci-contre, en précisant à quelle partie de la ville correspond chacun des sommets.

Activité 3 page 314 du manuel Transmath.

Précisons que le plan des ponts de la ville et le graphe ont la même orientation, le graphe pouvant se superposer sur le plan de telle manière que la place de chaque arête coïncide avec celle d'un pont.

Nous ne nous étendrons pas plus sur cet énoncé qui nous semble d'un intérêt mathématique très limité.

2.4.1.3 M4 : Reconnaître différentes représentations d'un même graphe

Pour être plus précis dans l'intitulé de ce type de problème, il conviendrait de différencier les graphes pour lesquels on tient compte de l'étiquetage des sommets[1] et les autres, pour lesquels la question s'entend « à isomorphisme près ».
Prenons tous les graphes simples à 1, 2, 3 ou 4 sommets :

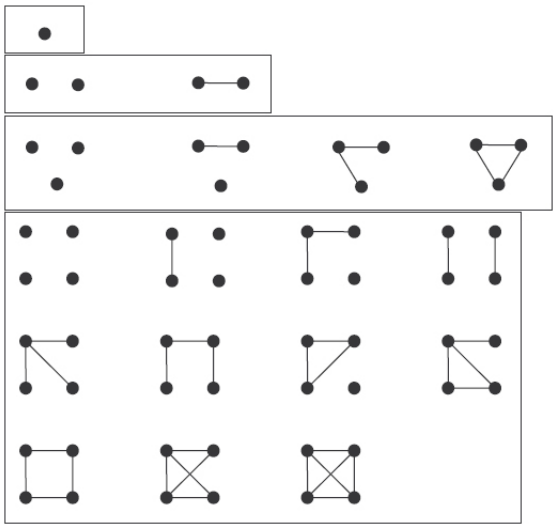


FIG. 2.14: *Graphes à 1, 2, 3 et 4 sommets, à isomorphisme près : 1 graphe à 1 sommet, 2 graphes à 2 sommets, 4 graphes à 3 sommets, 11 graphes à 4 sommets.*

Lorsque la question se pose de la reconnaissance de deux graphes identiques à isomorphisme près, que nous qualifierons de **graphes isomorphes**[2], et pour de « petits » graphes, on peut étudier les séquences des degrés des sommets de chacun des graphes,

[1]Dans ce cas, la technique associée consiste en une vérification sytématique de l'équivalence des étiquettes : on vérifie que l'existence d'une arête entre le sommet x et le sommet y d'un graphe correspond à l'existence de cette même arête dans l'autre graphe.

[2]Voir dans le chapitre 4 le point 4.3.2.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

chercher à identifier les sommets de mêmes degrés et par tâtonnement répondre finalement à la question posée. Mais de façon générale, la question de l'isomorphisme de graphes reste ouverte, dans le sens où il n'y a pas d'algorithme en temps polynomial connu à ce jour permettant d'y répondre. Ce problème reste complexe dans le cas général, et il ne peut être résolu qu'au cas par cas par les élèves.

Dans les manuels que nous avons étudiés, cet énoncé est formulé par une question du type : « déterminer les graphes décrivant la même situation ». Il est à noter qu'aucun élément n'est fourni à l'élève pour résoudre une telle question dans ces mêmes manuels. Sur quoi la reconnaissance de l'isomorphisme de deux graphes s'appuie-t-elle alors ? Nous avons observé deux réponses possibles. La première consiste à différencier les graphes en comparant leur nombre de sommets et/ou leur séquence de degrés. Quand cela ne suffit pas à discriminer deux graphes ou pour quelques exercices, il semble que la « solution » repose sur le « dépliage/étirement » : on cherche à redessiner les graphes de façon à montrer l'isomorphisme qui existe entre eux. Ce travail manipulatoire ressemble à celui servant à déterminer si un graphe est planaire ou non : il est plus simple de repérer des régularités sur un graphe « déplié » ou sur la représentation plane d'un graphe planaire, que sur un graphe où de nombreuses arêtes se croisent.

Cet énoncé possède un intérêt certain : il peut permettre, entre autres, de comprendre l'intérêt d'algorithmes, de dénombrer des graphes de petites tailles, d'organiser ces recherches, de comprendre l'idée d'isomorphisme. Il peut être lié à un travail sur la structure du graphe, la reconnaissance de deux représentations différentes étant elle-même basée sur la structure de ces deux graphes. C'est l'un des rares énoncés rencontré où la technique est laissée au choix et à la charge de l'élève.

2.4.1.4 M5, M6 et M9 : Représentation graphique et représentation matricielle

La représentation matricielle repose sur un codage : plusieurs types de codage existent qui mènent, par exemple, à des matrices dites d'incidence ou d'adjacence. « La » matrice associée à un graphe donné est, en Terminale ES, une **matrice d'adjacence** définie dans le document d'accompagnement comme suit :

> [Pour un graphe non orienté] *La matrice associée à un graphe d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n est une matrice symétrique, de dimension $n \times n$, où le terme à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne vaut k, nombre d'arêtes reliant i et j.*
>
> *La matrice associée à un graphe orienté d'ordre n est une matrice de dimension $n \times n$, où le terme à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne vaut 1 s'il y a une arête dont l'origine est i et l'extrémité est j.*
>
> *La matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre n est de dimension $n \times n$. Le terme à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne a pour valeur le poids de l'arête orientée allant de i vers j si cette arête existe, 0 sinon.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Document d'accompagnement des programmes. Pages 18, 21 et 22.

La technique associée aux tâches demandant le passage d'une représentation à l'autre repose sur une numérotation des sommets du graphe ou des lignes et colonnes de la matrice. Tout questionnement sur l'équivalence entre ces deux représentations est absent des manuels et du document d'accompagnement des programmes.

2.4.1.5 M7 : construire un graphe probabiliste

Construire un graphe probabiliste consiste en la représentation de données par un graphe. Prenons pour exemple, le problème 24 du document d'accompagnement :

> *Deux villes X et Y totalisent une population d'un million d'habitants. La ville X est plus agréable, mais la ville Y offre de meilleurs salaires ; 20% des habitants de Y partent chaque année habiter X pour avoir un cadre de vie meilleur, et 5% des habitants de X partent chaque année habiter Y pour augmenter leur niveau de vie.*

Pour tous les énoncés de cette famille, la technique associée consiste à représenter chaque « état » par le sommet d'un graphe, à tracer l'ensemble des arcs orientés permettant le passage d'un état à l'autre (sans oublier les boucles), à étiqueter les arcs pour lesquels on connaît l'étiquette, et enfin à étiqueter les arcs non renseignés sachant que la somme des étiquettes des arcs sortant de chaque sommet vaut 1.

2.4.1.6 M7 : reconnaître un graphe probabiliste

Reconnaître un graphe probabiliste consiste à vérifier que toutes les étiquettes correspondent à des nombres de l'intervalle $[0, 1]$, et que la somme des étiquettes des arcs sortant de chaque sommet vaut 1.

2.4.2 Énoncés autour de la preuve

Nous ne traiterons pas de la preuve en général, mais de ce qu'elle peut avoir de spécifique en théorie des graphes, ou plus largement en mathématiques discrètes. C'est en effet bien ce caractère discret de l'objet graphe qui amène à des structures de preuves particulières. On peut être amené à construire des preuves par exhaustivité des cas, des preuves par forçage, des preuves par induction. L'induction, que nous appelerons aussi récurrence, est un outil indispensable à la preuve en théorie des graphes. Elle est enseignée au lycée en France presque exclusivement sur les suites numériques. Les élèves apprennent une sorte de « recette de la bonne preuve par récurrence » qui pourrait être résumée ainsi :
– écrire la propriété à prouver sous la forme $P(n) = ...$
– vérifier $P(n)$ sur la plus petite valeur de n qui a du sens pour la question.
– écrire « on suppose $P(n)$ vraie, montrons par récurrence que $P(n + 1)$ est vrai ».
– trouver un calcul permettant de « passer de $P(n)$ à $P(n + 1)$ »
– écrire « $P(n)$ est donc vérifié pour tout n ».

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

En dehors du calcul, quel apprentissage peut avoir lieu ? Quelle conception de la récurrence les élèves peuvent-ils bien se construire dans ces conditions ? Nous pensons qu'un enseignement en théorie des graphes permet de pallier ce caractère systématique de la preuve par récurrence que l'on constate dans un enseignement exclusivement basé sur les suites numériques. Il permet aussi de mettre en évidence le raisonnement sous-jacent sans obstacle calculatoire.

De façon générale, les mathématiques discrètes offrent la possibilité de faire des mathématiques consistantes[1] en évitant les obstacles notionnels. Ainsi, les structures de preuve et les raisonnements qui les guident peuvent apparaître de façon plus franche aux élèves que dans d'autres domaines des mathématiques.

Citons ce qu'en pense la direction de l'enseignement scolaire[2] :

Raisonnement par récurrence (enseignement de spécialité)

Quel est le niveau d'exigence par rapport au raisonnement par récurrence ?

Le programme indique : « on utilisera le raisonnement par récurrence dans les situations où il est nécessaire ». On étudiera des exemples significatifs et on exclura toute théorie sur le sujet. S'il n'y a pas d'exigence démesurée sur la mise en forme, les différentes étapes du raisonnement sont néanmoins attendues.

2.4.2.1 P1 : Démontrer qu'un graphe admet un circuit (ou un chemin) eulérien

Pour prouver qu'un graphe admet un circuit ou un chemin eulérien, il suffit d'exhiber un tel circuit : c'est une démonstration d'existence.

Aucune technique n'est donnée aux élèves pour trouver un tel chemin. Dans les manuels, il est rare de trouver des graphes comportant plus d'une dizaine d'arêtes. Trouver, par tâtonnements, un circuit eulérien dans un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair ne pose aucune difficulté aux élèves[3], la seule réelle question se posant pour des graphes dont deux sommets sont de degré impair. Trouver un chemin eulérien dans un tel graphe demande que les sommets de départ et d'arrivée soient les deux sommets de degrés impairs. Dans une classe connaissant le théorème d'Euler, la question ne peut présenter de réel intérêt que si les graphes sont suffisamment « grands »[4] pour que le chemin soit difficile à établir, ce qui montre aux élèves l'intérêt que peut avoir un algorithme de recherche de chemin eulérien.

[1] Voir [45] et [30] par exemple.

[2] Document d'application des programmes série S et ES du premier décembre 2005, page 6. `http://eduscol.education.fr/D0015/doc_application_ES-S.pdf`

[3] En témoigne l'expérimentation que nous avons menée en classe de seconde, voir l'annexe B pour un compte-rendu complet.

[4] Nous proposons deux exemples de tels « grands » graphes dans le chapitre 4 4.4.2 et 4.4.2.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

2.4.2.2 P2 : Démontrer qu'un graphe n'admet ni chemin ni circuit eulérien

Démontrer qu'un graphe n'admet pas de chemin eulérien nécessite un argument que nous qualifierons d'argument d'entrée/sortie. Cet argument est accessible aux élèves[1]. Cette démonstration[2] devrait à notre avis être laissée à la charge des élèves.

2.4.2.3 P3 : Démontrer qu'un graphe est k-colorable

Pour démontrer qu'un graphe est k-colorable, il suffit, mais ce n'est pas toujours simple, d'exhiber une coloration en k couleurs valide. On peut pour cela procéder par tâtonnements, ou tenter d'utiliser un algorithme de coloration (si l'algorithme donne une coloration en $l \leq k$ couleurs, alors on peut affirmer que le graphe est k-colorable ; sinon, on ne peut pas conclure).

Démontrer qu'un graphe n'est pas k-colorable (ou que son nombre chromatique est supérieur à k) est souvent plus difficile. Il faudra vérifier que parmi toutes les partitions en k ensembles de sommets, aucune n'est une coloration.

2.4.2.4 P4 : Déterminer le nombre chromatique d'un graphe

Cette question est une question difficile. On ne connaît, dans le cas général, qu'un encadrement de cette valeur[3].

Pourtant, pour les élèves de Terminale ES, il existe une technique dédiée :
- On cherche la plus grande clique du graphe. Elle a χ sommets.
- On trouve une coloration en χ couleurs.
- On conclut que χ est le nombre chromatique du graphe.

Parmi tous les exercices et problèmes que nous avons étudiés dans les manuels, seuls les cycles impairs ont pu mettre en défaut cette technique.

Pour un élève, hormis cette « exception » qui peut paraître anecdotique, tout dans les exercices laisse croire que colorer un graphe appelle l'utilisation d'une technique simple et unique. On ne peut alors imaginer comment l'élève peut se construire, dans ces conditions, une conception non erronée de la coloration.

Nous noterons un énoncé original (mais contestable) de Transmath[4] *On considère un graphe contenant une chaîne eulérienne ne passant pas deux fois par le même sommet. Montrez que le nombre chromatique de ce graphe est égal à 2.* Un cycle impair ne contient-il pas de chaîne eulérienne ne passant pas deux fois par le même sommet ?

[1] Voir 3.1.2.3.

[2] Par exemple : plaçons-nous en un sommet quelconque du graphe. Parcourir le graphe en passant une seule fois par chaque arête mènera à « entrer » puis « sortir » de ce sommet jusqu'à ce que toutes les arêtes partant de ce sommet soient parcourues. Si ce sommet est de degré impair, alors il faudra que ce sommet soit une extrémité du chemin sinon au moins une arête incidente à ce sommet ne sera pas suivie. Si le graphe comporte plus de deux sommets de degré impair, alors aucun chemin eulérien ne sera possible.

[3] Voir le paragraphe 4.9 du chapitre 4.

[4] Voir [55], exercice 49 page 350.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

2.4.2.5 P5 : Démontrer que le nombre d'arêtes d'un graphe est égal à la moitié de la somme des degrés de ses sommets

L'argument de la démonstration est « une arête contribue pour un au degré de deux sommets ». La démonstration repose sur une bonne compréhension de ce qu'est une arête, et ce qu'est le degré d'un sommet. Cette compréhension acquise, c'est une démonstration qui peut être laissée à la charge des élèves, et ce à un niveau antérieur au lycée. (L'argument a été vu dans une expérimentation en seconde, alors que la question n'était pas posée).

2.4.2.6 P6 : Démontrer que le nombre de sommets de degré impair est pair

Cette démonstration repose sur le même argument que la précédente, auquel on ajoute des propriétés sur la somme de nombres pairs et impairs. Comme précédemment nous pensons que ces arguments sont accessibles aux élèves et pourraient être laissés à leur charge. Cet énoncé pourrait être l'occasion de montrer la rédaction de deux preuves, l'une par l'absurde, l'autre par induction sur le nombre d'arêtes du graphe.

2.4.3 Énoncés autour de la structure d'un graphe

2.4.3.1 S1 : Étudier l'existence d'un circuit ou d'un chemin eulérien

Lorsque le théorème d'Euler est connu, il existe une technique pour répondre à cette question : compter. On compte le nombre d'arêtes arrivant en chaque sommet. Si tout est pair, on répond qu'il existe un circuit ; si deux et seulement deux sont impairs, qu'il existe un chemin ; sinon, qu'il n'existe pas de chemin eulérien dans le graphe.

À partir du moment où le théorème d'Euler est connu dans la classe, toute question sur l'existence d'un chemin ou d'un circuit eulérien dans un graphe perd tout intérêt autre que de savoir si les élèves connaissent leur leçon.

2.4.3.2 S2 : Étudier des éléments simples de la structure d'un graphe

Pour illustrer ce type d'énoncés, en voici quelques exemples issus du manuel Déclic [53].

- Donner le nombre de sommets et d'arêtes des graphes suivants[1].
- Donner l'ordre d'un graphe. Donner le nombre d'arêtes d'un graphe[2]. (Questions strictement équivalentes à celles de l'énoncé précédent).
- Citer une paire de sommets non adjacents[3].
- Donner la liste des suivants (resp. précédents) d'un sommet donné[4].

[1] Déclic [53], Exercice 4 page 240.
[2] Déclic [53], Exercices 6, 7 et 8 page 259.
[3] Déclic [53], Exercice 8 page 241.
[4] Déclic, Exercice 43 page 245.

– Reconnaître un graphe non connexe[1].

Ces énoncés appartiennent aux « questions de cours », leur seul intérêt étant la connaissance d'un vocabulaire spécifique.

2.4.3.3 S3 : Étudier des éléments non triviaux de la structure d'un graphe

Nous utilisons l'expression « éléments non triviaux » dans l'idée où les énoncés que nous allons décrire pourraient amener à des questions non triviales si les questions posées dans ces énoncés étaient ouvertes. Nous verrons que celles posées ici amènent à des solutions évidentes, ou qu'elles sont tellement fermées qu'elles font perdre tout sens mathématique au problème.

Voici des exemples de tels énoncés dans le manuel Déclic :
– Dessiner un graphe non orienté d'ordre n composé de p arêtes.
– Donner le diamètre d'un graphe donné.
– Donner le niveau d'un sommet d'un graphe donné.
Prenons-les séparément.

Dessiner un graphe non orienté d'ordre n composé de p arêtes.

Si la question est posée sans aucun contexte, une solution triviale suffit à y répondre : prenons par exemple, un sommet comportant p boucles, et $n-1$ sommets isolés, il répond bien à la question posée. Dans le contexte des exercices proposés, il semble que le graphe attendu est un graphe simple. Mais la solution demeure assez triviale : on place n sommets et p arêtes les reliant en prêtant garde à ne pas placer d'arête multiple. Tant que p est plus petit que le nombre d'arêtes du graphe complet K_n, soit $\frac{n(n-1)}{2}$, on est sûr de pouvoir dessiner un tel graphe[2].

Donner le diamètre d'un graphe donné

Cette question est posée quatre fois dans le manuel Déclic[3]. Le manuel donne pour définition de *diamètre* : *plus grande distance constatée entre deux sommets parmi toutes les paires de sommets*. Nous faisons l'hypothèse que les auteurs utilisent l'expression « distance constatée » pour signifier qu'il n'y a pas besoin pour les élèves de prouver que cette distance est effectivement la plus grande, et qu'ils n'ont donc pas à appliquer l'algorithme de Dijkstra à toutes les paires de sommets. En Terminale ES, cet algorithme est en effet la technique consacrée pour trouver un chemin entre deux sommets dans un graphe et prouver que ce chemin est un plus court chemin. C'est **le** moyen donné aux élèves pour établir la distance entre deux sommets.

Comment cette hypothèse se traduit-elle dans les problèmes du manuel ?

Le premier exercice propose les deux graphes complets K_5 et K_6. Il est demandé aux

[1]Déclic [53], Exercice 1 page 259. Parmi les 5 graphes proposés, 4 sont plans. Le cinquième est composé de P_2 et P_3 dont deux arêtes se croisent.

[2]Ce qui est le cas dans tous les exercices sus-mentionnés, c'est-à-dire Déclic [53], Exercices 5 page 240, 11 et 12 page 241.

[3]Voir Déclic [53] Exercices 1, 2, 3 et 4 page 281.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

élèves :
1. *Rechercher le diamètre de chacun des deux graphes suivants.*
2. *Quelle même propriété possèdent ces deux graphes ?*
3. *Généraliser et énoncer un théorème.*

Cette dernière question nous semble prêter à confusion. Elle attend peut-être une généralisation argumentée (comme : *chaque sommet d'un graphe complet étant relié à tous les autres, la plus grande distance qui existe entre deux sommets d'un graphe est 1*) menant à l'énonciation du théorème(*Les graphes complets ont 1 pour diamètre*) ainsi prouvé. Mais telle qu'elle est écrite on peut penser que les élèves, qui ont trouvé 1 comme diamètre de deux graphes complets, peuvent généraliser en disant que tous les graphes complets sont de diamètre 1, et ont ainsi énoncé un théorème qui reste à prouver. Quoi qu'il en soit, pourquoi poser la question « énoncer un théorème » ? Pourquoi pas « énoncer une conjecture » ou « prouver votre conjecture » ? Si c'est le mot même de *conjecture* qui est gênant, on peut imaginer d'autres formulations comme « montrer que le résultat que vous avez trouvé sur les exemples peut être généralisé ». Le terme *théorème* nous semble ici utilisé à mauvais escient.

Le deuxième exercice propose deux cycles C_5 et C_6. Les deux premières questions sont identiques à celles de l'exercice précédent. La troisième est la suivante :
Chercher à énoncer un théorème donnant le diamètre de tels graphes.

Il semble que, cette fois-ci, on ne puisse plus faire l'hypothèse que la question appelle une argumentation. Nous interprétons cette question comme : « énoncer une conjecture sur le diamètre du cycle à n sommets ».

Pour se donner une intuition du diamètre, supposons que le cycle soit un collier formé de billes disposées entre des tiges souples de même taille et pesantes. Si l'on suspend le collier par l'une de ses billes, son diamètre est la distance entre le point de suspension et le point le plus bas du collier[1]. On voit ainsi que le diamètre d'un cycle sera (à peu près) égal à la moitié du nombre de ses arêtes. La conjecture attendue par l'énoncé est qu'un cycle à n sommets a un diamètre égal à la partie entière de $n/2$.

Imaginons alors que la question de prouver cette conjecture soit posée. Pour cela, on est amené à remarquer plusieurs propriétés élémentaires du cycle. Tous les sommets jouent le même rôle, on peut donc choisir d'établir le diamètre d'un cycle à n sommets en choisissant un sommet x quelconque et en établissant sa distance avec tous les autres sommets du graphe.

Que se passe-t-il si l'on applique alors l'algorithme de Dijkstra[2] en prenant x pour sommet de départ ? On commence par se déplacer sur le sommet situé à une distance 1 à gauche (par exemple) de x, puis sur celui à distance 1 à droite de x, puis sur celui à distance 2

[1]On peut généraliser ce dispositif pour déterminer de façon matérielle le diamètre d'un graphe simple et non orienté. Trouver le diamètre du graphe demandera de mesurer cette distance en prenant tour à tour chacune des billes comme point de suspension. La plus longue distance mesurée ainsi est le diamètre du graphe. (Si les arêtes du graphe sont pondérées, il suffit que chacune des tiges soit de longueur proportionnelle à sa pondération).

[2]On aura besoin d'une version élargie de l'algorithme par rapport à celle du document d'accompagnement. La condition d'arrêt de l'algorithme, pour un graphe connexe, est que la distance de x à chaque sommet du graphe soit établie.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

à droite (par exemple) de x, etc. En fait, on se déplace dans le graphe selon un parcours « en largeur d'abord »[1] et l'algorithme s'arrête en donnant la distance attendue que l'on peut « lire » sur le dernier sommet marqué. Ce problème pourrait donc être une occasion de proposer l'application de l'algorithme de Dijkstra sur un exemple « générique », qui permettrait de donner du sens à l'algorithme tout en prouvant une propriété des cycles.

Le troisième exercice propose deux arbres et demande de rechercher leur diamètre (les graphes sont dessinés de telle façon que la réponse est immédiate) puis pose la question *à quoi correspond leur diamètre* ?
Quelle est la réponse attendue ? Nous avouons ne pas savoir. Peut-être que *le diamètre est la plus longue distance entre deux feuilles*, simple application de la définition de *diamètre* aux arbres, est une réponse suffisante ?

Enfin, le dernier exercice propose un graphe simple (non orienté, connexe, plan) et la question posée est : *rechercher le diamètre du graphe suivant*. Pour résoudre le problème, les élèves doivent établir la distance de chaque sommet avec tous les autres, la méthode exhaustive étant la seule à leur disposition. Le graphe a 10 sommets et 15 arêtes, ce qui demande une bonne organisation pour que l'exhaustivité puisse être certifiée. Toutefois le diamètre du graphe est évident sur le graphe en question.

Donner le niveau d'un sommet d'un graphe donné

Dans le seul exercice[2] de Déclic traitant du sujet, le *niveau* du sommet x est défini comme *la longueur de la chaîne orientée la plus longue arrivant au sommet* x. L'énoncé demande à l'élève de vérifier que le graphe n'a pas de cycle orienté. Puis il lui demande de remplir des tableaux qui associent à chaque sommet ses suivants et precédents, avant de lui demander d'établir le niveau de chaque sommet.
Pourquoi la question sur le cycle orienté n'est-elle pas posée de façon ouverte à l'èlève ? N'est-il pas en mesure de comprendre que tous les sommets d'un tel cycle auraient un niveau infini ? Dans la même optique, on pourrait donner une définition de *niveau* sur les graphes en général (par exemple le *niveau* d'un sommet est la longueur du plus long chemin arrivant en ce sommet) et demander aux élèves d'appliquer cette définition pour donner le niveau des sommets du graphe de leur choix. Il me semble qu'une telle question pourrait mener les élèves à une réflexion sur les chemins (un chemin peut-il passer plusieurs fois par la même arête ?), sur les différents types de graphes (peut-on généraliser les définitions que l'on connaît sur les graphes simples aux graphes orientés ? Les graphes orientés peuvent-ils être considérés comme généralisant les graphes simples ?...)
Dans la suite de l'exercice, on demande à l'élève de remplir des tableaux. Le but est de faire apparaître une structure héréditaire en ordonnant correctement le tableau et en commençant par y indiquer les sommets de plus petits niveaux. Mais la question est posée sur un graphe comportant 13 arcs et 9 sommets. Pour y répondre, l'élève n'a aucun intérêt à remplir ces tableaux ou à y chercher une structure. Il lui suffit de regarder le graphe et de compter les arcs composant les chemins orientés menant à chaque sommet.

Cet exemple me semble typique pour illustrer comment la transformation d'un problème

[1] Ce n'est pas toujours le cas. L'algorithme de Dijkstra suit un parcours *en largeur d'abord* seulement si toutes les arêtes ont le même poids. De façon générale, cet algorithme suit un parcours que l'on pourrait qualifier « du meilleur d'abord ».

[2] Déclic [53], Exercice 44 page 245.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

en exercice peut annihiler l'intérêt et le sens de l'activité mathématique qui était contenue dans le problème.

2.4.3.4 S4 : Étudier des éléments de la structure d'un graphe représenté par sa matrice d'adjacence

Nous avons créé cette catégorie d'énoncé alors que nous n'en avons rencontré qu'une occurrence dans le manuel Déclic :

Pour chacun des graphes représentés par leurs matrices d'adjacence, donner la somme des degrés de chaque sommet. Donner le nombre d'arêtes[1]. Cet exercice étant dans la suite logique des précédents qui demandaient de représenter les graphes associés aux matrices données, nous pouvons ramener cet exercice dans la catégorie S2, étudier des éléments simples de la structure d'un graphe.

L'absence d'énoncé de type S4 confirme notre hypothèse selon laquelle la matrice d'adjacence n'est pas utilisée autrement que pour compter les nombres de parcours de taille donnée dans un graphe.

2.4.3.5 S5 : Construire un automate acceptant certains mots

Nous utilisons ici la terminologie « automate » alors que celle utilisée dans le programme est celle de « graphe étiqueté ». Le choix du terme peut paraître anecdotique, mais les automates sont utilisés en informatique théorique, en théorie des langages, et non en théorie des graphes. Les automates sont plus que des graphes orientés et étiquetés, certains de leurs sommets sont distingués par exemple (départ et états de satisfaction), mais surtout, leur construction est déterminée par des contraintes liées à ce qu'ils doivent reconnaître.

L'énoncé « construire un automate acceptant certains mots » est mentionné dans le programme (« résolution de problèmes conduisant à la modélisation d'une situation par un graphe [...] dont la solution est associée : [...] à la construction d'un graphe étiqueté »), mais on n'en trouve aucune occurrence dans le document d'accompagnement, ni dans les manuels Déclic ou Transmath. Que signifie cet énoncé ?

Si l'on demande aux élèves de construire un automate reconnaissant les mots *abacc*, *aabbac* et *aabacc*, l'élève peut répondre :

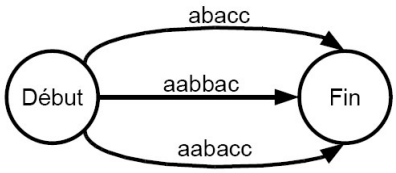


FIG. 2.15: *Un automate reconnaissant les mots abacc, aabbac et aabacc.*

[1]Déclic [53], Exercice 33 page 243.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Ajouter à la définition du « graphe étiqueté » que les étiquettes ne peuvent contenir qu'une seule lettre ou qu'un seul symbole ne changerait rien. Les élèves pourraient alors présenter des automates composés de trois chemins orientés dont on confondrait les extrémités, chacune reconnaissant un mot :

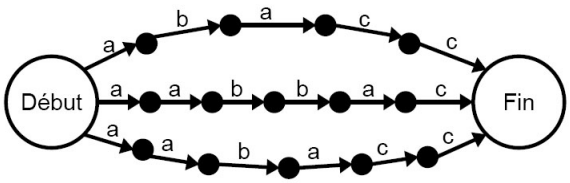


FIG. 2.16: *Un autre automate reconnaissant les mots abacc, aabbac et aabacc.*

Tant que l'on n'introduit pas une contrainte amenant à minimiser le nombre de sommets, un tel énoncé ne pourra fonctionner, et restera un problème mal posé. Il prend toute sa dimension pour la reconnaissance de **famille de mots**, si l'on se permet de poser la question du déterminisme[1], si la question de l'existence même d'un automate fini pour reconnaître une famille infinie de mots est posée, etc.

2.4.3.6 S6 : Reconnaître si un mot est accepté par un automate donné

Un automate et un mot sont donnés. La technique associée à l'énoncé ci-dessus consiste à se placer sur le sommet d'entrée, vérifier qu'un arc étiqueté par la première lettre du mot sort du sommet, si c'est le cas se placer sur ce sommet et recommencer avec la lettre suivante du mot. Si le mot est lu et que l'on se retrouve sur un sommet « fin », alors le mot est reconnu. Sinon, il ne l'est pas.

Cette technique ne fonctionne que parce que les automates présentés sont des automates déterministes. Mais toute question sur le déterminisme est absente. Encore une fois, une technique élémentaire est proposée qui fonctionne sur une classe de graphes bien particulière. Les exercices et problèmes ne sortent jamais de cette classe. Aucune question sur les limites de la technique n'est posée. Finalement, toutes les questions qui ont du sens mathématiquement sont évacuées.

2.4.4 Énoncés autour de l'algorithmique et du calcul

2.4.4.1 A1 : Construire un algorithme

Cet énoncé n'a été vu qu'une seule fois, et il ne correspond pas à une réelle construction d'algorithme. De fait, il consistait à transformer l'algorithme de Bellman en algorithme de recherche de plus long chemin orienté.

[1]Un automate est déterministe si tous les arcs sortant de chaque sommet ont des étiquettes différentes. Une propriété fondamentale est que tout automate fini non déterministe est transformable en un automate fini déterministe équivalent.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Alors que la théorie des graphes a été introduite sur la motivation d'enseigner des éléments d'algorithmiques, la construction d'algorithme ne fait pas partie du programme.

2.4.4.2 A2 : Appliquer l'algorithme de Dijkstra

Reprenons le programme par rapport aux algorithmes : *on indiquera que pour des graphes complexes, des algorithmes de résolutions de certains problèmes sont absolument nécessaires.* L'algorithme de Dijkstra serait-il absolument nécessaire pour trouver un plus court chemin dans les graphes proposés dans le document d'accompagnement ou les manuels ? Sûrement pas. Étant donnée la taille des graphes présentés, même une recherche par exhaustivité pourrait être aussi rapide[1] et plus simple à mettre en œuvre.

La suite du programme est plus précise : *on présentera un algorithme simple de coloriage des graphes et un algorithme de recherche de plus courte chaîne.* Pourquoi tous les manuels proposent-ils donc l'algorithme de Dijkstra et non un autre algorithme de plus court chemin comme celui de Bellman, par exemple ? Sûrement parce que l'algorithme de Dijkstra figure dans le document d'accompagnement des programmes. La colonne « commentaires » du programme précise encore, par rapport aux algorithmes : *on restera très modeste quant à leurs conditions de mise en oeuvre.* Mais que signifie *rester modeste dans la mise en œuvre d'un algorithme* ? La question reste ouverte pour nous.

Souvenons-nous que le programme de la Terminale ES se veut basé sur la résolution de problèmes. Les élèves pourraient-ils « inventer », construire l'algorithme de Dijkstra ? Nous pensons que cela n'est pas possible, et que ce n'est pas dénigrer leurs capacités que de le penser : l'algorithme est complexe, sa preuve aussi. Le document d'accompagnement l'affirme d'ailleurs :

> *Remarque - À la fin de l'algorithme, tous les poids marqués à l'encre donnent les longueurs des plus courtes chaînes reliant les sommets considérés au sommet initial. Une preuve formelle de ce fait est difficile (comme il est difficile, par exemple, de prouver formellement que l'algorithme classique de multiplication des entiers donne le nombre cherché) et n'est pas exigible. On peut calculer que, si le nombre de sommets est n, le nombre d'opérations à faire est au plus de l'ordre du carré de n, ce qui est en général beaucoup plus petit que le nombre de chaînes sans cycles reliant E à S : c'est donc bien plus efficace que l'algorithme élémentaire qui consiste à regarder toutes les chaînes reliant E à S, et à chercher la plus courte.*

Il semble que le choix pour les enseignants soit relativement restreint par rapport à l'enseignement de cet algorithme. Leurs élèves doivent savoir l'appliquer, pas plus.

Le document d'accompagnement des programmes propose l'agorithme ainsi :

> *L'idée de l'algorithme est de procéder de proche en proche, en marquant à chaque étape au crayon (c'est-à-dire de façon provisoire) certains sommets, puis à l'encre (c'est-à-dire de façon définitive) un des sommets déjà marqués au crayon. On arrête quand on*

[1] Il ne s'agit pas ici de la rapidité au sens du nombre d'opérations qu'un ordinateur aurait à effectuer, mais bien de la différence de temps pour l'élève entre l'application de l'algorithme de Dijkstra et la construction d'un arbre de dénombrement, par exemple.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

a marqué à l'encre le sommet final.
On cherche le plus court chemin de E à S sur le graphe suivant :

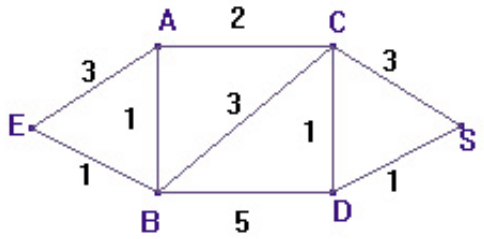


FIG. 2.17: *Exemple*

Pour démarrer, on marque à l'encre (rouge) le sommet E avec le poids 0, puisque le plus court chemin de E à E est évidemment de longueur 0. Chaque étape de l'algorithme consiste ensuite à exécuter les actions suivantes, tant que le sommet S à atteindre n'est pas marqué à l'encre.

- *Soit T le dernier sommet marqué à l'encre.*
- *Pour tout sommet T' non encore marqué à l'encre et adjacent à T, calculer la somme s du poids de T et du poids de l'arête reliant T à T' ; si T' n'est pas encore marqué au crayon (noir), marquer T' au crayon avec le poids s ; si T' est déjà marqué au crayon, remplacer (toujours au crayon) le poids provisoire de T' par s si s est plus petit (on a trouvé un chemin plus court), sinon garder le poids précédent.*
- *Parmi tous les sommets marqués au crayon, en choisir un de poids minimum et marquer à l'encre ce poids.*

On réitère l'opération tant que le sommet final S n'est pas marqué à l'encre. Quand l'algorithme se termine, le poids marqué en S est la longueur d'une plus courte chaîne reliant E à S.

Le document d'accompagnement et tous les manuels proposent une autre « méthode » pour appliquer l'algorithme consistant à remplir un tableau. Elle est toujours donnée sur des exemples. En voici une tentative de généralisation, librement inspirée de celle proposée par le manuel Transmath (Manuel Transmath [55] pages 318 et 319) :

On a un graphe dont les n sommets sont nommés et les arêtes pondérées *par des nombres positifs*[1]. On cherche à établir un plus court chemin entre deux sommets du graphe E et S.

- On trace un tableau à $n+1$ colonnes. Sur la première ligne on place d'abord le nom des sommets en commençant par E et en finissant par S, puis on écrit dans la dernière case « sommet selectionné ».
- (Première ligne : initialisation) On écrit 0 dans la première colonne et ∞ dans les $n-1$ suivantes. On écrit E dans la dernière colonne (E est le sommet sélectionné), et on raye dans la colonne E toutes les lignes suivant la dernière ligne remplie.

[1]Les graphes pondérés n'étant définis en Terminale ES que pour des pondérations positives, la question de savoir comment se comporte l'algorithme sur un graphe dont les pondérations peuvent être négatives n'est pas posée.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

– (Deuxième ligne) Soit X le « sommet selectionné » à la ligne précédente et A l'un de ses voisins. Si, sur la ligne précédente, la valeur dans la colonne A est supérieure à la somme de la valeur dans la colonne de X avec le poids de l'arête entre X et A, alors on écrit sur la ligne courante la valeur de cette somme suivie du nom X.
  Cette opération est répétée pour tous les voisins de X.
  On raye la colonne de X.
  Pour toutes les cases vides de la ligne sauf la dernière on recopie le contenu de la case située au dessus. On écrit dans la colonne de droite le nom d'un sommet dont la colonne n'est pas barrée et pour lequel la valeur inscrite dans sa colonne est minimale.
– On réitère l'étape précédente jusqu'à ce que l'on écrive S dans la colonne de droite.

Pour lire un plus court chemin entre E et S dans le tableau, on *écrit de droite à gauche*[1] la séquence de lettres commençant par S, puis par x la dernière lettre écrite dans la colonne de S, puis par y la dernière lettre écrite dans la colonne de x,..., jusqu'à écrire E.

Cette technique par tableau semble appréciée par les enseignants. L'une des raisons est qu'elle permet la vérification et la correction des copies. Un enseignant rencontré lors d'un stage de formation nous a « avoué », ce sont ses termes, qu'il aimait bien le tableau car il offre une présentation claire qui « fait mathématique » (comme les tableaux de variations de fonctions, par exemple).

Aucune question sur les limites de l'algorithme n'a été trouvée : Que donne l'algorithme sur un graphe non connexe ? sur un graphe avec des pondérations négatives ? Peut-on le simplifier si toutes les arêtes sont de même poids ? ...

2.4.4.3 A3 : Colorer un graphe par un algorithme de coloration

Cet énoncé est généralement associé à P4, « établir le nombre chromatique d'un graphe ». Une écrasante majorité d'exercices et problèmes de manuels associant ces énoncés peut être résolue ainsi :
– On applique l'algorithme de Welsh et Powell à un graphe qui donne une coloration en χ couleurs.
– On cherche la plus grande clique du graphe. Elle a χ sommets.
– On conclut que χ est le nombre chromatique du graphe.

Les graphes donnés aux élèves sont bien choisis : ils ont une clique de la même taille que leur nombre chromatique, et leur appliquer l'algorithme de Welsh et Powell donne une coloration optimale.

Ce type d'exercices conduit dangereusement les élèves à deux conceptions complètement erronées de la coloration : « la taille de la plus grande clique d'un graphe est égale à son nombre chromatique » et « l'algorithme de Welsh et Powell fournit une coloration optimale ».

[1] Cette phrase n'a de sens que dans l'optique de l'application de l'algorithme à des graphes orientés.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

2.4.4.4 A4 : Trouver le plus court chemin entre deux sommets d'un graphe

Nous avons constaté dans les manuels que cet énoncé est quasiment équivalent à A2, appliquer l'algorithme de Dijkstra. Construire un arbre de dénombrement des chemins possibles pourrait être une autre façon de répondre, mais cette réponse ne paraît pas attendue.

2.4.4.5 A5 : Résoudre un problème d'ordonnancement

Le manuel Déclic ([53]) propose deux exemples[1] de tels problèmes à résoudre. Il propose de plus une « méthode associée » :

> *Schématiser l'ordonnancement des opérations à l'aide d'un graphe en faisant apparaître leur durée.*
>
> *Pour cela, penser qu'une arête orientée du sommet i vers le sommet j, pondérée par un nombre t signifie que l'opération i doit être réalisée immédiatement avant l'action j et demande au moins t minutes.*

Le terme *immédiatement* doit être retiré de la phrase précédente. Si deux tâches ordonnées devaient impérativement se réaliser sans qu'une pause entre les tâches ne soit possible, la plupart des problèmes d'ordonnancement n'auraient pas de solution.

Pour ce problème (rare), nulle technique n'est proposée, et l'idée que la longueur du plus long chemin dans le graphe donne la durée minimum nécessaire à l'accomplissement des tâches n'est pas donnée.

2.4.4.6 A6 : Effectuer des calculs matriciels

Les calculs matriciels supposés connus des élèves sont des calculs de somme et de produit pour de « petites » matrices (maximum 3 par 3 à la main et 6 par 6 avec leurs calculatrices). Nous ne donnerons pas ici les techniques associées à ces calculs matriciels, qui, pour les élèves, correspondent à la connaissance des fonctions de calcul matriciel de leur calculatrice.

2.4.4.7 A7 : Interpréter les puissances d'une matrice

L'interprétation de ces calculs est unique : le coefficient a_{ij} de la puissance n-ième de la matrice d'adjacence associée à un graphe est le nombre de chemins de longueur n entre les sommets i et j.

Le concept de *chemin dans un graphe* revient à plusieurs reprises dans le programme, en particulier autour des chemins eulériens et des plus courts chemins. À la différence des autres, ceux évoqués ici peuvent passer plusieurs fois par les mêmes arêtes.

[1] Activité 3 page 239 et problème 42 page 245.

La représentation matricielle, évoquée par les programmes comme justifiant l'introduction des graphes, n'est utilisée que sur un problème marginal.

2.5 Constats sur ce que permet l'enseignement des graphes en Terminale ES

Considérons que la *liste de vocabulaire* donnée dans le programme est la liste des concepts que les élèves de Terminale ES doivent connaître et maîtriser. Dans ce cas, l'application de ce programme nous paraît susceptible de mettre en œuvre des problèmes riches et variés, dont l'enjeu mathématique et didactique peut être fort. Ils peuvent même permettre aux élèves de se donner quelques éléments de réponse à des questions aussi vastes que : qu'est-ce que la modélisation ? qu'est-ce qu'une preuve ? qu'est-ce qu'un algorithme ? qu'est-ce que chercher en mathématiques ? ...

Après une lecture des manuels scolaires, l'impression est toute autre. Les problèmes semblent quasiment absents, et tous les énoncés qui pourraient être *problématiques* sont vidés de leur substance et transformés en exercices. De nombreux énoncés permettraient pourtant un réel questionnement mathématique impliquant la manipulation des graphes, la recherche de structures particulières, la caractérisation de familles de graphes, l'étude de propriétés du graphe concernant sa structure... Mais les problèmes sont découpés en « micro-questions » fermées, dont la résolution se limite à l'appel à des techniques élémentaires de comptage, d'écriture, de numérotation qui leur font perdre tout sens conceptuel. Toute intention didactique semble complètement absente.

Il nous semble pourtant qu'une simple « ouverture » des questions leur donnerait un sens mathématique et permettrait un apprentissage. Par exemple, reprenons les énoncés trouvés dans les manuels Déclic et Transmath à propos du diamètre d'un graphe. L'intention didactique de ces questions, une fois ouvertes, devient la compréhension du concept de diamètre et de son lien avec d'autres, la manipulation de graphes et la recherche de familles de graphes :

Qu'est-ce qu'un graphe de diamètre 1 ? De diamètre 2 ? De diamètre infini ?[1] *Existe-t-il un lien entre la coloration et le diamètre ? Donner plusieurs exemples de graphes non pondérés dont le diamètre est n. ...*

En ouvrant ainsi, pour d'autres notions, les questions collectées dans les manuels, on peut obtenir une longue liste de problèmes dont nous donnons quelques exemples ici :

Qu'est-ce qu'un graphe 1-colorable ? Donner différents exemples de graphes dont le nombre chromatique est 2. Existe-t-il des graphes dont le nombre chromatique est supérieur à 3 et qui ne contiennent pas de triangle ? Existe-t-il des graphes 2-colorables pour lesquels l'algorithme de Welsh et Powell donne une coloration en 3, 4, ..., n couleurs ? Existe-t-il des graphes non eulériens dont tous les sommets sont de degré pair ?[2] *Peut-on construire*

[1] Ces trois questions ne précisent volontairement pas si les graphes dont on parle sont pondérés, orientés, simples ou non, pour lesquels les réponses sont différentes.

[2] Aucun exercice ne propose de recherche de parcours eulériens sur des graphes non connexes. La

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

un graphe simple dont la séquence de degré est ... ? (La séquence de degrés des n sommets peut ne pas correspondre à un graphe car ne répondant pas à la contrainte sur la somme des degrés double du nombre d'arêtes, mais aussi car contenant 0 et n ou plus généralement $k < n$ et $k + 1$ fois $n - k$). ...

réponse à cette question n'est pas forcément évidente. Lors de nos expérimentations, la question s'est vue transformée en *combien existe-t-il de circuits eulériens dans un graphe dont tous les degrés sont pairs ?*, suivie de *comment savoir qu'un graphe contient plusieurs chemins eulériens, la condition de parité de tous les degrés des sommets sauf deux ne fonctionnant plus ?*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Chapitre 3

Étude Expérimentale

En partant des notions à développer en terminale ES dans le chapitre de théorie des graphes, nous avons cherché à établir une liste de problèmes susceptibles d'être proposés aux élèves comme aux enseignants en formation continue, et recouvrant les notions à aborder dans le programme. Nous donnons cette liste de problèmes commentés et résolus dans le chapitre suivant. Même si tous les problèmes[1] ont été testés, certains n'ont pas pu être enregistrés et ne font donc pas partie de ce chapitre.

L'étude expérimentale qui compose ce chapitre est composée de deux parties distinctes. La première partie traite du problème de recherche de parcours eulériens dans les graphes du primaire à la formation d'enseignants. La seconde partie est une synthèse de deux séquences de formation d'enseignants.

3.1 Recherche de parcours eulériens

Le problème de recherche de parcours eulériens dans les graphes est devenu « classique » en animation et en vulgarisation scientifique. Pourtant certaines questions nous semblaient rester ouvertes à l'initiation de ce travail :

- L'énoncé du problème est-il accessible à des enfants de primaire ? Peut-on amorcer en primaire un travail sur des notions de théorie des graphes ?
- Les élèves de Terminale ES peuvent-ils conjecturer le théorème d'Euler ? Trouveront-ils les arguments montrant que la parité des degrés du graphe est nécessaire ? Montreront-ils que cette condition est suffisante ?[2] Qu'en sera-t-il de la condition de connexité du graphe ?
- Pour des étudiants « experts » en mathématiques et connaissant déjà le théorème d'Euler, l'article sur les ponts de Königsberg pourrait-il servir de base à un débat mathématique ?

[1] Hormis ceux concernant les automates.

[2] Si l'on s'en réfère à l'article d'Euler sur les ponts de Königsberg on peut légitimement penser que *voir* cette condition suffisante est déjà difficile.

Nous chercherons à proposer des situations adaptées à ces différents publics pour répondre à ce questionnement.

3.1.1 Avec des supports matériels, en primaire

3.1.1.1 Création et utilisation de matériel

Dans le cadre d'animations scientifiques, notre équipe « Maths à modeler » propose des problèmes de mathématiques utilisant des supports matériels. Ces supports permettent la manipulation ce qui, en dehors de l'aspect ludique qu'ils confèrent aux problèmes, amène à une démarche expérimentale que beaucoup de personnes n'associent pas aux mathématiques[1].

Les « jeux » sont liés pour la plupart à des problèmes de mathématiques discrètes, problème de pavage de la grille, problème d'exclusion de « n-minos » de la grille[2], problème du « tout noir tout blanc »[3],... Des problèmes appartenant à la théorie des nombres sont proposés, comme le problème dit de « la roue aux couleurs », le « jeu des petits cailloux », ou le « jeu de la grenouille »[4]. La plupart de ces problèmes peuvent être retrouvés dans « la valise de maths à modeler » à l'adresse suivante : `http://www-leibniz.imag.fr/LAVALISE/debutval.php`.

[1]Une thèse de didactique des mathématiques à propos de la démarche expérimentale en mathématiques est en cours dans l'équipe Maths à Modeler de l'Institut Fourier. Voir [27] pour les références du mémoire de Master 2, préambule à cette thèse.

[2]Pour ce problème que nous appelons la « chasse à la bête », on dispose d'une grille appelée le territoire, et d'obstacles de la taille d'une case de la grille. On demande de minimiser le nombre d'obstacles à poser sur les cases de la grille de telle manière qu'une bête de la forme d'un n-mino ne puisse se poser sur le territoire. La bête pourra être un domino, ou un trimino long, ou une grille de deux cases par deux cases par exemples. Le lecteur pourra voir au sujet de ce problème l'article [14].

[3]Des palets noirs d'un côté et blancs de l'autre sont disposés sur les cases d'une grille. On cherche à rendre la grille monochrome en utilisant la règle de retournement suivante : lorsque l'on choisit un palet, on le retourne et on doit retourner aussi les palets qui lui sont adjacents.

[4]Voir la thèse de Karine Godot [28] pour une présentation et une analyse de ces trois derniers problèmes.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

FIG. 3.1: *Une animation de Maths à modeler dans le cadre du festival « Remue méninges ».*

Dans ce cadre, nous avons cherché à créer un support matériel permettant de rechercher des parcours eulériens dans les graphes. Nous avons fabriqué des plateaux desquels pointaient quelques chevilles en bois. Des feuilles plastifiées perforées s'agencent sur les plateaux, chacune de ces feuilles comportant le dessin d'un graphe dont les sommets sont les trous de la feuille, et les arêtes sont marquées par un trait épais[1]. Le problème consiste à reproduire le tracé du graphe par un passage unique de la ficelle sur chacune des arêtes du graphe.

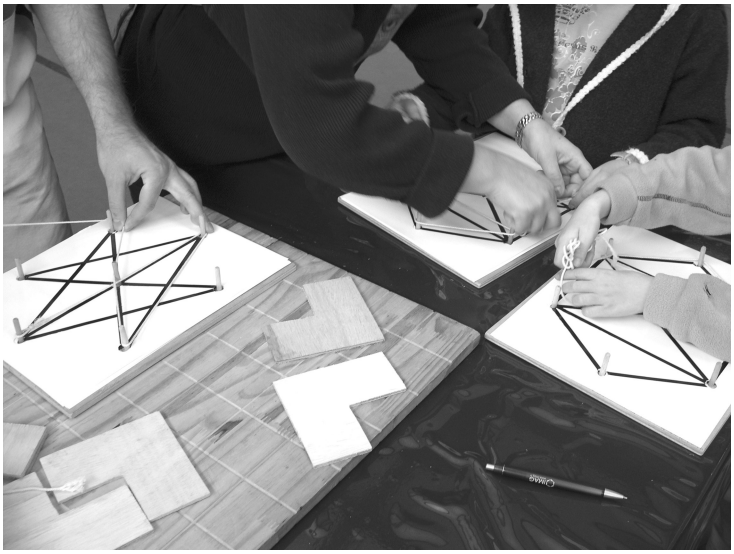


FIG. 3.2: *Lors de la même animation, la première présentation du problème de parcours eulérien dans les graphes.*

[1]Cette construction n'est pas originale, le même type de dispositif existe au Palais de la Découverte, par exemple.

Cette présentation du problème a permis de toucher un public large (plus d'une centaine de personnes) et varié (enfants dès 5 ans, jusqu'à des personnes d'âge avancé, personnes de culture scientifique ou même « nuls en maths », comme beaucoup se qualifient).

Le public semble trouver de l'intérêt à l'activité, mais dans ce type d'animation, le temps passé sur chaque stand est trop court pour qu'une vraie recherche puisse être entamée. L'activité demeure la plupart du temps au niveau du « casse-tête », de l'énigme mathématique, sans que des conjectures n'aient le temps d'émerger. Lors d'une séance assez calme, trois étudiants ont sorti du papier pour chercher à « résoudre le problème ». Dans l'idéal, une feuille de rédaction ou des feuilles reproduisant les graphes « matériels » doivent accompagner cette activité.

3.1.1.2 Une séance en cycle 2 avec les jeux matériels

En juin 2006, nous avons proposé dans une classe de primaire le problème de recherche de chemins eulériens dans les graphes, avec le support matériel.

Le temps de la séance est réparti en environ trois fois 3/4 d'heure. Plusieurs problèmes sont présentés : chasse à la bête, tout noir tout blanc, parcours hamiltonien de la grille, pavage, et parcours eulérien. Quatre GO encadrent la classe qui est répartie en six groupes de 3 ou 4 enfants regroupés par affinité. Quatre groupes, soit 14 enfants au total, cherchent le problème de parcours eulériens.

Le matériel dans chacun de ces groupes consiste en un ou deux plateaux en bois sur lesquels sont posés plusieurs dessins de graphes, et quelques feuilles sur lesquelles sont dessinés les mêmes graphes.

La consigne, donnée à l'oral, est la suivante : « Reproduisez le dessin tracé en noir grâce à la ficelle. Vous n'avez pas le droit de passer deux fois sur le même trait avec la ficelle, mais tous les traits doivent être reproduits. Nous vous demandons d'écrire vos résultats, soit sur les feuilles avec des dessins, soit sur les feuilles blanches qui sont sur vos tables. »

Résultats de la séance

Le premier résultat est le constat d'une dévolution efficace du problème. Très vite des essais sont entrepris, la phase la plus longue étant la négociation à l'intérieur du groupe du choix de l'élève manipulateur du matériel.

La stratégie des élèves est une stratégie par essais/erreurs, les différences entre les groupes étant la gestion de ces essais. Le besoin de conserver les résultats sous forme écrite a été ressenti. Même si les consignes générales le précisaient, quelques soient les problèmes étudiés, la prise de note a été particulièrement effective avec les parcours eulériens.

Un type de notation a été observé dans tous les groupes : il consiste à annoter chaque sommet, spécifiant la réussite ou l'échec de la recherche de parcours à partir de ce sommet. En voici quelques exemples :

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

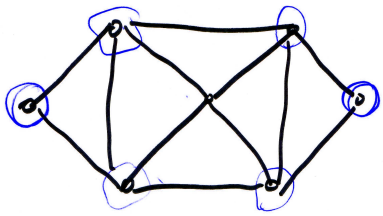


FIG. 3.3: *Une façon de noter les tentatives : entourer les sommets à partir desquels un parcours eulérien existe, soit les « points qui marchent » pour reprendre l'expression du groupe. Pour cette figure, le groupe s'est rendu compte de l'existence de symétries, et n'a pas effectué toutes les tentatives : en tournant la feuille les solutions « sont les mêmes ».*

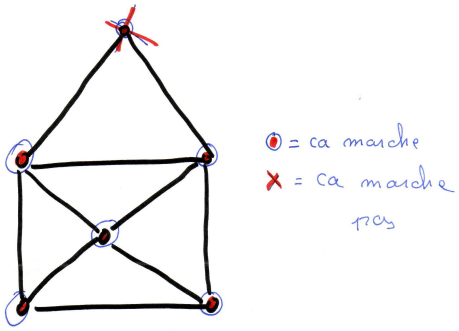


FIG. 3.4: *Le même type de notation dans un autre groupe. À noter que les points de départ n'ont pas tous été testés, certains ont été obtenus par de fausses propriétés de « symétrie ».*

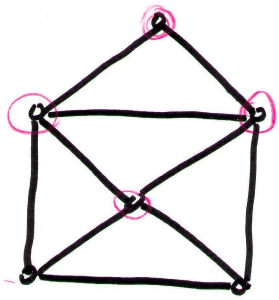


FIG. 3.5: *Une autre façon de noter les tentatives : entourer les sommets à partir desquels on ne trouve pas de parcours eulérien.*

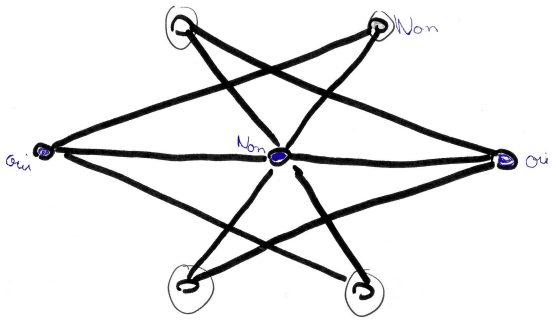


FIG. 3.6: *Une autre façon de noter les essais. Écrire « non » a un statut particulier pour ce groupe. Les sommets notés « non » sont ceux pour lesquels ils sont sûrs qu'il n'y a pas de solution, ils disent avoir « tout essayé ».*

Ce genre de notation ne suffit pas à décrire la recherche : lorsque les GO demandent d'expliquer pourquoi tel ou tel sommet est un possible départ d'un chemin eulérien, la seule possibilité qu'a le groupe est de recommencer son travail. Certains ont donc cherché une méthode pour l'éviter. Voici quelques illustrations de ces réflexions.

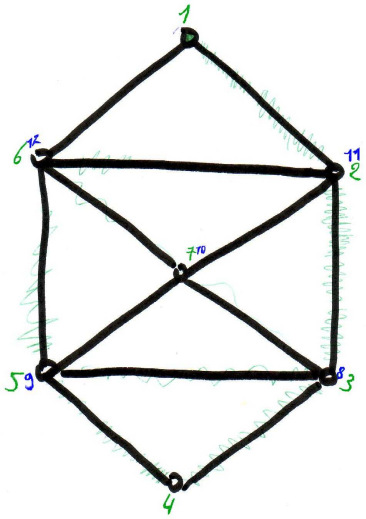


FIG. 3.7: *Le parcours est matérialisé par la numérotation des sommets. Les arêtes sont raturées lors d'une vérification.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

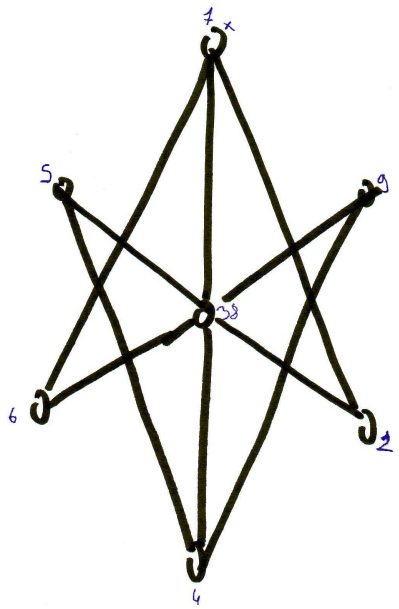


FIG. 3.8: *Une tentative de numérotation des sommets, le sommet de départ est indiqué par une croix. Notez que ce parcours n'est pas possible.*

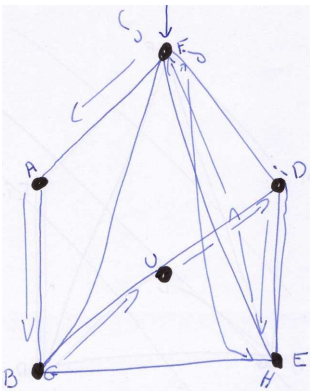


FIG. 3.9: *Une autre tentative de numérotation par des lettres dans le même groupe. La flèche pointe sur le sommet de départ. Le dessin est tracé au fur et à mesure, il est abandonné car il ne semble pas mener à une solution.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

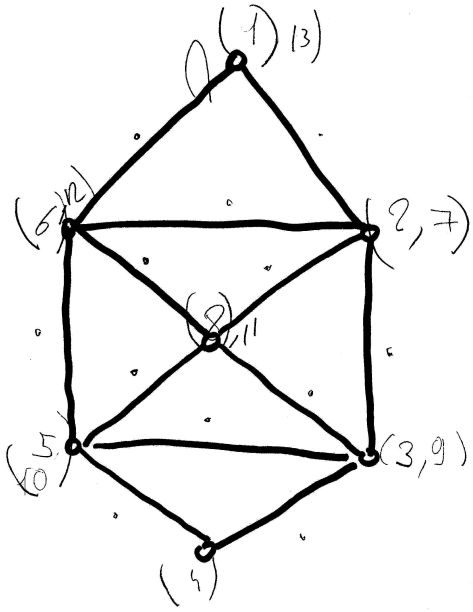


FIG. 3.10: *Une numérotation aboutie, déterminant un chemin eulérien dans le graphe, avec une méthode de vérification qui a, ici, permis de compléter le chemin.*

Ce type de notation constitue un résultat dans la mesure où il est lié à l'émission d'une conjecture plus ou moins explicite selon les groupes, que nous traduirons ainsi : « le sommet de départ du chemin recherché est important, la réussite ou l'échec du parcours de l'ensemble des arêtes dépendant de ce point de départ ».

3.1.1.3 Les principales difficultés rencontrées lors de cette activité

Étant donné le jeune âge des enfants, nous nous attendions à un certain nombre de difficultés. Certaines se sont avérées réelles, d'autres moins.

Nous nous attendions à des difficultés de manipulation du matériel, de préhension de la ficelle par exemple. De fait, le côté ludique de la tâche semble avoir masqué cette difficulté. Ne pas donner un plateau par enfant les a incité à travailler ensemble.

Un autre type « habituel » de difficulté est la communication des résultats ou des idées, à l'écrit comme à l'oral. Nous ne l'avons pas réellement constaté lors de cette séance. On en trouve dans les productions quelques signes, qui auraient pu devenir gênantes lors de la communication intergroupe ou si les résultats avaient dû être utilisés lors d'une séance suivante. Par exemple, une élève a noté son idée en contresens par rapport à ce qu'elle m'expliquait oralement :

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

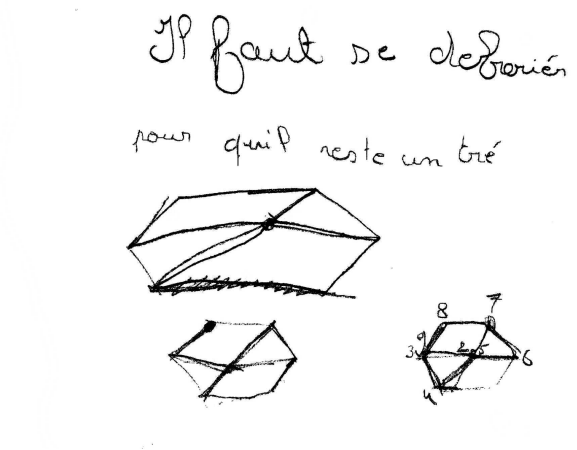


FIG. 3.11: *« Il ne faut pas qu'il y ait d'arête isolée » devient « il faut se débrouiller pour qu'il reste un trait ».*

Les difficultés les plus sérieuses ont été vues lors de la reproduction de graphes[1]. En effet, cela demande une procédure organisée et un contrôle, en particulier pour le dernier graphe que nous proposions :

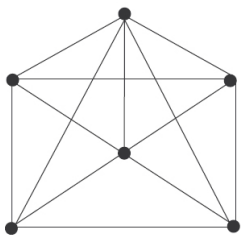


FIG. 3.12: *La reproduction d'un tel graphe appelle une procédure quelque peu systématique.*

Voici quelques exemples de ces essais par les élèves :

[1]Lorsque les feuilles où les graphes étaient dessinés ont été épuisées, les enfants ont, spontanément, cherché à reproduire les graphes.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

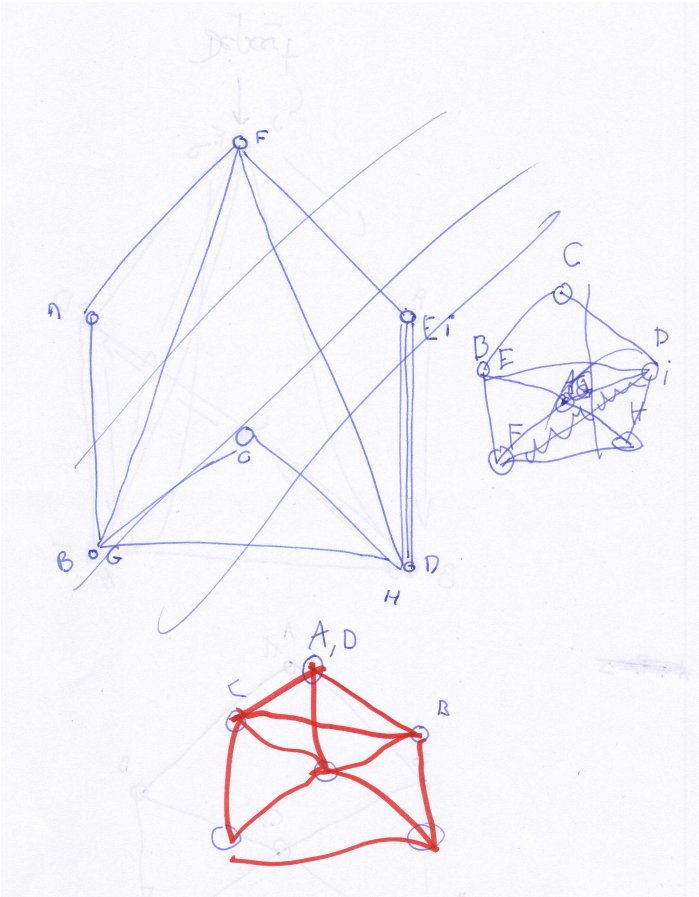


FIG. 3.13: *Essais de reproduction du graphe 3.12.*

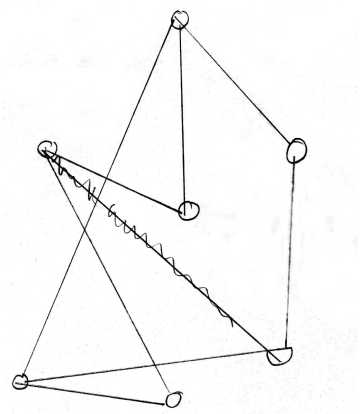


FIG. 3.14: *Essai de reproduction du graphe 3.12 dans un autre groupe.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

3.1.2 En lycée, avec des musées puis des graphes

3.1.2.1 Organisation des séances

Nous présenterons ici l'organisation des deux séances, le matériel distribué dans chacun des groupes, ainsi que les moments de présentation des consignes et les mises en commun.

L'expérimentation a eu lieu à Cluses, les 9 et 16 novembre 2005, en classe de seconde dans le cadre de l'« option sciences »[1] durant deux séances d'une heure trente pour la première et de deux heures pour la seconde. Les élèves étaient répartis en 5 groupes de 3 ou 4, un gestionnaire-observateur (GO)[2] étant présent pour chaque groupe. Lors des deux séances, chaque GO a noté les principales étapes et réflexions présentes dans le groupe qu'il observait. Lors de la seconde séance, les groupes ont été filmés ou enregistrés.

Nous avons choisi de présenter un problème de parcours de musée (exitence d'un parcours passant une et une seule fois par chaque porte), et de proposer dans un deuxième temps le problème de parcours eulérien dans un graphe, avec des graphes qui auraient pu modéliser un musée (un sommet représentant une pièce, une arête une porte), puis des graphes non connexes ou non planaires ne pouvant représenter un musée (ou du moins pas un musée « classique »).

Déroulement de la première séance

Chaque groupe reçoit successivement quatre plans de musées. L'un comporte un circuit, un autre un chemin et pas de circuit, un autre ni circuit, ni chemin. Le quatrième est un musée identique, à retournement et étirement près, à l'un trois autres musées. Les musées ou leurs représentations sont différentes pour chaque groupe, ainsi que l'ordre dans lequel apparaissent ceux avec ou sans chemin et circuit. Un moyen mnémotechnique a été mis en place pour que les GO puissent à tout moment connaître le statut du musée. Chaque musée est accompagné du nom d'une ville : le musée de la ville d'Oz comporte un circuit, celui d'Izis un chemin et pas de circuit, celui d'Aza ni chemin ni circuit, et celui d'Ezé est identique au premier musée distribué dans le groupe.

Voici un exemple de la première feuille distribuée dans le groupe A :

[1] L'option sciences est une option présente dans ce lycée. Elle se présente sous la forme d'ateliers de 3 heures par semaine en mathématiques, physique/chimie et sciences de la vie et de la Terre. Les thèmes sont souvent communs aux trois disciplines. Dans le cas présent, le problème de recherche de parcours eulériens n'a eu lieu que durant les séances de mathématiques.

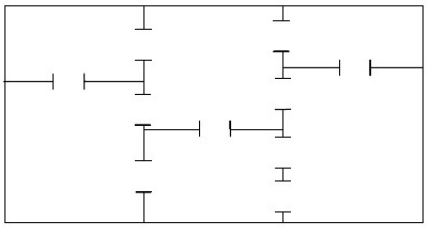
[2] Nous reprenons ici la notion de GO telle que définie dans la thèse de Cécile Ouvrier-Buffet [43], et dont nous détaillerons le rôle dans le paragraphe 3.1.2.2.

Atelier sciences
Le 9 novembre 2005

Groupe A

Au musée (1)

Voici le plan du musée de la ville d'Izis :



Un visiteur se promène et se rend compte qu'il peut choisir un itinéraire passant une seule fois par chaque pièce.

Mais peut-il trouver un chemin passant une seule fois par chacune des portes ?

Peut-il trouver un circuit[1] passant une seule fois par chacune des portes ?

[1] Un **circuit** est un chemin qui revient à son point de départ.

FIG. 3.15: *Un exemple d'énoncé du problème.*

Les élèves peuvent aussi disposer de feuilles reproduisant plusieurs fois chaque musée pour leur recherche. Les GO ont quant à eux des feuilles donnant le déroulement de la séance, les élèves n'y ayant pas accès.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

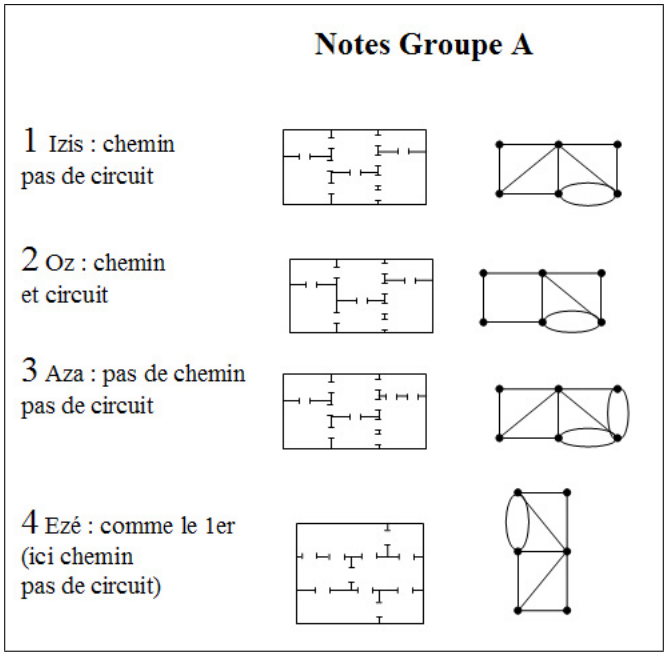


FIG. 3.16: *Une feuille de résumé pour les GO.*

Déroulement de la seconde séance

La seconde séance se déroule en deux temps. Dans un premier temps, pendant environ un quart d'heure, nous demandons aux élèves de rédiger les conjectures qu'ils ont émises lors de la première séance. Trois nouveaux musées leur sont aussi distribués, avec pour consigne de tester leurs conjectures sur ces exemples. Il leur est demandé de ne pas tracer de chemin sur ces feuilles. Ce premier temps s'achève par une rapide mise en commun des conjectures de l'ensemble des groupes.

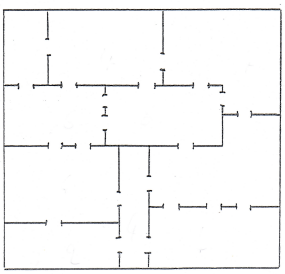


FIG. 3.17: *Un musée pour lequel toutes les salles ont un nombre pair de portes.*

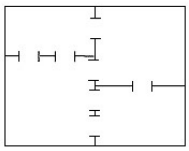


FIG. 3.18: *Un musée pour lequel toutes les salles ont un nombre impair de portes. Le graphe le modélisant (de façon « eulérienne ») est isomorphe à celui des ponts de Königsberg.*

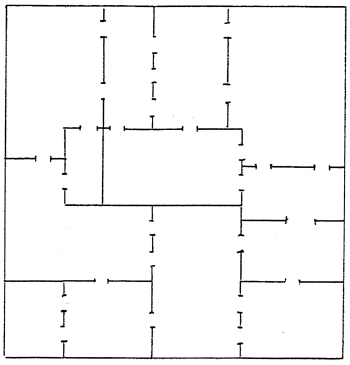
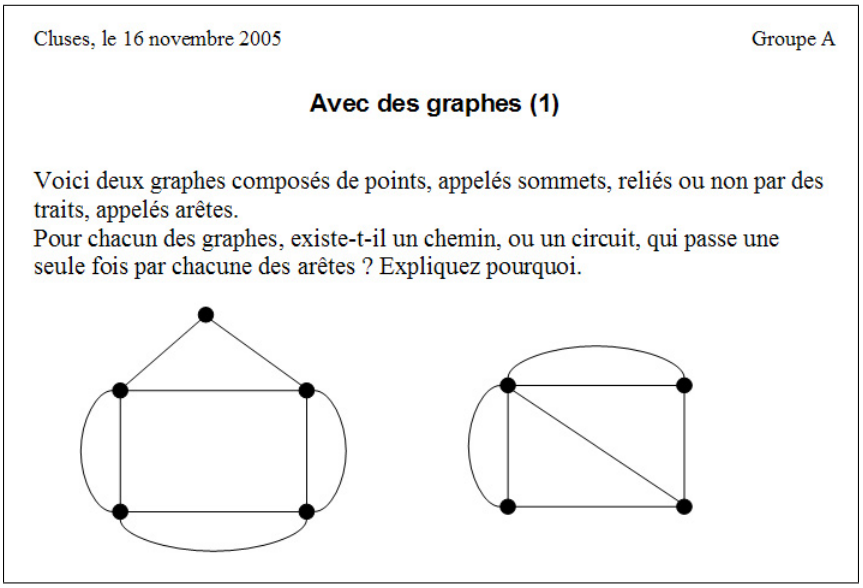


FIG. 3.19: *Un musée pour lequel quatre salles ont un nombre impair de portes.*

Dans un second temps, un « nouveau problème » leur est proposé, consistant à établir l'existence de chemins ou de circuits eulériens dans des graphes. Lors de cette séance, les documents remis aux élèves sont les mêmes et dans le même ordre pour tous les groupes. Voici le premier document :



Cluses, le 16 novembre 2005 Groupe A

Avec des graphes (1)

Voici deux graphes composés de points, appelés sommets, reliés ou non par des traits, appelés arêtes.
Pour chacun des graphes, existe-t-il un chemin, ou un circuit, qui passe une seule fois par chacune des arêtes ? Expliquez pourquoi.

FIG. 3.20: *Un problème de graphes. La première feuille, identique pour tous les groupes.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Les troisième et quatrième graphes sont plus complexes :

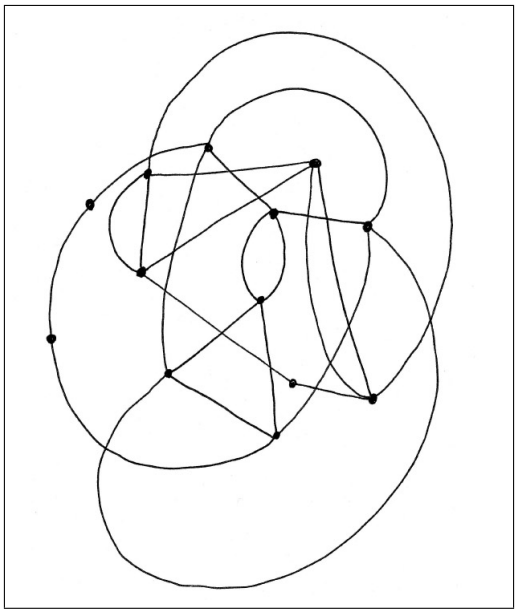


FIG. 3.21: *Un graphe dont tous les sommets sont de degré pair. Ce graphe est composé de deux composantes connexes.*

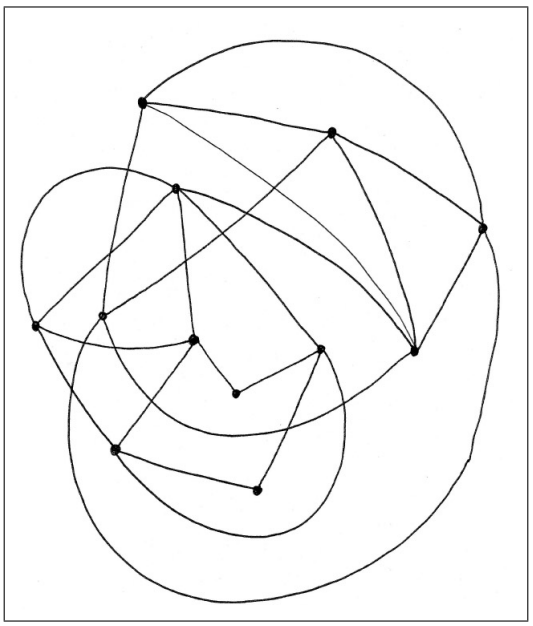


FIG. 3.22: *Un graphe dont seuls deux sommets sont de degré impair. Ce graphe est composé de deux composantes connexes reliées par une arête.*

Cette seconde séance sera conclue par la présentation du théorème d'Euler, et par une preuve de ce théorème.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

3.1.2.2 Construction des séances

Ce paragraphe justifie les choix a priori des variables du problème.

- **Pourquoi proposer des plans de musées préalablement aux graphes ?** D'une part, le parcours d'un bâtiment est facilement appropriable par les élèves, dans la mesure où il correspond à une réalité physique. Un argument du type « je sors, je rentre ; je sors, je rentre ; . . . ; donc tout doit être pair »[1] est accessible. D'autre part, les élèves de cette option ont l'habitude de traiter en mathématiques de problèmes concrets, et leur donner, dans un premier temps, le problème sous cette forme semble plus approprié dans ce contexte.

- **Quel énoncé donner ?** Il existe en effet plusieurs énoncés proches de celui choisi. On peut demander de placer la porte d'entrée de telle façon qu'un chemin[2] dans le musée soit possible. Mais cette question ferme le problème : on fixe ainsi arbitrairement le point de départ à l'extérieur du musée, musée qui comporte alors toujours au moins deux « salles » ayant un nombre impair de portes[3]. On peut aussi proposer un musée composé de pièces en forme de couloirs, les portes étant aux extrémités de ses couloirs. Mais cette forme est proche de celle du graphe et diminue d'autant la phase de recherche pour le problème dans les graphes. Une autre forme de présentation du problème est souvent vue dans les « casse-tête » mathématiques. Elle consiste à proposer le plan d'un bâtiment sans portes ni fenêtres et de demander de passer par chacun des murs une et une seule fois. Cette version du problème a le même intérêt mathématique que celle que nous avons présentée, mais son énoncé est souvent plus difficilement compris. De plus, nous voulions éviter de considérer l'extérieur du musée qui amène à des questions mathématiquement peu pertinentes.

- **Combien de musées donner par groupe ?** Pour que les élèves soient les plus libres possibles dans leur recherche, et ne pas fixer les variables de recherche[4], nous pensions au départ donner un seul plan de musée par groupe, voir aucun. Nous avons écarté cette idée principalement pour des contraintes de temps. En dessinant nous-mêmes les musées pour les besoins de l'expérimentation, le temps passé à cette tâche nous a paru important, et il semblait plus intéressant que les élèves consacrent ce temps à la recherche. Nous avons donc créé différents musées, assez proches les uns des autres. Souvent, seule la disposition des portes ou leur nombre variaient, tandis que les murs du musée restaient les mêmes. Pour que tous les groupes puissent arriver au même point dans leur réflexion, ils ont tous eu accès aux 3 configurations possibles d'existence de chemins et circuits. Nous avons donné à chaque groupe un plan identique à un autre (à étirement et retournement près) pour éviter qu'à chaque nouvelle feuille ne corresponde

[1] Cet argument est celui utilisé pour prouver que la parité du degré des sommets d'un graphe est une condition nécessaire à l'existence d'un circuit eulérien.

[2] Pour la simplicité de lecture, nous parlerons dans ce paragraphe 3.1.2 de chemin et de circuit pour désigner un chemin ou un circuit passant une fois et une seule par chacune des portes d'un musée donné.

[3] L'extérieur étant une « salle » avec une seule porte.

[4] Une variable de recherche est une variable du problème laissée à la charge des élèves. Ici les variables sont surtout liées aux plans de musées, nombre de pièces, de portes, de portes par pièces,. . . Pour une description des variables de recherche, on pourra se référer à [28] pages 133-134 et page 183, ou à [31].

systématiquement une nouvelle propriété.

- **Dans quel ordre donner les musées ?** Pour que tous les groupes ne travaillent pas en même temps sur les mêmes questions, nous avons fixé un ordre d'apparition des musées avec ou sans chemin et/ou circuit différent pour chaque groupe. Les élèves étaient prévenus que chaque groupe avait des plans différents. Hormis éviter les « fuites » entre les groupes, le but était que toute la classe ne travaille pas en même temps sur les mêmes propriétés, et que les exclamations d'un groupe ne découragent pas les autres.

- **Quel rôle tient le GO ?** La tâche du gestionnaire-observateur (GO) a été définie par Cécile Ouvrier-Buffet dans l'une de ses expérimentations[1]. Pour cette séance son rôle est le suivant. Ses interventions peuvent être des explications de base sur la compréhension de l'énoncé, de la consigne et des tâches à effectuer. Il pourra répondre à des sollicitations des élèves sur la rédaction de leurs arguments, de leurs questions et de leurs conjectures, et les incitera à cette rédaction. Il n'interviendra pas dans la recherche des élèves et, en particulier, il ne validera pas leurs conjectures ou arguments. Lorsque la situation se bloque, il pourra proposer aux élèves de reprendre des pistes de recherche qu'ils ont abandonnées, les questionner sur les arguments qui motivent leurs conjectures, et dans le cas présent leur proposer un nouveau plan de musée à explorer. Lors de cette phase, le GO ne proposera pas de contre-exemples aux conjectures proposées par les élèves et n'invalidera pas leurs arguments.

La construction de la seconde séance s'est appuyée sur ce qui s'était passé lors de la première. Certains groupes n'avaient pas terminé de rédiger leurs conjectures, et nous avons proposé quelques nouveaux musées pour les tester. Le but était d'arriver rapidement à une mise en commun des résultats de chaque groupe pour pouvoir passer à la seconde phase de l'expérimentation.

Cette seconde phase est basée sur la recherche de chemins et de circuits eulériens dans les graphes. Proposer des graphes après une longue séance sur les musées permet de voir si le passage d'un problème à l'autre va de soi pour les élèves. Voient-ils le problème de recherche de parcours eulériens dans les graphe comme une modélisation du problème de parcours des musées ? Le but est aussi de remettre en question leurs conjectures et arguments en leur proposant de « grands graphes ». En effet, le théorème d'Euler pose une vraie difficulté aux élèves, ainsi qu'aux enseignants qui le présentent. Le fait que la parité des degrés d'un graphe soit une condition nécessaire à l'existence d'un circuit eulérien ne pose généralement pas de difficulté majeure, et l'argument d'entrée/sortie peut apparaître dans la classe. Une fois que les élèves voient que tous les sommets sont de degré pair sur l'exemple qui leur est fourni, ils cherchent un exemple de circuit dans le graphe, généralement ils le trouvent, et ne voient donc absolument pas l'intérêt de prouver dans le cas général que cette condition est aussi une condition suffisante. La présentation de deux « grands graphes » a pour but de remettre en cause leurs conjectures et de les inciter à construire un argumentaire pour les justifier, ou à systématiser leurs recherches de parcours, ce qui pourrait mener vers une algorithmisation.

[1] Voir [43] pages 169 et 170. Nous adaptons ici la description du GO, qui était attachée à un problème de définition d'un *arbre*, ou plutôt d'un « truc » dans la situation.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Le premier « grand graphe » (Figure 3.21) n'est pas connexe, et cela n'est pas visible du premier coup d'œil[1]. L'idée est que les élèves, forts de leur conjecture (parité des degrés des sommets *ssi* circuit dans le graphe), établissent la séquence de degrés, n'obtiennent que des nombres pairs, conjecturent l'existence d'un circuit, et ne le trouvent pourtant pas dans le graphe. Dans le même ordre d'idée, le second « grand graphe » (Figure 3.22), connexe, contient un **isthme**, c'est-à-dire une arête a dont la suppression créerait deux composantes connexes[2], que nous nommerons A et B. Trouver un chemin eulérien dans ce graphe revient donc à trouver un chemin passant par toutes les arêtes de A (resp. B), traverser l'isthme a, puis trouver un chemin passant par toutes les arêtes de B (resp. A).

Voyant que leur conjecture ne convient pas pour le premier grand graphe et devant la difficulté de trouver un parcours eulérien dans le second, les élèves peuvent adopter plusieurs stratégies. La première est de compléter leur conjecture : nous nous attendons à des conditions supplémentaires du type « il faut que le graphe soit en un seul morceau », ou « il faut qu'il y ait un seul graphe ». Cette stratégie n'est pourtant pas forcément satisfaisante, dans la mesure où elle n'assure pas que d'autres conditions sont nécessaires à l'existence d'un chemin ou d'un circuit dans le graphe. Une deuxième stratégie serait de chercher à prouver que les conditions ainsi complétées sont suffisantes. Cette stratégie nous paraît pourtant peu envisageable, parce qu'elle demanderait, d'une part, de bien comprendre la différence entre condition nécessaire et condition suffisante, ce qui est difficile dans ce problème[3], et d'autre part, la preuve elle-même demande une bonne compréhension de la connexité et de ses implications. Un élève de seconde, ou plus généralement un élève ne connaissant de la théorie des graphes que des définitions non formelles de « graphe », « sommet » et « arête » aura probablement du mal à établir une preuve du caractère suffisant de la condition de parité des degrés d'un graphe connexe.

En dehors de cette « déstabilisation des conjectures », le graphe offre la possibilité de dessiner des exemples et contre-exemples : un graphe est simple à dessiner comparé à un plan de musée, et nous espérons que les élèves pourront ainsi plus simplement illustrer leurs réflexions.

Le rôle du GO lors de cette séance est étendu. Il peut proposer des contre-exemples aux arguments ou conjectures des élèves si ceux-ci sont « bloqués » dans leur recherche.

3.1.2.3 Résultats de l'expérimentation

Nous reprendrons ici les points marquants de cette expérimentation, que ce soit au niveau de l'organisation de la séance, des connaissances mathématiques en jeu, ou des difficultés particulières des élèves sur le problème.

Organisation des séances

[1]Le test a été fait parmi la dizaine de chercheurs et doctorants de l'équipe. À la présentation du graphe, aucun n'a remarqué de façon immédiate qu'il n'était pas connexe.

[2]De façon plus générale et prenant en compte les graphes non connexes, on définit un isthme comme une arête dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes du graphe.

[3]Le fait que Euler lui-même ait fait une erreur de ce type dans sa démonstration nous donne un indicateur assez sérieux de l'obstacle que peuvent rencontrer les élèves au même endroit. Voir le premier chapitre et l'annexe A pour plus de précisions sur l'article dont est issu le « théorème d'Euler ».

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Le premier point remarquable de cette expérimentation est que la dévolution[1] a été particulièrement bonne. Les élèves ont tous, immédiatement après la lecture de l'énoncé, commencé à faire des essais sur leurs feuilles. Tous ont aussi émis des conjectures après un temps plus ou moins long, et les débats dans les groupes ont été riches et animés[2]. L'organisation des séances a ici sûrement joué un grand rôle. Le fait que chaque groupe dispose d'un GO a rendu les conditions de l'expérimentation assez idéales, et du point de vue des élèves, qui sont rarement restés bloqués, et du point de vue de l'expérience elle-même. Nous aimerions proposer à nouveau cette séquence de problèmes en classe « ordinaire », c'est-à-dire avec seul l'enseignant pour GO, pour vérifier le poids qu'a eu cette organisation. Notre hypothèse est que ses résultats en seraient proches, peut-être avec des différences de temps liées au passage du GO entre les différents groupes (et à la discipline générale de la classe qu'aurait à gérer un GO seul, discipline nettement améliorée par un GO pour trois ou quatre élèves).

Résulats mathématiques

Le fait que la parité du nombre de portes par pièce joue un rôle pour l'existence d'un chemin dans le musée a été vu par tous les groupes. Seul le groupe B a, au départ, proposé une idée différente : il pensait que c'était le caractère de divisibilité par trois du nombre total de portes dans le musée qui déterminait cette existence, avant d'abandonner cette conjecture qui ne fonctionnait plus avec le troisième musée.

Lors de la mise en commun, chaque groupe a proposé une ou plusieurs conjectures. Les voici telles qu'elles ont été données à l'oral :

1 « Si toutes les pièces ont un nombre pair de portes, alors on peut faire un circuit, mais pas de chemin qui ne revient pas à son point de départ. »
2 « S'il y a plus de deux salles ayant un nombre impair de portes, alors on ne peut rien faire, ni circuit, ni chemin. »
3 « S'il y a deux pièces paires, alors quelque soit le nombre de pièces impaires, on peut faire un chemin, mais pas de circuit. »
4 « Il faut plus de pièces paires que d'impaires pour qu'un chemin soit possible ».
5 « S'il y a uniquement deux pièces impaires, on peut faire un chemin, mais pas de circuit. L'une des pièces impaires sert de départ et l'autre d'arrivée. »
6 « Le nombre de salles avec un nombre de portes impair est toujours pair. »

En les décontextualisant, on obtient pour un graphe :

1 (Tous les sommets de degré pair) $\Rightarrow$ (circuit eulérien)
2 (Nombre de sommets de degré impair > 2) $\Rightarrow$ (pas de chemin eulérien)
3 (Nombre de sommets de degré pair $= 2$) $\Rightarrow$ (chemin eulérien pas de circuit)
4 (Chemin eulérien) $\Rightarrow$ (nombre de sommets de degré pair $>$ nombre de sommets de degré impair)
5 (Nombre de sommets de degré impair $= 2$) $\Rightarrow$ (chemin eulérien dont les extrémités sont les sommets de degré impair)

[1]La dévolution est l'acte par lequel le professeur confie à l'élève la responsabilité d'une situation d'apprentissage ou d'un problème à résoudre. Vous trouverez une description précise et illustrée de dévolution dans l'ouvrage *Théorie des situations didactiques* de Guy Brousseau [11], pages 62 à 65.

[2]Un compte-rendu par groupe se trouve à l'annexe B.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

6 (Le nombre de sommets de degré impair est pair)

Les conjectures 3 et 4 ont été jugées (à raison) comme fausses par les élèves.

Chaque groupe avait vu lors de la première séance un contre-exemple[1] à la conjecture 3. Elle a été rejetée par le groupe même qui l'a émise en se remémorant (mal) une conjecture de la séance précédente.

Pour la conjecture 4, un élève a proposé à son voisin le contre-exemple suivant :

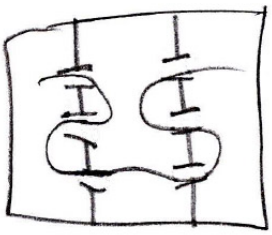


FIG. 3.23: *Un contre-exemple donné par un élève du groupe F pour invalider la conjecture 4, selon laquelle il faudrait plus de pièces paires que d'impaires pour qu'un chemin soit possible.*

La conjecture 6, la seule concernant une propriété générale ne répondant pas spécifiquement à notre énoncé, a un statut particulier dans le groupe qui l'a énoncée.

265	ES	*Oui, mais par exemple, quand on a une seule salle avec un nombre impair, on peut...*
267	LO	*Ce n'est pas possible d'avoir une seule salle avec un nombre impair. Il en faut deux. Parce que forcément le nombre par salles est pair, vu que toutes les portes sont communes à deux salles.*
269	FL	*Non, c'est bon, ça marche...*
270	LO	*Le nombre de portes, 'fin... C'est pas possible qu'il n'y ait qu'une seule salle qui ait un nombre impair. Puisque toutes les portes elles sont communes à deux pièces.* Il montre alors la somme du nombre de portes par pièce. *Donc toutes les portes, elles comptent deux fois, alors il faut multiplier le nombre de portes par deux, et donc c'est forcé qu'il y ait au moins deux pièces impaires. Ou alors zéro.* Quelques instants plus tard, LO précise : *il y a forcément un nombre pair de salles avec un nombre impair de portes.*

Cet extrait montre que LO a les arguments de preuve nécessaires à prouver la conjecture 6. LO précise à ses voisins lors de la mise en commun le statut que cette proposition a pour lui, en disant : « elle est plutôt simple, c'est assez logique, pas besoin d'être Einstein ». Il considère que cette conjecture ne peut pas être mise en doute, mais elle semble avoir un statut de propriété pour lui, étant trop « simple » pour faire l'objet d'un théorème.

[1]Voir le musée d'Aza figure 3.16 par exemple.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

On remarque, en étudiant les conjectures 1, 2 et 5, une mauvaise utilisation du « si... alors ». En effet, les élèves ont donné un argument de type entrée/sortie pour illustrer le fait que la parité est nécessaire pour qu'un chemin existe. Mais la traduction de cet argument en « si... alors » a transformé cette condition nécessaire en condition suffisante. Pourtant, on trouve dans les transcriptions des conversations des élèves des phrases montrant qu'ils avaient bien compris ce qu'ils avaient montré. Dans le groupe qui a proposé la conjecture 1 par exemple, leur première rédaction de cette même conjecture est : « un circuit nécessite que toutes les pièces possèdent un nombre pair de portes ». Dans le groupe C, elle est exprimée en termes de « il faut » : « pour qu'un circuit existe, il faut que toutes les pièces aient un nombre pair de portes ».

En fait, il est difficile de savoir si les élèves ont fait dans cette situation la différence entre condition nécessaire et condition suffisante. Leurs vérifications visent-elles à se passer d'une argumentation générale du caractère suffisant de la parité en la testant sur des exemples ? Sont-elles d'ailleurs des vérifications ou des utilisations d'exemples en vue de preuve ? Comment faire apparaître cette question du caractère suffisant de la parité ?

Des discussions sur la différence entre circuit et chemin ont été engagées dans tous les groupes. Un circuit est-il un chemin, un chemin est-il un circuit, ou ni l'un ni l'autre ? En fait, malgré la définition de circuit qui leur a été donnée[1], la plupart des groupes a considéré qu'un circuit n'était pas un chemin, ou qu'un chemin ne pouvait pas revenir à son point de départ.

Notre volonté de déstabiliser les conjectures des élèves par les deux « grands » graphes n'a semble-t-il pas été suffisante. Le graphe non connexe a massivement été considéré comme un piège, voire une blague, et la connexité a été simplement ajoutée aux conjectures, sans les remettre en cause. Si certains élèves en ont douté à la suite de la présentation de ces deux graphes, cela ne les a pas mené vers une démarche de preuve, ou même de tentative de justification. Dans l'un des groupes, une réflexion a été initiée autour de l'existence de chemin ou de circuits dans chacune des composantes connexes du graphe, le critère d'imparité de deux sommets au plus ne fonctionnant plus :

111	GE	[...]*Imagine qu'on ait 2 chemins. On aurait, pour chaque, 2 points, 1 point de départ, 1 point d'arrivée.*
114	PO	*1 point d'arrivée...*
115	GE	*Donc, en tout, on en aurait 4.*
116	PO	*Ouais.*
116	GE	*Et ça veut dire qu'au début, on se serait dit « non, il est impossible ». Alors qu'en fait on en avait simplement 2. Donc en fait, faudra revoir, faut revoir celle-là en fait.* Il montre la conjecture disant qu'un graphe avec plus de deux sommets de degré impair ne contient ni chemin ni circuit.

Du point de vue de la transition du problème des musées vers celui des graphes, il est à noter que tous les groupes, sauf le groupe C, ont constaté la similarité des problèmes, et ont cherché à « traduire » leurs conjectures sur les musées en termes de graphes. Certains élèves ont d'ailleurs conservé les termes de *pièces* pour désigner les sommets du graphe,

[1]Un circuit est un chemin qui revient à son point de départ.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

et de *portes* pour les arêtes. Un élève du groupe C, par exemple, parle du graphe non connexe, et de ses deux composantes connexes : « c'est impossible de les relier vu qu'il n'y a pas de portes intermédiaires ». Dans ce groupe moins d'une minute a été nécessaire pour que le lien entre les deux problèmes soit établi : « En fait, les points c'est comme les pièces. Et le nombre de traits qui partent de chaque point, si c'est impair, ça fait comme si c'était une pièce avec un nombre de portes impair ». Un autre élève du même groupe décrit le graphe non connexe : « ce sont les deux étages d'un musée, sans escalier ». La question de l'équivalence des représentations musée/graphe a été posée dans un groupe par le GO. Il a proposé un graphe non planaire (le graphe complet à 5 sommets) avec la question « ce graphe peut-il représenter un musée ? ». La réponse du groupe a été immédiate : « oui, c'est un musée avec des tunnels et des ponts ».

Lors de la première séance, un seul graphe a été repéré parmi les productions d'élèves :

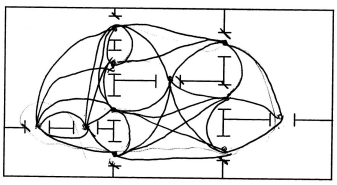


FIG. 3.24: *En joignant les différents couples de portes donnant sur chaque salle, les élèves obtiennent un graphe qui donne une représentation « hamiltonienne » du problème : on cherche à passer une et une seule fois par chaque sommet du graphe, sommets qui sont ici les portes du musée. Un tel chemin dans le graphe ne correspond pas à un parcours franchissant toutes les portes du musée. Notons qu'une arête du graphe est manquante.*

Comme nous l'attendions, les élèves ont tracé d'eux-mêmes des graphes lors de la seconde séance. Des pages entières ont été couvertes dans tous les groupes pour illustrer les conjectures ou pour les infirmer. L'appropriation du graphe par les élèves n'a semble-t-il pas posé de difficultés particulières, ni par l'introduction d'un nouvel objet, nouveauté qui n'a pas été questionnée[1], ni pour le vocabulaire qu'ils ont inventé au fur et à mesure de leurs besoins.

En guise de conclusion

L'appropriation du problème par les élèves a été quasiment immédiate, et il semble que les élèves aient pris un certain plaisir à leur recherche. Les enregistrements montrent de nombreuses phases où les élèves se félicitent de leur propre travail et montrent une certaine fierté par rapport aux résultats qu'ils ont obtenus. Leur investissement dans la tâche qui leur a été proposée ne fait pas de doute.

Ce problème contient un réel obstacle par rapport à la différence entre condition nécessaire (CN) et condition suffisante (CS). La difficulté pour enseigner le théorème d'Euler nous paraît toujours présente après une telle séquence : comment amener les élèves à avoir

[1]On aurait pu imaginer des questions du type : « est-ce que nous faisons des mathématiques ? », ou « le graphe est-il un objet mathématique ? ». Ce type de questionnement n'a pas été relevé lors de ces séances.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

l'envie de prouver que la condition de parité des degrés d'un graphe connexe est une condition suffisante ? Comment leur faire distinguer CN et CS ? Un travail préalable à ce sujet dans un cadre où les deux conditions sont rééllement disctinctes et distinguables changerait-il quelque chose à cet état de fait ?

Nous cherchons actuellement à mettre en place une suite à cette séquence. Le principe en serait de demander aux élèves d'écrire une suite d'instructions pour « piloter une machine » afin de construire un circuit dans un graphe. Les élèves ne verraient pas le graphe dans lequel se déplace la machine, et la machine ne pourrait effectuer que des actions simples, ou répondre à des questions par oui ou non, éventuellement par un nombre. Le rôle de la machine pourrait être tenu par un GO, ou par un élève si nous arrivons à suffisamment bien définir les contraintes associées à la machine pour qu'un élève puisse les suivre. L'avantage de mettre en place un tel dispositif dans une classe est qu'il pourrait être adapté à moindre coût à d'autres problèmes dont la résolution est algorithmique[1].

3.1.3 Une étude de document en deuxième année d'école d'ingénieur

Quinze étudiants de l'option MPS[2] en deuxième année de l'ENSIMAG[3] se sont vus proposés une étude de l'article d'Euler sur les ponts de Königsberg[4]. L'option MPS traite en particulier de problème de transports sous l'angle de l'optimisation combinatoire, et comprend entre autres l'étude du problème de recherche de parcours eulériens dans les graphes et celui du postier chinois[5]. Une preuve du théorème d'Euler a été construite durant ce cours par les étudiants, preuve basée sur une induction sur le nombre de sommets du graphe (ce qui n'est pas vraiment la preuve la plus simple de ce théorème).

Voici l'énoncé du travail proposé aux étudiants, qui était accompagné de la traduction par Coupy de l'article d'Euler[6] :

[1]Nous pensons en particulier à l'algorithme de Dijkstra pour la recherche d'un plus court chemin dans les graphes, ou à des algorithmes de coloration, qui sont au programme de l'option mathématiques de la terminale ES. Nous rappelons ici que le dit programme contient le théorème d'Euler qui n'est pas à démontrer en classe, et que l'algorithme de recherche d'un parcours eulérien dans un graphe n'en fait pas partie.

[2]Management de la Production et des Services.

[3]École Nationale Supérieure d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble.

[4]Je tiens à remercier Julien Moncel et Christophe Rapine, les deux enseignants qui m'ont permis d'avoir accès aux copies de leurs étudiants, et d'assister à la table ronde qu'ils ont organisée à ce sujet.

[5]Sur un graphe pondéré, on cherche à minimiser la longueur d'un chemin passant par toutes les arêtes du graphe.

[6]Cet article se trouve à l'annexe A.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Étude de document

Management de la Production et des Services
INPG–ENSIMAG, 2007–2008

Travail individuel à rendre le 19 novembre 2007

Introduction Le document qui suit est une traduction en français de l'article de Leonhard Euler intitulé *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, publié en 1736 dans les *Commentarii Academiae Imperialis Petropolitanae*. Cet article est souvent considéré comme le point de départ de la théorie des graphes et de la topologie algébrique.

Travail à faire Lisez cet article, en vous penchant particulèrement sur le raisonnement, la modélisation, et l'argumentation. Qu'en pensez-vous ? Y-a-t-il des points sur lesquels vous avez envie de réagir ? Dégagez une ou plusieurs problématiques, et développez-les.

Un mois a été laissé pour rédiger cette étude de document, puis une table ronde a été organisée pour débattre de cette étude. Nous donnerons ici un résumé de cette table ronde durant laquelle la plupart des arguments que les élèves ont donné dans leurs copies sont apparus.

Douze étudiants étaient présents ce jour-là. Le débat a été lancé par Julien Moncel avec la question : « cet article constitue-t-il une preuve du théorème d'Euler ? »[1]

Deux « camps » se sont alors assez nettement dessinés, la majorité répondant « oui » à cette question, seuls deux élèves répondant « non ». L'un d'eux prit la parole :

- TV : Ce n'est pas une vraie preuve, car Euler ne prouve pas tout. Il prouve l'impossibilité d'un parcours si le nombre de berges ayant un nombre impair de ponts est différent de 0 ou 2. Finalement, il ne donne que la preuve de la condition nécessaire.
- LF : En fait le problème est simple, et montrer la condition suffisante est évident, alors Euler n'a pas besoin de prouver autre chose que ce qu'il donne dans cet article.
- BC : Non, Euler prouve tout dans cet article.
- TL : Le problème c'est qu'on ne peut pas prouver que cette preuve est fausse. On sait que le théorème est vrai, que c'est une CNS. On ne pourra donc pas trouver de contre-exemple pour montrer que cette preuve est fausse.
- AB : Le problème de cette preuve est qu'elle ne contient pas de méthode de construction de la solution, ce qui la rend fausse.
- IF : C'est faux. Tu peux montrer que le chemin existe, et une fois que tu l'as fait il est facile de le trouver ce chemin. C'est d'ailleurs ce que dit Euler à la fin.
- TV : Tous les calculs que fait Euler cachent seulement l'idée d'entrée/sortie. Alors qu'il aurait suffi d'utiliser la parité pour ça.

[1] À notre avis, la réponse à cette question est non (Voir 1.2.3). Mais l'affirmation inverse est largement répandue sur internet ou dans certains ouvrages de théorie des graphes ([18] par exemple).

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

- TL : Il y a un autre défaut dans la preuve, c'est qu'Euler ne donne pas de condition sur la connexité. Mais en même temps, c'est un problème de ponts, donc c'était évident.
- TV : Le vrai problème c'est que quand on a parcouru tous les ponts d'une berge ça ne veut pas dire que l'on a tout parcouru dans la ville.
- GM : Sur la forme de cette preuve, on peut dire que ce n'est pas une preuve mathématique, mais plutôt algorithmique. Il n'y a pas une seule formule mathématique, mais que des phrases. Cela aurait été bien plus simple à lire avec des formules. Il aurait pu dire n quand même !
- LF : Je ne suis pas d'accord, je trouve ça facile à lire et à suivre. C'est imagé et on peut toujours se représenter se déplaçant dans la ville, ce qui facilite les choses.
- TV : En fait, on ne dirait pas qu'il cherche à écrire des mathématiques, ni à construire une branche des mathématiques. On dirait plutôt qu'il donne une solution à un jeu, à un casse-tête.
- BD : Il n'y a pas de formule, mais les formules rebutent souvent les gens car ça ressemble trop à des mathématiques quand il y a des formules. Sous forme de phrases comme ça, c'est plus de la vulgarisation. Même si pour nous il est plus facile de travailler avec la formalisation.
- LF : Je pense l'inverse. On arrive bien à suivre Euler tant qu'il fait des phrases. C'est quand il commence à utiliser la formalisation avec ses tableaux que l'on arrive plus à le suivre. Il aurait d'ailleurs pu s'en passer, et le texte aurait été plus compréhensible.
- TV : L'idée « je rentre, je sors donc c'est pair » c'est une démarche facile, là, avec ses tableaux et ses explications trop longues, il complique tout pour rien.
- Julien : Revenons à ce que vous abordiez tout à l'heure, vous parliez de condition nécessaire et condition suffisante. Que prouve Euler dans l'article ?
- TL : Il n'a pas démontré ce théorème. Pour montrer l'existence du chemin, il y a obligation de créer ce chemin, ce qu'Euler ne fait pas dans l'article.
- LF : Si, il le montre. Il montre que sa méthode marche en la construisant de façon rigoureuse. Où sa méthode serait fausse ?
- GM : La façon de rédiger d'Euler peut donner une impression de manque de rigueur, car ce n'est pas formel. Mais Euler nous donne un nouveau point de vue sur le problème, et sa méthode est élégante. Si c'est faux, il faut dire à quel endroit ça pèche. Je ne vois pas d'endroit où les affirmations d'Euler sont fausses.
- TV : Au point 21. Il affirme que c'est possible sans le démontrer et il donne comme méthode de construction d'utiliser son intelligence !
- LF : Il a raison ! Quand un résultat est trivial, on écrit trivial à côté dans la preuve. C'est ce que fait Euler ici.
- TV : Dans les preuves de ce théorème que j'ai pu voir, on met trivial à côté de la CN, ou elle tient en 3 lignes. Mais pas à côté de la CS, c'est ça qui fait l'essentiel du travail de preuve dans celles que j'ai pu lire. Là, il fait le contraire, il passe tout son temps à nous prouver ce qu'on écrit en 3 lignes normalement.
- BC : Mais non, il me semble bien qu'il le prouve. Et il dit que le début doit se faire par une berge impaire s'il y en a deux. Et dans ce cas il prouve que ça marche avec ses contraintes sur les lettres.
- TL : Non, ce n'est pas une preuve au sens formel, il n'a pas montré la CS.
- BD : La réponse elle est dans le point 20. Il y a un résumé de tout ce qu'il a prouvé. Et vu que t'es d'accord avec tout ce qui précède, tu ne peux pas remettre en question

ce résumé.

- LF : Si ça ne vous convainc pas, c'est parce que ce n'est pas assez formel pour vous. vous n'êtes pas habitués à des preuves de ce type avec des phrases.
- BD : Vu que tout est pair tu sais que tu vas toujours pouvoir sortir, donc tu pourras toujours trouver le chemin.
- IF : Non. Euler ne dit pas ça. Ce n'est pas une preuve du théorème qu'il donne. Il a simplement eu de la chance que ça marche.
- LF : En fait, Euler a peut-être écrit un autre article avant. Où il aurait donné les bouts qui manquent ici.
- VJ : Il y a autre chose lié à la traduction. Le niveau de langue n'est peut-être pas le même que dans l'article original en latin. Le traducteur n'a peut-être pas tout traduit, ou il n'a peut-être pas bien traduit la pensée d'Euler. Il faudrait aller voir le texte original pour en être sûr.

Une discussion courte et assez animée s'ensuit sur ce qu'est une preuve, et sur comment prouver qu'une preuve est une preuve.

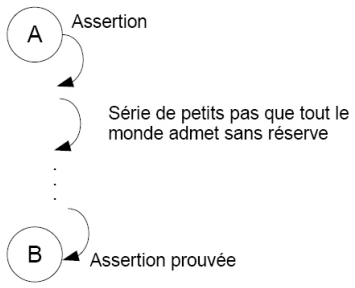
- VJ : Ce que vous dites, c'est que quand tout est pair, Euler n'aurait pas prouvé que le chemin existe ?
- TV : Si on n'arrive pas à convaincre que c'est une preuve, alors ce n'est pas une preuve ! Euler a affirmé sans prouver. Il a lancé 1=2, sauf que ce qu'il avançait était vrai. Mais sa preuve revient à « 1=2, si c'est faux prouvez moi le contraire ».
- LF : Où, dans le texte vois-tu ça ?
- TL : Il commence par montrer que ça ne peut pas marcher pour les ponts de Königsberg, en montrant que le nombre de lettres est trop grand dans ce cas. Puis, il dit que le nombre de lettres doit être de tant pour que le parcours puisse exister. Mais on ne sait pas si cette condition suffit. Il a juste prouvé que c'était nécessaire.

La discussion porte alors sur la modélisation d'Euler utilisant les lettres successives avec des contraintes sur les lettres et comment les ordonner. Certains affirment que Euler donne la méthode sur comment les ordonner, et que cela donne une construction du chemin, et finalement une preuve contructive du théorème. D'autres le nient en affirmant que les contraintes ne suffisent pas à construire le chemin, mais seulement à donner une preuve d'impossibilité dans le cas où les contraintes donnent un nombre de lettres trop important. Ce qui reviendrait à ne prouver que la condition nécessaire. Finalement TV se lève et va au tableau.

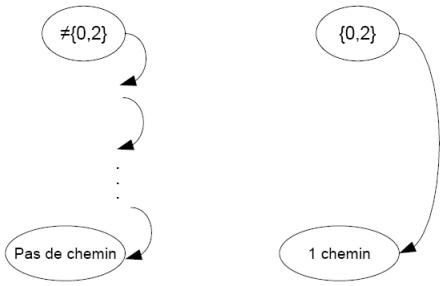
- TV : Qu'est-ce qu'une preuve ? On l'a vu dans le cours de logique formelle. À mon avis, une preuve c'est une assertion A, suivie d'une série de petits pas que tout le monde admet sans réserve, jusqu'à une assertion B, qui est alors prouvée.

Il dessine au tableau le schéma de ce qu'est une preuve pour lui :

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009



– TV : Or ce que fait Euler, c'est une série de petits pas pour montrer que lorsque le nombre de berges à ponts impairs est différent de 0 ou 2, ça ne peut pas marcher, mais pour 0 ou 2, il fait un grand saut, il affirme et ce n'est pas une preuve.
– TV illustre cette idée par un dessin au tableau.



Plusieurs étudiants se lèvent, et décident de reprendre le texte de l'article point par point pour expliciter les pas de la preuve d'Euler.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

	1 ↓ 4	Introduction et modélisation du problème
	5	Un passage sur N ponts se traduit par N+1 lettres
	6	S'il existe un pont entre A et B, on retrouve la succession de lettres AB ou BA une fois par pont.
Réécriture du problème	7	Donc le problème devient : trouver une succession de N+1 lettres (8 dans l'exemple) où les successions sont dans le bon nombre. → Annonce une règle
	8	Si #p(A)=2k+1 alors #occ(A)=k+1
	9	Pour les ponts de Königsberg On en déduit le nombre de lettres : 8 ←7 or On devrait trouver : 9 ←8 Contradiction ⇒ pas de chemin possible.
	10	Ne marche pas : Euler admet que le chemin est alors possible.

Finalement plusieurs étudiants admettent que la preuve est insuffisante, et la majorité de la classe admet qu'elle ne constitue pas une preuve du théorème avancé par Euler.

En guise de conclusion

Une synthèse fine de l'ensemble des données fournies lors de cette séquence nous reste à faire[1].

Nous voyons tout de même certains points apparaître explicitement dans le débat :
- la distinction entre CN et CS,
- le lien entre la preuve et l'algorithme,
- le niveau de formalisation d'une preuve,
- des questions liées au choix du modèle.

Nous pouvons avancer certaines hypothèses par rapport à cette expérimentation préalable. L'étude de documents mathématiques historiques n'est pas standard dans la formation qu'ont suivie ces étudiants[2]. Pour la première fois, ils se sont trouvés confrontés à une façon d'écrire qu'ils ont eu du mal à concevoir comme des mathématiques. L. Euler, qualifié de « génie incomparable des mathématiques » et autres superlatifs, a semblé à la majorité au dessus de tout soupçon d'erreurs. Rares sont ceux qui ont affirmé dans leurs copies qu'Euler auraient pu se tromper. Au-delà ce côté quelque peu anecdotique, cette séance a surtout permis d'accéder aux conceptions des élèves sur la preuve et la modélisation. Le

[1]Un article en collaboration avec Julien Moncel, est en cours sur ce sujet. Cette expérience était une pré-expérimentation avant de proposer une étude de documents dans deux classes de deuxième année dans deux écoles d'ingénieurs différentes.

[2]La formation à l'université ne semble pas non plus offrir ce type d'étude. Une ouverture vers l'histoire des sciences semble se dessiner à l'université depuis la mise en place de modules d'ouverture obligatoires en Master, même si elle reste à confirmer.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

fait de leur donner une preuve rédigée de façon très différente de celles qu'ils ont l'habitude de voir en cours leur a permis de se questionner sur ce qui pour eux constitue une preuve. Une preuve non formelle est-elle acceptable ? Une preuve non constructive est-elle une preuve ? Quels critères permettent de définir une « bonne » preuve ? Ces questions ont été la base des problématiques exposées dans leurs copies et leurs réponses nous renseignent sur leurs conceptions de la preuve, et plus généralement sur leurs conceptions des mathématiques elles-mêmes. Le recul qu'ils possèdent par rapport aux mathématiques semble primordial pour que de tels questionnements puissent avoir lieu. Mais ce qui semble d'ores et déjà apparaître à l'étude des copies, c'est que les conceptions qu'ont des étudiants que nous qualifieront d'« avancés » en mathématiques semblent être les mêmes que celles que l'on peut deviner en filigrane dans les expérimentations avec des élèves bien plus jeunes.

3.2 Formation d'enseignants

Nous avons suivi et observé deux formations d'enseignants liées à l'introduction de la théorie des graphes en Terminale ES.

La première a eu lieu au début de l'année 2004, soit la deuxième année de mise en place du nouveau programme. Seul un enseignant, ayant en charge l'enseignement de spécialité de Terminale ES, avait une connaissance préalable de ce qu'était un graphe. Pour la plupart des autres enseignants présents ce jour-là, un graphe correspondait à la représentation graphique d'une fonction.

Deux ans plus tard, sur les onze enseignants présents à la formation, sept avaient déjà enseigné la théorie des graphes et seuls deux n'avaient aucune idée sur ce qu'étaient les graphes. Un court questionnaire leur a été donné à cette occasion :

- *Avez-vous enseigné la théorie des graphes ? Jamais* 4/11, *cette année* 5/11, *précédemment* 4/11.
- *Pouvez-vous donner quelques noms ou expressions que vous évoque la théorie des graphes ?* (Question ouverte dont nous regroupons les réponses par thèmes)
  - cycle eulérien (1), Euler (1), ponts de Königsberg (1)
  - nombre chromatique (3), coloration (4), incompatibilité (1)
  - algorithme de Dijkstra (5)
  - graphes probabilistes (2), orienté/non orienté (1)
  - degré (1), sommet/arête (1)
  - nouveau (1), pour organiser (1), amusant (1), sans prérequis (1).
- *Ce que vous connaissez de la théorie des graphes, vous le connaissez par :* (Question à choix ouverte)

  Auto-formation (9/9)
  Formation universitaire (1/9)[1],
  Formation IUFM initiale (0/9),
  Formation continue (0/9).
- *Qu'est-ce qui a motivé votre inscription à ce stage ?* (Question ouverte)

[1]Ce seul enseignant précise : « auto formation : manuels et accompagnement du programme, formation universitaire : DEA ».

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Acquérir du recul (4)
Améliorer sa formation mathématique (4)
Améliorer sa pédagogie (1)
Savoir à qui et à quoi servent les graphes (2)
Échanger avec des collègues (1)
La curiosité (1)
« Accroche intéressante sur les « gamins » » (1)

Nous ne pouvons tirer de conclusions générales et définitives sur ces seules réponses, l'échantillon est petit et il ne représente que des enseignants désirant suivre une formation en théorie des graphes. Malgré tout, ces réponses ne sont pas en contradiction avec nos hypothèses, en particulier qu'une telle formation est attendue par les enseignants, ceux en poste depuis plus de cinq ans n'ont, pour la plupart, jamais eu de formation initiale à ce sujet.

Les séances ont été organisées autour de problèmes et les enseignants ont été mis en situation de recherche par groupes de trois ou quatre. La durée de ces formations était de 12 heures, réparties sur deux journées. Nous présentons ici une analyse de ces séances. Des compte-rendus plus détaillés figurent à l'annexe C.

3.2.1 Les poignées de mains

3.2.1.1 Présentation succinte du problème

Le problème des « poignées de mains » est posé dans un contexte ouvert et hors mathématique, dans le but de travailler la modélisation et le concept de graphe.

Groupe de 20 personnes. 2 personnes qui se connaissent se serrent la main. C : Conjecture « On peut trouver 2 personnes au moins qui serrent le même nombre de mains. »

La question : « discutez cette conjecture » accompagne cette présentation.

Cette question, si elle est comprise avec les hypothèses implicites « on ne se serre pas la main à soi-même » et « on ne serre qu'une fois la main aux personnes que l'on connaît » mène à une résolution basée sur le principe des cages à pigeons. Elle peut être modélisée par un graphe où chaque personne est représentée par un sommet, et le fait de se serrer la main par une arête. Transposé sur les graphes, la conjecture devient : « On peut trouver dans tout graphe deux sommets de même degré ». Cette conjecture est alors vraie seulement dans le cas des graphes simples et non orientés. (Voir dans le chapitre 4, le paragraphe 4.2 pour une résolution de ce problème).

Très rapidement, lors de chacune des formations, le travail a été amorcé dans les groupes, et a amené à des questions et des propositions de résolution.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

3.2.1.2 Au niveau de la modélisation

Deux représentations émergent et servent de base à l'étude de la conjecture : le tableau et le graphe. Le tableau est un tableau à deux lignes, l'une comportant une numérotation des personnes, l'autre le nombre de mains serrées par chacune. Il est abandonné en même temps que l'étude du problème sur les graphes simples et non orientés.

Les hypothèses « on ne se serre pas la main à soi-même » et « on ne serre qu'une fois la main aux personnes que l'on connaît » sont discutées. Les choix pris pour chacune amènent à différents types de graphes (graphes simples, multiples, avec ou sans boucle). La relation « se serrer la main » est transformée en « faire un bisou » et amène à la construction de graphes orientés.

De nouvelles formulations du problème mènent à de nouvelles questions. Par exemple, le problème est très vite généralisé à un groupe de n personnes.

3.2.1.3 Au niveau du concept de graphe

Les propriétés, questions et propositions de solutions ont un rapport étroit avec le concept de graphe, même si elles ne sont pas encore exprimées dans les termes de la théorie mathématique. On voit apparaître les concepts de :
- graphe complet : « si on se connaît tous, alors on se serre tous la main » ;
- graphe stable : « si personne ne se connaît, alors personne ne serre de main » ;
- relation transitive (qui est représentée par un ensemble de graphes complets) : « si deux personnes se connaissent alors, c'est bon, elles serrent le même nombre de mains » qui contient l'idée « les amis de mes amis sont mes amis » ;
- boucle : « si plusieurs boucles sont possibles alors il n'y a pas de problème car l'on peut « compléter » tout graphe en ajoutant un nombre quelconque suffisamment grand (100, 200) de boucles à chaque sommet ».

Différents types de graphes apparaissent :

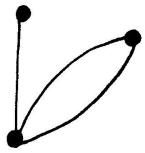


FIG. 3.25: *Un contre-exemple à la conjecture si l'on « peut se serrer deux fois la main, une fois pour dire bonjour, l'autre au revoir. Multigraphe pour lequel le nombre d'arêtes multiples est inférieur ou égal à deux.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

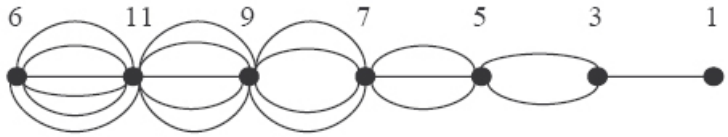


FIG. 3.26: *Un contre-exemple à la conjecture. Multigraphe à 7 sommets. Les nombres indiqués correspondent aux degrés des sommets.*

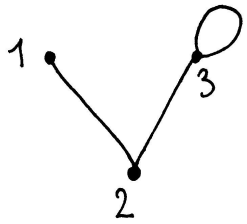


FIG. 3.27: *Un contre-exemple problématique à la conjecture. Graphe simple avec boucle unique à chaque sommet. Ce graphe pose une difficulté : comment considérer la contribution de la boucle au degré du sommet auquel elle est attachée : « si quelqu'un se serre la main à lui-même il n'y a qu'une personne qui s'est serrée la main, mais si l'on compte le nombre de mains serrées, c'est 2 ». Selon la définition de « degré » que l'on adopte, cet exemple est un contre-exemple ou n'en est pas un.*

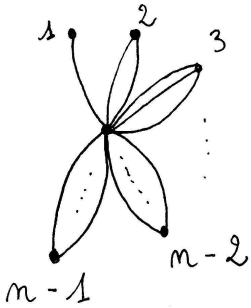


FIG. 3.28: *Un contre-exemple pour les multigraphes généralisé à toute valeur de n.*

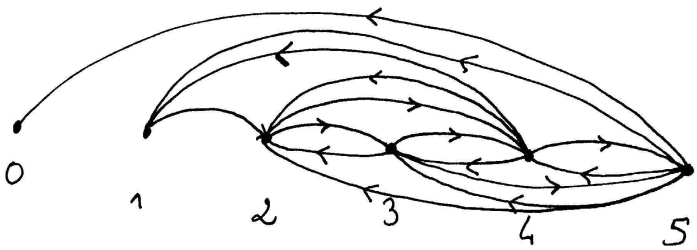


FIG. 3.29: *Un contre-exemple à 5 sommets pour un graphes orienté. La relation « se serrer la main » a été transformée en « faire un bisou ».*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

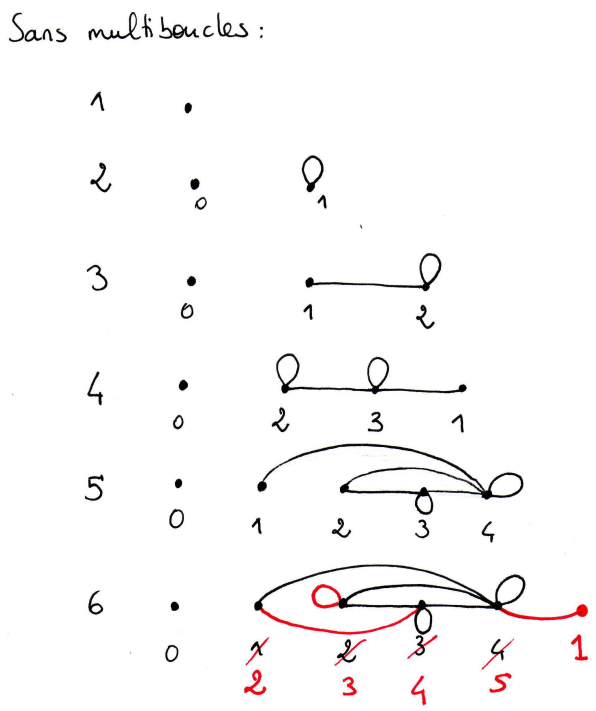


FIG. 3.30: *Une tentative de génération de contre-exemples à n sommets à partir de contre-exemples à $n-1$ sommets pour les graphes simples avec boucle unique.*

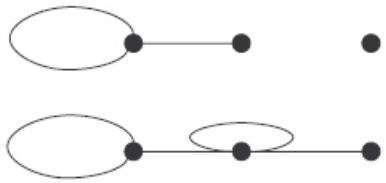


FIG. 3.31: *Un début de génération de contre-exemples à n sommets à partir de contre-exemples à $n-1$ sommets pour les graphes simples avec boucle unique. On a deux contre-exemples à 3 sommets. « Comme il n'y en a pas d'autres, alors dans le cas général, on passe de deux contre-exemples qui marchent à n sommets à l'étape $n+1$: si tout est « plein » on ajoute un sommet isolé, sinon on ajoute un sommet et on lui donne un degré $n+1$ en le reliant à lui-même et à tous les autres sommets ».*

3.2.1.4 Au niveau de l'argumentation, du raisonnement et de la preuve

Le problème, tel qui est proposé, permet d'entrer dans une démarche de preuve. La première preuve qui apparaît utilise un tableau ou un graphe, elle est une preuve par l'absurde ou par contradiction basée sur le principe des cages à pigeons. Ce principe est peu reconnu par les enseignants, qui le considérent comme une évidence qui n'a pas à être mentionnée dans une preuve. Les autres preuves sont basées sur l'exhibition de contre-exemples, la conjecture étant fausse pour tous les multigraphes et pour les graphes avec boucles.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Le principe de récursivité apparaît par la recherche de contre-exemples, quelque soit le nombre de sommets des graphes considérés. Des questions apparaissent : « un contre-exemple à n sommets peut-il toujours être construit à partir d'un contre-exemple de taille plus petite ? », « y a-t-il uncicité des contre-exmples obtenus ? », ...

De multiples questions apparaissent sur le définition du degré d'un sommet, en particulier sur la contribution d'une boucle au degré, qui sera abrégée par les enseignants en : « quel est le degré d'une boucle » ? L'acuité de la question est issue de la forme sous laquelle le problème est posé : considère-t-on le nombre de mains que chaque personne serre, dans ce cas le *degré d'une boucle* est plutôt 2, ou le nombre de personnes qui serrent des mains, et dans ce cas il est plutôt 1 ?

3.2.1.5 Conclusion sur le problème des poignées de mains

L'émergence de représentations, la discussion d'hypothèses implicites et des choix qu'elles impliquent, la reformulation de questions, attestent clairement d'une activité de modélisation. Or, ce type de travail, qui ne fait pas partie en général des savoir-faire des enseignants, est important dans leur formation, et ils en ressentent le besoin pour leurs classes.

Le problème permet d'introduire « naturellement » le concept de graphe et sa représentation sous forme de points reliés par des traits apparaît comme un modèle approprié pour résoudre la conjecture. Cette conjecture se révèle une propriété de base des graphes simples, non orientés et sans boucle.

L'« ouverture » du problème permet la mise en place d'une réelle activité de modélisation et de preuve, et l'introduction du graphe sous une forme assez générale menant à l'apparition de plusieurs types de graphes.

3.2.2 Le problème de Ramsey (3, 3)

Cette analyse est basée sur le déroulement de la première formation. Les enseignants présents (excepté un) viennent de « rencontrer » les graphes, ils n'en ont pas une représentation de *points reliés par des traits.*

3.2.2.1 Présentation du problème

Existe-t-il un nombre R tel que pour un groupe de n personnes, $n \geq R$, on ait ou 3 personnes qui se connaissent 2 à 2, ou 3 personnes qui ne se connaissent pas du tout ?
Trois personnes A, B et C se connaissent 2 à 2, si :
- A connaît B, et
- B connaît C, et
- A connaît C.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Trois personnes ne se connaissent pas du tout, si :
- A ne connaît ni B ni C, et
- B ne connaît ni A ni C, et
- C ne connaît ni A ni B.

La section 4.3.2 du chapitre 4 propose une résolution de ce problème.

3.2.2.2 Au niveau de la modélisation

Comme pour les poignées de mains, le problème est posé hors des mathématiques. Le modèle graphe est immédiatement réutilisé comme outil de modélisation. Les reformulations de la question pour les graphes montrent que les connaissances sur le concept de graphe introduites dans la situation précédente sont disponibles.

Ces reformulations amènent à trois nouvelles questions :
- Pour quelles valeurs de n un graphe à n sommets contient-il nécessairement K_3 ou son complémentaire $\overline{K_3}$?
- Pour quelles valeurs de n un graphe à n sommets ou son complémentaire contiennent-ils nécessairement K_3 ?
- Pour quelles valeurs de n une bicoloration des arêtes du graphe complet à n sommets conduit-elle nécessairement à l'obtention d'un triangle monochrome ?

3.2.2.3 Au niveau des concepts abordés

La recherche des enseignants est axée sur celle de graphes ne contenant pas de « formes » déterminées, sur la structure des graphes et leurs sous-graphes induits. Le fait que les deux sous-graphes induits « interdits » soient complémentaires a été vu et utilisé.

Le concept de graphe auto-complémentaire a été abordé, en particulier sur C_5, et le concept d'isomorphisme de graphes sous-jacent a été discuté : pour G un graphe auto-complémentaire, G et $\overline{G}$ sont-ils les mêmes ? La réponse apportée par les enseignants a été que si l'on se place au niveau de la relation « se connaître » les graphes sont différents, mais si l'on regarde leur « forme », ils sont identiques.

La propriété inductive « si on prouve que tout graphe à n sommets contient K_3 ou son complémentaire alors tous les graphes à plus de n sommets contiendront K_3 ou son complémentaire » est accessible. Elle est apparue plusieurs fois : *si on trouve pour n, alors tout graphe de taille supérieure à n contient un sous-graphe de taille n pour lequel ça marche*, ou encore, *si on trouve $R = 7$ par exemple, (on sait déjà que $R > 5$) toutes les configurations à 7 contiennent soit un triangle, soit 3 points « sans lien », alors pour $R > 7$ ça marche encore, ça contient toujours soit un triangle, soit 3 points « sans lien ».*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

3.2.2.4 Au niveau de l'argumentation, du raisonnement et de la preuve

Voici un extrait d'une discussion entre enseignants accompagné de leurs dessins montrant d'une part, l'utilisation du graphe comme outil de modélisation et d'autre part, l'entrée dans une démarche de preuve. (Il s'est passé moins d'un quart d'heure entre la présentation du problème et la fin de cet extrait).

Pour $n = 3$, ça ne marche pas :

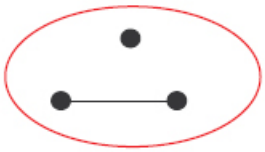


FIG. 3.32: *Un contre-exemple pour $n = 3$*

On recherche la taille maximum d'un graphe pour être sûrs qu'il ne contient pas de « triangle » :

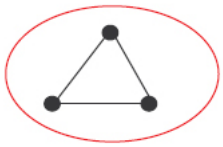


FIG. 3.33: *Un sous-graphe induit « interdit ».*

Ni de graphe formé de 3 points isolés :

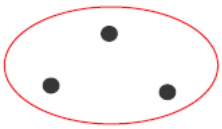


FIG. 3.34: *Un second sous-graphe induit « interdit ».*

Pour $n = 4$, on a un contre-exemple :

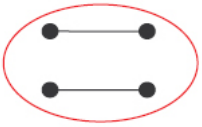


FIG. 3.35: *Un contre-exemple pour $n = 4$.*

Donc, n doit être supérieur à 4.

Deux formes particulières doivent être évitées :

FIG. 3.36: *Les deux sous-graphes induits « interdits ».*

Le recherche de « contre-exemples » est amorcée pour des graphes à 3 puis 4 puis 5 et enfin 6 sommets, l'idée étant que si l'on ne trouve pas de contre-exemple pour un graphe à k sommets, on pourra chercher à montrer que k est le plus petit nombre de sommets des graphes contenant nécessairement K_3 ou $\overline{K_3}$.

Une preuve par exhaustivité est initiée pour $n = 6$.

3.2.2.5 Conclusion sur le problème de Ramsey(3, 3)

Tous les éléments nécessaires à la résolution du problème sont accessibles. Nous pensons que seul le temps et peut-être plus de manipulation préalable de graphes ont manqué pour qu'elle n'aboutisse.

Cet énoncé entraîne un travail de recherche consistant du point de vue de savoirs centraux de l'activité mathématique : étude de petits cas pour s'emparer de la question posée, construction d'exemples et de contre-exemples, arguments inductifs, ..., l'ensemble constituant une exploration du concept de graphe à travers sa représentation sous forme de points reliés par des traits.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Chapitre 4

Propositions de problèmes

Le but de ce chapitre est de proposer un ensemble de définitions et de problèmes qui couvrent les notions qu'il est préconisé d'aborder dans les programmes de l'option mathématique de Terminale ES[1] pour la théorie des graphes (en dehors de la partie « probabiliste » que nous ne traiterons pas ici[2]). Nous décrirons les tentatives de résolution qui peuvent se présenter dans les classes (sans viser bien sûr à l'exhaustivité), et des possibilités d'accompagnement de ces tentatives par les professeurs. Nous donnerons aussi des éléments de formalisme qui ne sont pas dans les programmes mais qui pourraient apporter un certain recul sur les mathématiques présentées.

Nous avons expérimenté l'ensemble des énoncés mathématiques que nous donnons ici lors de séances de formation d'enseignants et/ou de séances en classe, sauf celui concernant les automates (voir paragraphes 4.7. C'est pourquoi, même si ce chapitre peut être lu de façon autonome, sa lecture s'enrichirait de ces compte-rendus d'expérimentations[3] et des analyses qui les ont motivées[4].

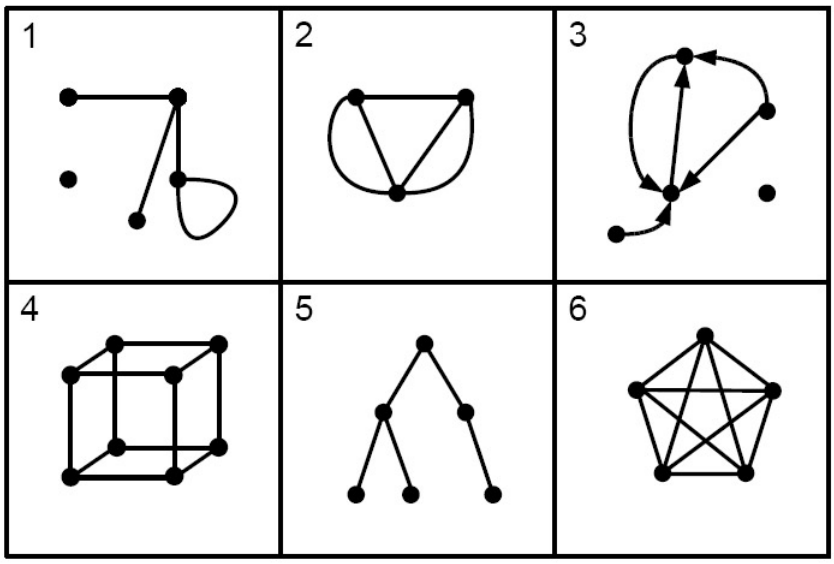
Ce chapitre s'adresse en particulier aux enseignants. Les problèmes qui s'y trouvent ne peuvent être tous proposés en l'état aux élèves de Terminale ES. Le lecteur est invité à se munir d'un papier et d'un crayon pour s'engager lui-même dans le recherche des problèmes, sa propre recherche éclairant les éléments de résolution qui lui seront soumis.

[1] ES pour économique et sociale.
[2] Ce choix est justifié dans le premier chapitre.
[3] Voir le chapitre 3.
[4] Voir les chapitres 1 et 2.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

4.1 Présentation des graphes

Voici 6 objets que l'on nomme des graphes :



Pour décrire un **graphe**, on peut dans un premier temps se contenter de dire qu'il est représenté par un certain nombre de points reliés par des traits. Il représente donc une relation binaire symbolisée par des traits, nommés **arêtes**, entre différents objets symbolisés par des points que nous nommerons des **sommets**. Un tel graphe est nommé **graphe non orienté**. Les relations entre les objets peuvent ne pas être symétriques. Dans ce cas, les sommets seront reliés par des flèches nommées **arcs**, et le graphe sera dit **graphe orienté** (le troisième graphe ci-dessus est un graphe orienté).

Deux sommets reliés entre eux sont dits **adjacents**. Une arête reliée à un sommet donné est dite **incidente** à ce sommet.

Cette première présentation du graphe nous amène à quelques premières remarques :
– la représentation d'un graphe n'est pas unique, dans le sens où la forme des arcs ou des arêtes, leur taille n'ont pas d'importance et peuvent être modifiées. La représentation d'un graphe peut être étirée, retournée, pliée sans modifier la structure du graphe, et donc le graphe lui-même.

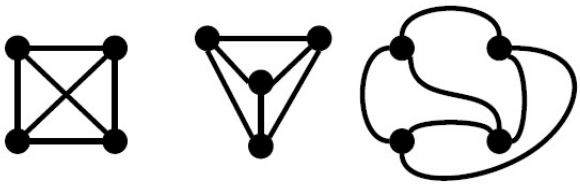


FIG. 4.1: *Le même graphe dans trois représentations différentes*

– un graphe non orienté peut être vu comme un graphe orienté pour lequel tous les arcs « vont dans les deux sens », chaque arête étant composée de deux arcs. La notion de graphe orienté est donc la plus générale.
– les arcs ou les arêtes entre deux sommets peuvent être mutiples, on parlera alors de **multigraphe** (voir par exemple le graphe 2), si ce n'est pas le cas on parlera alors de **graphe simple**.
– une arête peut être incidente au même sommet deux fois, on parle alors de **boucle**.

FIG. 4.2: *Un sommet et une boucle*

Le **degré d'un sommet** est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet. Pour un graphe orienté, le degré d'un sommet est la somme des arcs entrants et des arcs sortants de ce sommet. Un sommet de degré nul sera appelé **sommet isolé**.

Soit un graphe G défini par un ensemble S de sommets, et un ensemble A d'arêtes, paires d'éléments de S :[1]

– Un **sous-graphe** de G est un graphe dont les sommets sont un ensemble S' tel que $S' \subseteq S$ et les arêtes forment un ensemble A' qui sont des paires d'éléments de S' et tel que $A' \subseteq A$.
– Un **sous-graphe induit** de G est un graphe tel que ses sommets sont un ensemble S' de sommets de G et ses arêtes sont l'ensemble des arêtes de G ayant leurs deux extrémités dans S'.

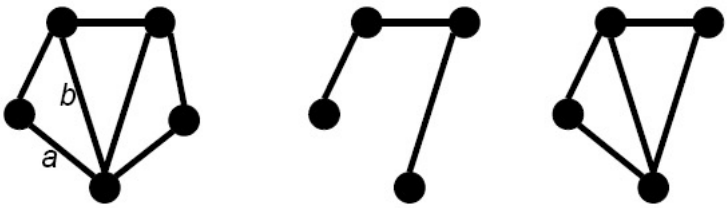


FIG. 4.3: *Un graphe G, un sous-graphe de G, puis un sous-graphe induit de G. Le deuxième graphe n'est pas un sous-graphe induit du premier, les arêtes a et b n'étant pas présentes.*

Donnons-nous maintenant quelques graphes particuliers.
– Un **graphe complet** est un graphe simple dont tous les sommets sont reliés deux à deux. Le graphe complet à n sommets sera habituellement désigné par K_n.

[1]Si les paires d'éléments de S sont ordonnées, on a un graphe orienté, et on devrait parler d'arcs plutôt que d'arêtes. Si l'on peut avoir une paire composée de deux fois le même sommet, le graphe admet des boucles. Si les paires peuvent être répétées, le graphe est un multigraphe. Si les paires sont non ordonnées et sans répétition, le graphe est simple. Les deux définitions qui suivent sont les mêmes quel que soit le type de graphe considéré.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

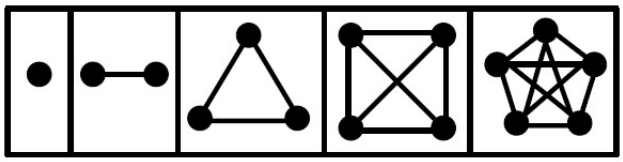


FIG. 4.4: *Les graphes complets de 1 à 5 sommets.*

– Une **chaîne** à n sommets est un graphe simple tel que l'on peut numéroter les sommets de s_1 à s_n, et que pour tout $i < n$, $s_i s_{i+1}$ est une arête du graphe. s_1 et s_n sont alors appelés **extrémités** de la chaîne. On note traditionnellement P_n la chaîne à n sommets[1].

FIG. 4.5: *La chaîne à 8 sommets, P_8.*

– Si l'on relie les deux extrémités d'une chaîne, on obtient un **cycle**. Le cycle à n sommets sera généralement appelé C_n. (Nous parlerons de cycles pour des graphes comportant au moins 3 sommets).

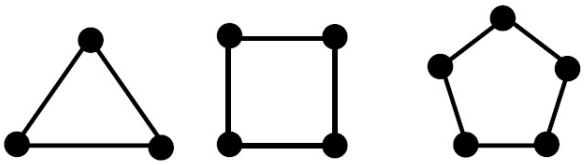


FIG. 4.6: *Les cycles à 3, 4 et 5 sommets.*

Soit G un graphe simple.
– Un **stable** est un sous-graphe induit de G ne comportant pas d'arêtes.
– Une **clique** est un sous-graphe induit de G complet.

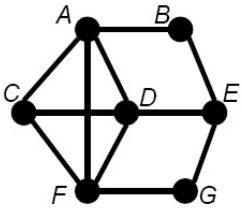


FIG. 4.7: *Un graphe G. Les sommets C, B, G forment un **stable** de G. Les sommets A, C, D, F forment une **clique** de G.*

[1]Le P correspondant à *path* en anglais.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

4.2 Les poignées de mains

On a un groupe de 20 personnes.
Si deux personnes se connaissent, elles se serrent la main.
Si deux personnes ne se connaissent pas, elles ne se serrent pas la main.
Discutez la conjecture suivante : « on peut trouver dans le groupe deux personnes qui serrent le même nombre de mains ».

Lorsque l'on voit cet énoncé, on a tendance à lui ajouter deux hypothèses implicites :
– On ne se serre pas la main à soi-même.
– On ne serre qu'une fois la main aux personnes que l'on connaît.
Combien de mains peut serrer chaque personne ? Une personne peut ne serrer aucune main, une autre peut serrer la main de chacun des 19 autres. Le nombre de mains serrées par chacune des 20 personnes est donc compris entre 0 et 19, il y a 20 valeurs possibles pour le nombre de mains qu'une personne a serré. Si ces nombres sont tous différents cela implique donc que l'un d'eux a serré 0 main, un autre 1 main, un autre 2 mains, ..., un dernier a serré 19 mains. Ceci est absurde car il est impossible que l'une des personnes n'ait serré aucune main et qu'une autre ait serré la main de chacun des 19 autres.

Deux personnes au moins ont donc serré le même nombre de mains. Ce résultat se généralise pour tout groupe de n personnes pour $n > 1$.

Ce type de raisonnement, basé sur une preuve par l'absurde, sera très souvent utilisé par la suite. Celle-là a le mérite d'être d'une grande simplicité.

À ce stade on peut se demander où se trouvent les graphes ou pourquoi proposer un tel énoncé comme introduction à la théorie des graphes ? En effet, les graphes ne sont pas utiles à la résolution de ce problème, et le fait d'introduire un nouvel objet mathématique peut paraître inutilement coûteux. Mais comme nous allons le voir, le modèle de graphe va nous permettre d'élargir le problème et de se questionner sur les conséquences du choix des hypothèses qui ont été prises dans l'interprétation de son énoncé. Dans cette perspective, le graphe va être un support de réflexion, une visualisation essentielle des exemples et contre-exemples que nous allons proposer.

Comment modéliser ce problème par un graphe ? Chaque personne peut être représentée par un sommet, et le fait que deux personnes se serrent la main comme une arête entre ces deux sommets. Ce que nous venons de montrer (i. e. deux personnes au moins serrent le même nombre de mains sous les hypothèses choisies) nous permet de formuler un premier résultat sur les graphes : **un graphe simple et sans boucle a toujours deux sommets de même degré.**

Ce résultat repose sur un principe mathématique dit « **principe de Dirichlet** » ou « **principe des cages à pigeons** » et s'énonce ainsi :

Si l'on a n cages et $n+1$ pigeons dans ces cages, alors il existe une cage qui contient au moins deux pigeons. (Ici, les cages correspondent aux nombres de mains qui peuvent être serrées, les pigeons aux personnes).

Une question qui se pose immédiatement peut être : qu'en est-il pour les autres types de graphes ? Pour rester proche de l'énoncé, que se passe-t-il si l'on peut « se serrer la main à soi-même » ou si l'on serre plusieurs fois la main des personnes que l'on connaît ? En fait

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

nous sommes ici dans une situation assez archétypique de ce qui se passe en théorie des graphes : un problème concret est posé, que l'on modélise par un graphe. Mais le travail qui est fait sur le modèle amène à des questions connexes, qui n'ont pas forcément toujours un lien avec le problème de départ, ou qui répondront peut-être à d'autres problèmes. Ce phénomène n'est pas exclusif aux chercheurs « professionnels ». Pour l'exemple précis du problème des poignées de mains, nous l'avions proposé à des professeurs de lycée lors d'un stage de formation continue. Lors de leur recherche sur le problème, leurs différentes questions ont abouti à modifier les termes de l'énoncé jusqu'à parvenir à des élargissements que nous n'attendions pas, et qui se sont rélévés mathématiquement riches.

4.2.1 On peut serrer plusieurs fois la main des personnes que l'on connaît : le cas des multigraphes

Commençons par la possibilité de serrer plusieurs fois la main aux personnes que l'on connaît. Il existe alors de nombreux contre-exemples à la conjecture proposée. Par exemple, une personne x peut connaître toutes les autres et serrer une fois la main d'une première, deux fois celle d'une deuxième, ..., et $n-1$ fois celle de la dernière personne, chacune de ces personnes ne connaissant que x et ne serrant donc que la main de x. Pour s'en convaincre on peut tracer un petit dessin, plus précisément un graphe où les sommets représentent les personnes, et les arêtes le fait de se serrer la main :

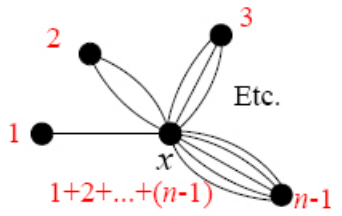


FIG. 4.8: *Un graphe à n sommets de degré tous diférents. (Le degré de chacun des sommets est indiqué en rouge.*

Chaque personne a alors serré un nombre de mains différent dès lors que l'on a un groupe d'au moins trois personnes (car $1+2+\ldots+(n-1) > n-1$ si et seulement si $n \geq 3$).

Ce graphe permet aisément de se convaincre que nous nous trouvons en présence d'un contre-exemple. Sans ce support visuel, la description d'un tel contre-exemple est plus laborieuse et le contre-exemple semble moins convaincant. Mais le graphe est ici surtout un bon moyen pour la recherche de tels contre-exemples.

D'autres contre-exemples existent. Regardons de plus près l'un d'entre eux : dans un groupe de n personnes, une personne serre la main d'une deuxième, qui serre elle-même deux fois la main d'une troisième, ...l'avant-dernière serrant $n-1$ fois la main de la n-ième. Est-ce vraiment un contre-exemple ? Pour s'en convaincre, représentons la situation par un graphe en indiquant le degré de chaque sommet :

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

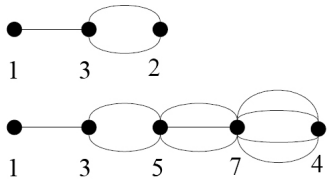


FIG. 4.9: *Deux contre-exemples à 3 et 5 sommets*

En fait, cette construction n'est pas un contre-exemple pour n pair. Prenons par exemple $n = 4$:

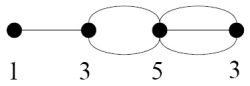


FIG. 4.10: *Un graphe à 4 sommets ne pouvant servir de contre-exemple.*

Nous avons alors deux sommets de même degré, ce que nous retrouverons pour tout n pair. En effet, remarquons tout d'abord qu'à l'exception possible du dernier sommet, tous les sommets du graphe sont de degré impair, leur degré étant la somme de deux nombres entiers consécutifs. De plus, les sommets du graphe, en dehors du dernier, sont tous de degrés différents et suivent l'ordre de la suite des entiers impairs. Pour n pair, il existe alors parmi les sommets du graphe un i-ème sommet $(i < n)$ de degré $(i - 1) + i$ qui va être égal au degré du n-ième sommet, soit $n - 1$. Pour n impair, le n-ième sommet est de degré pair, il est donc de degré différent de tous les autres sommets du graphe. Pour construire un contre-exemple à n sommets, n étant pair, on peut par exemple simplement prendre notre contre-exemple à $n - 1$ sommets, et lui ajouter un sommet isolé.

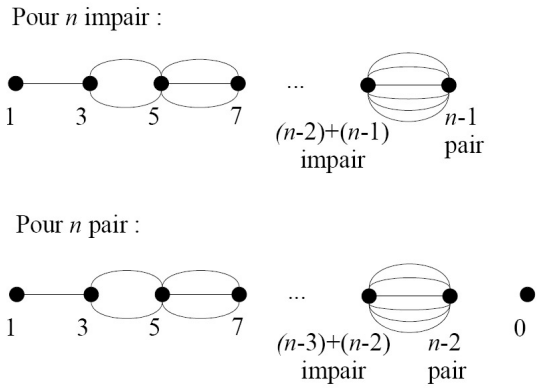


FIG. 4.11: *Des contre-exemples pour n pair et pour n impair.*

La conjecture est donc infirmée sous l'hypothèse que l'on serre plusieurs fois la main aux

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

personnes présentes. Autrement dit, les degrés des sommets d'un multigraphe peuvent être tous différents.

Questions connexes :[1]

▷ Peut-on trouver d'autres types de contre-exemples ?

▷ Comment construire des contre-exemples minimisant le plus grand des degrés des sommets du graphe ?

▷ Peut-on obtenir des contre-exemples dont les sommets sont de degrés $(0, 1, 2, \ldots, n)$?[2]

4.2.2 Le cas des graphes simples avec boucles

L'hypothèse selon laquelle on pourrait se serrer la main à soi-même peut sembler étrange, pourtant elle s'est posée pendant les formations que nous animions. En soulevant les implicites que contient l'énoncé, la question de savoir ce qui se passait lorsque l'on peut se serrer la main s'est spontanément posée.

Revenons dans le cadre des graphes avec cette hypothèse. Un graphe simple comportant des boucles (une boucle par sommet au plus) peut-il avoir des sommets de degrés tous différents ? Pour répondre à cette question, il faudrait au préalable répondre à une seconde question : « Pour combien une boucle contribue-t-elle dans le degré d'un sommet ? » En effet, vue la définition que l'on a donnée au degré d'un sommet, on pourrait être tenté de répondre 1 ou 2 selon l'interprétation que l'on a de la phrase : « le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet ». Nous considérerons localement et arbitrairement, qu'une boucle contribue pour 1 au degré du sommet auquel elle est incidente (le raisonnement suivant pouvant être appliqué avec une définition donnant 2 pour la contribution d'une boucle au degré d'un sommet, ce qui est plus traditionnellement admis).

Soit G_n la famille des graphes simples avec boucles à n sommets. Pour $n = 2$, nous avons deux contre-exemples à la conjecture selon laquelle deux sommets au moins d'un graphe G_n sont de même degré :

[1] Les questions connexes sont pour la plupart des questions qui nous ont été posées lors des séances de formation d'enseignants. Certaines attendent une réponse simple, d'autres demandent plus de réflexion. Nous vous les proposons comme des ouvertures possibles, leur résolution n'étant pas nécessaire à la compréhension de la suite.

[2] Le problème général d'existence de graphes répondant à une séquence de degrés donnés n'est pas entièrement résolu à l'heure actuelle.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

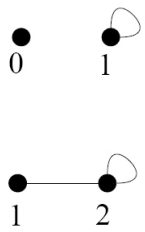


FIG. 4.12: *Deux contre-exemples à 2 sommets*

Ces deux graphes semblent être les seuls contre-exemples à notre conjecture pour $n = 2$ parmi les graphes de G_2. Lorsque nous observons les **séquences de degrés** possibles pour qu'un tel graphe soit un contre-exemple, c'est-à-dire la liste des degrés des sommets du graphe (habituellement classés dans l'ordre croissant), nous avons trois possibilités : $(0, 1), (0, 2), (1, 2)$. Le degré ne peut dépasser 2, chaque sommet ne pouvant être relié qu'à l'autre sommet et à lui-même et la séquence $(0, 2)$ n'est pas possible, un sommet ne pouvant comporter deux boucles.

Les deux graphes précédents sont donc bien les deux seuls contre-exemples à notre conjecture. Nous qualifierons le premier de graphe à sommet isolé et nous le noterons I_2, le second de graphe à sommet saturé, noté S_2. Nous pouvons construire de nouveaux contre-exemples sur la base de ceux-ci. Commençons par construire des contre-exemples à 3 sommets.

Nous construirons un contre-exemple « saturé » à 3 sommets, S_3, à partir du contre-exemple « isolé » à 2 sommets, I_2, en ajoutant un sommet relié à tous les autres et comportant une boucle. Quant au contre-exemple « isolé » à 3 sommets, I_3, il est construit sur le contre-exemple « saturé » à 2 sommets S_2 en lui ajoutant un sommet isolé :

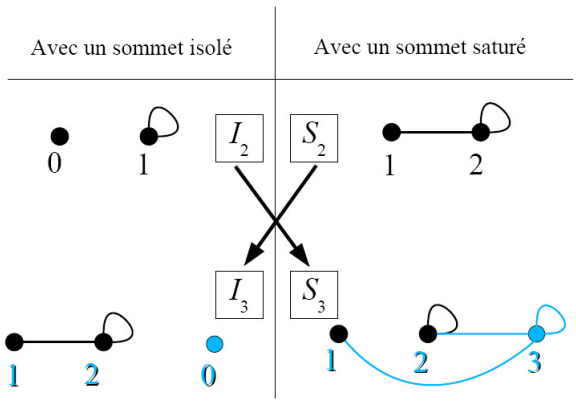


FIG. 4.13: *Le passage de 2 contre-exemples à 2 sommets à 2 contre-exemples à 3 sommets.*

Pour un rang quelconque, supposons que nous ayons deux contre-exemples à $n - 1$ som-

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

mets, S_{n-1} comportant un sommet saturé (et par conséquent aucun sommet isolé)[1], I_{n-1} comportant, lui, un sommet isolé (et donc aucun sommet saturé). Nous allons ajouter un sommet isolé pour le premier, et un sommet que nous allons saturer pour le second :

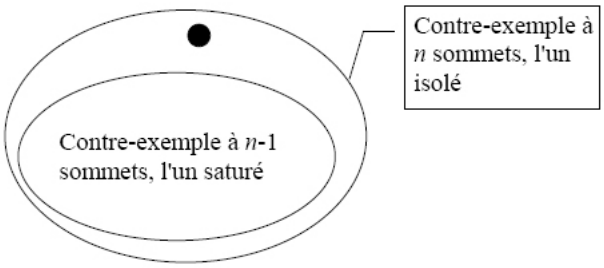


FIG. 4.14: *Le passage d'un contre-exemple saturé à $n-1$ sommets à un contre-exemple isolé à n sommets.*

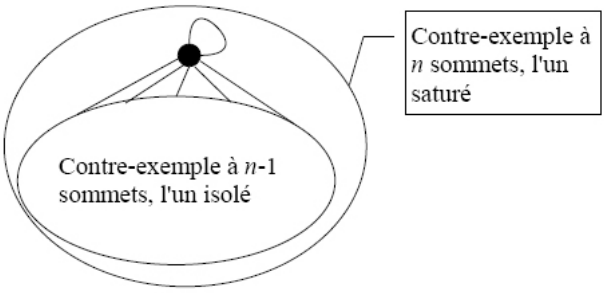


FIG. 4.15: *Le passage d'un contre-exemple isolé à $n-1$ sommets à un contre-exemple saturé à n sommets.*

Par induction, nous pouvons donc affirmer qu'il existe deux contre-exemples à n sommets à la conjecture « deux sommets au moins d'un graphe simple et avec boucles sont de même degré ». Ces contre-exemples sont-ils les deux seuls pour la famille G_n ? La récurrence ascendante que nous avons faite nous a montré que ce procédé de construction donnait deux contre-exemples à partir des contre-exemples de rang inférieur. N'étant pas certains par cette récurrence d'avoir obtenu tous les contre-exemples possibles, tentons une induction descendante pour montrer que les graphes I_n et S_n ainsi construits représentent bien l'ensemble de tous les contre-exemples que nous recherchons.

La séquence de degrés d'un graphe simple avec boucles ayant tous ses sommets de degrés différents va être du type $(0, 1, \ldots, X, \ldots, n)$, le symbole X correspondant à un « trou » dans la suite des entiers : on prend l'ensemble des entiers de 0 à n privé d'un entier dont le rang est symbolisé par X. Supposons que X soit différent de 0 et de n. Pour les raisons

[1]L'existence d'un sommet saturé dans un graphe donné implique l'absence de sommet isolé dans ce graphe, de même que l'existence d'un sommet isolé implique l'absence de sommet saturé, comme nous l'avons vu précedemment. (Un sommet est saturé s'il est relié à chacun des autres ; réciproquement un sommet est isolé s'il n'est relié à aucun autre sommet : l'existence de ces deux sommets est incompatible).

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

évoquées plus haut, ceci n'est pas possible, car signifierait que l'un des sommets est isolé, et qu'un autre est saturé. On doit donc avoir $X = 0$ ou $X = n$.

Si $X = n$, le graphe contient un sommet isolé. Le sous-graphe induit ne contenant pas le sommet isolé sera donc un contre-exemple de rang $n - 1$. Il aura une séquence de degrés de la forme $(1, 2, \ldots, n - 1)$, et sera donc un contre-exemple de type S_{n-1}. Le graphe de départ pour $X = n$ était donc un contre-exemple I_n.

Si $X = 0$, alors le graphe a un sommet de degré n, c'est-à-dire un sommet saturé, et sa séquence de degrés est du type $(1, 2, \ldots, n)$. Prenons le sous-graphe induit ne contenant pas ce sommet saturé. La séquence de degrés de ce graphe sera $(0, 1, \ldots, n - 2)$, le degré de chaque sommet diminuant de 1 par rapport au graphe dont il est issu, lorsqu'il n'est plus relié au sommet saturé. Cette séquence de degrés correspond à un contre-exemple I_{n-1}, le graphe dont il est issu étant lui le contre-exemple S_n.

Cette « déconstruction » nous a donc permis de montrer que l'on passe de façon unique de I_n à S_{n-1}, et de S_n à I_{n-1}. Les contre-exemples à la conjecture pour les graphes G_n sont donc au nombre de 2 pour tout n.

4.2.3 Le cas des multigraphes avec boucles

Comme nous l'avons vu précédemment, les multigraphes et les graphes simples avec boucles ne vérifient pas la conjecture proposée : de tels graphes peuvent avoir des sommets de degré tous différents. A fortiori, les multigraphes avec boucles ne vérifieront pas la conjecture.

4.2.4 Saluer plutôt que se serrer la main : le cas des graphes orientés

La relation « saluer » peut, contrairement à celle de « se serrer la main », ne pas être symétrique. Le graphe modélisant une relation non symétrique sera un graphe orienté. L'arc pointera, par exemple, de la personne qui salue vers la personne saluée. Comment définir le degré d'un sommet dans ce cas ? On définit le **degré entrant** d'un sommet comme le nombre d'arcs dont ce sommet est l'extrémité finale, et le **degré sortant** d'un sommet comme le nombre d'arcs dont ce sommet est l'extrémité initiale. Le **degré d'un sommet d'un graphe orienté** est la somme des degrés entrant et sortant de ce sommet.

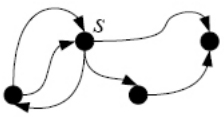


FIG. 4.16: *Le sommet s a un degré entrant de 2, un degré sortant de 3, son degré est 5.*

Notre conjecture se divise maintenant en trois conjectures :

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Pour un graphe à n sommets,
– deux sommets au moins ont le même degré sortant ;
– deux sommets au moins ont le même degré entrant ;
– deux sommets au moins sont de même degré ;

Questions connexes

▷ Existe-t-il des contre-exemples pour chacune de ces conjectures ?

▷ Si vous répondez trois fois oui à la question précédente, existe-t-il des graphes qui soient des contre-exemples à l'ensemble de ces 3 conjectures ?

4.2.5 Connaissances mises en jeu dans le problème

Les connaissances mathématiques nécessaires à la résolution de ce problème dépendent évidemment des hypothèses qui seront prises par le lecteur de l'énoncé.

Si l'on n'utilise pas le modèle « graphe » et que l'on s'en tient aux deux hypothèses « on ne se serre pas la main à soi-même » et « on ne serre qu'une fois la main aux personnes que l'on connaît », il n'y a pas de « prérequis » en tant que tel. La preuve repose sur le principe des cages à pigeons (qu'il n'est pas nécessaire de connaître formellement, sa compréhension intuitive suffit). Il sera aussi nécessaire de comprendre la structure de preuve par l'absurde ou celle de preuve par analyse de cas (que l'on aurait pu utiliser ici). Mais la simplicité du raisonnement que l'on trouve ici peut être aussi une bonne occasion d'introduire ce type de preuve.

Avec l'utilisation du graphe comme modèle de ce problème, des interprétations différentes des relations « se connaître » ou « se serrer la main » apparaissent. Ceci implique une réflexion sur la modélisation du problème qui a été choisie. En effet, autant l'idée de représenter chaque personne par un point et une relation de connaissance entre deux personnes par un trait, ne pose généralement aucune difficulté, ni même de question de la part des élèves, autant lorsque l'on relâche les contraintes sur le graphe et qu'il est réinterprété en termes de personnes serrant des mains, la question de la modélisation revient en avant. Jusqu'où travailler le modèle ? À quoi sert « l'enrobage » en un problème concret si le but de la question est l'étude de la théorie des graphes ? Ces questions légitimes reviennent souvent et permettent de montrer le mécanisme de construction du savoir, en mathématiques discrètes en particulier.

Utiliser les graphes pour représenter le problème permet, en particulier, la construction de différents types de graphes et le travail sur les contre-exemples. Il permet en effet de construire des graphes simples, sans ou avec boucles, de construire aussi des multigraphes et des graphes orientés. Ces différentes constructions mènent à un travail sur la structure des graphes par ces différentes constructions et « déconstructions ». Plusieurs définitions peuvent être abordées et interrogées, en particulier, la définition du degré d'un sommet à travers le degré d'un sommet contenant une boucle ou du degré d'un sommet d'un graphe orienté.

Du côté de la preuve, les concepts abordés sont variés. Pour les graphes simples avec

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

boucles, on peut montrer l'existence et l'unicité de paires de contre-exemples. Plusieurs preuves par l'absurde, simples, sont potentiellement mises en œuvre lors de la recherche, ainsi que des preuves par induction montrant l'importance de l'induction descendante[1] lorsque l'induction ascendante ne permet pas de certifier que tous les objets de la classe que l'on cherche à construire peuvent être atteints.

Toutes ces connaissances peuvent être apportées par la situation, et être construites au fur et à mesure, sans prérequis. Les définitions n'ont pas besoin d'être données avant le problème, mais peuvent l'être si la question est posée ou lors d'une phase de mise en commun, pour que tout le monde utilise le même vocabulaire. Les termes assez transparents de la théorie des graphes ne posent généralement pas de difficultés pour être adoptés.

4.3 Le problème de Ramsey

4.3.1 Énoncé et généralités

Donnons tout d'abord l'énoncé général du problème :

> Existe-t-il une valeur de n pour laquelle on peut affirmer qu'un graphe simple à n sommets et sans boucle contient une **clique** à p sommets ou un **stable** à q sommets ? Si une telle valeur existe, la plus petite de ces valeurs sera appelée nombre de Ramsey$(p\ ,q)$ ou $R(p,\ q)$.

Ce problème de recherche des nombres de Ramsey est difficile de façon générale. C'est-à-dire que pour des valeurs même petites de p et q, on ne connaît qu'un encadrement de ces valeurs. Pour p et q égaux à 5, par exemple, on sait, aujourd'hui, que la valeur recherchée $R(5,\ 5)$ se situe entre 43 et 49. La valeur de $R(10,\ 10)$ est, quant à elle, comprise entre 798 et 23556[2]. À propos de la valeur de $R(5,\ 5)$, Paul Erdős[3] disait :

> *« Imagine an alien force, vastly more powerful than us landing on Earth and demanding the value of $R(5,\ 5)$ or they will destroy our planet. In that case, we should marshal all our computers and all our mathematicians and attempt to find the value. But suppose,*

[1] $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est l'implication à montrer pour l'induction ascendante. On cherche alors à construire les objets de taille $n+1$ à partir des objets de taille n. Pour l'induction descendante, on déconstruit les objets de taille n vers les objets de taille plus petite. Au lycée, il semble que l'induction ascendante soit la seule enseignée (c'est en tout cas la seule que l'on trouve dans les manuels). Pour les mathématiciens « discrets », il semble que ce soit l'induction descendante la plus couramment utilisée.

[2] On connaît la valeur de $R(3,\ q)$ pour q allant jusqu'à 9 et $R(4,\ q)$ pour q allant jusqu'à 5. Pour les valeurs plus grandes de p et q, les bornes deviennent vite très « mauvaises » : voir par exemple l'article de Stanislaw P. Radziszowski à l'adresse suivante : `http://www.combinatorics.org/Surveys/ds1/sur.pdf`

[3] Paul Erdős est un grand mathématicien discret hongrois contemporain. Son œuvre a été prolifique dans le champ de la combinatoire, de la théorie des nombres et de la théorie des graphes. Il a en effet publié près de 1500 articles ! Chacun peut calculer son « nombre d'Erdős » : ce nombre est de 1 si l'on a co-écrit avec lui, de 2 si l'on a co-écrit avec un de ses co-auteurs, ... de $+\infty$ sinon. Pour rester dans l'anecdotique, Erdős est aussi l'auteur du fameux aphorisme : « un mathématicien est une machine qui transforme le café en théorèmes ». Il s'est entre autre penché sur le problème de Ramsey, et a proposé une conjecture donnant une borne supérieure et appelée conjecture de Erdős-Burr : voir [12]

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

instead, that they asked for $R(6,\ 6)$, we should attempt to destroy the aliens. »[1]

La première question qui se pose est l'existence même de ces nombres que nous recherchons. Pour montrer l'existence d'un tel nombre on pourrait tenter de l'encadrer. Une borne inférieure triviale peut être 1. On montrera dans le paragraphe 4.3.5 que l'on peut majorer ces nombres. Ainsi $R(p,\ q)$ est bien défini pour tout couple d'entiers $(p,\ q)$.

4.3.2 Ramsey(3, 3)

Le problème de Ramsey(3, 3) est un cas intéressant à traiter, car il permet une jolie exploration, et se conclut par une preuve simple et élégante.

Nous vous proposerons ici une première exploration cherchant à mettre en évidence les différentes voies que peuvent prendre les élèves, puis une résolution utilisant la coloration des arêtes d'un graphe complet. Sachant que ce problème peut être résolu de plusieurs façons, il est fort possible que les élèves ne choisissent pas celles que nous exposons ici, ou qu'il faille les guider dans un sens ou un autre. Nous proposons par exemple la recherche exhaustive des graphes à 3 et 4 sommets qui est facultative dans cette recherche, mais peut être utilisée pour plusieurs valeurs de p et q ou dans d'autres problèmes.

Le problème $R(3,\ 3)$ est souvent présenté sous la forme suivante :

On a un groupe de n personnes. Pour quelles valeurs de n est-on sûr d'avoir : – 3 personnes qui se connaissent 2 à 2 **ou** – 3 personnes qui ne se connaissent pas 2 à 2 ?

Trois personnes A, B et C se connaissent 2 à 2 signifie que :
– A et B se connaissent **et**
– B et C se connaissent **et**
– C et A se connaissent.
Trois personnes A, B et C ne se connaissent pas 2 à 2 signifie que :
– A et B ne se connaissent pas **et**
– B et C ne se connaissent pas **et**
– C et A ne se connaissent pas.

4.3.2.1 Exploration du problème

Pour commencer, on peut regarder la situation avec un groupe de 3 personnes : deux peuvent se connaître sans connaître la troisième. Trois n'est donc pas la valeur de n recherchée, et $R(3,\ 3) > 3$.

En termes de graphes, on peut représenter les différentes configurations de trois personnes, en étudiant les différents graphes à trois sommets et pour lesquels une arête signifie que les personnes se connaissent. Nous considèrerons par convention que cette relation est symétrique, non réflexive, « simple » (dans le sens où l'on se connaît une fois, il n'y a donc pas de multigraphe).

[1] Voir ? ?

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

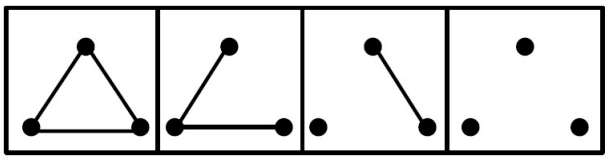


FIG. 4.17: *Les quatre graphes à trois sommets (à isomorphisme près). Les deuxième et troisième permettent d'affirmer que 3 n'est pas la valeur de n recherchée.*

Avant de poursuivre, arrêtons-nous sur une remarque. Nous parlons ici « des » quatre graphes à trois sommets, plus loin nous parlerons de graphes « identiques », dans les manuels de Terminale ES se trouve souvent la question : « ces graphes sont-ils les mêmes ? » L'identité dont nous parlons ici est une identité structurelle du graphe, elle ne dépend pas de la représentation. Deux graphes seront considérés comme identiques si leurs ensembles d'arêtes sont identiques (c'est-à-dire qu'elles relient les mêmes sommets) à changement de nom près. Un nombre égal de sommets et d'arêtes ainsi que des séquences de degrés identiques ne suffisent pas à ce que deux graphes soient « les mêmes ». L'identification de graphes est loin d'être un problème trivial. Mathématiquement, elle repose sur l'existence d'un isomorphisme entre deux graphes donnés. Nous utiliserons cette terminologie et parlerons de **graphes isomorphes** pour désigner les « graphes identiques » des manuels.

Représenter par une arête le fait de se connaître est un choix arbitraire. Nous aurions pu représenter par une arête le fait de ne pas se connaître. Le résultat en aurait été identique, les deuxième et troisième graphes de la figure précédente nous permettant d'affirmer que 3 n'est pas la valeur de n recherchée. Les premier et dernier graphes représentent eux le fait que les trois personnes se connaissent deux à deux, ou ne se connaissent pas deux à deux. En fait, ces deux paires de graphes sont des paires de graphes complémentaires. Si G est un graphe simple donné, son **graphe complémentaire** est composé des mêmes sommets, et de l'ensemble complémentaire de ses arêtes : deux sommets du graphe complémentaire sont reliés entre eux si et seulement s'ils ne sont pas reliés dans le graphe G.

Procédons de la même façon pour un groupe de 4 personnes. Pour cela, nous allons devoir systématiser la recherche : on commencera par les graphes à 4 sommets et 6 arêtes, 4 sommets et 5 arêtes, jusqu'aux graphes à 4 sommets sans arête. Nous organiserons la recherche en prenant parallèlement un graphe et son complémentaire.

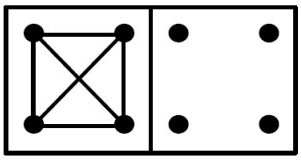


FIG. 4.18: *Graphe à quatre sommets et 6 arêtes, et son complémentaire à 0 arête.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

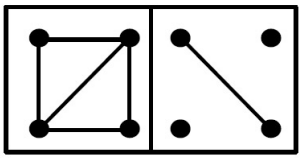


FIG. 4.19: *Graphe à quatre sommets et 5 arêtes, et son complémentaire à 1 arête.*

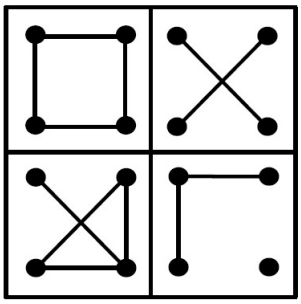


FIG. 4.20: *Graphes à quatre sommets et 4 arêtes, et leurs complémentaires à 2 arêtes.*

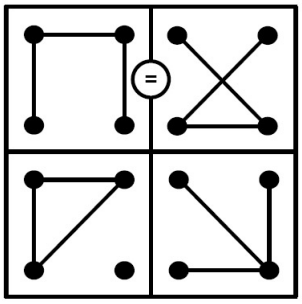


FIG. 4.21: *Graphes à quatre sommets et 3 arêtes, et leurs complémentaires (à 3 arêtes aussi). Le premier graphe est auto-complémentaire.*

Il y a donc 11 graphes simples à 4 sommets[1], dont un seul est auto-complémentaire. (G est un **graphe auto-complémentaire** s'il est isomorphe à son graphe complémentaire.) Certains permettent d'affirmer que 4 n'est pas le nombre recherché :

[1]L'exhaustivité est facile à montrer pour les graphes à 0, 1 et 2 arêtes, et donc leurs complémentaires. Elle est plus difficile pour les graphes à 3 arêtes.

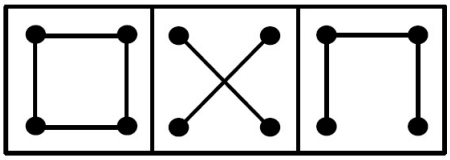


FIG. 4.22: $R(3,\ 3) \neq 4$. *Le premier graphe est nommé C_4, comme cycle à 4 sommets, le deuxième est son complémentaire, le dernier est nommé P_4 (P comme « path » en anglais) ou chaîne à 4 sommets.*

Un autre graphe remarquable parmi les graphes à 4 sommets est la **griffe**. La **griffe** est un graphe à 4 sommets, où l'un des sommets est adjacent aux trois autres.

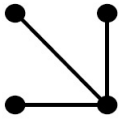


FIG. 4.23: *Un graphe particulier, la griffe.*

Nous pourrions continuer cette exploration systématique avec les graphes à 5 sommets, mais cela deviendrait fastidieux. Reprenons plutôt l'énoncé du problème et cherchons une autre façon de le résoudre.

Supposons qu'un graphe G modélise les relations de connaissance dans un groupe d'individus. Trois personnes se connaissent signifie que trois sommets sont reliés deux à deux, c'est-à-dire que le graphe G contient un triangle. Trois personnes ne se connaissent pas du tout signifie que trois sommets n'ont aucun lien entre eux et forment donc un **stable** à 3 sommets dans G. On peut aussi l'exprimer par le fait que le graphe complémentaire de G contient un triangle. Nous pouvons donc nous restreindre à rechercher les graphes ne contenant pas de triangle, et dont le complémentaire n'en contient pas non plus. L'avantage de cette méthode est qu'il paraît, pour certains, plus facile de visualiser un triangle, qu'un stable à 3 sommets.

On peut aussi représenter la situation d'une autre manière. Les personnes sont représentées par des sommets, le fait de se connaître ou de ne pas se connaître par une couleur différente de l'arête. On dessine le **graphe complet** à n sommets et on cherche à colorer toutes ses arêtes en l'une ou l'autre des deux couleurs de manière à ne pas avoir de triangle monochrome[1]. Autrement dit, la question dans ce modèle devient :

« Quelle est la taille du plus grand graphe pour lequel une **2-coloration des arêtes** ne contient aucun triangle monochrome ? »

[1]Cette représentation peut revenir à travailler conjointement sur un graphe dont les arêtes sont d'une couleur et son complémentaire dont les arêtes sont d'une autre couleur. La différence entre ces représentations est que cette dernière permet la généralisation du problème de Ramsey à c paramètres en colorant le graphe complet avec c couleurs.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Nous utiliserons cette dernière représentation pour résoudre le problème, sachant que des raisonnements équivalents peuvent être entrepris avec les autres représentations.

4.3.2.2 Résolution du problème

Si le graphe contient 5 sommets, on peut trouver (par tâtonnement ou recherche systématique) une 2-coloration des arêtes de K_5 ne contenant ni triangle rouge, ni triangle bleu :

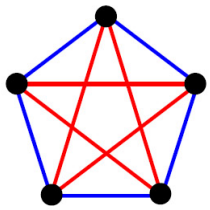


FIG. 4.24: *Une 2-coloration des arêtes du graphe sans triangle monochrome.*

Cette coloration du graphe fait aussi apparaître 2 sous-graphes de K_5, le cycle C_5 en bleu, et un sous-graphe qui lui est isomorphe, en rouge. Ces deux graphes complémentaires étant isomorphes, sont donc auto-complémentaires :

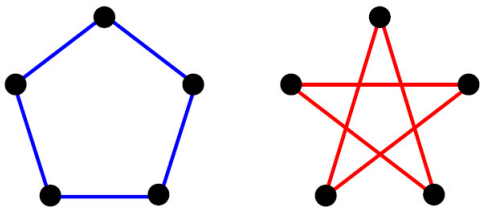


FIG. 4.25: *Deux graphes complémentaires et isomorphes.*

Cette 2-coloration nous permet d'affirmer que $R(3,3)$ est strictement supérieur à 5.

Prenons le graphe complet à 6 sommets. Chaque sommet a 5 voisins :

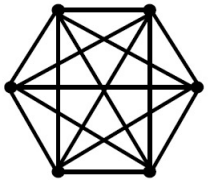


FIG. 4.26: *Le graphe K_6.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

D'un sommet partent cinq arêtes colorées en deux couleurs, donc au moins trois arêtes seront colorées de la même couleur. De chaque sommet on aura donc au moins une **griffe** monochrome. Supposons que cette griffe soit colorée en rouge.

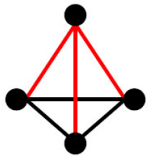


FIG. 4.27: *Le sous-graphe formé des 4 sommets et des arêtes rouges est une griffe. Les arêtes noires ne sont pas encore colorées.*

Comment colorer les trois arêtes noires ?

- Soit on colore (au moins) l'une des arêtes en rouge, et on obtient un triangle rouge ;
- Soit on ne colore aucune arête en rouge, et on obtient un triangle bleu.

Il n'est donc pas possible de trouver une 2-coloration des arêtes sans triangle monochrome pour $n = 6$. Le nombre $R(3,\ 3)$ est donc égal à 6.

Une question qui peut se poser est : qu'en est-il pour $n > 6$? Tous les graphes comportant plus de 6 sommets ont des sous-graphes induits comportant 6 sommets, donc ils ont des sous-graphes induits comprenant des stables à 3 sommets ou des triangles. Cette propriété vaut pour toutes les valeurs de p et q, c'est-à-dire que si nous trouvons n pour valeur de $R(p,\ q)$, tous les graphes de plus de n sommets comporteront au moins un stable à q sommets ou une clique à p sommets.

4.3.3 Ramsey$(3,\ 4)$

Commençons par rechercher un graphe ne comportant ni clique à 3 sommets ni stable à 4 sommets. (Cela nous fournira une borne inférieure au nombre de Ramsey que nous cherchons).

Nous pouvons tout d'abord remarquer que $R(3,\ 4) > 5$. En effet, le cycle C_5 qui était le plus grand graphe permettant de minorer $R(3,\ 3)$, permet aussi de minorer $R(3,\ 4)$. Il ne contient ni triangle, ni stable à 4 sommets. Autrement dit, il ne contient pas de triangle, et son graphe complémentaire ne contient pas de graphe complet à 4 sommets.

Pour les graphes à 6 sommets, on peut rechercher un graphe ne comportant ni triangle, ni stable à 4 sommets. Ayant remarqué que la famille des cycles donnait de bons candidats (C_4 et C_5 fournissant une borne inférieure à $R(3,\ 3)$), nous pouvons commencer notre recherche par C_6 :

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

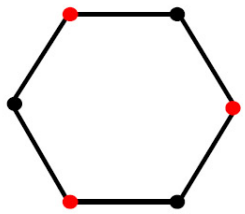


FIG. 4.28: *Le plus grand stable que contient le graphe C_6 est un stable à 3 sommets, mis en évidence par les sommets rouges. Il ne contient donc aucun stable à 4 sommets. Il ne contient pas non plus de triangle.*

Ce graphe permet d'affirmer que $R(3,\ 4) > 6$. Il en est de même pour C_7 :

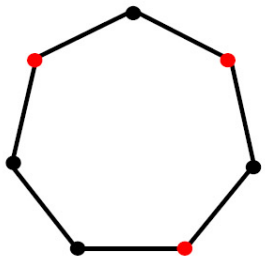


FIG. 4.29: *Le graphe C_7 et un plus grand stable à 3 sommets (en rouge). Il ne contient pas de triangle*

Nous avons donc $R(3,\ 4) > 7$. Que se passe-t-il pour C_8 ?

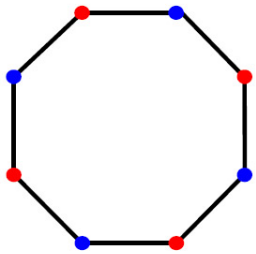


FIG. 4.30: *Le graphe C_8 ne contient pas de triangle, mais il contient deux stables à 4 sommets (représentés en rouge et en bleu).*

Le graphe C_8 ne convient donc pas. Si nous relions deux sommets de chaque stable, en veillant à ne pas obtenir de triangle, nous avons un nouveau graphe montrant que $R(3,\ 4) > 8$:

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

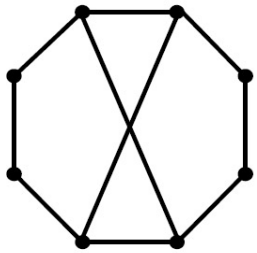


FIG. 4.31: *Ce graphe ne contient ni stable à 4 sommets, ni triangle.*

En recherchant le même type de graphe pour $n = 9$, on ne trouve pas de graphe convenable par tâtonnement. Examinons les propriétés que ce graphe doit avoir, pour permettre de dire que $R(3,\ 4) > 9$.

Supposons que le graphe G recherché ait un sommet de degré 4 ou plus.

FIG. 4.32: *Un sommet de degré 4. Quel voisinage pour ses 4 voisins ?*

Quel doit être le voisinage de ses sommets adjacents ? Si deux de ses voisins sont reliés par une arête on obtiendrait un triangle, sinon on aurait un stable à 4 sommets. Le graphe cherché ne doit donc pas avoir de sommet de degré supérieur ou égal à 4.

Supposons maintenant que le graphe G ait un sommet de degré inférieur ou égal à 2. Soit s ce sommet.

Le sommet s n'est pas relié à au moins 6 sommets de G. Soit G' le sous-graphe de G induit par ces 6 sommets. Comme $R(3,\ 3) = 6$, G' contient un triangle ou un stable à 3 sommets. S'il contient un triangle, G n'est pas le graphe recherché. S'il contient un stable à 3 sommets, alors le sous-graphe de G induit par ces 3 sommets et le sommet s est un stable à 4 sommets et G n'est pas non plus le graphe recherché.

Tous les sommets de G doivent être de degré strictement supérieur à 2.

Donc G est un graphe dont tous les sommets sont de degré 3. La somme des degrés des sommets de G doit valoir 27. Or, **la somme des degrés des sommets d'un graphe est le double du nombre d'arêtes du graphe**. En effet, chaque arête contribue pour 1 aux degrés des deux sommets auxquels elle est incidente[1]. La somme des degrés d'un graphe est donc un nombre pair. Le graphe G n'existe donc pas.

On peut donc affirmer que $R(3,\ 4) = 9$.

[1]Pour que cette affirmation soit vraie en toute généralité, nous considérerons qu'une boucle contribue pour deux au degré du sommet auquel elle est incidente, et ceci dans le reste de ce document.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

4.3.4 Ramsey(1, q) et Ramsey(2, q)

Commençons par le cas trivial de la recherche du nombre $R(1,\ q)$. Ce nombre correspond à la plus petite valeur de n telle que tout graphe à n sommets comprend une clique à 1 sommet, ou un stable à q sommets. Tout graphe simple à un sommet est un graphe complet. On a donc Ramsey$(1,\ q) = 1$.

Le nombre Ramsey$(2,\ q)$ correspond à la plus petite valeur de n telle que tout graphe à n sommets contient une clique à 2 sommets ou un stable à q sommets. Le plus grand graphe ne contenant ni clique à 2 sommets (c'est-à-dire sans arête) ni stable à q sommets, est le stable à $q-1$ sommets. Pour des graphes de taille supérieure ou égale à q, tout graphe comportera forcément une arête ou sera un stable à q sommets. On a donc Ramsey$(2,\ q) = q$.

Par passage au complémentaire, on montre de la même façon que Ramsey$(p,\ 1) = 1$ et Ramsey$(p,\ 2) = p$.[1]

4.3.5 Existence des nombres de Ramsey dans le cas général

Pour prouver l'existence des nombres de Ramsey pour p et q quelconques, nous allons majorer $R(p,\ q)$ en utilisant l'idée de la preuve de $R(3,\ 3)$.

Montrons que $R(p,\ q) \leq 2^{p+q}$ pour tout p et q entiers supérieurs ou égaux à 1.

Posons $r = p + q$, et supposons que $R(p,\ q) \leq 2^{p+q} = 2^r$.

Pour $r = 2$, on a bien $R(1,\ 1) = 1 \leq 2^2$.

Soit G un graphe simple à 2^r sommets, avec $r = p + q$. Prenons un sommet s quelconque de ce graphe, et redessinons-le avec l'ensemble des sommets formant le voisinage de s d'un côté, et les autres sommets de l'autre :

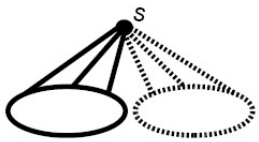


FIG. 4.33: *Un sommet s représenté avec l'ensemble des sommets qui lui sont adjacents et l'ensemble des sommets qui ne lui sont pas adjacents.*

L'un au moins de ces deux ensembles contient 2^{p+q-1} sommets (c'est-à-dire la moitié des 2^{p+q} sommets). Nous avons donc deux cas :

– Premier cas : L'ensemble des sommets formant le voisinage de s compte au moins $2^{p+q-1} = 2^{(p-1)+q}$ sommets. Par hypothèse d'induction, il contient une clique à $p-1$

[1] Le passage au complémentaire nous permet de montrer facilement que $R(p,\ q) = R(q,\ p)$ pour tout couple $(p,\ q)$.

sommets ou un stable à q sommets. s étant relié à chacun des sommets de cet ensemble, le graphe G contient au moins un stable à q sommets, ou une clique à p sommets.
– Second cas : L'ensemble des sommets non adjacents à s compte au moins $2^{p+q-1} = 2^{p+(q-1)}$ sommets. Par hypothèse d'induction il contient une clique à p sommets ou un stable à $q-1$ sommets. s n'étant relié à aucun sommet de cet ensemble, le graphe G contient au moins un stable à q sommets ou une clique à p sommets.

On a donc bien $R(p,\ q) \leq 2^{p+q}$ pour tout p et q entiers supérieurs ou égaux à 1.

Les nombres $R(p,\ q)$ existent donc pour tous les couples d'entiers p et q.

4.3.6 Connaissances mises en jeu dans le problème

Pour faciliter la lecture, nous désignerons ici les graphes complets à i sommets par K_i et les stables à j sommets par $\overline{K_j}$.

Ce problème permet d'accéder à différents types de raisonnements intéressants. Il existe plusieurs représentations du problème, en particulier une méthode « directe » de recherche de graphe sans sous-graphe complet à p sommets ni stable à q sommets, une méthode « par complémentaire » consistant à rechercher un graphe sans clique de taille p et sans clique de taille q dans son complémentaire, ou une représentation par 2-coloration de graphes complets. Ces différentes représentations sont équivalentes du point de vue mathématique, mais permettent des généralisations différentes. La méthode directe semble poser problème à certains qui disent « ne pas voir » les stables.

Quelle que soit la représentation choisie, la principale difficulté que nous avons pu constater est la compréhension de l'énoncé lui-même : « quelle est **la plus petite valeur de** n telle que **tous les graphes à** n **sommets ou plus** comportent K_p **ou** $\overline{K_q}$ ». Nous soulignons plusieurs termes dans cet énoncé qui annoncent les difficultés que peuvent rencontrer les élèves.

Pour montrer que $R(p,\ q) = n$, on doit trouver à la fois un **plus grand** graphe, c'est-à-dire un plus grand contre-exemple, ne comprenant ni K_p ni $\overline{K_q}$, et un **plus petit** graphe contenant nécessairement K_p ou $\overline{K_q}$. Cette démarche peut être illustrée par le dessin suivant :

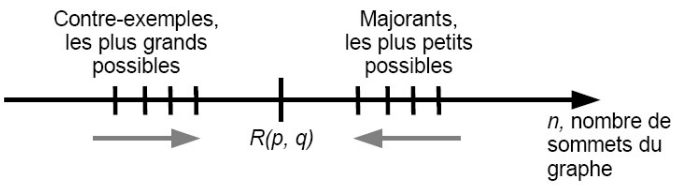


FIG. 4.34: *Pour obtenir la valeur de $R(p,\ q)$, nous devons encadrer cette valeur. Pour $R(3,\ 3)$ et $R(3,\ 4)$, le plus petit majorant avait un sommet de plus que le plus grand contre-exemple, ce qui nous a permis de conclure. Pour les valeurs plus grandes de p et q, les chercheurs n'ont pu, pour l'instant, obtenir qu'un encadrement des valeurs de $R(p,\ q)$.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Une autre difficulté est liée au terme « ou » : nous avons constaté des tentatives de dissociation du problème en deux sous-problèmes (recherche de la plus petite valeur de n telle que tout graphe à n sommets comporte au moins une clique à p sommets (respectivement un stable à q sommets). Or ces valeurs n'existent pas, le stable à N sommets, N aussi grand que l'on le souhaite, le montrant pour la première assertion, le graphe complet à N sommets le montrant pour la seconde.

Toutes ces difficultés sont plus liées au fait de la place restreinte des mathématiques discrètes dans l'enseignement qu'au problème lui-même. Nous avons pu constater que dès l'école primaire, les élèves peuvent prendre l'habitude de commencer par les « petits cas », d'élaborer des conjectures[1] : et nous avons observé des élèves de sixième entreprenant un raisonnement « par encadrement » et resserrage des bornes du type de celui mis en œuvre ici sur une situation appelée « chasse à la bête ».

Le concept d'hérédité est doublement appréhendé dans ce problème. Si l'on connaît la valeur de $R(p,\ q)$ pour p et q fixés, les graphes comportant plus de $R(p,\ q)$ sommets ont aussi la propriété de contenir une clique à p sommets ou un graphe complet à q sommets. De plus, le fait de connaître la valeur de $R(p,\ q)$ pour p et q fixés permet de minorer la valeur de $R(p+a,\ q) = R(p,\ q+a)$, pour $a > 0$ un entier quelconque.

Nous avons profité de l'exploration du problème pour définir certains termes (graphe stable, clique, graphe complet, complémentaire d'un graphe, graphe auto-complémentaire en particulier) et pour désigner certains graphes remarquables (la griffe, les cycles C_n à n sommets ou les chaînes P_n à n sommets). Mais ces définitions n'étaient aucunement indispensables, elles permettent surtout de désigner des graphes, ce que nous aurions pu faire en les montrant simplement.

On touche par la résolution de ce problème des notions centrales de l'activité mathématique comme l'existence, la minoration et la majoration, le contre-exemple. C'est aussi l'occasion de présenter un problème sur lequel se penchent activement les chercheurs, et qui n'est pas résolu même pour des valeurs inférieures à 10.

4.4 Recherche de chemins eulériens dans les graphes

La recherche de chemin eulérien dans un graphe est un problème classique de théorie des graphes. Pour donner deux exemples connus, citons le problème des ponts de Königsberg et celui du parcours de l'enveloppe sans lever le stylo. Nous donnerons un bref historique du problème, puis des exemples de problèmes pouvant être proposées aux élèves, avant de donner le théorème d'existence de chemin eulérien dans un graphe ainsi que plusieurs preuves de ce théorème.

[1] Voir à ce propos la thèse de Karine Godot [28].

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

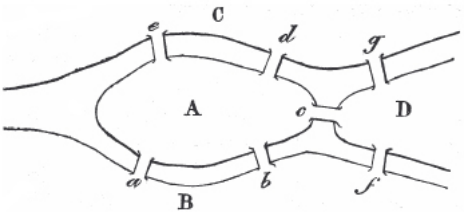
tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

4.4.1 Résolution historique du problème

Historiquement, on considère souvent que la recherche de chemins eulériens dans les graphes est à l'origine de la théorie des graphes. En effet, Leonhard Euler, dans un article publié en 1736[1], proposa des critères pour l'existence d'un chemin passant une et une seule fois par tous les ponts d'une ville, qui, traduits pour pour les graphes, constituent ce que nous nommons le « théorème d'Euler».

L'histoire raconte qu'Ehler, amateur et féru de mathématiques, aurait proposé à Euler le problème suivant :

Voici un plan de la ville de Königsberg :



Une personne peut-elle s'arranger de manière à passer une fois sur chaque pont, mais une fois seulement ?

Ce problème, qui peut sembler anecdotique, a été présenté par Ehler à Euler comme un problème relevant de la géométrie de position. Cette géométrie, qui ne dépendrait ni des grandeurs ni des distances, avait été pressentie par Leibniz, sans qu'il puisse l'exemplifier, et ce fut semble-t-il une réelle motivation pour Euler d'enfin l'illustrer.

Euler ne considérait pas ce problème comme un véritable problème mathématique. Dans un échange de lettres avec Ehler, il lui dit en effet : « Comme vous le voyez, noble Monsieur, ce type de solution entretient peu de lien avec les mathématiques, et je ne comprends pas pourquoi vous comptez sur un mathématicien plus que sur un autre pour le résoudre, car la solution est basée seulement sur la raison et sa découverte ne repose sur aucun principe mathématique »[2].

Malgré cette « réticence », Euler rédigea un article sur le problème des ponts de Königsberg, résolvant ce cas et le généralisant aux différentes configurations possibles de ponts et d'îles. Pour cela, il utilisa un modèle basé sur des séquences de lettres correspondant aux berges, et sur la comparaison entre le nombre théorique d'occurences de chaque lettre dans les séquences, par rapport au nombre effectif de ponts amenant sur chaque berge. Euler n'utilisa pas de graphe pour représenter et résoudre le problème[3]. Il énonça un ensemble de conditions qu'il considérait comme nécessaires et suffisantes pour affirmer l'existence ou non d'un chemin dans la ville passant une et une seule fois par chaque pont : pour qu'un tel chemin dans la ville existe, il faut et il suffit que deux berges au plus aient un nombre impair de ponts y conduisant. Ce théorème, que nous appelons aujourd'hui « théorème d'Euler », peut être transcrit en termes de graphe ainsi : « un graphe connexe admet un chemin passant une et une seule fois par chacune de ses arêtes

[1] Voir l'article original [23] ou une traduction de cet article en français [17], disponible à l'annexe A.

[2] Pour plus de détails sur l'échange de lettres entre Ehler et Euler dont est issu cet extrait, voir [47].

[3] Même si cette affirmation se retrouve souvent, comme par exemple dans un livre récent de théorie des graphes et d'algorithmique [18].

si et seulement si deux de ses sommets au plus sont de degré impair ». Un tel chemin, passant par toutes les arêtes d'un graphe une et une seule fois, est dit **chemin eulérien**. Mais Euler ne prouva pas que la parité est une condition suffisante, et ne fournit pas de méthode générale de construction de chemin, qu'il considérait comme facile « avec un peu de réflexion ».

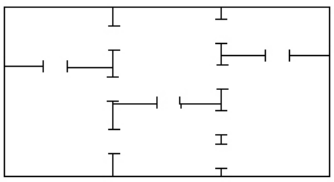
Le théorème d'Euler a été prouvé en 1873 par un jeune mathématicien, Carl Hierlolzer (voir [33].) dans un article traitant des parcours sans répétition ni interruption dans un réseau de lignes. Hierholzer, qui a priori ne connaissait pas le travail d'Euler, traite ce problème de réseau de lignes en définissant les « nœuds » comme les intersections entre les lignes, puis en étudiant la parité du nombre de lignes amenant à ces nœuds. Il utilise un argument d'entrée/sortie pour montrer que la condition de parité est nécessaire, et une induction descendante sur des ensembles de lignes pour montrer qu'elle est suffisante.

Le problème des ponts de Königsberg avait entre temps ressurgi en 1851 par une traduction en français sous la plume de Coupy[1], puis a été repris dans des ouvrages traitant de « récréations mathématiques »[2]. Finalement, le premier graphe représentant les ponts de Königsberg a été publié en 1892, illustrant une récréation mathématique sur les tracés de figure sans lever le stylo[3].

4.4.2 Problèmes eulériens

Nous proposons ici quelques exemples de problèmes eulériens. Nous commencerons par la présentation de parcours dans un bâtiment, dans lequel l'idée de parcours ou de chemin est « naturelle », pour ensuite poser le même type de questions dans des graphes.

Voici le plan d'un musée :

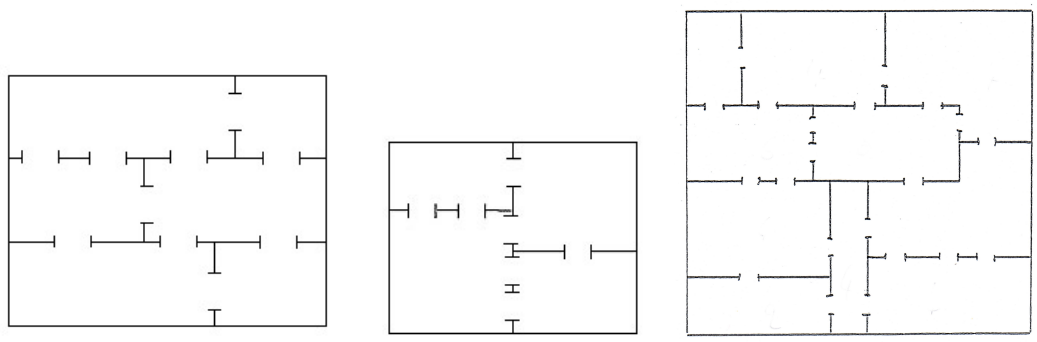


Un visiteur se promène et se rend compte qu'il peut choisir un itinéraire passant par chaque pièce.
Mais peut-il trouver un chemin passant une seule fois par chacune des portes ?
Peut-il trouver un circuit passant une seule fois par chacune des portes ? (Un circuit est un chemin qui revient à son point de départ).

Voici d'autres exemples de plans de musées :

[1] Voir l'article à l'annexe A et ses références en [17].
[2] Voir [40] et [46].
[3] Dans une récréation mathématique de W. W. Rouse Ball [46].

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009



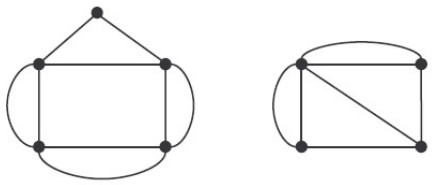
Un problème de la même famille fait partie des « récréations mathématiques » collectées par E. Lucas (voir [41].) et est repris dans le document d'accompagnement des programmes de l'option de Terminale ES. Voilà son énoncé :

Les dominos

Peut-on aligner tous les pions d'un jeu de domino suivant la règle usuelle du domino ?
On commencera par étudier la question avec un jeu dont les dominos comportent les chiffres jusqu'à n, pour n=2, 3, 4.

Nous pouvons aussi présenter le problème sur des graphes :

Voici des graphes composés de sommets reliés par des arêtes.
Est-il possible de les parcourir en passant par chacune des arêtes une fois et une seule ? Pourquoi ?



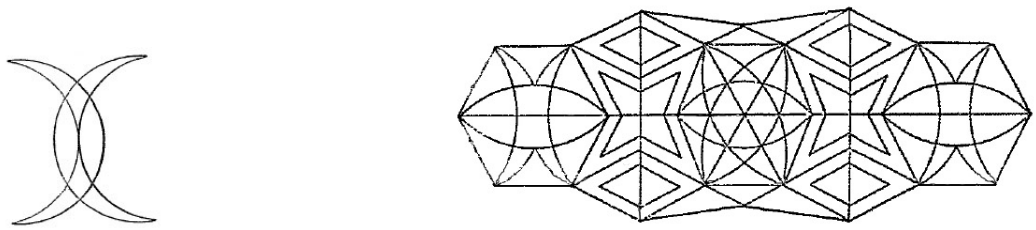
Dans l'ensemble des énoncés possibles, il peut être intéressant de présenter de grands graphes comme ceux-là pour la recherche de chemins eulériens :

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Sous cette dernière forme, le problème est proche d'une formulation que l'on retrouve dans les jeux mathématiques : « Peut-on tracer cette figure sans lever le stylo ? »

Edouard Lucas a proposé quelques exemples de tels problèmes (voir [40]). En voici deux :

Peut-on tracer ces figures sans lever le stylo ?



Le second est aussi un jeu qui consiste à poser un jeton sur chaque arête du graphe, puis à les retirer un à un en se déplaçant le long des traits.(On ne peut pas « sauter » d'un trait à un autre sans qu'il n'y ait de point commun entre ces deux traits, on est obligé de prendre le jeton posé sur le trait lorsqu'on le parcourt, on ne peut pas parcourir un trait sans jeton).

4.4.3 Modélisations des problèmes à l'aide de graphes

Les problèmes de musées, de dominos et de parcours sans lever le stylo se modélisent à l'aide de graphes et se ramènent à la recherche de chemin eulérien dans un graphe.

- Un musée peut se modéliser par un graphe, en utilisant un sommet pour chacune de ses pièces, et une arête entre deux sommets correspondant à une porte entre deux pièces. Parcourir une et une seule fois chacune des portes du musée correspond bien à parcourir une et une fois chacune des arêtes du graphe ainsi obtenu.

- On peut modéliser le problème d'alignement des dominos par l'existence d'un chemin eulérien dans un graphe ainsi constitué : chaque « numéro » est un sommet, une arête entre deux numéros est un domino.

- Dessiner une figure sans lever le stylo est très proche de la recherche d'un parcours eulérien dans un graphe : le graphe se constitue en plaçant un sommet à chaque intersection de lignes, les arêtes étant les portions de lignes entre ces intersections.

Ces formes de présentation du problème ne mènent pas forcément à un travail mathématique identique dans la classe, comme nous l'avons vu durant nos expériences. La présentation sous forme de parcours de musées induit une idée d'entrée et de sortie de chacune des pièces, qui peut mener à l'idée de nécessité de parité du nombre de portes par pièce de façon relativement « naturelle ». Le problème des dominos quant à lui nécessite un réel travail de modélisation, dans la mesure où les élèves ne le modélisent généralement pas comme une recherche de chemin eulérien dans un graphe[1]. Quant à la recherche de parcours sans lever le stylo, elle est difficile à appréhender pour les élèves dans la mesure

[1]Pour plus de précisions, voir le paragraphe 2.4.1.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

où elle ne pose que la question de l'existence d'un tel parcours, ne semblant induire qu'une réponse de type oui ou non.

4.4.4 Preuves du théorème d'Euler

Dans cette section traitant du théorème d'Euler, les graphes dont nous parlons sont des multigraphes. Ce théorème s'applique aussi aux graphes simples, qui ne sont que des cas particuliers de multigraphes.

Donnons-nous tout d'abord quelques notations et définitions.

Un **chemin** dans un graphe est une suite de sommets et d'arêtes $(s_1 a_1 s_2 a_2 \ldots s_{p-1} a_{p-1} s_p)$, telle que l'arête a_i ($i < p$ et tous les a_i sont disctincts) est incidente aux sommets s_i et s_{i+1}. Un chemin peut donc passer plusieurs fois par le même sommet (les s_i ne sont pas nécessairement distincts) mais qu'une seule fois par arête. Pour décrire un chemin, on se contentera souvent de donner seulement la suite $(s_1 s_2 \ldots s_p)$ des sommets empruntés par le chemin, et, parfois, seulement la suite des arêtes empruntées $(a_1 a_2 \ldots a_{p-1})$.

Si s_1 et s_p sont identiques, on parlera de **chemin fermé** dans le graphe. Dans le cas contraire, les sommets s_1 et s_p seront qualifiés d'**extrémités** du chemin, et ce chemin sera un **chemin ouvert** dans le graphe.

Un **chemin eulérien** est un chemin passant une et une seule fois par chaque arête d'un graphe. Un graphe comportant un chemin eulérien sera dit **graphe eulérien**.

Un graphe est dit **connexe** s'il existe un chemin entre tout couple de sommets du graphe. Autrement dit, c'est un graphe « en un seul morceau ». Pour un graphe non connexe, c'est-à-dire un graphe « en plusieurs morceaux », chacun de ses morceaux est appelé **composante connexe**[1].

Le théorème d'Euler peut s'énoncer ainsi : **Un graphe connexe admet un chemin eulérien si et seulement si deux sommets au plus sont de degré impair.**

Pour être plus précis, nous pouvons dissocier le théorème en deux parties :
- **Un graphe connexe admet un chemin eulérien fermé si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.**
- **Un graphe connexe admet un chemin eulérien ouvert si et seulement si tous ses sommets sauf deux sont de degré pair.**

(Nous montrerons au point 4.4.4.2 qu'un graphe ne peut avoir un seul sommet de degré impair).

Il est relativement simple de prouver que pour qu'un graphe connexe admette un chemin eulérien, il faut que tous ses sommets (sauf au plus deux) soient de degré pair. La preuve de la réciproque est plus difficile, et peut être traitée par différentes approches, preuves par récurrence ou par maximalité, par exemple. Nous proposons ici ces preuves ainsi que des éléments intermédiaires de réflexion mathématique qui, s'ils ne sont pas exhaustifs,

[1] Formellement, une composante connexe dans un graphe est un sous-graphe connexe induit maximal par inclusion, i. e. un sous-graphe connexe induit qui n'est contenu dans aucun sous-graphe induit autre que lui-même.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

permettront, nous l'espérons, de prendre un certain recul sur ce problème.

L'élément clé de parcours de graphes est la connexité. On ne peut pas parcourir l'ensemble des arêtes d'un graphe si celui-ci n'est pas connexe. Cela semble aller de soi, pourtant dès qu'un graphe est « grand » et selon la représentation que l'on en a, la question de déterminer s'il est connexe ou non devient une question qui n'est pas triviale car la réponse n'est plus forcément visuelle. Cette nécessité de connexité du graphe apparaît aussi lors de la recherche effective d'un chemin eulérien dans un graphe. Lorsque l'on cherche un tel chemin, on cherche de façon intuitive à parcourir le graphe « sans le casser », c'est-à-dire sans déconnecter les différentes parties du graphe. Cette idée de conservation de la connexité peut mener, mais de façon laborieuse, à un algorithme de parcours prouvant le théorème d'Euler. Nous ne donnerons pas cet algorithme ici.

4.4.4.1 Un graphe dont tous les sommets sont de degré supérieur ou égal à deux contient un chemin fermé

Considérons un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré supérieur ou égal à deux. Il est facile de voir qu'un tel graphe contient nécessairement un chemin fermé. On peut s'imaginer se promener dans le graphe en partant d'un sommet quelconque. Ce sommet étant de degré au moins deux, on peut en ressortir. De la même façon, le sommet suivant, de degré au moins égal à deux, permet la sortie, et ainsi de suite jusqu'à, nécessairement, revenir en un sommet s déjà rencontré.

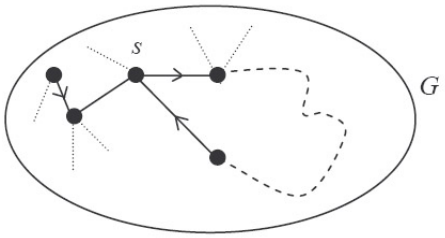


FIG. 4.35: *Un chemin dans G dont tous les sommets sont de degré supérieur ou égal à 2 conduit nécessairement à revenir en un sommet déjà visité.*

Nous obtenons un chemin fermé dans le graphe en ne conservant que les arêtes parcourues « entre s et s ».

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

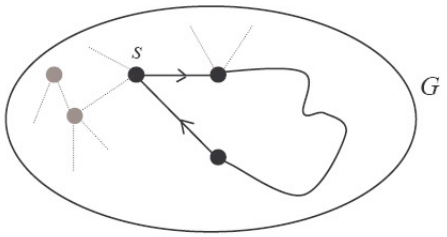


FIG. 4.36: *Si G a tous ses sommets de degré supérieur ou égal à 2 , il existe nécessairement un chemin fermé dans G.*

Ceci implique en particulier qu'un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair contient un chemin fermé. (Les sommets de degré nul impliquent que le graphe n'est pas connexe).

4.4.4.2 Le nombre de sommets de degré impair est pair

La somme des degrés des sommets d'un graphe quelconque est le double du nombre d'arêtes de ce graphe[1]. La somme des degrés est donc un nombre pair. Nous pouvons en déduire que le nombre de sommets de degré impair d'un graphe est pair. Il n'existe en particulier pas de graphe ayant un seul sommet de degré impair.

4.4.4.3 Il faut que deux sommets au plus soient de degré impair

Soit G un graphe connexe.

Montrons qu'un chemin eulérien est possible seulement si deux sommets au plus (c'est-à-dire 0 ou 2 sommets) sont de degré impair.

Plaçons-nous en un sommet quelconque du graphe. Parcourir le graphe de façon eulérienne amènera à « entrer » puis « sortir » de ce sommet jusqu'à ce que toutes les arêtes partant de ce sommet soient parcourues. Si ce sommet est de degré impair, alors il faudra que ce sommet soit une extrémité du chemin sinon au moins une arête incidente à ce sommet ne sera pas parcourue. Pour qu'un chemin eulérien existe dans le graphe, il est donc nécessaire que deux sommets au plus soient de degrés impairs. Si le graphe comporte plus de deux sommets de degré impair, alors aucun chemin eulérien ne sera possible.

Montrons maintenant qu'il suffit de montrer la réciproque sur un graphe dont tous les sommets sont de degré pair pour le prouver pour un graphe ayant deux sommets de degré impair.

Supposons que nous ayons montré qu'un graphe ayant tous ses sommets de degré pair soit un graphe eulérien. Soit G un graphe connexe dont deux sommets, s_1 et s_2, sont de degré

[1]Voir le paragraphe 4.3.3.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

impair. Ajoutons une arête entre ces deux sommets[1]. Leur degré est maintenant pair, ainsi que tous les autres sommets du graphe. Le théorème étant supposé vrai pour les graphes ayant tous leurs sommets de degré pair, il existe donc un chemin eulérien fermé dans ce graphe. Ce chemin étant fermé il peut commencer en n'importe quel sommet et terminer par toute arête menant à ce sommet, il peut par exemple commencer en s_1 et revenir en s_1 par l'arête s_2s_1. Il suffit maintenant de supprimer cette arête fictive entre s_1 et s_2 pour obtenir un chemin eulérien ouvert dans le graphe qui commence en s_1 et se termine en s_2.

Montrons maintenant que la condition de parité de tous les degrés d'un graphe suffit à garantir l'existence d'un chemin eulérien fermé dans le graphe.

4.4.4.4 Une preuve par maximalité

Soit G un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair. Prenons C le plus grand chemin dans G. Si C contient toutes les arêtes de G, alors le problème est résolu. Sinon, G contient au moins une arête de plus que C et nous avons deux cas possibles :

- C est ouvert. Les sommets à l'extrémité de C sont donc de degré pair dans G par hypothèse, mais de degré impair dans C. Il existe donc dans G une arête incidente a à s (s étant l'un des extrémités de C : voir la figure 4.37) qui n'a pas été parcourue dans C. On peut donc l'ajouter à la suite du chemin de C qui n'est donc pas le plus grand chemin dans G, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de maximalité de C.

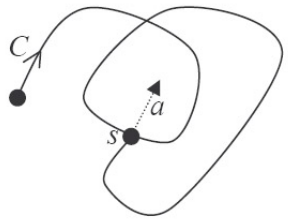


FIG. 4.37: *Si C est ouvert, il existe une arête a adjacente à l'une de ses extrémités s dans le graphe G et non parcourue dans C.*

- C est fermé. On peut donc commencer le chemin à partir d'un sommet quelconque. Par connexité de G, il existe dans C un sommet s interceptant une arête a non couverte par C. Choisissons ce sommet comme sommet de départ du chemin. Alors C commençant et se terminant en s peut être prolongé par l'arête a. C n'était donc pas le grand chemin dans G, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de maximalité de C.

[1]Notons que si l'on veut faire cette preuve dans le cadre des graphes simples, cet endroit de la preuve est le seul qui peut poser problème. Il est en effet possible qu'une arête entre les sommets s_1 et s_2 existe déjà, et que l'on transforme ainsi un graphe simple en multigraphe. Pour que la preuve fonctionne ici dans le cadre des graphes simples, on peut ajouter un sommet que l'on relie à s_1 et s_2, le reste du raisonnement restant inchangé.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

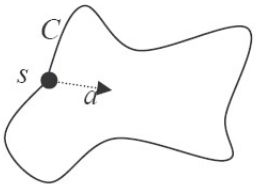


FIG. 4.38: *Si C est fermé, il existe dans G une arête a adjacente à l'un des sommets s de C, et non parcourue dans C.*

Le plus grand chemin C dans G contient donc toutes les arêtes de G, c'est un chemin eulérien.

4.4.4.5 Une preuve par récurrence

Démontrons, par récurrence sur le nombre d'arêtes, que tout graphe G connexe dont tous les sommets sont de degré pair admet un cycle eulérien.

Si G ne contient pas d'arête alors il ne contient qu'un seul sommet[1], et admet un cycle eulérien. Sinon tous les sommets de G sont de degré égal ou supérieur à 2. Il existe donc un chemin fermé C dans G comme nous l'avons montré en 4.4.4.1.

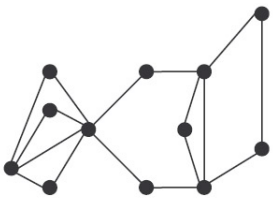


FIG. 4.39: *Un graphe dont tous les sommets sont de degré pair. Nous allons montrer sur cet exemple comment la preuve par récurrence que nous donnons permet de construire un chemin eulérien dans ce graphe.*

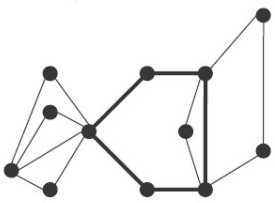


FIG. 4.40: *Le graphe ayant tous ses sommets de degré pair contient un chemin fermé (par exemple celui en gras).*

[1]Sinon il ne serait pas connexe ou ne contiendrait pas de sommet.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Ôtons les arêtes de C du graphe G. Nous obtenons un sous-graphe[1] G' dont tous les sommets sont de degré pair et qui est formé d'un ensemble de composantes connexes $\{G_1, G_2, \ldots, G_p\}$.

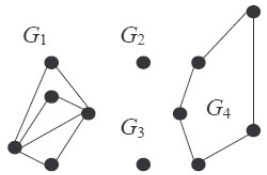


FIG. 4.41: *Le sous-graphe composé de tous les sommets de G et de toutes les arêtes de G n'appartenant pas à C est un graphe formé de 4 composantes connexes.*

Chaque composante connexe G_i de G' a un nombre d'arêtes strictement plus petit que celui de G. Tous les sommets de G_i sont de degré pair et, par induction, G_i contient un chemin fermé C_i contenant toutes les arêtes de G_i (notons que G_i et donc C_i peuvent ne contenir aucune arête).

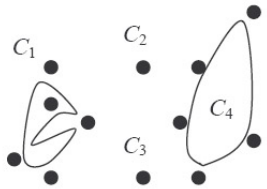


FIG. 4.42: *Dans chaque composante connexe G_i de G', il existe par hypothèse de récurrence un chemin eulérien fermé.*

Reste à reconstruire le graphe G à partir des ces composantes connexes. Pour cela, parcourons C, lorsque nous rencontrons un sommet s appartenant à G_i ajoutons à notre chemin C le chemin C_i si celui-ci n'a pas déjà été parcouru. Nous obtenons alors un chemin eulérien fermé dans G, ce qu'il nous fallait démontrer.

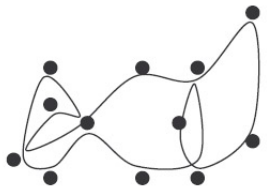


FIG. 4.43: *En « recollant » les chemins construits dans chaque composante connexe, on obtient un chemin eulérien dans G.*

[1] G' est un sous-graphe de G, ce n'est pas un sous-graphe induit de G. Quand on considère ainsi un sous-graphe composé de tous les sommets d'un graphe, et de certaines de ses arêtes, on utilise le terme de **sous-graphe partiel**.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

4.4.5 Connaissances mises en jeu dans le problème

Ce problème permet avant tout d'appréhender la notion de connexité. Une définition simple de la connexité d'un graphe peut être donnée par l'existence d'un chemin entre tout couple de sommets appartenant au graphe. Pourtant, dès que le graphe devient « grand » il devient plus difficile de déterminer s'il est connexe. Le graphe de la figure 4.4.2, par exemple, n'est pas connexe ce qui n'est pas immédiat à visualiser. Cette notion est essentielle dans le problème des parcours eulériens dans un graphe car c'est elle qui, associée à la parité des degrés du graphe, nous permet d'assurer l'existence d'un chemin fermé dans le graphe sur laquelle reposent les différentes preuves.

Une autre notion importante dans le problème est celle de la distinction entre condition nécessaire et condition suffisante. Le fait que la parité du degré des sommets soit une condition nécessaire a été vu et souvent prouvé lors des expérimentations que nous avons menées. Par contre, chercher à montrer que cette condition est suffisante n'a pas été vu dans les classes. En fait, il ne s'agit pas nécessairement d'une « erreur » de la part des élèves. La condition nécessaire leur permet d'« éliminer » les graphes ne contenant pas de chemin eulérien ; pour les autres graphes, une recherche par tatônnement leur permet d'exhiber un chemin eulérien[1]. Plusieurs idées pourraient être envisagées pour inciter les élèves à chercher à montrer que la condition de parité des degrés dans un graphe connexe est suffisante pour l'existence d'un chemin eulérien dans le graphe. Elles reviennent à inciter les élèves à construire un algorithme de recherche de parcours eulérien. On pourrait, par exemple, demander à la classe de faire construire un parcours eulérien sur un graphe qu'elle ne voit pas, par un élève muet (ou ne répondant que « oui » et « non ») et avec lequel elle ne peut communiquer que par phrases. On pourrait aussi programmer une interface dans laquelle on se déplace le long des arêtes d'un graphe en ne voyant que les alentours du sommet où l'on se trouve.

La preuve du théorème d'Euler ne fait pas partie du programme de la Terminale ES. Pourtant il nous semble fondamental que les élèves soient placés en situation de recherche sur ce problème. Sans cette phase de recherche, lorsque l'on donne le théorème et qu'on l'admet, le travail de recherche de parcours eulérien perd presque tout son intérêt : il suffit alors d'établir les degrés des sommets du graphe pour connaître l'existence d'un chemin eulérien. Lorsqu'un tel chemin existe, il est très facile de le trouver si tous les sommets sont de degré pair, et tout aussi facile si deux sommets sont de degré impair, sachant que l'on doit commencer par l'un et terminer par l'autre. Lors de nos séances en classe, nous avons constaté qu'il était bien souvent plus long de calculer le degré de tous les sommets que d'établir le chemin proprement dit.

Le problème peut aussi permettre un travail sur la modélisation, le graphe pouvant modéliser des situations allant d'un parcours de pièces à l'alignement des jetons d'un jeu de dominos. Lorque le graphe n'est pas donné à l'avance, il arrivera souvent que le problème soit modélisé par les élèves comme la recherche d'un parcours hamiltonien[2] dans

[1] Un graphe très grand avec des sommets de degrés élevés pourrait peut-être permettre de déstabiliser leur stratégie de résolution mais dans tous les cas, le coût serait élevé : utiliser le théorème d'Euler dans un tel graphe demanderait de calculer le degré de chaque sommet.

[2] Un parcours hamiltonien est un parcours passant une et une seule fois par chaque sommet d'un graphe donné. C'est un problème difficile pour lequel on ne connaît pas de théorème d'existence général.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

un graphe. Ce phénomène est expliqué et détaillé dans le paragraphe 2.4.1.1.

4.5 Construction de graphes planaires réguliers

L'idée de cette section est d'établir un lien entre la géométrie dans l'espace et la théorie des graphes. Nous n'insisterons pas sur la partie géométrique, étant donné que les solides que nous évoquerons (ainsi que les pavages du plan qui seront aussi abordés ici) sont dans le programme de seconde générale.

Relevons toutefois au préalable plusieurs points. Il est préconisé dans les programmes d'aborder les cinq solides réguliers de l'espace dits **solides de Platon**[1]. Qu'en dire ? Hormis les représenter et les nommer, le fait de les regrouper sous une même appellation demande un minimum de justification. Or, cette justification passe par la notion de régularité des polyèdres, notion qui ne va pas de soi. Comment définir un polyèdre régulier ? Par le fait que les arêtes sont de même longueur ?[2] Que ses faces sont superposables ? Cela ne suffit pas pour discriminer les polyèdres dits « étoilés »[3] par exemple. Pour définir les solides de Platon, nous aurons donc besoin, en plus de la notion de régularité (en terme de longueur d'arêtes et de nombre d'arêtes par sommets), de celle de convexité et de superposabilité des faces. Un ouvrage de Lakatos [37] traite de la définition des polyèdres en général et des polyèdres réguliers en particulier. Il montre les difficultés de ces notions à travers une conversation entre un professeur et ses élèves.

Les polyèdres dont nous traiterons ici seront des polyèdres convexes, en dimension trois[4].

Nous montrerons ici comment un lien entre les graphes et les solides de Platon peut être établi, des contraintes de planarité et de régularité du degré des sommets d'un graphe permettant d'obtenir une représentation des solides de Platon.

4.5.1 Énoncé et vocabulaire

Construire dans le plan un graphe planaire d-régulier dont toutes les faces sont délimitées par le même nombre d'arêtes.

Commençons par définir les termes employés dans cet énoncé, ainsi que ceux dont nous aurons besoin dans cette situation.

Un graphe est dit **d-régulier** si chacun de ses sommets est de degré d.

Un **graphe planaire** est un graphe que l'on peut dessiner dans le plan sans que ses arêtes

[1] Rappelons que ces cinq solides sont le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.

[2] On peut par exemple construire des rhomboèdres réguliers. Une séance à ce sujet a été menée en option sciences en seconde. L'enseignante a utilisé pour cela des bâtonnets de bois de même longueur et de la pâte à modeler. C'est en discriminant les polyèdres proposés qu'elle a amené les élèves à définir la régularité. Pour un bref compte-rendu de cette séance, voir [4].

[3] Pour des exemples animés de polyèdres plus ou moins « réguliers » vous pouvez, par exemple, consulter ce site : `www.mathcurve.com/polyedres/polyedres.shtml`

[4] La notion de « polyèdre » régulier, appelé alors polytope régulier, ainsi que celle de squelette existent dans les dimensions supérieures.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

ne se croisent. La planarité d'un graphe ne dépend pas de sa représentation, un graphe planaire pouvant avoir une représentation non plane. Ce changement de représentation semble avoir un certain intérêt ludique, plusieurs jeux sur Internet existent dont le but est de « démêler » des représentations non planes de tels graphes[1].

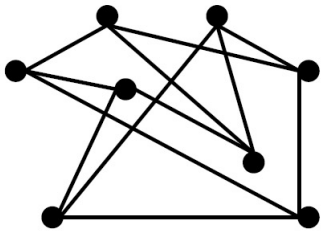


FIG. 4.44: *Un exemple de graphe planaire dans une représentation non plane.*

La représentation que l'on donne d'un graphe, si elle ne change rien à ses propriétés combinatoires, peut fortement influencer les propriétés que l'on peut en voir, ou rechercher. Par exemple, le graphe de la figure précédente, peut nous faire penser à un cube :

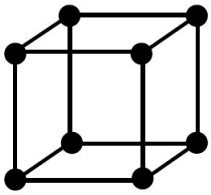


FIG. 4.45: *Le même graphe dans une représentation « en perspective » et non planaire.*

Ce graphe est en fait le **squelette** d'un cube, le squelette d'un polyèdre étant le graphe dont sommets et arêtes sont ceux de ce polyèdre. On trouve aussi dans la littérature le nom de diagramme de Schlegel pour désigner une représentation plane du squelette d'un polyèdre.

Si nous dessinons un graphe planaire sur une sphère sans que ses arêtes ne se croisent, et que nous decoupons le long des arêtes du graphe, chaque « morceau » ainsi obtenu sera nommé **face**. L'intérêt de se placer sur la sphère plutôt que dans le plan pour dessiner et découper ce graphe, est que toutes les faces jouent alors le même rôle (on n'a pas ainsi à distinguer la face infinie dont nous parlerons plus loin).

[1]Voir par exemple le site à l'adresse :`www.planarity.net`

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

FIG. 4.46: *Le même graphe projeté sur la sphère.*

Ainsi, la définition d'une face dépend de la représentation du graphe : le même graphe, selon sa représentation, n'aura pas les mêmes faces.

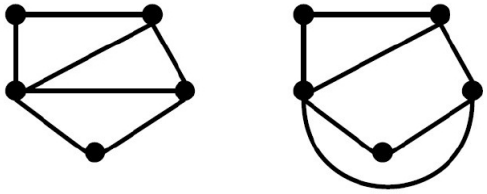


FIG. 4.47: *Le même graphe plan dans deux représentations. La première montre une face délimitée par 5 arêtes(la face « extérieure » dite aussi « face infinie ») et trois faces délimitées par 3 arêtes. La seconde a 4 faces, mais deux sont délimitées par 3 arêtes, et deux par 4 arêtes.*

Pour obtenir la représentation planaire d'un graphe dessiné sur la sphère de façon planaire, nous pouvons imaginer « faire un trou » au centre de l'une de ses faces, et étirer la sphère sur le plan à partir de ce trou. La face qui contenait le trou est la face infinie, et la représentation planaire du graphe est ainsi conservée[1].

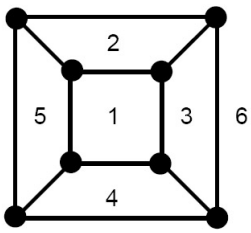


FIG. 4.48: *Le même graphe et ses faces numérotées de 1 à 6.*

Remarquons tout d'abord que ce graphe répond à la première question que nous posions : c'est un graphe planaire, 3-régulier et dont toutes les faces, y compris la face infinie, sont

[1]Ce procédé est en fait une façon de décrire une projection stéréographique.

identiquement délimitées par 4 arêtes. Remarquons aussi que le graphe ci-dessus pourrait être le squelette d'un parallélépidède rectangle ou plus généralement de n'importe quel hexaèdre à faces quadrilatérales.

Reprenons maintenant l'énoncé. On peut tenter d'organiser la recherche de ces graphes en considérant les deux paramètres de l'énoncé : la d-régularité et le nombre d'arêtes délimitant les faces.

4.5.2 De petits cas

Nous traiterons rapidement ces cas, permettant surtout de rencontrer des graphes particuliers.

Le premier graphe auquel on peut penser est le graphe vide. Composé d'une seule face, et sans arête, il répond bien aux critères demandés. De même, les graphes stables sont composés d'une seule face et n'ont pas d'arête.

Un deuxième graphe, composé de deux sommets et d'une arête reliant ces deux sommets, est aussi 1-régulier, et il ne comporte qu'une face. La famille des graphes composés de paires de sommets reliés par une arête sont eux aussi 1-réguliers et composés d'une seule face.

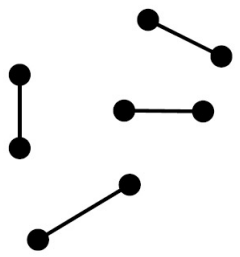


FIG. 4.49: *Graphe à une face et 1-régulier.*

Pour les graphes multiples, tous les graphes d-réguliers dont les d arêtes relient deux sommets, et seulement deux, ont leurs d faces identiques et délimitées par deux arêtes.

FIG. 4.50: *Graphe à 4 faces et 4-régulier.*

Qu'est-ce qu'une face délimitée par une seule arête ? C'est l'intérieur ou l'extérieur d'une boucle. Un graphe composé d'un sommet et d'une boucle répond lui aussi aux critères demandés : il est 2-régulier et possède deux faces.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

FIG. 4.51: *Graphe à 2 faces et 2-régulier.*

Enfin, il existe une infinité de graphes 2-réguliers à deux faces identiques : ce sont les graphes de la famille des cycles.

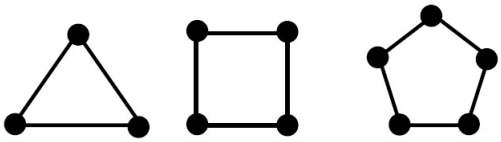


FIG. 4.52: *Trois graphes à 2 faces et 2-réguliers.*

Les cas précédents, qui correspondent à des graphes avec boucle ou à des multigraphes, ne sont pas les plus intéressants dans l'optique géométrique. Les cycles, quant à eux, peuvent être vus comme des représentations des polygones réguliers. Nous allons voir maintenant que dès que $d \geq 3$, et que les faces des graphes recherchés sont délimitées par plus de trois arêtes le lien peut être fait entre les graphes recherchés et les polyèdres de l'espace.

4.5.3 Graphes d-réguliers dont les faces sont des triangles

Étudions maintenant les graphes d-réguliers dont les faces sont des triangles.

Pour $d = 3$

Commençons par dessiner une face de ce graphe. Chacun de ses sommets devant être de degré 3, on doit avoir une arête de plus partant de chacun de ses sommets :

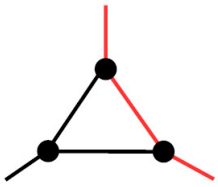


FIG. 4.53: *Un graphe en cours de construction avec trois sommets de degré 3.*

Les faces étant triangulaires, trois arêtes consécutives quelconques doivent délimiter une même face triangulaire.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

C'est le cas par exemple des trois arêtes rouges de la figure 4.53. Pour obtenir une nouvelle face, les deux demi-arêtes rouges[1] doivent être reliées à un sommet. Ce sommet doit être distinct des trois que comporte déjà le graphe pour ne pas avoir d'arête double (et par conséquent de face non triangulaire). Ajoutons donc un sommet s que nous relions aux deux demi-arêtes rouges :

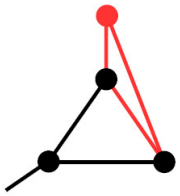


FIG. 4.54: *Trois sommets de degré 3 et s, un sommet de degré 2.*

Considérons trois autres arêtes consécutives qui doivent délimiter une même face :

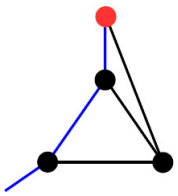


FIG. 4.55: *Les trois arêtes bleues doivent délimiter une même face.*

Nous devons donc relier la demi-arête bleue au sommet s rouge (de la figure 4.55) pour respecter les contraintes sur la taille des faces :

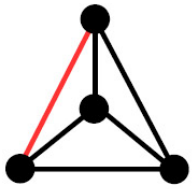


FIG. 4.56: *Un graphe 3-régulier et à 4 faces triangulaires.*

On ne peut plus ajouter de sommets ni d'arêtes à ce graphe en respectant les contraintes de régularité fixées, qui sont toutes respectées[2]. Le procédé de construction de ce graphe

[1]Nous désignerons par demi-arête une arête dont l'une des extrémités n'est pas fixée. Cela implique en particulier que deux demi-arêtes peuvent correspondre à la même arête si nous les relions entre elles.

[2]Si l'on ajoute une arête à l'un des sommets de ce graphe, la 3-régularité ne sera plus respectée. Si nous ajoutons un autre graphe de façon non connexe, alors la face infinie ne sera plus délimitée par 3 arêtes.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

a été obtenu par forçage. À chaque étape, il semble qu'il n'y ait pas eu de choix et que par conséquent, il n'existe qu'un seul graphe 3-régulier à faces triangulaires. Ce procédé de construction peut faire office de preuve de l'unicité de graphe planaire 3-régulier et à faces triangulaires. Néanmoins, d'autres preuves (que certains qualifieraient de plus rigoureuses) d'unicité existent, et nous en donnerons un exemple dans la section 4.5.4. Notons que le graphe obtenu est le squelette d'un tétraèdre, dont voici une représentation en perspective :

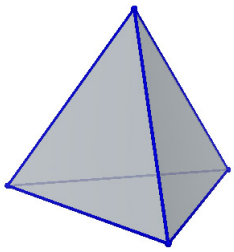


FIG. 4.57: *Une représentation du tétraèdre régulier, l'un des solides de Platon.*

Pour $d = 4$

Procédons de la même façon que pour le graphe précédent. Nous pouvons commencer par tracer un triangle, et ajouter deux demi-arêtes à chacun de ses sommets :

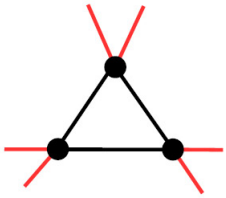


FIG. 4.58: *Un graphe en construction avec une face triangulaire délimitée et trois sommets de degré 4.*

Deux demi-arêtes et une arête de la première face sont consécutives, et par conséquent, ces trois triplets d'arêtes et de demi-arêtes déterminent chacune une face :

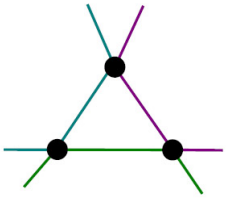


FIG. 4.59: *Trois nouvelles faces devront être créées, chaque face délimitée par des arêtes de même couleur.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Pour construire ces trois nouvelles faces, nous devons ajouter trois sommets :

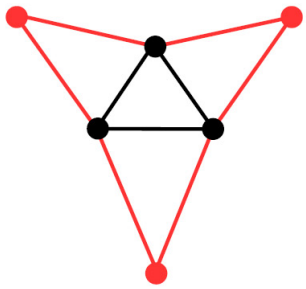


FIG. 4.60: *Un graphe à six sommets dont trois sont de degré 4 et trois de degré 2.*

Ajoutons deux demi-arêtes à chacun des sommets de degré 2 :

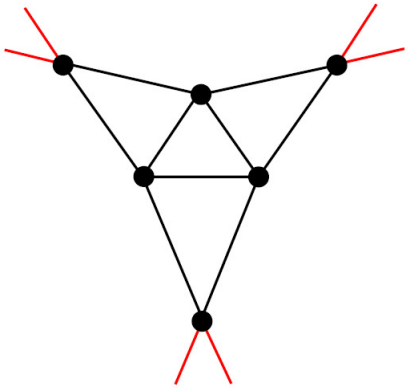


FIG. 4.61: *Un graphe à six sommets, tous sont de degré 4.*

Recherchons maintenant trois arêtes consécutives pour délimiter les faces :

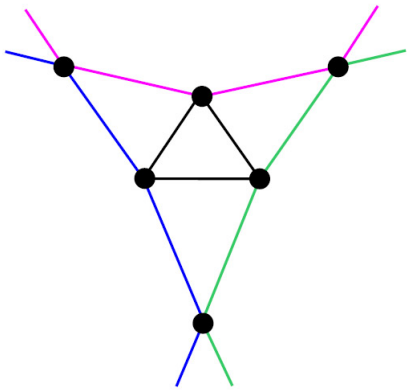


FIG. 4.62: *Trois ensembles (colorés) d'arêtes chacun formé de 2 demis-arêtes et de 2 arêtes.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Pour que les faces soient triangulaires, nous devons relier entre elles les demis-arêtes colorées de la même couleur (figure 4.62) :

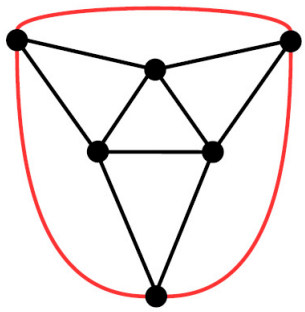


FIG. 4.63: *Un graphe 4-régulier à huit faces triangulaires.*

Ce graphe est le squelette de l'octaèdre. De la même façon que pour le graphe précédent, aucun choix n'a pu être fait durant cette construction. Cette construction montre l'unicité du graphe planaire 4-régulier à faces triangulaires.

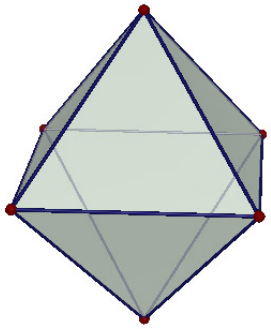


FIG. 4.64: *L'octaèdre régulier, l'un des solides de Platon.*

Pour $d = 5$

Commençons, pour ce graphe, à en construire la face infinie. Nous tracerons ensuite pour chacun des trois sommets, des demi-arêtes à l'intérieur de cette face triangulaire :

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

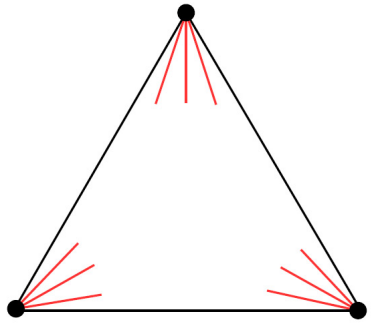


FIG. 4.65: *Un graphe en construction dont les 3 sommets sont de degré 5.*

Chacune des arêtes de la face infinie va délimiter, avec deux arêtes rouges, une nouvelle face de ce graphe, créant ainsi en tout trois nouvelles faces. En effet, chacune appartient à un triplet de trois arêtes consécutives, ou plus précisément d'une demi-arête suivie d'une arête de la face infinie, puis d'une autre demi-arête.

Pour cela ajoutons trois sommets, et trois demi-arêtes pour chacun de ces sommets :

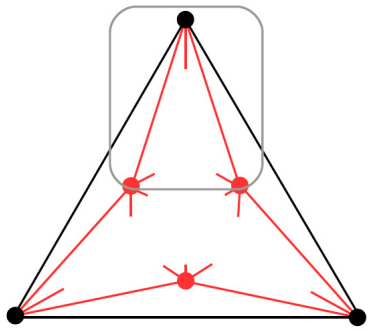


FIG. 4.66: *Un graphe avec 6 sommets de degré 5.*

Plaçons-nous dans la partie encadrée du graphe. Nous pouvons nous placer en ces sommets particuliers(un sommet de la face infinie et les deux sommets qui lui sont adjacents et n'appartenant pas à la face infinie) sans perte de généralité, étant donné que la construction sera identique dans les deux autres triplets de sommets.

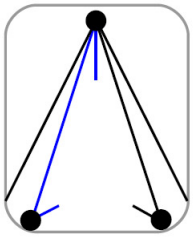


FIG. 4.67: *Les trois arêtes bleues sont consécutives et doivent délimiter une face. Si l'on choisit de créer une face avec deux des arêtes bleues et une quelconque autre arête, on perd la planarité du graphe.*

Pour que les 3 arêtes bleues de la figure précédente délimitent une face, nous devons ajouter un sommet auquel relier les 2 demi-arêtes :

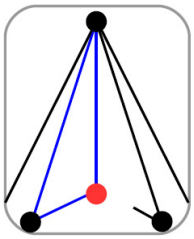


FIG. 4.68: *Une nouvelle face délimitée par les trois arêtes bleues.*

Nous avons à nouveau trois arêtes consécutives :

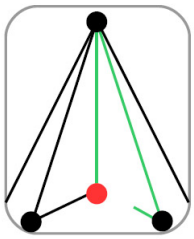


FIG. 4.69: *Les trois arêtes vertes sont consécutives et doivent délimiter une face.*

Procédons de la même façon pour les deux autres triplets de sommets, en ajoutant suffisamment de demi-arêtes pour que chaque sommet soit de degré 5 :

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

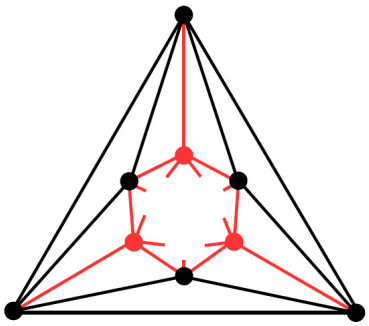
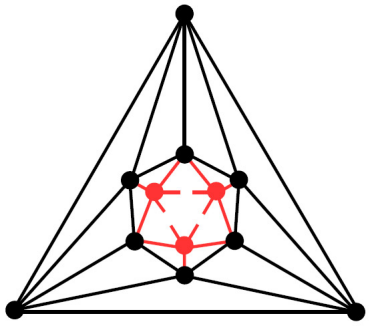


FIG. 4.70: *Un graphe à faces triangulaires, et dont les sommets sont de degré 5, en construction.*

Ajoutons trois sommets et deux arêtes partant de chacun :



Pour obtenir un graphe 5-régulier à faces triangulaires, nous devons relier les demi-arêtes entre elles :

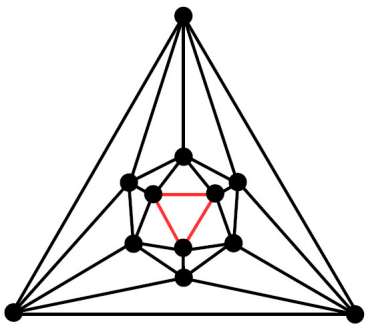


FIG. 4.71: *Un graphe à 20 faces triangulaires, et douze sommets de degré 5.*

Ce graphe est le squelette de l'icosaèdre, dont voici une représentation dans l'espace :

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

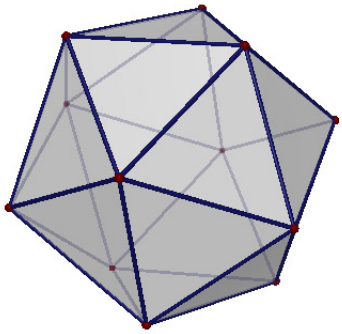


FIG. 4.72: *L'icosaèdre régulier, l'un des solides de Platon.*

Pour $d = 6$

Commençons la construction par une face triangulaire pour laquelle de chaque sommet partent 4 demi-arêtes :

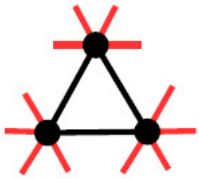


FIG. 4.73: *Un graphe en construction dont une face triangulaire est bien délimitée.*

Nous devons ajouter trois sommets pour obtenir trois nouvelles faces. En effet, chaque arête de la face « bien délimitée » est consécutive à 2 demi-arêtes (plus précisément à seulement 2 demi-arêtes permettant une construction plane). Ajoutons donc ces trois nouveaux sommets. De chacun vont partir quatre demi-arêtes :

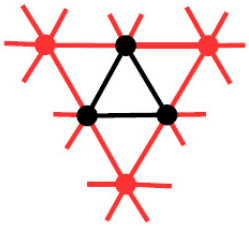


FIG. 4.74: *Graphe en construction à 6 sommets, et 4 faces « bien délimitées ».*

De la même façon qu'à l'étape précédente, ajoutons six sommets au graphe, auxquels nous « attachons » 12 demi-arêtes et ajoutons par la même occasion 24 nouvelles demi-arêtes :

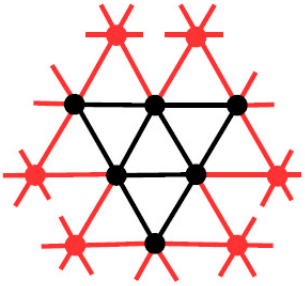


FIG. 4.75: *Le graphe en construction possède 10 faces bien délimitées et 12 sommets.*

Le processus continue, exclusivement par forçage :

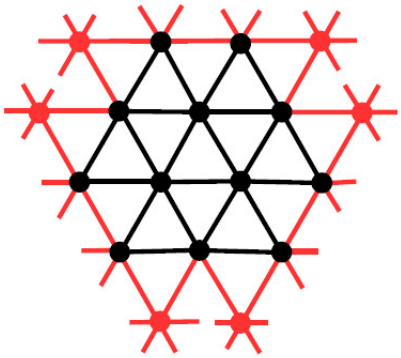


FIG. 4.76: *Le graphe en construction possède 19 faces bien délimitées et 18 sommets.*

Il semble que le procédé ne va pas s'arrêter. Notre représentation du graphe dont les faces paraissent être des triangles équilatéraux nous amènent à l'idée de pavage du plan. Le plan peut effectivement être pavé par des triangles équilatéraux :

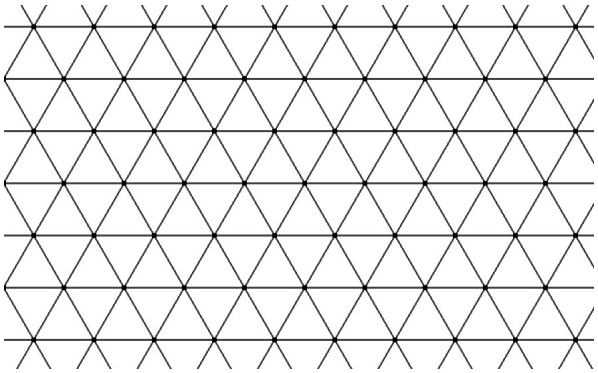


FIG. 4.77: *Le triangle équilatéral pave le plan.*

Nous avons maintenant deux façons de répondre à la question qui nous était posée.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Nous pourrions dire que le graphe obtenu, dont tous les sommets sont de degré 6, est bien un nouveau graphe d-régulier dont les faces sont des triangles équilatéraux. Mais, dans ce cas, qu'est-ce que la face infinie ? Cette face pourrait-elle être triangulaire ?

Une autre façon de répondre est de dire qu'il n'existe pas de graphe fini, planaire, 6-régulier dont les faces sont des triangles. Pour s'en convaincre, nous pouvons nous référer à la formule d'Euler pour les graphes planaires.

4.5.4 Formule d'Euler pour les graphes planaires

Soit G un graphe planaire, et soient
- F le nombre de faces,
- A le nombre d'arêtes,
- S le nombre de sommets,
- CC le nombre de composantes connexes du graphe G.

On a alors :

$$F - A + S = 1 + CC$$

Cette relation est appelée **formule d'Euler** pour les graphes planaires.

On pourra montrer cette relation par induction sur le nombre d'arêtes du graphe, en remarquant que la suppression d'une arête peut soit augmenter de 1 le nombre de composantes connexes, soit diminuer de 1 le nombre de faces. Le graphe ne comportant que des sommets, que l'on nomme **graphe stable**, est composé d'une face, de S sommets, d'aucune arête, et de S composantes connexes, ce qui nous donne bien $1 + S = 1 + S$.

Que nous donne cette relation, dans le cas des graphes réguliers et à faces triangulaires que nous recherchions ? Nous recherchons des graphes[1] tels que $CC = 1$, la relation d'Euler donne donc $F - A + S = 2$.

• Pour le graphe 3-régulier et à faces triangulaires, nous pouvons établir des relations entre F, A et S. Chaque face est composée de 3 arêtes, et chaque arête appartient à 2 faces[2], nous avons donc $3F = 2A$. Chaque sommet est une extrémité de 3 arêtes, et chaque arête relie 2 sommets distincts, on a donc $3S = 2A$. Cette triple égalité $3S = 3F = 2A$, nous amène directement à $F = 4$, $S = 4$ et $A = 6$, ce que nous avions trouvé par construction.

• Nous pouvons refaire les mêmes calculs pour les deux graphes suivants, les squelettes de l'octaèdre et de l'icosaèdre, et retrouver les valeurs que nous avons déterminées par construction.

• Pour un graphe d-régulier dont les faces sont toutes délimitées par p arêtes, la formule d'Euler nous permet d'affirmer que :

$$pF = dS = 2A$$

[1]Parmi les petits cas, nous avons trouvé des graphes non connexes répondant à l'énoncé (voir par exemple le graphe de la figure 4.49). Mais ce cas ne peut plus se retrouver lorsque nous recherchons des graphes ayant plus de deux faces. En effet, dès qu'un graphe comporte plus deux faces, en ajouter une implique de le faire de façon connexe, sinon la face infinie ne peut être polygonale.

[2]Ceci n'est pas vrai pour tous les graphes planaires, pour lesquels une arête peut être dans une seule face.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

En effet, chaque face est composée de p arêtes, et chaque arête appartient à 2 faces, nous avons donc $pF = 2A$. Chaque sommet est un extrémité de d arêtes, et chaque arête relie 2 sommets distincts, on a donc $dS = 2A$.

Ce qui nous donne pour un graphe 3-régulier à faces triangulaires : $3F = 6S = 2A$, et qui conduit à une impossibilité d'après la formule d'Euler.

Questions connexes :

▷ Pourquoi ne pas rechercher de graphes d-réguliers et à faces triangulaires pour $d > 6$?

▷ Pouvez-vous démontrer la formule d'Euler par induction sur le nombre de sommets d'un graphe planaire ? Sur son nombre de faces ? Sur son nombre de composantes connexes ?

▷ Tout graphe planaire peut être **triangulé** par ajout d'arêtes, c'est-à-dire que chacune de ses faces, sauf la face infinie, est transformée en un ensemble de triangles. La triangulation d'un graphe est-elle unique ? Que peut-on dire du nombre d'arêtes ajoutées ?

4.5.5 Graphes d-réguliers dont les faces sont délimitées par p arêtes ($p > 3$)

4.5.5.1 Graphes d-réguliers à faces quadrilatérales

Pour $d = 3$

Nous avons déjà vu un graphe dont les faces sont des quadrilatères et dont les sommets sont tous de degré 3, c'est le squelette du cube[1]. Est-il unique ? Nous pouvons le voir en construisant ce graphe. Commençons par tracer la face infinie de ce graphe, ainsi qu'une demi-arête pour chaque sommet :

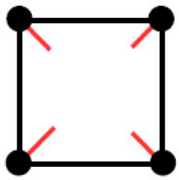


FIG. 4.78: *Un graphe à 4 sommets en cours de construction.*

Chacune des demi-arêtes doit être attachée à un sommet différent pour que les faces que nous créerons ne soient pas des triangles. Nous avons donc nécessairement 4 sommets supplémentaires ainsi que 2 demi-arêtes pour chacun de ces sommets :

[1] Voir la figure 4.48 ou les trois précédentes.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

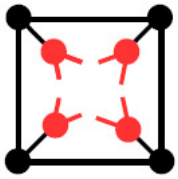


FIG. 4.79: *Quatre nouveaux sommets et les demi-arêtes qui s'y rattachent.*

Pour que toutes les faces du graphe soient des quadrilatères, nous devons relier 2 à 2 les demi-arêtes, en veillant à conserver la planarité :

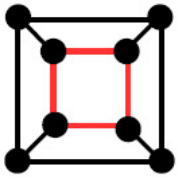


FIG. 4.80: *Le squelette du cube : un graphe à 6 faces, 12 arêtes, et 8 sommets.*

Encore une fois, cette construction a eu lieu par forçage, toutes les étapes étant contraintes : il n'existe qu'un seul graphe 3-régulier dont les faces sont quadilatérales.

Pouvons-nous imaginer une autre façon d'obtenir les graphes que nous recherchons ? L'idée de dualité entre polyèdres réguliers peut nous amener à envisager d'étudier la dualité pour les graphes planaires que nous avons construits.

Graphe dual du squelette du cube

Le **dual** G' **d'un graphe planaire** G s'obtient en associant à chacune des faces du graphe G un sommet dans G', et une arête dès que deux faces de G ont une arête en commun. Prenons par exemple le dual du squelette du cube :

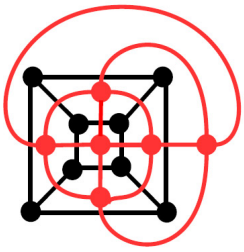


FIG. 4.81: *Le squelette du cube et son graphe dual en rouge.*

Conservons seulement le graphe dual du cube :

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

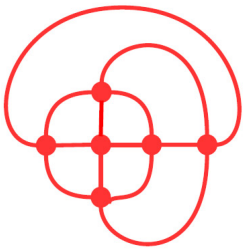


FIG. 4.82: *Le graphe dual du squelette du cube.*

En redessinant ce graphe, nous obtenons la représentation d'un graphe que nous avons déjà rencontrée :

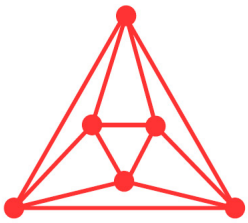


FIG. 4.83: *Le graphe dual du squelette du cube : le squelette de l'octaèdre.*

Une construction par dualité existe aussi dans l'espace. Prenons un cube. Considérons comme sommet de son polyèdre dual, le centre de chacune de ses faces, relions ces sommets entre eux lorsque deux faces du cube sont adjacentes. Nous obtenons alors un polyèdre, l'octaèdre régulier :

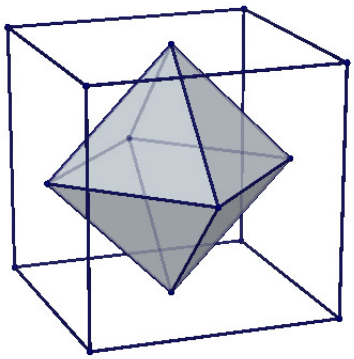


FIG. 4.84: *Le cube et son polyèdre dual, l'octaèdre régulier.*

Nous pourrions construire par dualité un nouveau cube dans cet octaèdre.

Ce procédé de construction par dualité appliqué deux fois, qui dans l'espace donne un nouveau polyèdre, nous donnera pour le squelette du cube, un graphe identique : le dual

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

du dual du squelette du cube (resp. de l'octaèdre) est le squelette du cube (resp. de l'octaèdre).

Questions connexes :

▷ Cette propriété (i. e. le dual du dual de G est G lui-même) est-elle vraie pour tous les graphes planaires ?[1]

▷ Quel est le dual du squelette du tétraèdre ?

▷ Pouvez-vous trouver des graphes planaires isomorphes à leurs graphes duaux ?

▷ Pourquoi ne pas rechercher de graphe d-régulier à faces quadrilatérales pour $d > 3$?

4.5.5.2 Graphes d-réguliers dont les faces sont des pentagones

De la même façon que précédemment nous pourrions construire ce graphe en commençant par tracer un graphe composé d'un C_5 (soit un cycle à cinq sommets) et d'une demi-arête par sommet. À chaque étape, par forçage, nous obtiendrions un graphe, unique, que nous vous proposons plutôt de construire par dualité.

Construction par dualité

Le squelette de l'icosaèdre G étant 5-régulier et à faces triangulaires, son dual G' sera 3-régulier à faces pentagonales. En effet, un sommet de G' aura pour degré le nombre d'arêtes délimitant les faces de G, et le nombre d'arêtes délimitant chaque face de G' correspond au degré des sommets de G.

Nous obtenons ainsi le graphe suivant :

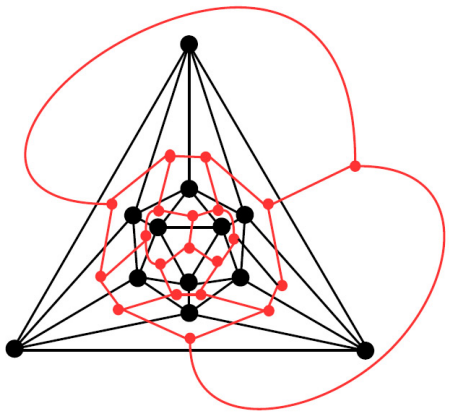


FIG. 4.85: *Le squelette de l'icosaèdre et son graphe dual.*

Modifions cette représentation pour faire apparaître plus clairement les faces pentagonales de ce nouveau graphe :

[1] Qu'en est-il pour un graphe comportant un sommet de degré un ?

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

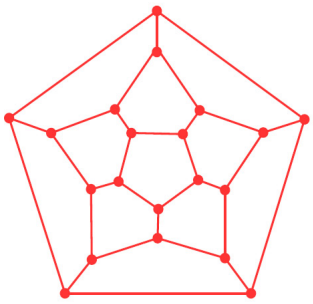


FIG. 4.86: *Le graphe dual du squelette de l'icosaèdre : on reconnait le squelette du dodécaèdre.*

Dans l'espace, le dodécaèdre régulier et l'icosaèdre régulier peuvent être construits par dualité.

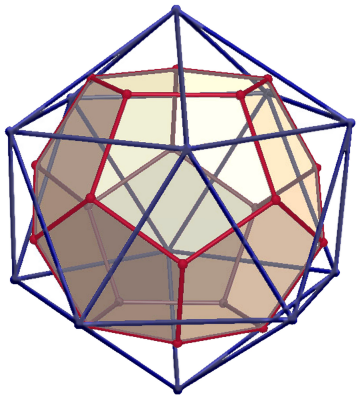


FIG. 4.87: *Le polyèdre dual de l'icosaèdre régulier : le dodécaèdre régulier, l'un des solides de Platon.*

Questions connexes :

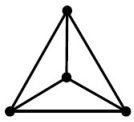
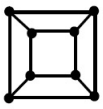
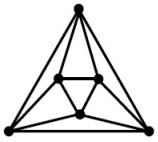
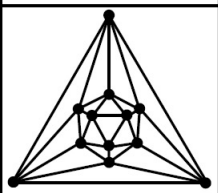
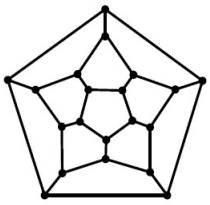
▷ Pourquoi ne pas rechercher de graphe d-régulier à faces pentagonales pour $d > 3$?

▷ Pourquoi ne pas rechercher de graphe d-régulier à faces délimitées par plus de 5 arêtes pour $d > 2$?

4.5.6 Pour conclure

En dehors de quelques graphes triviaux, ces constructions nous ont permis de trouver dans le plan les squelettes des 5 solides de Platon : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, l'icosaèdre et le dodécaèdre :

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Nom	Graphe	S	A	F
Tétraèdre		4	6	4
Cube		8	12	6
Octaèdre		6	12	8
Icosaèdre		12	30	20
Dodécaèdre		20	30	12

Pour montrer qu'il n'existe que 5 solides d-réguliers à faces identiques, on peut utiliser la formule d'Euler pour les graphes connexes :

$$F - A + S = 2$$

où F, A et S sont respectivement le nombre de faces, le nombre d'arêtes et le nombre de sommets d'un graphe planaire.

Cette formule va permettre de traduire en terme de contraintes fortes sur le nombre de faces, de sommets et d'arêtes les contraintes de régularité sur le degré des sommets et le nombre d'arêtes délimitant les faces des graphes que nous recherchons.

Nous avons ainsi établi la double égalité suivante[1] :

$$pF = 2A = dS$$

À partir de cette double égalité exprimons S et F en fonction de A :

$$F = \frac{2A}{p}$$
$$S = \frac{2A}{d}$$

[1]Voir le paragraphe 4.5.4.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

D'où, à partir de la formule d'Euler :

$$\begin{aligned} \frac{2A}{p} - A + \frac{2A}{d} &= 2 \\ 2Ap - Adp + 2Ad &= 2dp \\ A(2p - dp + 2d) &= 2dp \end{aligned}$$

Les entiers A, d et p étant strictement positifs, on doit nécessairement avoir :

$$2p - dp + 2d > 0$$

Ce qui équivaut à,

$$(p-2)(d-2) < 4$$

Seuls cinq couples d'entiers (p, d) pour p et d supérieurs ou égaux à 3 vérifient cette inéquation,

$$(3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (5,3)$$

Ces cinq couples correspondent aux cinq constructions que nous avons effectuées et obtenues par forçage.

4.5.7 Connaissances mises en jeu dans le problème

L'un des premiers intérêts de cette situation est de permettre de faire un lien entre les graphes et la géométrie dans l'espace. Étonnamment, des contraintes de régularité en termes de degré de sommets et de taille de faces (en plus de la planarité) suffisent à retrouver les (squelettes des) 5 solides de Platon.

Des liens avec la géométrie planaire apparaissent aussi, en particulier entre le pavage du plan et certains graphes infinis. Rappelons que les solides de Platon, ainsi que des exemples de pavages réguliers du plan, sont au programme de la classe de seconde.

La notion de construction « forcée » pourra être abordée pour montrer l'unicité des graphes recherchés, et un travail sur l'existence pourra être amorcé, en particulier avec une présentation de la formule d'Euler.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

4.6 Plus courts chemins dans un graphe

4.6.1 Situation introductive : propagation de la lumière dans un graphe

Pour un graphe donné (où chaque arête est de longueur 1), on s'intéresse à la propagation de lumière suivant les arêtes, cette lumière parcourant une unité de distance par unité de temps. Si la lumière arrive en un sommet duquel sortent plusieurs arêtes qui n'ont pas encore été parcourues par la lumière, le faisceau se partage entre ces différentes arêtes.
On se donne un « sommet de départ », à partir duquel est propagée la lumière. Lorsque la lumière arrive en un sommet, s'il n'est pas déjà éclairé, elle l'allume et « continue son chemin ».
Quels sont les sommets qui sont éclairés après 1, 2, 3... unités de temps ?

Donnons-nous un exemple de graphe.

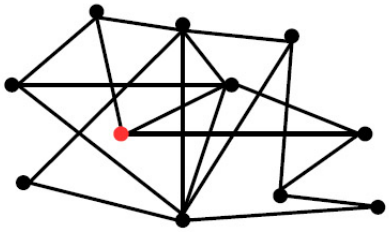


FIG. 4.88: *Un graphe avec un sommet rouge comme source de lumière.*

Le sommet de départ est de degré 3. La lumière va donc se propager le long de trois arêtes et en une unité de temps, « allumer » trois sommets. Pour la clarté du dessin, nous utiliserons des couleurs différentes, comme si la lumière changeait de couleur à chaque étape.

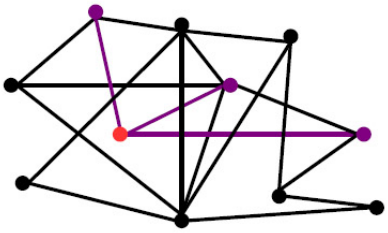


FIG. 4.89: *À la première étape, trois nouveaux sommets (mauves) sont atteints par la lumière.*

À partir des trois sommets nouvellement éclairés, d'autres peuvent être atteints :

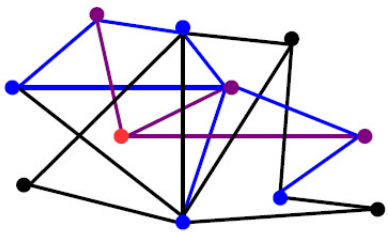


FIG. 4.90: *À cette deuxième étape quatre nouveaux sommets (bleus) sont atteints par la lumière. Notons que certains sommets sont atteints par la lumière venant de plusieurs arêtes en même temps.*

Enfin, une dernière étape va permettre d'éclairer entièrement le graphe :

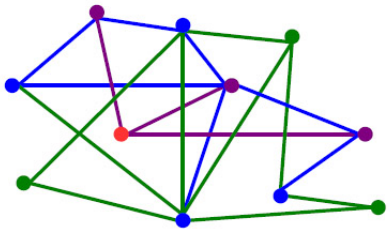


FIG. 4.91: *Le graphe complètement éclairé.*

Notons que certains sommets sont de nouveau atteints alors qu'ils ont déjà été éclairés.

Une interprétation directe que nous pouvons faire est que la propagation de lumière dans le graphe donne la distance entre un sommet « source » et les autres sommets du graphe.

Pour un graphe dont toutes les arêtes sont de même longueur[1], la **distance entre deux sommets** est définie comme le nombre minimum d'arêtes formant un **chemin** entre ces deux sommets. Par convention on dira que la distance d'un sommet à lui-même est nulle. Si le graphe est **pondéré**, c'est-à-dire si chaque arête est affectée d'un poids correspondant à sa longueur, la distance entre deux sommets sera définie comme la plus petite somme du poids des arêtes formant un chemin entre ces deux sommets. S'il n'existe pas de chemin entre deux sommets d'un graphe, pondéré ou non, on considérera que la distance entre eux est infinie.

Ici, chaque couleur correspondant à la première arrivée de la lumière sur un sommet donné, les couleurs correspondent bien à la distance entre ce sommet et le sommet de départ.

On peut se ramener au même problème, et au même type de résolution, avec un graphe dont les arêtes sont pondérées par des entiers. Par exemple, le graphe suivant devient :

[1] C'est ce que l'on considère lorsqu'il n'y a pas de précision particulière sur le graphe.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

FIG. 4.92: *Un graphe pondéré « transformé » en un graphe dont toutes les arêtes sont de longueur 1.*

Une fois la lumière propagée dans ce nouveau graphe, nous pouvons en conserver les sommets colorés du graphe d'origine, et avoir ainsi l'information sur les plus courts chemins entre le sommet de départ et tous les autres sommets du graphe.

Cette façon de procéder risque pourtant de s'avérer fastidieuse lorsque le graphe devient grand, par la multiplication du nombre de sommets à traiter et de couleurs à utiliser lorsque l'on transforme le graphe pondéré en un graphe dont toutes les arêtes sont de même longueur. Des algorithmes efficaces ont été proposés pour établir les plus courts chemins entre deux sommets d'un graphe. Nous détaillerons ici l'algorithme de Dijkstra qui fait partie du programme de Terminale ES, et donnerons sa preuve (qui, elle, ne fait pas partie du programme).

4.6.2 Algorithme de Dijkstra

Edsger Dijkstra est un mathématicien et informaticien hollandais, mort en 2002. Outre l'algorithme que nous allons présenter ici, et qui a gardé son nom, Dijkstra est connu pour sa contribution au développement du langage de programmation *Algol*, pour avoir remporté le prix Turing en 1972[1] ou encore, pour ses aphorismes[2].

Revenons à son algorithme de recherche de plus courts chemins dans un graphe.

Prenons un graphe simple dont les arêtes sont pondérées par des nombres positifs. Notons S l'ensemble de ses sommets. Nommons l'un des sommets $s_{entrée}$ et un autre s_{sortie}. Le but de l'algorithme est de fournir un nombre positif correspondant à la longueur d'un plus court chemin entre ces deux sommets.

Nous affecterons à chaque sommet un couple de valeurs. La première de ces valeurs est l'étiquette du sommet, c'est un entier positif $+\infty$ qui nous donnera la longueur du chemin menant au sommet d'entrée. La seconde valeur est un marqueur de fin pouvant prendre

[1]Prix remis chaque année pour une contribution technique au domaine informatique. Le nom du prix est en hommage à Alan Turing considéré comme l'un des pères fondateurs de l'informatique.

[2]Deux d'entre eux sont souvent cités par les informaticiens : « Tester un programme démontre la présence de bugs, pas leur absence », « Se demander si un ordinateur peut penser, c'est aussi intéressant que de se demander si un sous-marin peut nager ».

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

les deux valeurs $\times$ ou $\bullet$, selon si le sommet sera, respectivement à nouveau parcouru par l'algorithme ou non.

Le sommet $s_{entrée}$ sera initialisé à $(0, \times)$ (sa distance a lui-même est nulle, il sera parcouru par l'algorithme). Les autres sommets sont initialisés à $(+\infty, \times)$.

L'idée de l'algorithme est de choisir, parmi les sommets non marqués $\bullet$, un sommet x dont l'étiquette est minimale. On regarde tous les voisins de x marqués $\times$). Si leur étiquette est strictement supérieure à la somme de l'étiquette de x avec le poids de l'arête qui les relie à x, alors on modifie leur étiquette. Sinon, on la conserve. Une fois tous les voisins de x marqués $\times$ explorés, on modifie la marque de x : l'étiquette de x correspond à sa distance au sommet $s_{entrée}$, il ne sera plus exploré par l'algorithme.

Nous utiliserons un booléen b dans cet algorithme. La valeur de b va servir à certifier l'existence d'un chemin entre $s_{entrée}$ et s_{sortie}, et à éviter à l'algorithme de « boucler » si ce n'est pas le cas : si le booléen prend la valeur NON, l'algorithme s'arrêtera, et nous saurons qu'il n'existe pas de chemin entre les deux sommets).

Algorithme 1 Algorithme de Dijkstra - Première version

Entrées : G un graphe pondéré par des entiers positifs, S l'ensemble de ses sommets, $s_{entrée}, s_{sortie} \in S$

Sorties : la longueur d'un plus court chemin entre $s_{entrée}$ et s_{sortie}

Initialisation des variables :
$s_{entrée} \leftarrow (0, \times)$
pour tout $s \in S \setminus \{s_{entrée}\}$ **faire**
  $s \leftarrow (+\infty, \times)$
fin pour
$b \leftarrow OUI$

Cœur de l'algorithme :
tant que $marque(s_{sortie}) = \times$ **et** $b = OUI$ **faire**
  si $étiquette(s) = +\infty$ pour tout s tel que $marque(s) = \times$ **alors**
    $b \leftarrow NON$
  sinon
    pour s tel que $marque(s) = \times$ **et** $étiquette(s)$ est minimum **faire**
      $marque(s) \leftarrow \bullet$
    fin pour
    pour tout s' voisin de s tel que $marque(s') = \times$ **faire**
      si $étiquette(s') > étiquette(s) + poids(ss')$ **alors**
        $étiquette(s') \leftarrow étiquette(s) + poids(ss')$
      fin si
    fin pour
  fin si
fin tant que
Retourner $étiquette(s_{sortie})$.

Preuve de l'algorithme

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

On a un graphe G, dont les arêtes sont pondérées par des entiers positifs et dont les sommets portent une étiquette et une marque.

Plaçons-nous en une étape de l'algorithme.

Soit S l'ensemble des sommets de G dont la marque est $\bullet$, et soit $\overline{S}$ son complémentaire, c'est-à-dire l'ensemble des sommets de G dont la marque est $\times$.

Supposons qu'à cette étape, tous les sommets de S sont bien étiquetés, c'est-à-dire que les étiquettes des sommets correspondent à la longueur d'un plus court chemin entre eux et $s_{entrée}$. (C'est le cas à la première étape de l'algorithme où l'étiquette du sommet $s_{entrée}$ est nulle, ce qui correspond à sa distance à lui-même).

Remarquons tout d'abord que, par construction, et à toute étape de l'algorithme, l'étiquette d'un sommet s correspond à la longueur d'un chemin (non nécessairement le plus court) entre s et $s_{entrée}$. Remarquons aussi que l'étiquette d'un sommet $s' \in \overline{S}$ est le minimum, parmi les sommets $s \in S$ voisins de s', de la somme de l'étiquette de s et du poids de l'arête ss' :

$$étiquette(s') = \min_{\substack{s \in S \\ s \in Voisinage(s')}} étiquette(s) + poids(ss')$$

Prenons s un sommet de $\overline{S}$ dont l'étiquette est minimum[1].

Soit l l'étiquette de s. Elle correspond à la longueur d'un chemin C dans G entre les sommets $s_{entrée}$ et s.

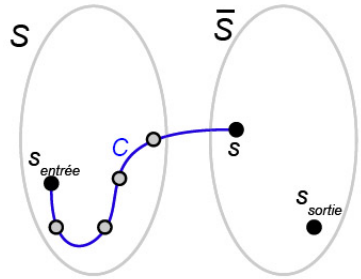


FIG. 4.93: *Un chemin C de longueur l entre $s_{entrée}$ et s.*

Supposons que C ne soit pas un plus court chemin entre $s_{entrée}$ et s. Alors il existe C' un chemin entre $s_{entrée}$ et s de longueur $l' < l$ dans G.

[1]Si tous les sommets de $\overline{S}$ ont $+\infty$ pour étiquette, alors le graphe G n'est pas connexe : il n'existe pas de chemin entre $s_{entrée}$ et s_{sortie}. L'algorithme retournera alors la valeur $+\infty$ montrant cette absence de chemin.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

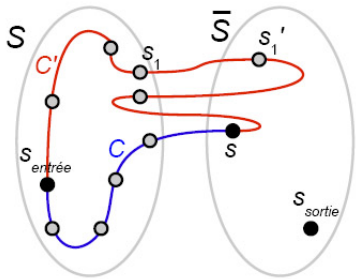


FIG. 4.94: *Un chemin C' de longueur l' entre $s_{entrée}$ et s (avec $l' < l$).*

Remarquons que C' contient nécessairement au moins une arête $s_1 s'_1$ avec $s_1 \in S$ et $s'_1 \in \overline{S}$. En effet, C' a une extrémité dans S, l'autre dans $\overline{S}$.

Étudions l'étiquette de s'_1. Notons C'' le chemin entre $s_{entrée}$ et s'_1 suivant les arêtes de C'. L'étiquette de s'_1 doit nécessairement être inférieure ou égale à la longueur du chemin C'', car

$$étiquette(s'_1) = \min_{\substack{s \in S \\ s \in Voisinage(s'_1)}} étiquette(s) + poids(ss'_1)$$

. De plus, C'' a une longueur inférieure ou égale à la longueur de C' dont il est un « sous-chemin ». Or, par hypothèse $l' < l$. Nous avons donc

$$étiquette(s'_1) \leq longueur(C'') \leq l' < l = étiquette(s)$$

Ceci est contradictoire avec le fait que l'étiquette de s était minimum dans $\overline{S}$. La longueur de C' ne peut être celle d'un plus court chemin entre $s_{entrée}$ et s.

L'étiquette d'un sommet marqué • correspond donc à la distance entre lui-même et le sommet $s_{entrée}$.

4.6.3 Remarques et applications concrètes de l'algorithme

Comme le montre sa preuve, cet algorithme n'est pas aussi simple qu'il peut le paraître. Il a une action locale qui s'avère conserver les plus courts chemins à un niveau global, ce qui peut sembler quelque peu « magique ». L'idée principale de l'algorithme est de créer un ensemble de sommets « marqués » comme ayant une distance la plus courte à un sommet de départ, chaque sommet que l'on marque ayant une étiquette majorant l'ensemble des étiquettes des sommets déjà marqués.

L'application de cet algorithme peut se faire directement sur le graphe en notant à chaque étape la marque du sommet traité, et les étiquettes des sommets qui lui sont adjacents.

Donnons-nous un premier exemple d'application de l'algorithme. Prenons un graphe pondéré.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

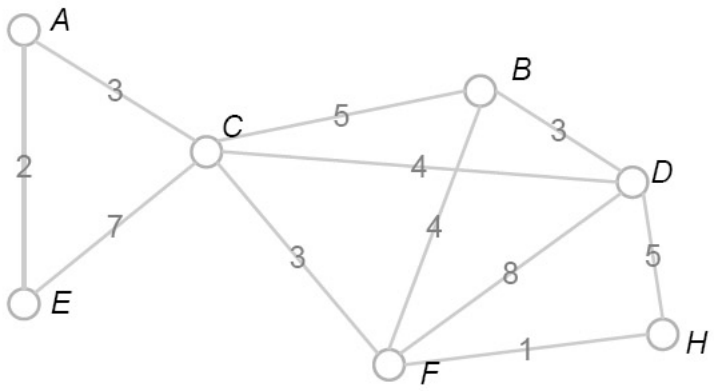


FIG. 4.95: *Un graphe pondéré et non orienté.*

Pour initialiser l'algorithme, nous devons donner une étiquette à chaque sommet du graphe, 0 au sommet de départ, $+\infty$ à chacun des autres sommets. Pour pouvoir suivre cet algorithme nous utiliserons un code de couleurs : le nouveau sommet marqué, les mises à jour d'étiquettes, ainsi que les arêtes parcourues à chaque étape seront indiquées en rouge ; en bleu nous indiquerons les arêtes déjà parcourues ainsi que les sommets marqués aux étapes précédentes. (La coloration des arêtes du graphe est utilisée comme une simple aide de lecture. Nous verrons plus loin que nous pouvons aussi colorer les arêtes du graphe de façon à obtenir sous-graphe particulier). Marquer un sommet • consistera à encadrer son nom et son étiquette. (L'étiquette d'un sommet encadré ne sera plus modifiée).

Le sommet de départ est le sommet D, le sommet de sortie est le sommet E.

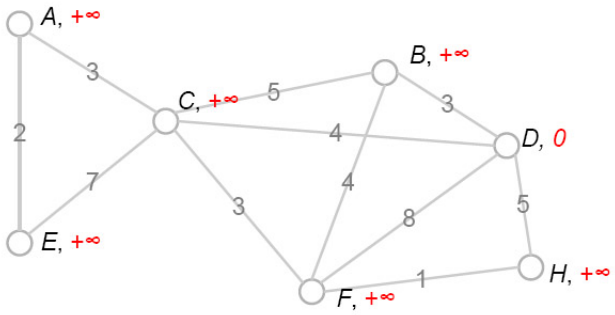


FIG. 4.96: *Initialisation de l'algorithme : le sommet D prend l'étiquette 0, les autres* $+\infty$.

Pour cette première étape, nous allons marquer le sommet D et mettre à jour l'étiquette de ses voisins.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

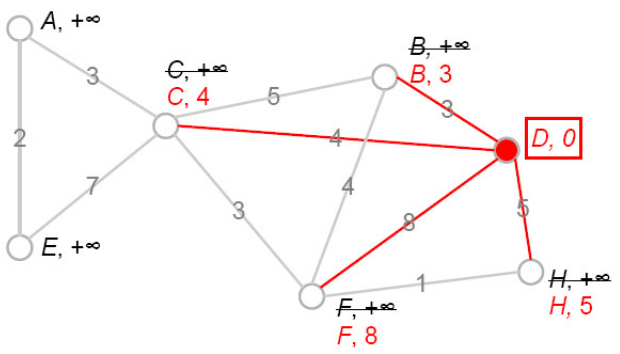


FIG. 4.97: *Le sommet D est marqué, ses voisins parcourus et leurs étiquettes mises à jour.*

On cherche parmi les sommets non marqués (c'est-à-dire tous les sommets du graphe sauf D) un sommet dont l'étiquette est la plus petite. Ici ce sommet est unique, c'est le sommet B. On le marque, et on parcourt ses voisins non marqués.

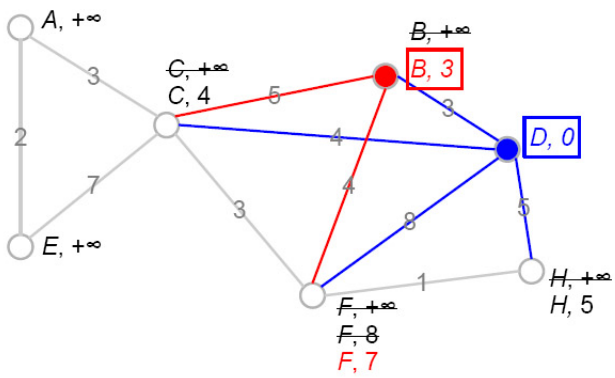


FIG. 4.98: *On marque B et on met à jour l'étiquette de ses voisins non marqués. Seule l'étiquette de F est modifiée.*

On recommence le processus avec un sommet non marqué ayant une plus petite étiquette, C.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

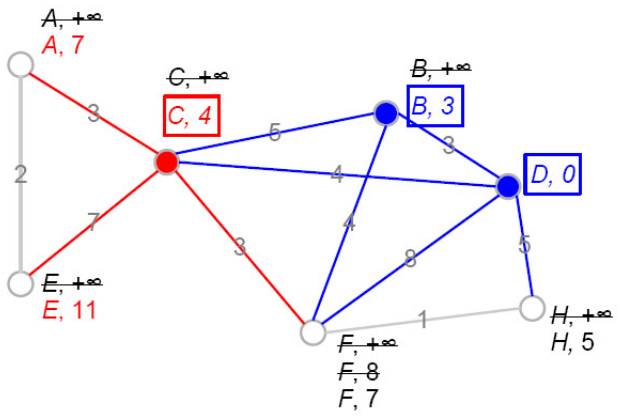


FIG. 4.99: *On marque C et on met à jour l'étiquette de ses voisins non marqués : A et E.*

Le sommet H est le sommet non marqué ayant la plus petite étiquette, on le marque et on étudie son seul voisin non marqué, F.

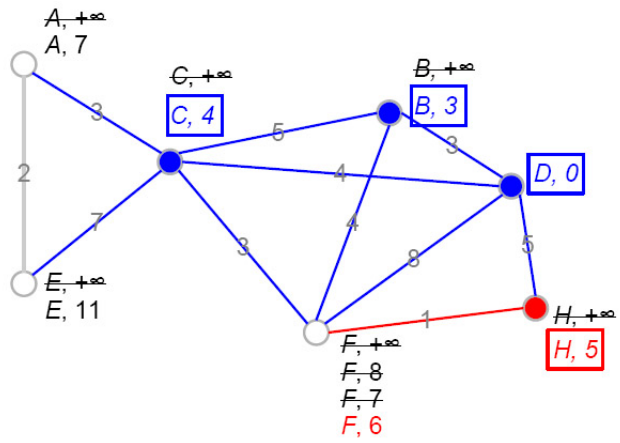


FIG. 4.100: *On marque H et on met à jour l'étiquette de F.*

Parmi les sommets non marqués, F a l'étiquette la plus petite. Il n'a pas de voisins non marqués.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

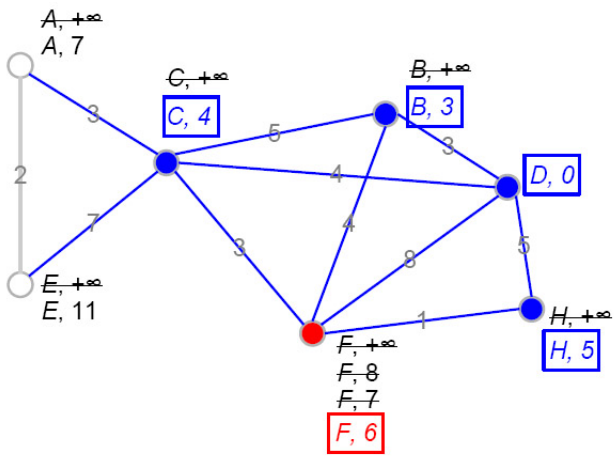


FIG. 4.101: *On marque F, il n'a pas de voisins non marqués.*

Ne restent que les sommets A et E non marqués. On marque A et on met à jour l'étiquette de E, son seul voisin non marqué :

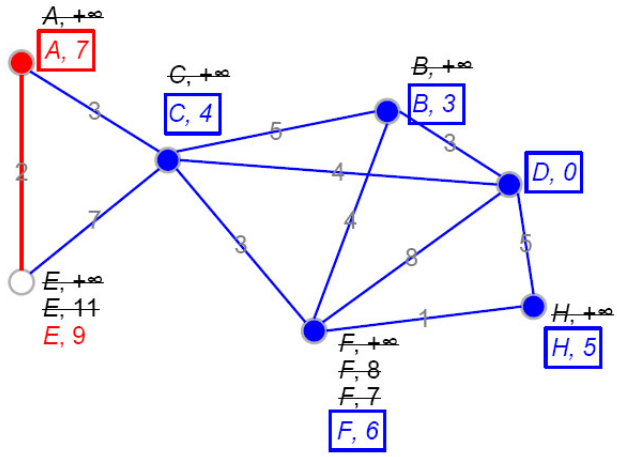


FIG. 4.102: *On marque A, on met à jour l'étiquette de E.*

On marque E, le sommet de sortie. L'algorithme s'arrête.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

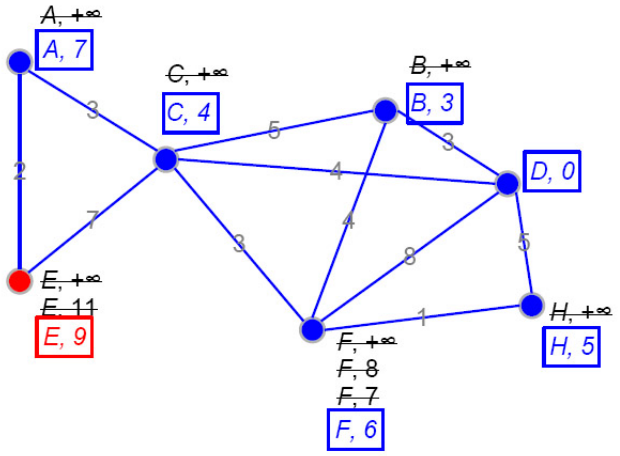


FIG. 4.103: *On marque E, fin de l'algorithme.*

L'algorithme a parcouru l'intégralité des arêtes du graphe, et a marqué tous les sommets. Les étiquettes des sommets correspondent donc chacune à la distance au sommet D. Même si cela arrive souvent dans les exemples que l'on trouve dans les manuels, il n'y a pas de raison de ne choisir de tels exemples qui peuvent fausser l'idée que l'on se fait de l'algorithme : en effet, il n'y a pas de raison particulière pour laquelle les étiquettes correspondront toutes à la distance au sommet d'entrée, ni que toutes les arêtes du graphe soient parcourues, il se pourrait même que certains sommets ne soient pas parcourus (hormis lors de l'initialisation) par l'algorithme tel qu'il a été présenté.

Donnons-nous un autre exemple sur un graphe ayant plus de sommets et plus d'arêtes. Ce graphe est un graphe simple, pondéré, et non connexe.

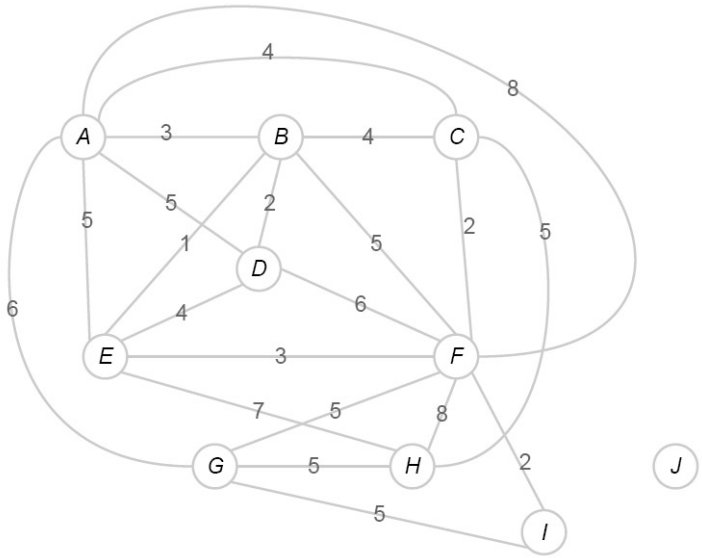


FIG. 4.104: *Un graphe pondéré. Le sommet de départ sera le sommet D, le sommet d'arrivée le sommet H*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

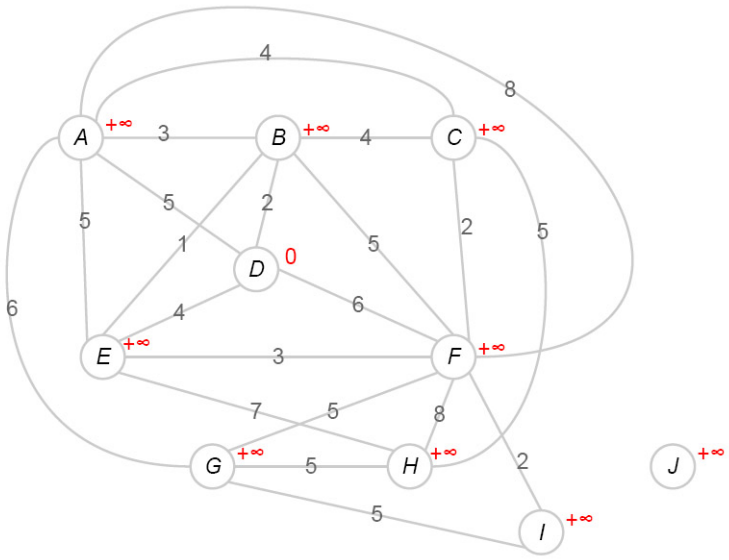


FIG. 4.105: *Initialisation de l'algorithme : le sommet de départ prend l'étiquette 0, les autres l'étiquette* $+\infty$

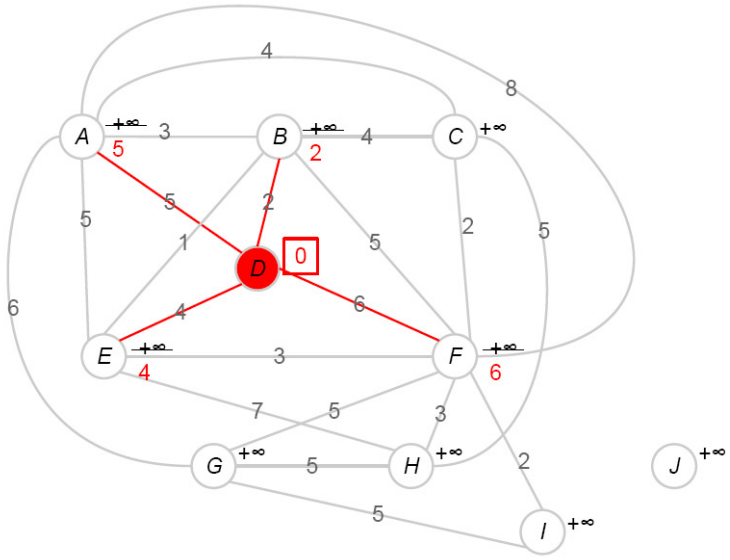


FIG. 4.106: *Première étape. On marque le sommet D, on modifie l'étiquette de ses 4 voisins.*

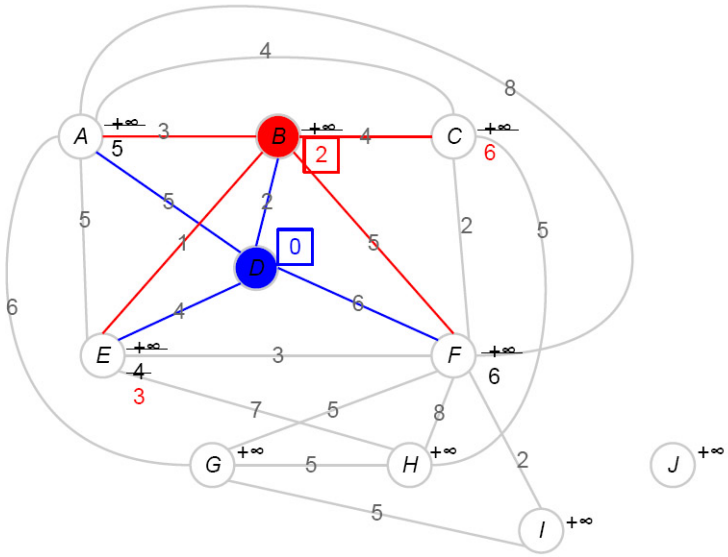


FIG. 4.107: *Deuxième étape. On choisit un sommet non marqué qui a l'étiquette la plus petite, B, on le marque, et on met à jour l'étiquette de ses voisins non marqués.*

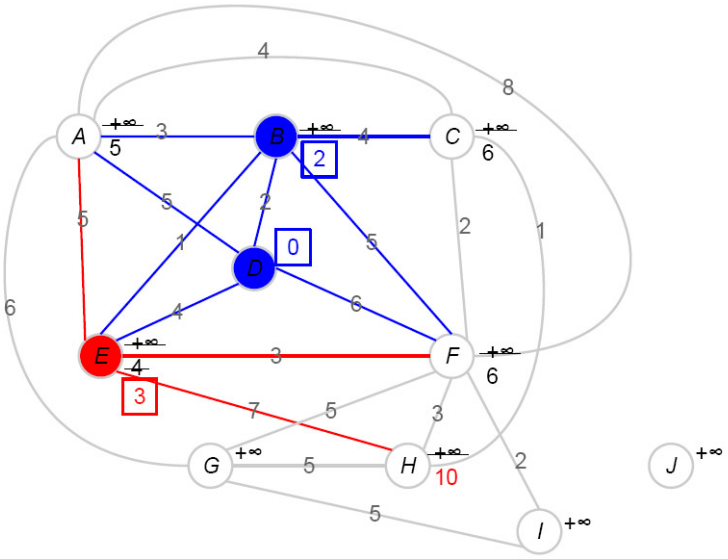


FIG. 4.108: *Troisième étape. On marque E qui a l'étiquette la plus petite, seule l'étiquette de H est modifiée.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

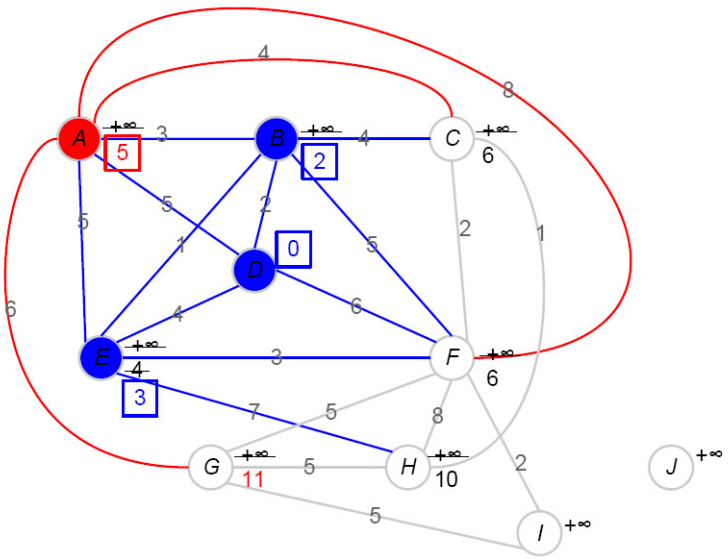


FIG. 4.109: *Quatrième étape. On marque A et on met à jour l'étiquette de ses voisins.*

À cette étape nous avons deux sommets parmi les sommets non marqués ayant la même plus petite étiquette. Nous en choisissons un, quelconque.

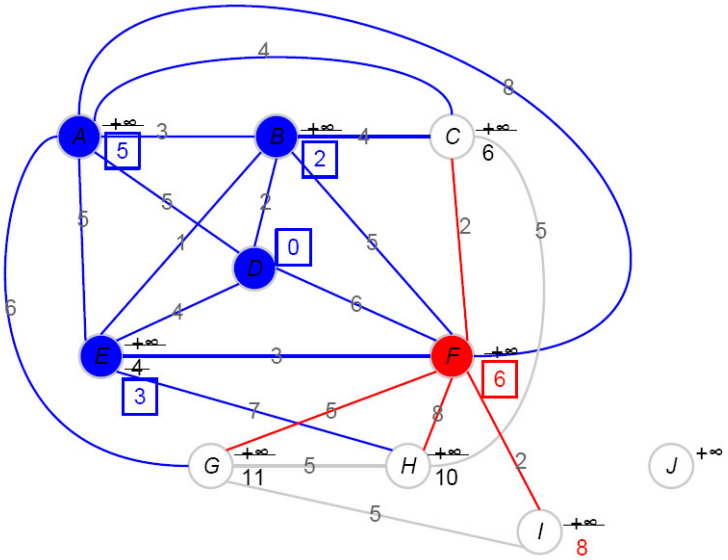


FIG. 4.110: *Cinquième étape. On marque F et on modifie l'étiquette de I.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

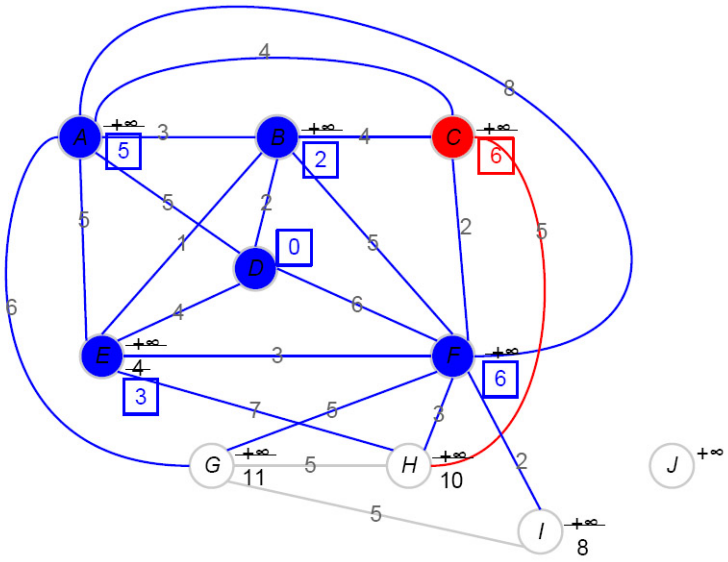


FIG. 4.111: *Sixième étape. On marque C, son seul voisin non marqué est H dont on ne modifie pas l'étiquette.*

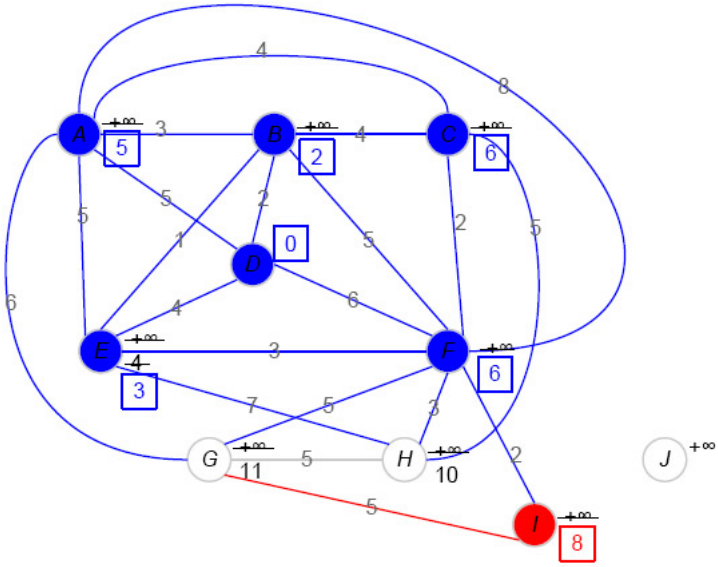


FIG. 4.112: *Septième étape. On marque I, l'étiquette de son seul voisin non marqué G reste inchangée.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

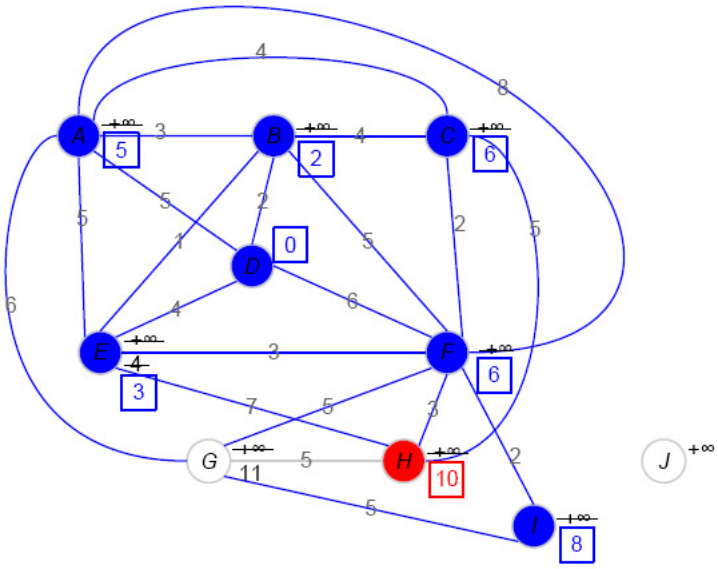


FIG. 4.113: *Dernière étape. On marque le sommet H, l'algorithme s'arrête.*

Nous avons établi qu'un plus court chemin entre D et H était de longueur 10.

Le sommet J n'a pas été visité par l'algorithme (mise à part lors de l'initialisation de son étiquette à $+\infty$), le sommet n'ayant pas de voisins dans le graphe. Mais nous pouvons remarquer que si nous ajoutons une arête de poids positif supérieur ou égal à 4 entre G et J, l'algorithme tel qu'il est écrit n'aurait pas non plus visité le sommet J. En l'état, si l'algorithme retourne $+\infty$ comme étiquette d'un sommet non marqué, nous ne pouvons savoir si le sommet est ou non connexe au reste du graphe.

Nous pouvons faire plusieurs remarques sur cet algorithme.

– Si l'on regarde le premier graphe pondéré (voir la figure 4.95), un plus court chemin se lit sans nécessité d'algorithme[1]. Sur le deuxième graphe pondéré (voir la figure 4.104) un plus court chemin peut encore se trouver à la main, mais cela demande déjà plus d'attention. Pour justifier de l'intérêt de l'utilisation d'un algorithme non trivial à mettre en œuvre, il faudrait un graphe encore plus grand en terme de nombre de sommets et d'arêtes. Mais l'algorithme devient alors long et laborieux à exécuter à la main. Il y a là une vraie difficulté pour trouver des graphes ni trop simples, ni trop difficiles à proposer aux élèves. Une façon pour montrer l'intérêt de l'algorithme est d'illustrer son déroulement grâce à l'ordinateur[2].

[1]Le chemin entre D et E doit passer par C. On cherche donc, à la main, un plus court chemin entre D et C. En étudiant toutes les possibilités, on se rend compte que l'arête DC convient. Puis on étudie les 2 chemins possibles entre C et E. Le chemin CAE est le plus court des deux. Le chemin $DCAE$ est donc le plus court entre D et E, il a pour longueur $4 + 3 + 2 = 9$.

[2]De nombreux sites proposent des « applets » qui permettent de visionner l'algorithme. Citons le site de Christophe Rapine `http://idmme06.inpg.fr/~rapinec/Graphe/` Le graphe est fixé à l'avance, on choisit le sommet de départ. On pourra aussi se référer au site suivant : `http://www-b2.is.tokushima-u.ac.jp/~ikeda/suuri/dijkstra/Dijkstra.shtml` et choisir l'un des 10 graphes exemples. Pour tracer son propre graphe, et voir fonctionner l'agorithme pas-à-pas, on pourra utiliser l'applet programmée par Carla Laffra à l'adresse suivante : `http://www.dgp.toronto.edu/people/JamesStewart/`

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

– L'algorithme tel qu'il est écrit permet de donner la distance entre un sommet et un autre. On peut avoir besoin de connaître la longueur des plus courts chemins d'un sommet à tous les autres. Il suffit pour cela de créer un ensemble, vide au départ, et auquel on ajoute chaque sommet que l'on marque •. Les deux conditions d'arrêt de l'algorithme sont l'identité de cet ensemble à l'ensemble des sommets du graphe, ou le fait que tous les sommets non marqués • aient l'étiquette $+\infty$. Si tous les sommets non marqués ont $+\infty$ pour étiquette, et dans ce cas seulement, le booléen sera à l'état NON, et on pourra affirmer que le graphe n'est pas connexe.

– Cet algorithme peut être adapté pour les graphes orientés. Il suffit de modifier « arête » par « arc », et algorithme et preuve sont absolument identiques.

– Cet algorithme, en l'état, ne donne que la distance entre deux sommets donnés. Il peut être légèrement modifié pour donner un chemin correspondant à cette distance. Pour cela, il suffit d'affecter à chaque sommet un triplet $(\textit{étiquette}, \textit{marque}, \textit{prédécesseur})$. Les deux premières valeurs sont les mêmes que précédemment ; la dernière correspond au nom du sommet d'où l'on vient, et que l'on modifie chaque fois que l'on modifie l'étiquette d'un sommet. On pourra lire le chemin parcouru par l'algorithme en partant d'un sommet final et en remontant la chaîne des prédécesseurs jusqu'au sommet de départ.

Modifions l'algorithme en fonction de ces remarques :

Reprenons le graphe de la figure 4.95, avec pour sommet d'entrée le sommet D. (Nous n'avons plus besoin de sommet de sortie, l'algorithme parcourant l'intégralité de la composante connexe à laquelle appartient le sommet d'entrée).

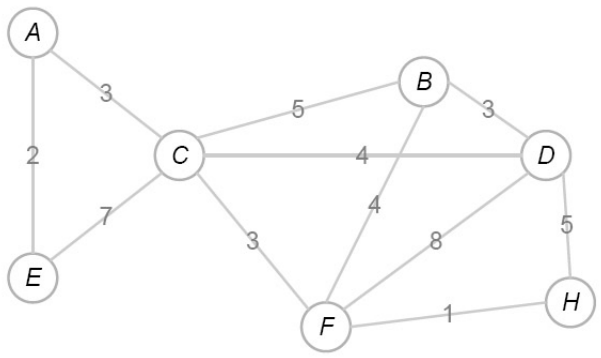


FIG. 4.114: *Un graphe pondéré avec D pour sommet de départ.*

270/9798s/Laffra/DijkstraApplet.html

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Algorithme 2 Algorithme de Dijkstra - Seconde version

Entrées : G un graphe pondéré par des entiers positifs, S l'ensemble de ses sommets, $s_{entrée} \in S$, Σ un ensemble de sommets de G

Sorties : la longueur d'un plus court chemin entre $s_{entrée}$ et tous les autres sommets du graphe

---

Initialisation des variables :
$s_{entrée} \leftarrow (0, \bullet, X)$
pour tout $s \in S \setminus \{s_{entrée}\}$ **faire**
  $s \leftarrow (+\infty, \times, X)$
fin pour
$b \leftarrow OUI$
$\Sigma \leftarrow \{s_{entrée}\}$

Cœur de l'algorithme :
tant que $\Sigma \neq S$ **et** $b = OUI$ **faire**
  si $\acute{e}tiquette(s) = +\infty$ pour tout s tel que $marque(s) = \times$ **alors**
    $b \leftarrow NON$
  sinon
    pour s tel que $marque(s) = \times$ **et** $\acute{e}tiquette(s)$ est minimum **faire**
      $marque(s) \leftarrow \bullet$
      $\Sigma \leftarrow \Sigma \cup \{s\}$
    fin pour
    pour tout s' voisin de s tel que $marque(s') = \times$ **faire**
      si $\acute{e}tiquette(s') > \acute{e}tiquette(s) + poids(ss')$ **alors**
        $\acute{e}tiquette(s') \leftarrow \acute{e}tiquette(s) + poids(ss')$
        $pr\acute{e}d\acute{e}cesseur(s') \leftarrow nom(s)$
      fin si
    fin pour
  fin si
fin tant que

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

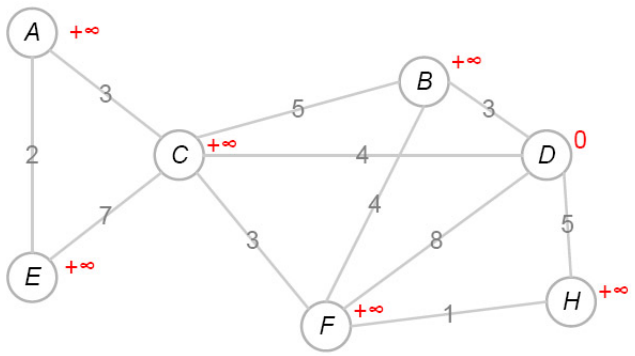


FIG. 4.115: *Initialisation.*

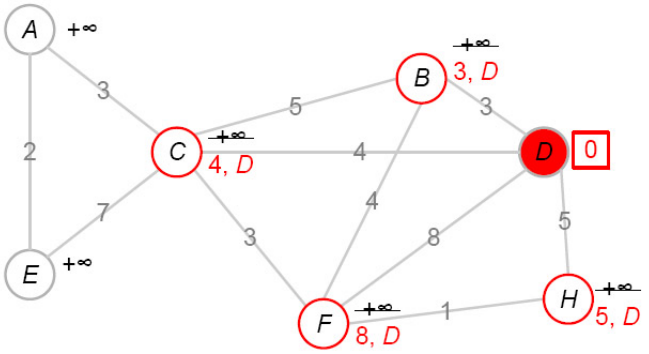


FIG. 4.116: *On marque D, on met à jour l'étiquette de ses 4 voisins, en notant D comme leur sommet prédécesseur.*

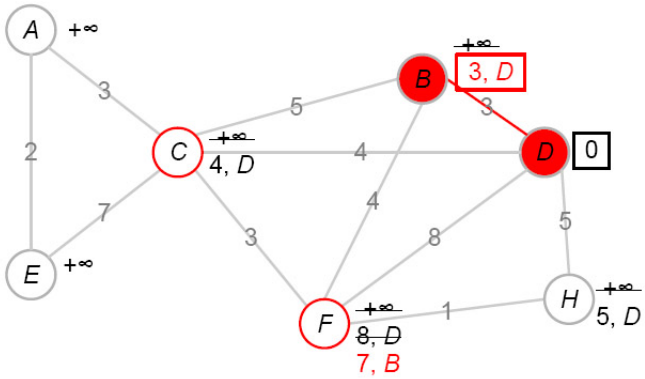


FIG. 4.117: *On marque B, D est le prédecesseur de B, les deux voisins de B, C et F sont mis à jour.*

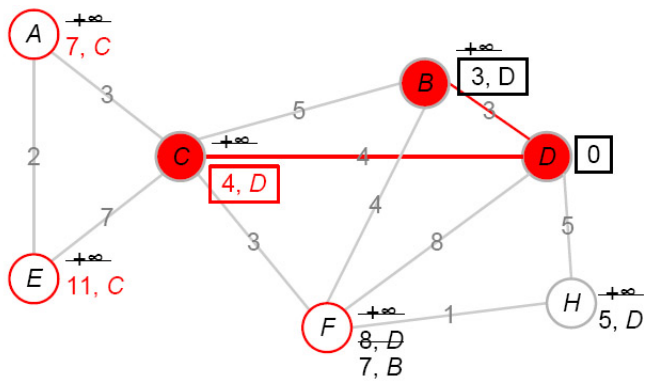


FIG. 4.118: *On marque C, D est le prédecesseur de C, on met à jour A, E et F.*

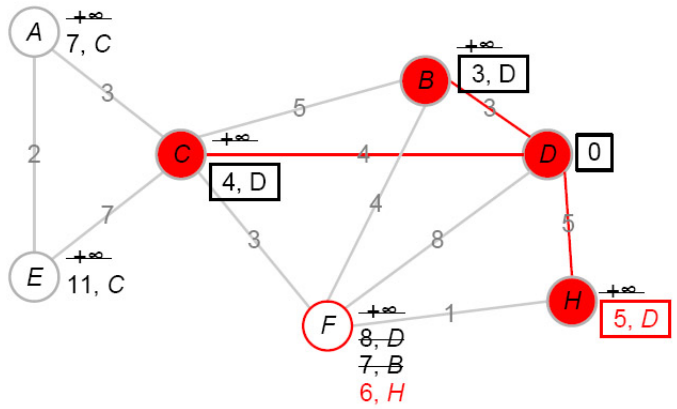


FIG. 4.119: *On marque H, D est le prédecesseur de H, et F est mis à jour.*

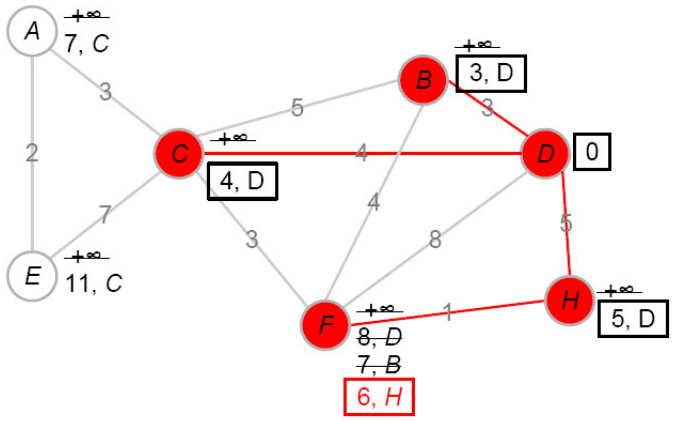


FIG. 4.120: *On marque F, D est le prédecesseur de H.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

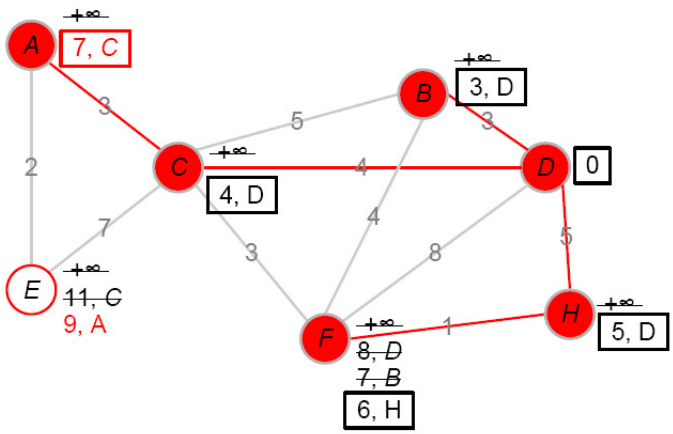


FIG. 4.121: *On marque A, on met à jour E, C est le prédecesseur de A.*

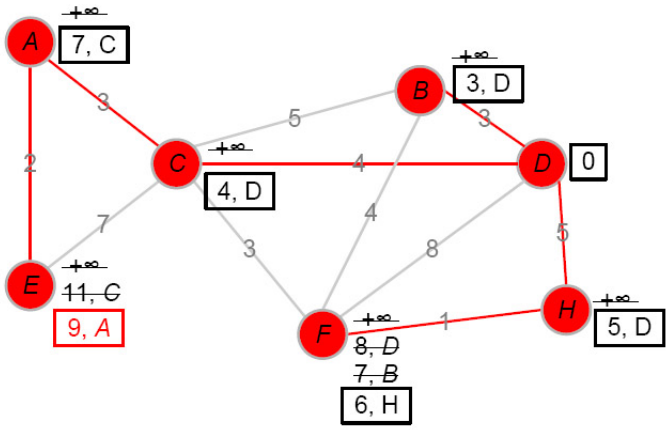


FIG. 4.122: *On marque E, A est le prédecesseur de E.*

À ce moment l'algorithme s'arrête, tous les sommets du graphe étant marqués. Toutes les étiquettes correspondent aux distances au sommet D. Le sous-graphe composé de tous les sommets du graphe et des arêtes rouges est sous-graphe donnant[1] des plus courts chemins entre D et les autres sommets du graphe.

Questions connexes :

▷ Que donne cet algorithme dans le cas d'un graphe dont toutes les arêtes sont de même poids ? (Voir par exemple le graphe de la figure 4.88).

▷ Existe-t-il des cas où cet algorithme fonctionne avec des arêtes de poids négatif ?

[1]Ce sous-graphe est ce que l'on nomme une arborescence : le chemin d'un sommet à un autre dans ce sous-graphe est unique.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

4.6.4 Connaissances mises en jeu dans le problème

Nous considèrerons ici deux niveaux distincts de connaissances mises en jeu dans ce problème : celles intervenant dans la seule application de l'algorithme de Dijkstra et celles nécessaires à la compréhension de la preuve.

Au niveau de l'application de l'algorithme, la première connaissance nécessaire est celle de distance, l'algorithme utilisant le fait que la distance d'un sommet à lui-même est nulle (lors de l'initialisation de l'algorithme) et l'inégalité triangulaire (la distance entre le sommet A et le sommet C est inférieure ou égale à la somme des distances du sommet A au sommet B et du sommet B au sommet C). Cette dernière propriété doit être bien distinguée d'une propriété sur les étiquettes des sommets : la distance entre deux sommets A et B et le poids de l'arête entre A et B (quand cette arête existe) sont, en toute généralité, différents. Si l'on ne fait pas cette distinction, il est malgré tout possible d'appliquer l'algorithme, mais sans pouvoir avoir accès à la compréhension de son fonctionnement. De la même façon une distinction entre étiquette et distance au sommet de départ doit être faite, dans la mesure où l'étiquette d'un sommet dont la marque est $\times$ ne correspond généralement pas à la distance avec le sommet de départ. En particulier, dans la première version de notre algorithme ou avec celui proposé dans le document d'accompagnement des programmes, seules les étiquettes des sommets marqués $\bullet$ (ou marqués définitivement) correspondent à des distances, une fois l'exécution de l'algorithme terminée.

Quelque soit la façon dont l'algorithme est écrit, il contient de façon plus ou moins explicite les structures « si... alors... (sinon...) », « tant que... faire ... » et « pour tout... faire... ». Pouvoir le « faire tourner » implique de comprendre ces structures de boucles et de tests et de comprendre l'affectation d'une valeur à une variable.

Au niveau de la preuve, les connaissances nécessaires à sa compréhension incluent les précédentes. De plus, l'idée d'induction est présente derrière la structure de boucle « tant que... faire... ». Cette boucle amène à créer un ensemble de sommets (l'ensemble des sommets marqués $\bullet$) qui ne contient au départ que le sommet $s_{entrée}$, ensemble qui va compter de plus en plus de sommets jusqu'à contenir le sommet s_{sortie} ce qui détermine l'arrêt de l'algorithme (première version), ou jusqu'à contenir l'ensemble des sommets de la composante connexe à laquelle appartient $s_{entrée}$ (seconde version). Une preuve peut être faite par l'absurde en supposant que l'étiquette d'un sommet particulier ne correspond pas à sa distance au sommet $s_{entrée}$ ce qui conduit à une contradiction. La structure de la preuve n'est pas des plus simples, et les notions qui y sont utilisées comprennent à la fois une idée de connexité, les distinctions vues précédemment entre distance/étiquette et entre poids d'une arête/distance entre deux sommets, l'idée que l'on peut déterminer la longueur d'un plus court chemin entre deux sommets d'un graphe sans parcourir l'ensemble du graphe.

L'ensemble de ces connaissances et leur maîtrise est un pré-requis pour la compréhension de la preuve de l'algorithme de Dijkstra. Appliquer l'algorithme sans ces connaissances peut être envisagé, mais l'intérêt d'un tel apprentissage peut paraître assez faible, dans la mesure où les élèves n'ont pas de contrôle sur la validité de leurs actions.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

4.7 Automates à états finis

Un automate[1] (ou plus précisément ici un automate à états finis) est un graphe orienté dont les arêtes sont étiquetées par des valeurs prises dans un alphabet (par exemple, et nous nous contenterons ici de cet exemple, $\{a, b\}$). Chaque sommet du graphe est qualifié d'**état**. Plusieurs états de l'automate sont distingués : un ou plusieurs **états initiaux** (que nous désignons par une flèche entrante) ainsi qu'un ou plusieurs états **finals**[2] (que nous représentons par deux cercles imbriqués). On s'intéresse alors à l'**ensemble des mots reconnus** par cet automate, c'est-à-dire les mots qui permettent de se déplacer le long des arcs (nommés aussi **transitions**) du graphe d'un état initial à un état final.

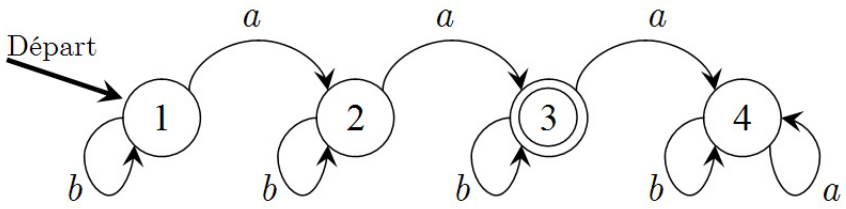


FIG. 4.123: *Cet automate, basé sur l'alphabet $\{a, b\}$ a un état initial, l'état « 1 », et un état final, l'état « 3 ». Il reconnaît les mots formés de « a » et de « b » qui comportent exactement deux « a ».*

Cet automate est un automate dit **déterministe**, c'est-à-dire que de chaque sommet part un et un seul arc étiqueté par chacun des symboles de l'alphabet considéré. Une propriété (non triviale) peut être utilisée lorsqu'un automate non déterministe est construit[3] : tout automate à états finis non déterministe peut être transformé en automate à états finis déterministe.

Cet automate a une autre propriété : le nombre d'états qu'il comporte est minimal, on ne peut construire d'automate (déterministe) comportant moins d'états sans changer la famille de mots reconnus. Sans aller jusqu'à la preuve de la minimalité, cet enjeu est important à préciser pour éviter les constructions triviales[4].

Voici quelques exemples de familles de mots composés de a et de b qui mènent à la construction d'un automate à états finis[5] :
– Mots qui commencent par a et qui se terminent par b ;
– Mots qui contiennent la séquence de lettres aa ;

[1]Les automates sont appelés « graphes étiquetés » dans le programme de spécialité de Terminale ES.

[2]Le pluriel de l'adjectif « final » est bien « finals » sauf en linguistique et en économie où l'on utilise plutôt « finaux » (dictionnaire TLF et encyclopédie Larousse en ligne).

[3]Les automates présentés dans le document d'accompagnement des programmes et les manuels sont tous des automates déterministes à états finis sans que cela apparaisse de façon explicite. Il semble donc attendu des élèves la construction et l'utilisation de tels automates.

[4]Voir point 2.4.3.5 pour de telles constructions.

[5]Les familles de mots présentées ici sont bien choisies (elles correspondent à des expressions dites régulières ou rationnelles), elles peuvent toutes être reconnues par des automates à états finis.

– Mots qui ne contiennent pas deux a à la suite ;
– Mots qui se terminent par la séquence aba ;
– Mots qui commencent par aba ;
– Mots qui contiennent un nombre pair de a ;
– Etc.

Certaines descriptions de familles de mots (toujours sur l'alphabet $\{a, b\}$) peuvent amener à des difficultés particulières qui ne permettent pas de construire un automate déterministe à états finis. Par exemple, quel automate permettrait de reconnaître les mots comprenant autant de a que de b ? Les automates à états finis ne permettent pas de reconnaître de telles familles de mots, il est en effet nécessaire d'ajouter à l'automate un compteur.

Pour qu'un automate reconnaisse tous les mots composés de a et de b dont le mot vide, on peut créer un état initial confondu avec un état final (pour que l'automate reconnaisse le mot vide). Puis, quelque soit la lettre a ou b rencontrée, l'automate, en demeurant dans cet état, reconnaîtra bien tous les mots composés de a et de b :

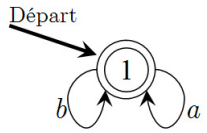


FIG. 4.124: *Un automate déterministe reconnaissant tous les mots composés de a et de b dont le mot vide.*

Cet automate est bien déterministe, il est aussi minimal.

Reprenons maintenant deux exemples de familles de mots vues précédemment, celle des mots commençant par aba et celle terminant par cette même séquence. Comment construire de tels automates ?

Un automate qui reconnaît **les mots commençant par** aba devra en particulier reconnaître la séquence aba. Deux automates simples reconnaissent cette séquence :

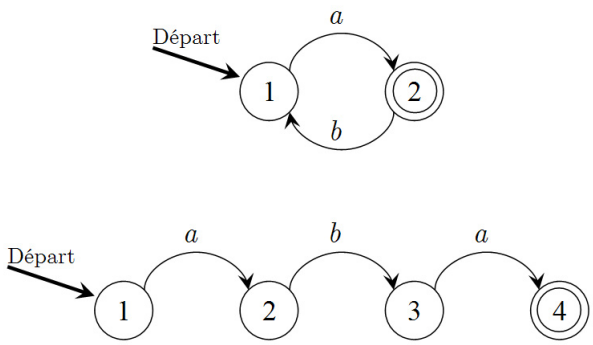


FIG. 4.125: *Un automate reconnaissant les mots commençant par aba doit contenir un automate reconnaissant le mot aba.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Le premier reconnaît bien la séquence *aba*, mais il reconnaît aussi le mot *a* : il ne peut donc pas convenir. Conservons le second. L'automate ainsi construit ne reconnaît que le mot aba. On s'intéresse maintenant aux transitions « manquantes » de cet automate. Dans l'état 1, la lettre *b* doit conduire à un état duquel « on ne peut pas ressortir ». En effet si un mot commence par *b*, alors il ne doit pas permettre d'accéder à un état final. On doit donc ajouter un état à cet automate, état que nous qualifierons d'« **état-puits** ». Par le même raisonnement on « complète » les transitions manquantes des états 2 et 3 qui mènerons à ce même état-puits.

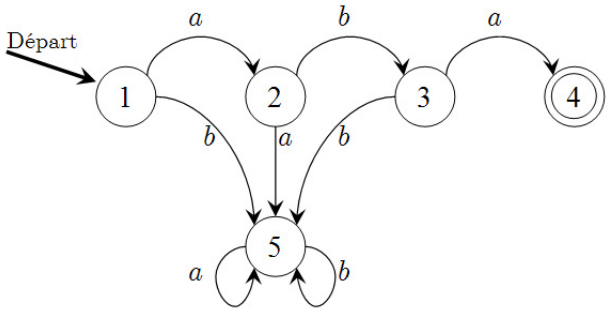


FIG. 4.126: *On ajoute un état à l'automate, l'état 5, qui est un état-puits.*

Restent les transitions sortant de l'état 4. Dans l'état 4, l'automate a reconnu un mot commençant par la séquence *aba* : quelque soit la lettre suivante du mot, ce mot doit être reconnu (l'état 4 est donc lui aussi un état-puits).

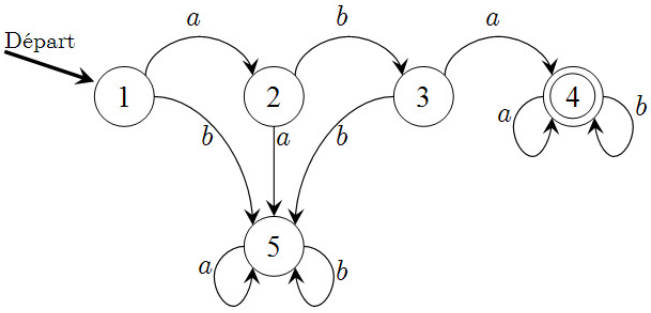


FIG. 4.127: *Une fois la séquence aba reconnue, on reste dans l'état 4 qui est un état final.*

De par sa construction cet automate est déterministe et il reconnaît la famille de mots commençant par *aba*. Resterait à montrer que cinq est le nombre minimum d'états permettant de reconnaître cette famille tout en restant déterministe.

Pour construire un automate reconnaissant **les mots se terminant par la séquence** *aba*, on peut penser cet automate comme un automate reconnaissant tous les mots composés de *a* et de *b*, suivi d'un automate reconnaissant la séquence *aba* :

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

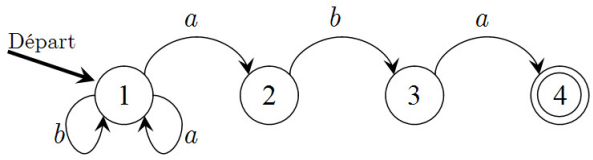


FIG. 4.128: *Un automate reconnaissant les mots se terminant par aba.*

Cet automate n'est pas déterministe, mais il reconnaît bien les mots se terminant par *aba*. Pour se ramener à un automate déterministe, on peut étudier ce qu'il se passe en chaque état à partir de l'état initial. La lettre a mène en 1 ou en 2 ; la lettre b mène en 1. Un « nouvel état » peut maintenant être pris en compte : l'état « 1 ou 2 », que nous nommerons « état 12 ». On étudie les transitions à partir de cet état, et on continue ainsi le processus. Consignons ce que nous obtenons dans un tableau :

Á partir de l'état	Avec un a	Avec un b
1	12	1
12	12	13
13	124	1
124	12	13

On peut maintenant créer un nouvel automate avec quatre états, les états 1, 12, 13 et 124, les transitions entre états étant données dans le tableau précédent. On distinguera deux états : un état initial, c'est-à-dire l'état 1, et un état final, l'état 124 (qui inclut l'état final 4 du premier automate).

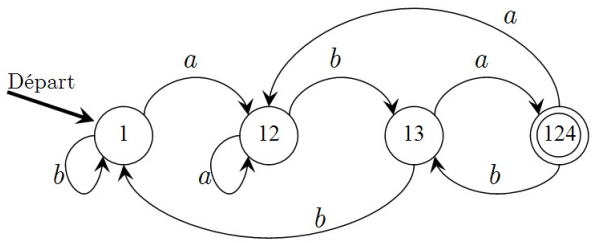


FIG. 4.129: *Un automate déterministe reconnaissant les mots se terminant par aba.*

On vérifie que cet automate est bien déterministe. Cette façon d'obtenir un automate déterministe à partir d'un automate non déterministe se généralise, et c'est par cette généralisation que l'on montre que tout langage décrit par un automate à états finis non déterministe peut être reconnu par un automate à états finis déterministe.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

4.7.1 Connaissances mises en jeu dans le problème

Il est possible de construire des automates (déterministes et à états finis) avec pour seuls pré-requis ceux de graphe orienté et étiqueté, et de sommets distingués (initial, final). Les questions de déterminisme et de minimalisation du nombre d'états peuvent apparaître au cours de telles constructions. En effet, on peut chercher par tâtonnements à construire un automate reconnaissant une telle famille puis chercher à transformer l'automate obtenu, en complétant l'automate de façon à ce que de chaque état sortent autant de transitions que de lettres de l'alphabet, en vérifiant que du même état ne partent pas deux transitions étiquetées par la même lettre. On peut aussi chercher à réduire le nombre d'états en identifiant plusieurs états qui « font la même chose », c'est-à-dire qui reconnaissent le même langage. Ainsi, la construction de l'automate sera basée sur des raisonnements ad hoc[1], liés à une famille donnée de mots.

La construction d'automates prend toute sa dimension pour introduire des notions proches, celles d'expressions régulières et de langages, de machines de Turing ou de grammaires génératives. Isolée dans le reste du programme, la construction d'automates offre peu de perspective aux connaissances qu'elle permet d'établir.

4.8 Nombre de parcours entre les sommets d'un graphe

Les notions qui sont abordées ici ont un statut quelque peu à part dans le programme de Terminale ES. La représentation du graphe est matricielle, et on cherche à déterminer un nombre de **parcours** dans le graphe, un parcours étant un chemin pouvant passer plusieurs fois par le même arc. Par rapport au reste du programme, il nous semble que la résolution de ce problème passe par une technique, non justifiée, et difficilement justifiable auprès d'élèves de Terminale ES. C'est pourquoi nous ne nous étendrons pas sur ce paragraphe.

Nous donnerons l'énoncé du problème général, puis ferons une brève incursion dans le domaine de l'algèbre, avant de montrer le résultat pour un graphe non orienté.

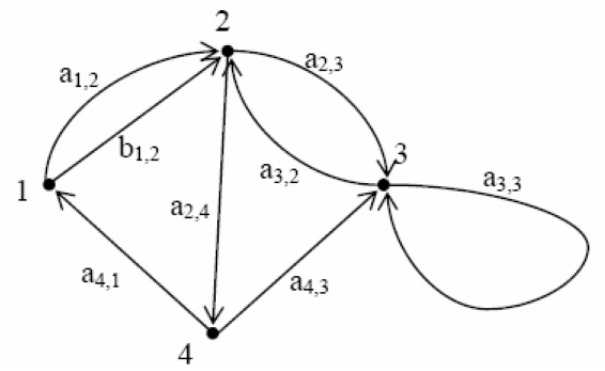
Comment compter le nombre de **parcours** entre les différents couples de sommets d'un multigraphe orienté donné ?

4.8.1 Sur un exemple

Prenons un multigraphe orienté où chaque arc est nommé :

[1] Des règles de construction peuvent être élaborées par les élèves. Par exemple, une « règle de construction » consisterait à remarquer que si l'automate doit reconnaître une famille de mots contenant la séquence de lettres T, il doit en particulier reconnaître T.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009



À ce graphe, nous pouvons faire correspondre sa **matrice d'adjacence** A. Cette matrice est une matrice carrée comportant autant de lignes et de colonnes que le graphe ne compte de sommets, et où l'intersection de la ligne i avec la colonne j est le nombre d'arcs menant du sommet i au sommet j, 0 indiquant l'absence d'arc de i vers j. La matrice d'adjacence[1] du graphe précédent est donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette façon de représenter le graphe de façon matricielle offre l'avantage d'être une structure de données facilement manipulable par un ordinateur. Elle permet aussi de calculer le nombre de parcours de longueur fixée existant entre un sommet et un autre. En effet, la puissance n-ième d'une matrice d'adjacence A donne le nombre de parcours de longueur n dans un graphe, le coefficient c_{ij} de la matrice A^n fournissant le nombre de parcours de longueur n du sommet i vers le sommet j.

Entamons une brève parenthèse algébrique : nous donnons cet aparté car il a semblé éclairer le problème à un certain nombre de professeurs lors des formations auxquelles nous avons participé. Pour constater le mécanisme à l'œuvre dans ce produit matriciel, nous allons créer une nouvelle matrice B comportant le nom des arcs menant du sommet i au sommet j à l'intersection de la ligne i et de la colonne j. Lorsqu'il existe plusieurs arcs du sommet i au sommet j, on les additionne de façon formelle, cette addition correspondant au « *OU* » logique. (Par exemple, entre le sommet 1 et le sommet 2, deux arcs existent : $a_{1,2}$ et $b_{1,2}$, nous les additionnerons donc dans la matrice B).

[1] D'autres matrices peuvent représenter un graphe, préciser que la matrice associée à un graphe est la matrice **d'adjacence** n'est donc pas facultatif. Nous pouvons par exemple définir la matrice d'incidence d'un multigraphe : c'est une matrice comportant autant de lignes que le graphe compte de sommets, et autant de colonnes que d'arcs parallèles. L'intersection de la ligne i avec la colonne j est égale au nombre (respectivement à l'opposé du nombre) d'arcs parallèles j dont i est l'extrémité initiale (respectivement finale).

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} + b_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{2,3} & a_{2,4} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 \\ a_{4,1} & 0 & a_{4,3} & 0 \end{pmatrix}$$

Prenons comme produit « $\cdot$ », un produit non commutatif (ce produit correspond à la concaténation de chaînes de caractères) et prenons la puissance deuxième de B :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{1,2} \cdot a_{2,3} + b_{1,2} \cdot a_{2,3} & a_{1,2} \cdot a_{2,4} + b_{1,2} \cdot a_{2,4} \\ a_{2,4} \cdot a_{4,1} & a_{2,3} \cdot a_{3,2} & a_{2,3} \cdot a_{3,3} + b_{2,4} \cdot a_{4,3} & 0 \\ 0 & a_{3,3} \cdot a_{3,2} & a_{3,2} \cdot a_{3,3} + a_{3,3} \cdot a_{3,3} & a_{3,2} \cdot a_{2,4} \\ 0 & a_{4,1} \cdot a_{1,2} + a_{4,1} \cdot b_{1,2} & a_{4,3} \cdot a_{3,3} & 0 \end{pmatrix}$$

Par construction, cette matrice décrit les parcours de longueur 2 entre deux sommets du graphe, 0 indiquant l'absence de parcours de cette longueur. Par exemple la valeur située à la troisième colonne de la première ligne $a_{1,2} \cdot a_{2,3} + b_{1,2} \cdot a_{2,3}$ indique qu'il existe deux parcours de longueur deux du sommet 1 vers le sommet 2, le parcours $a_{1,2} \cdot a_{2,3}$ et le parcours $b_{1,2} \cdot a_{2,3}$.

L'ordre dans le produit est important pour la description du parcours : $a_{2,4} \cdot a_{4,1}$ et $a_{4,1} \cdot a_{2,4}$ comprennent les mêmes arêtes, mais le second n'est pas un parcours dans le graphe, ce pourquoi nous avons choisi un produit non commutatif.

Le nombre de parcours de longueur fixée entre deux sommets du graphe est le nombre des chaînes de caractères concaténées par le produit que nous avons choisi, alors que la longueur de chaque chaîne de caractères est la longueur du parcours.

4.8.2 Dans un graphe simple non orienté

Si le graphe est simple et non orienté, la matrice d'adjacence du graphe sera une matrice symétrique dont les valeurs seront prises dans $\{0, 1\}$. Montrons par récurrence sur n que chaque coefficient de la puissance n-ième de la matrice donne le nombre de parcours de longueur n dans le graphe.

Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe G à n sommets où chaque coefficient de la matrice est noté a_{ij}, i et j compris entre 1 et n. Le coefficient de de cette matrice donne bien le nombre de parcours de longueur 1 entre i et j.

Supposons maintenant que la matrice A^{n-1} a pour coefficients b_{ij} pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, chaque b_{ij} donnant le nombre de parcours entre i et j de longueur $n - 1$ dans G.

Pour i, j et k entiers fixés entre 1 et n, la valeur de $a_{ik}b_{kj}$ est le produit entre le nombre de parcours de longueur $n - 1$ entre les sommets i et k (par hypothèse) avec le poids de l'arête entre k et j : $a_{ik}b_{kj}$ correspond donc au nombre de parcours de longueur n dans le graphe dont la dernière arête parcourure est l'arête kj. Pour compter le nombre de parcours de longueur n de i vers j nous devons sommer les valeurs de $a_{ik}b_{kj}$ pour k

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

variant de 1 à n, ce qui est la définition même d'un coefficient de la matrice $A \times A^{n-1}$. Le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice $A^{n-1} \times A$, égal à $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, donne donc le nombre de parcours de longueur n entre i et j.

4.8.3 Connaissances mises en jeu dans le problème

Ce problème nécessite la connaissance du produit matriciel. Le produit matriciel fait partie du programme de Première ES, et les élèves sont censés[1] savoir effectuer un calcul matriciel à la main pour des matrices de taille 2, 3 ou 4 au plus, et connaître les fonctionnalités de leur calculatrice leur permettant de faire des opérations sur de « petites » matrices[2]. Pour comprendre les mécanismes permettant d'obtenir un nombre de parcours de longueur donnée dans un graphe, il me semble que la connaissance de la technique du produit matriciel ne suffit pas, cette technique en elle seule n'expliquant rien. La compréhension passe par la compréhension de l'algèbre sous-jacente, ou au moins du produit matriciel « générique »[3], pas d'un résultat fourni par une machine. Enseigner cette technique à des élèves n'ayant pas de connaissance d'algèbre demande soit, de présenter la technique comme une sorte d'introduction au calcul algébrique en détaillant le calcul littéralement, soit, de la présenter comme une sorte d'opération « magique », ce qui n'est pas forcément satisfaisant du point de vue de l'enseignant.

Cette opération matricielle ne fournit pas la longueur des chemins dans le graphe : elle compte le nombre de parcours, pour lesquels un arc ou une arête peut être parcouru plusieurs fois. C'est le seul lieu du programmme de terminale ES où ce type de parcours dans les graphes intervient, ce qui pose la question de l'utilité même d'un tel calcul.

4.9 Coloration de graphes

La coloration des sommets d'un graphe (que nous nommerons coloration de graphe) forme un champ important de la théorie des graphes que les chercheurs continuent d'explorer. Commençons par définir ce terme de **coloration**.

Une **coloration des sommets d'un graphe** est l'attribution d'une couleur à chaque sommet du graphe telle que deux sommets adjacents n'ont pas la même couleur. Si l'on peut colorer un graphe G en k couleurs, G sera dit **graphe k-colorable**.

On peut toujours colorer un graphe (fini) en un nombre fini de couleurs : il suffit pour cela d'utiliser n couleurs, n étant le nombre de sommets du graphe. Notre but va être

[1] Le programme est disponible dans le bulletin officiel numéro 8 du 31 août 2000.

[2] La plupart des machines à disposition des élèves sont limitées à des matrices 8 lignes, 8 colonnes, voire 6 par 6.

[3] Le manuel « Transmath » de 2002 (voir [55] page 326) donne un début de preuve sur un exemple générique de matrice. Il désigne par « c_{12} le terme de A^2 situé sur la première ligne et la deuxième colonne » puis explique comment ce terme correspond à un nombre de parcours de longueur deux. Malheureusement, la preuve s'arrête sans induction.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

de minimiser ce nombre de couleurs. Le nombre minimum de couleurs nécessaire à la coloration d'un graphe G est nommé **nombre chromatique** de G, que l'on désigne habituellement par $\chi(G)$ (ou chi de G).

Remarquons qu'une coloration définit une partition de l'ensemble des sommets d'un graphe G en stables[1]. Une **coloration optimale** est une coloration des sommets de G en $\chi(G)$ couleurs, c'est donc une partition des sommets de G en $\chi(G)$ stables.

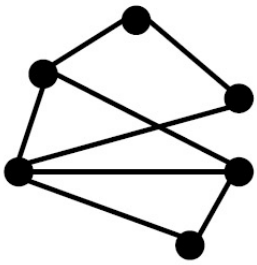
Nous verrons dans cette section un algorithme général donnant une coloration (pas nécessairement optimale) et son application à des graphes particuliers.

4.9.1 Algorithme glouton et encadrement du nombre chromatique

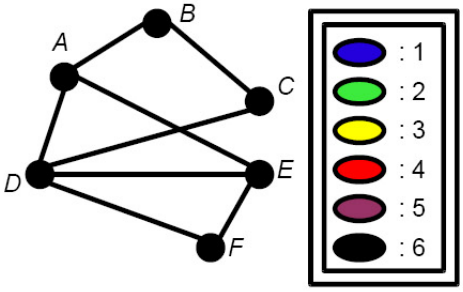
Prenons G un graphe, une liste ordonnée de ses n sommets, et un ensemble de n couleurs. Numérotons ces couleurs de 1 à n.

Un **algorithme glouton de coloration** va consister à colorer un par un les sommets du graphe dans l'ordre de la liste, en attribuant à chaque sommet la plus petite couleur non donnée à ses voisins.

Donnons-nous un exemple simple d'application de cet algorithme. Prenons un graphe G.



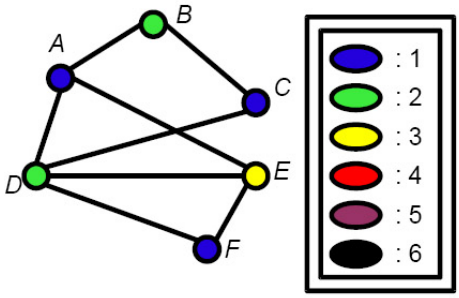
Considérons la liste ordonnée de ses sommets $ABCDEF$ et une palette de 6 couleurs.



[1]En effet, par définition, l'ensemble des sommets coloriés avec la même couleur ne contient aucune arête, c'est un sous-graphe induit stable. Comme tout sommet est coloré, une coloration définit une partition de l'ensemble des sommets de G.

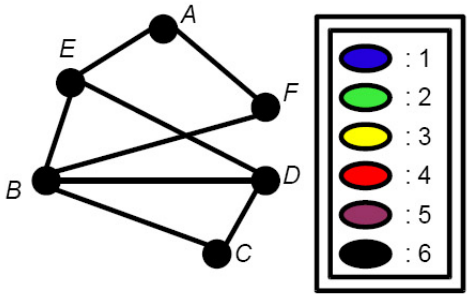
tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

On colore maintenant les sommets, dans l'ordre $ABCDEF$, en choisissant à chaque étape la plus petite des couleurs disponibles. On obtient alors cette coloration :

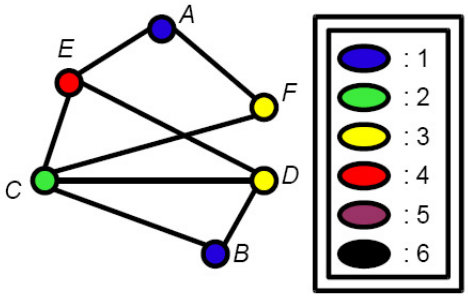


Une première question peut venir à l'esprit. Cette coloration est-elle optimale ? Ici, nous pouvons affirmer que oui : ce graphe contient une **clique** de taille 3 (par exemple ADE). Or, la coloration du graphe complet à n sommets nécessite n couleurs, tous les sommets d'un graphe complet étant adjacents deux à deux. Par conséquent, **la coloration de tout graphe contenant une clique de taille k nécessitera au moins k couleurs**. Ici, nous avons donc besoin de 3 couleurs au moins. L'ordre que nous avons choisi nous a fourni une coloration en 3 couleurs, elle est donc optimale. Autrement dit, le nombre chromatique du graphe précédent est 3.

Un ordre quelconque nous aurait-il toujours donné une coloration optimale ? Donnons-nous un autre ordre sur les sommets :



L'algorithme glouton appliqué à cet ordre va nous donner cette coloration :



tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Cette coloration n'est pas optimale, elle utilise 4 couleurs. L'ordre des sommets est donc important.

Une autre question peut suivre. Existe-t-il toujours un ordre des sommets nous permettant d'obtenir, grâce à l'algorithme glouton, une coloration optimale ? Montrons que c'est effectivement le cas. Soit G un graphe coloré en $\chi(G)$ couleurs. Sa coloration est une partition en $\chi(G)$ sous-graphes induits stables. Ordonnons les sommets de G en commençant par les sommets du premier stable, puis ceux du deuxième, et ainsi de suite jusqu'à ceux du dernier. L'algorithme glouton appliqué à cet ordre nous donnera une coloration, en colorant tous les sommets du premier stable avec la couleur 1, ceux du deuxième avec la couleur 2, ..., le dernier avec la χ-ième couleur. Nous avons donc, grâce à l'algorithme glouton, une coloration en χ couleurs, qui est donc optimale.

Montrons que cet algorithme utilise au plus $\Delta(G) + 1$ couleurs. Supposons que nous ayons un graphe, avec une liste ordonnée de ses sommets, et une palette de $\Delta(G) + 1$ couleurs, où $\Delta(G)$ (delta de G) est le plus haut degré du graphe. À une certaine étape de l'algorithme, nous allons colorer un sommet s. Ce sommet est au plus de degré $\Delta(G)$. Au pire, ses $\Delta(G)$ voisins sont déjà colorés avec des couleurs toutes différentes, il reste donc toujours au moins une couleur disponible pour le sommet s parmi les $\Delta(G) + 1$ couleurs. L'algorithme fournissant une coloration, le nombre chromatique est borné par ce nombre : $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ (Notre palette de couleurs pourra donc toujours se limiter à $\Delta(G) + 1$ couleurs).

Si $\omega(G)$ (omega de G) est la taille de la plus grande clique de G, et $\Delta(G)$ son plus haut degré, on a donc l'encadrement suivant du nombre chromatique :

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

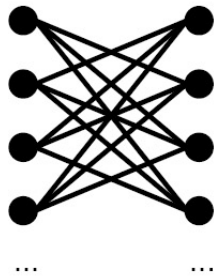
Un ordre classique, souvent utilisé pour l'algorithme glouton, est l'ordre décroissant sur le degré des sommets. Intuitivement, on peut en effet penser qu'il vaut mieux commencer pas colorer les sommets de forts degrés, les autres nous offrant plus de choix de couleurs. L'algorithme glouton, muni d'un tel ordre, est appelé l'algorithme de Welsh et Powell[1]. Les manuels scolaires contiennent de nombreux exemples d'application de cet algorithme aboutissant à une coloration optimale. Or, la seule garantie fournie par cet algorithme est de trouver une coloration en, au plus, $\Delta + 1$ couleurs. Donnons-nous quelques exemples montrant que l'ordre de Welsh et Powell peut être aussi « mauvais »[2] que l'on veut.

Prenons le **graphe biparti** ci-dessous, un graphe biparti étant un graphe dont les sommets peuvent être partitionnés en deux sous-graphes induits stables. (Un graphe biparti a donc un nombre chromatique inférieur ou égal à 2).

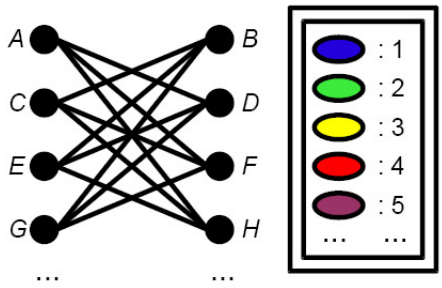
[1] L'algorithme glouton fait partie du programme d'option mathématique de la Terminale ES. Dans les manuels que nous avons étudié, c'est de fait l'algorithme de Welsh et Powell qui est présenté.

[2] Nous montrerons ici que l'algorithme de Welsh et Powell peut colorer un graphe biparti en autant de couleurs que l'on veut en faisant varier son nombre de sommets.

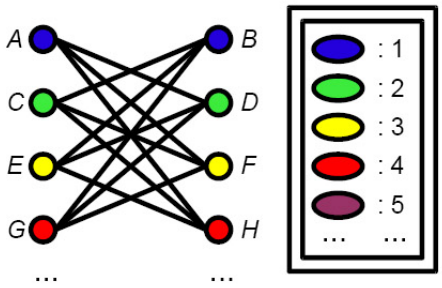
tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009



On initialise maintenant l'algorithme de Welsh et Powell. On prend une palette suffisante de couleurs. Les sommets étant tous de même degré, tout ordre est décroissant sur le degré des sommets, on peut donc par exemple choisir un ordre de gauche à droite et de haut en bas :



On applique maintenant l'algorithme :



Le graphe à $2n$ sommets que nous avons choisi est coloré en n couleurs par l'algorithme, sachant qu'il peut être coloré en 2 couleurs.

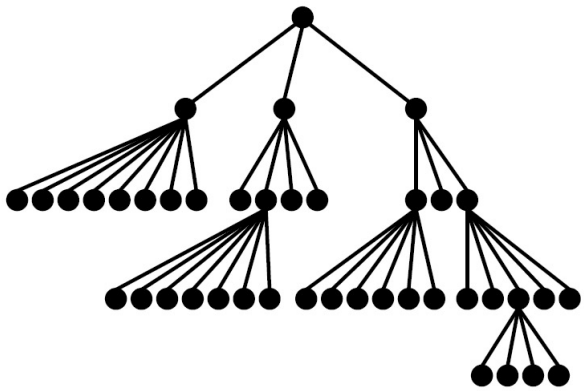
Par cet algorithme, le nombre de couleurs utilisées peut être donc aussi loin que l'on le souhaite de $\chi(G)$. Choisissons maintenant un cas mettant en défaut l'algorithme de Welsh et Powell, alors que l'ordre des sommets de degré décroissant est unique.

Prenons un **arbre**. Un arbre peut être défini comme un graphe simple connexe et sans cycle[1].

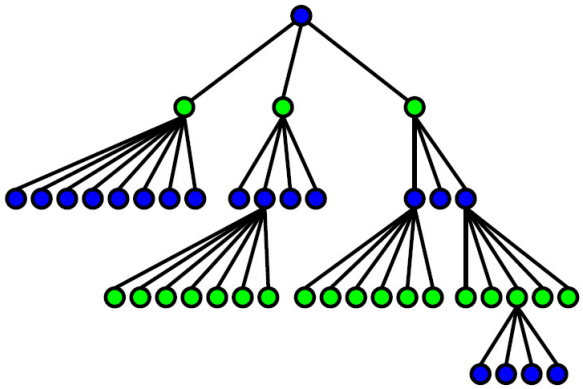
[1]Il existe d'autres définitions équivalentes de cette sorte de graphe, et un travail autour de la définition

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

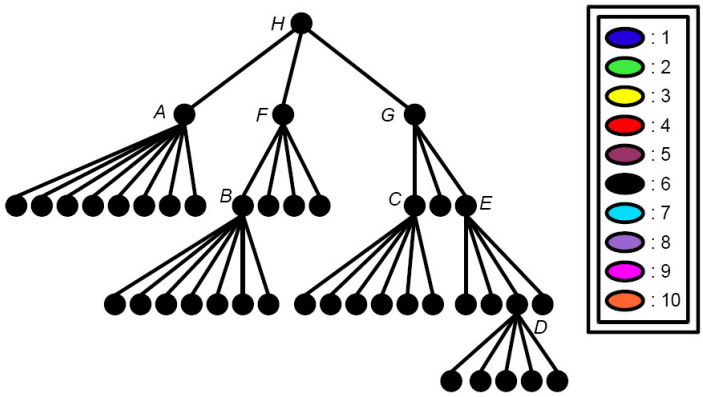


L'une des propriétés des arbres est qu'ils peuvent toujours être représentés de cette façon (c'est-à-dire avec un sommet « racine » puis « couche par couche »). Cette représentation fait apparaître une propriété qui nous intéresse mais que nous ne montrerons pas ici : un arbre a pour nombre chromatique 2. Voici une coloration optimale de cet arbre :

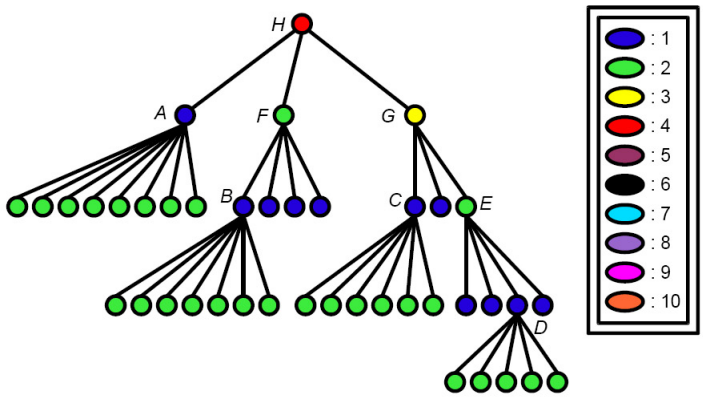


Appliquons maintenant l'algorithme de Welsh et Powell sur ce graphe. Le plus haut degré des sommets du graphe est 9, nous savons donc d'après l'inégalité $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ que l'algorithme utilisera 10 couleurs au plus. Listons les sommets du graphe par ordre de degré décroissant de A à H dans l'ordre alphabétique. Nous indiquons ici l'ordre de tous les sommets de degré différent de 1, pour éviter les lourdeurs de lecture du dessin. Les sommets de degré 1 seront traités les derniers, et le lecteur pourra vérifier que l'ordre dans lequel ils seront choisis ne change pas la coloration que nous obtiendrons.

peut être entrepris avec les élèves. Une expérimentation particulièrement intéressante sur ce sujet peut être lue dans la thèse de Cécile Ouvrier-Buffet [43].



L'application de l'algorithme nous donne cette coloration :



Nous obtenons une coloration en 4 couleurs pour un graphe dont le nombre chromatique est 2.

Nous pourrions multiplier les exemples mettant en défaut l'algorithme de Welsh et Powell, mais le but est surtout de montrer qu'étant donné que nous ne connaissons pas un ordre des sommets permettant de certifier une coloration optimale avec un algorithme glouton pour tous les graphes, nous trouverons toujours des graphes permettant de mettre en défaut l'ordre que nous aurons choisi. Nous ne connaissons que des ordres de sommets permettant d'obtenir une coloration optimale sur des classes de graphes particuliers.

Donnons-nous un autre ordre sur les sommets permettant de colorer les arbres (ou les graphes composé d'un ensemble d'arbres) de façon optimale.

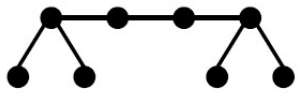
En fait, cet ordre permet d'obtenir une coloration en $k+1$ couleurs pour une classe de graphes englobant celle des arbres : les graphes k-dégénérés. Un graphe est dit **k-dégénéré** si tout sous-graphe induit contient un sommet de degré inférieur ou égal à k. Les arbres, qui contiennent toujours un sommet de degré inférieur ou égal à 1, sont des graphes 1-dégénérés. L'ordre que nous proposons assure une 2-coloration, c'est-à-dire une coloration optimale pour un arbre comportant au moins une arête.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

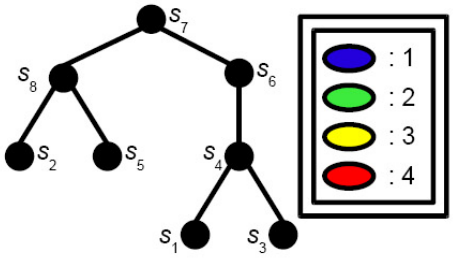
Prenons un graphe G à n sommets. Choisissons un sommet de plus petit degré que nous nommerons s_1. Prenons maintenant le sous-graphe induit par l'ensemble des sommets de G privé de s_1 et nommons alors s_2 un sommet de plus petit degré. Continuons ainsi à considérer le sommet de plus petit degré dans le sous-graphe induit constitué des sommets de G privé des sommets déjà nommés, jusqu'à nommer le dernier sommet s_n. Considérons maintenant l'ordre des sommets suivant : $s_n, s_{(n-1)}, \ldots, s_2, s_1$.

Remarquons que cet ordre n'est pas (en toute généralité) l'ordre de degré décroissant. On peut vérifier qu'il permet de colorer de façon optimale les deux précédents graphes.

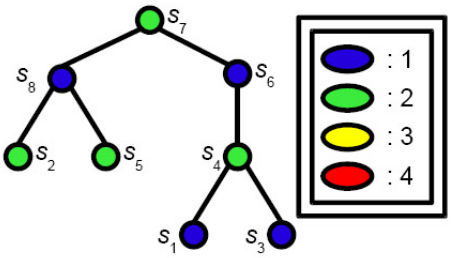
Donnons-nous un autre graphe.



Ce graphe est un arbre : il est connexe et sans cycle. Nous pouvons le redessiner pour faire apparaître sa structure « couche par couche ». Établissons maintenant un ordre sur ses sommets, et prenons une palette de 4 couleurs (son sommet de plus haut degré étant 3, l'algorithme n'utilisera pas plus de $3 + 1$ couleurs).



Nous obtenons une coloration optimale en colorant les sommets dans l'ordre inverse de leur numérotation :



Montrons que cet ordre utilise $k + 1$ couleurs pour les graphes k-dégénérés. Soit G un graphe k-dégénéré à n sommets, et $(s_n, s_{n-1}, \ldots, s_i, \ldots, s_2, s_1)$, une liste ordonnée de ses

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

sommets dans l'ordre présenté ci-dessus. Supposons que nous ayons coloré les sommets $(s_n, s_{n-1}, \ldots, s_{i+1})$ avec $i \leq n$. Le sommet s_i que nous avons maintenant à colorer est de degré inférieur ou égal à k dans le sous-graphe induit de G par les sommets déjà colorés, étant donné qu'il est, par construction, le sommet de plus petit degré de ce sous-graphe induit. Il reste donc au moins une couleur disponible parmi les $k+1$ couleurs à notre disposition pour colorer le sommet s_i. Cet ordre associé à l'algorithme glouton nous fournit donc une coloration en au plus $k+1$ couleurs.

4.9.2 Chaînes et cycles

Rappelons qu'une **chaîne** à n sommets est un graphe simple tel que l'on peut numéroter les sommets de s_1 à s_n, et que pour tout $i < n$, $s_i s_{i+1}$ est une arête du graphe.

Une chaîne à n sommets est 2-colorable, en effet, les sommets s_i, tel que $i \leq n$ est impair (respectivement pair) forment un stable. (Les chaînes appartiennent à la famille des arbres, elles sont en effet par définition connexes et sans cycle).

FIG. 4.130: *Une chaîne colorée de façon optimale.*

Qu'en est-il de la coloration des cycles ? Nous avons déjà aperçu un cycle permettant d'affirmer qu'ils ne sont pas 2-colorables en toute généralité. Le graphe complet à 3 sommets, K_3, qui est identique au cycle C_3, est en effet 3-colorable. En fait, les cycles se partagent en deux familles pour la coloration : les cycles ayant un nombre pair de sommets sont 2-colorables, les cycles ayant un nombre impair de sommets sont 3-colorables. Nous les nommerons respectivement cycles pairs et cycles impairs.

Soit C_n un cycle composé des sommets $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n$ ayant pour arêtes $s_i s_{i+1}$ pour tout $i < n$ et $s_n s_1$.

Les sommets s_i pour $i \leq n$ pair ne sont reliés entre eux par aucune arête. Ils forment donc un stable que nous nommerons S_{pair}.

Les sommets s_i pour $i < n$ impair ne sont reliés entre eux par aucune arête. Ils forment donc eux aussi un stable que nous nommerons S_{impair}.

Reste à traiter le sommet s_n si n est impair. Dans ce cas s_n est relié au sommet $s_{n-1} \in S_{pair}$ et au sommet $s_1 \in S_{impair}$.

Ainsi, si n est pair, nous pouvons partitionner l'ensemble de ses sommets en deux sous-graphes induits stables, S_{pair} et S_{impair}. Les cycles pairs sont donc 2-colorables. Si n est impair, nous ne pouvons pas partionner l'ensemble des sommets de C_n en moins de trois ensembles stables. Or, les trois sous-graphes induits S_{pair}, S_{impair} et $\{s_n\}$ forment une partition de l'ensemble des sommets de S_n en trois stables. Les cycles impairs sont donc 3-colorables.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

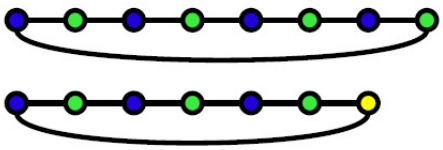


FIG. 4.131: *Deux cycles colorés de façon optimale, un cycle pair puis un cycle impair.*

Un graphe comportant un cycle impair comme sous-graphe a donc un nombre chromatique supérieur ou égal à trois.

4.9.3 Coloration de graphes planaires

La coloration des graphes planaires a donné à la théorie des graphes l'une de ses conjectures restée le plus longtemps irrésolue, et son résultat parmi les plus connus : le théorème des quatre couleurs. Simple à énoncer : « le nombre chromatique d'un graphe planaire est inférieur ou égal à quatre », sa preuve en 1976 a nécessité l'utilisation d'un programme informatique testant près de 1500 configurations de graphes. Cette preuve a été largement controversée, surtout parce qu'il était difficile aux mathématiciens de vérifier la validité du programme informatique lui-même. Depuis, des améliorations ont été apportées à la preuve et aux tests informatiques, mais des mathématiciens cherchent toujours une preuve non informatisée. Erdős, par exemple, pensait qu'il devait exister une preuve simple de ce théorème.

Nous ne montrerons évidemment pas ce théorème ici, et nous contenterons d'un théorème des six couleurs.

Prenons G, un graphe simple, planaire et connexe, et montrons par l'absurde que G a toujours un sommet de degré inférieur ou égal à 5. Autrement dit, nous allons montrer que G est 5-dégénéré.

Supposons que tous les sommets de G soient de degré supérieur ou égal à 6.

Comme nous l'avons vu précédemment au paragraphe 4.5.4, si F est le nombre de faces de G, A son nombre d'arêtes et S son nombre de sommets, la formule d'Euler nous donne : $F - A + S = 2$.

Étant donné qu'une arête sépare au plus deux faces, et que chaque face est délimitée par 3 arêtes au moins, on a nécessairement :

$$2A \geq 3F$$
$$\text{ce qui équivaut à } F \leq \frac{2A}{3}$$

De plus, une arête étant incidente à deux sommets et chaque sommet étant de degré supérieur ou égal à 6, on a :

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

$$6S \leq 2A$$
$$\text{ce qui équivaut à } S \leq \frac{A}{3}$$

Nous obtenons l'inégalité suivante :

$$F - A + S \leq \frac{2A}{3} - A + \frac{A}{3} = 0$$
$$F - A + S \leq 0$$

Cette inégalité contredit la formule d'Euler. Un graphe planaire est donc 5-dégénéré.

Comme nous l'avons montré précédemment, un graphe k-dégénéré a un nombre chromatique inférieur ou égal à $k + 1$.

Six couleurs suffisent donc à colorer un graphe planaire.

Coloration de cartes géographiques

Le théorème des quatre couleurs est souvent énoncé en terme de coloration de carte géographique : « une carte géographique délimitant des régions sans enclave peut être colorée par quatre couleurs ». On peut en effet modéliser une carte géographique en plaçant un sommet par capitale régionale, et une arête lorsqu'il existe une frontière non réduite à un point entre deux régions. La coloration des régions de la carte correspond bien à la coloration des sommets du graphe ainsi obtenu.

Donnons-nous un exemple. Prenons la carte des régions de la France métropolitaine :

FIG. 4.132: *La carte de la France métropolitaine.*

Modélisons cette carte par un graphe : chaque région est un sommet du graphe, chaque frontière non réduite à un point entre ces régions est une arête.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

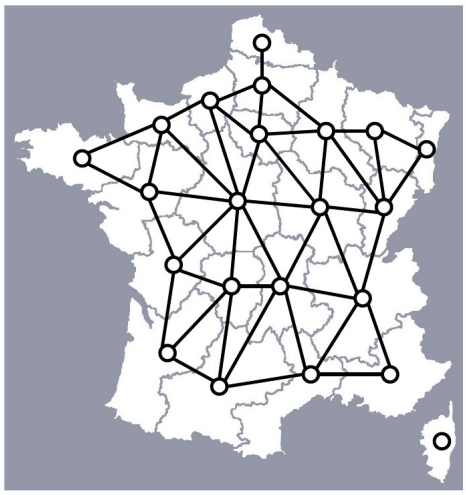


FIG. 4.133: *La carte de France métropolitaine, et un graphe la représentant.*

Colorons maintenant le graphe. Ce graphe étant planaire, quatre couleurs suffiront à le colorer. Tentons de trouver une coloration en quatre couleurs « à la main ».

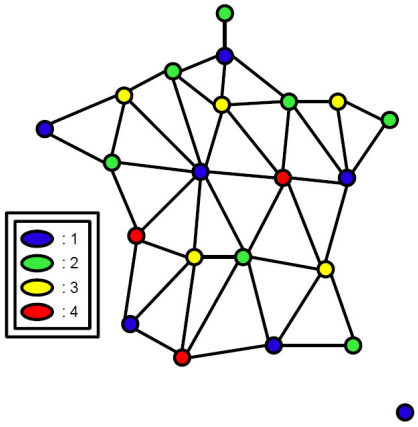


FIG. 4.134: *Une coloration en quatre couleurs du graphe planaire associée à la carte de France.*

Nous pouvons utiliser cette coloration sur la carte de France. Deux régions ayant un morceau de frontière commune auront des couleurs différentes.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

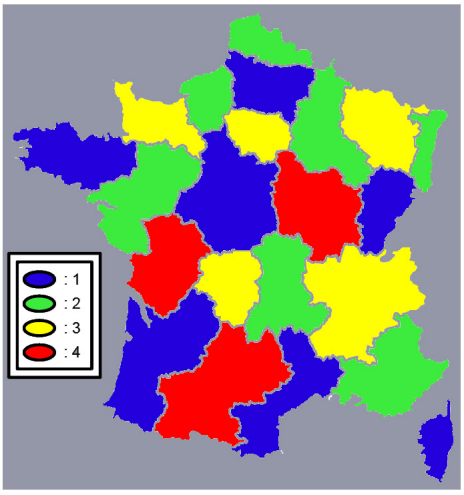


FIG. 4.135: *La coloration correspondante de la carte de France.*

4.9.4 Un problème d'emploi du temps

On dispose d'un certain nombre de plages horaires, que l'on doit affecter à des salles.

Quel est le nombre minimal de salles nécessaires à cet emploi du temps ?
Proposer une organisation correspondant à ce nombre.

Commençons par classer les intervalles dans l'ordre croissant de leur horaire de début. (Cet ordre est pour notre exemple l'ordre de haut en bas). Modélisons maintenant la situation par un graphe : chaque intervalle est représenté par un sommet ; deux sommets sont adjacents dans le graphe lorsqu'il existe une intersection non réduite à un point entre les intervalles. Si l'on colore le graphe obtenu, deux sommets adjacents auront des couleurs différentes. Si l'on considère que chaque salle est modélisée par une couleur, cela signifie que deux intervalles ayant une intersection non réduite à un point seront colorés différemment, ou seront affectés à des salles différentes.

Utilisons maintenant l'algorithme glouton de coloration dans un ordre croissant de l'horaire de début des intervalles. Nous obtenons alors cette coloration des intervalles :

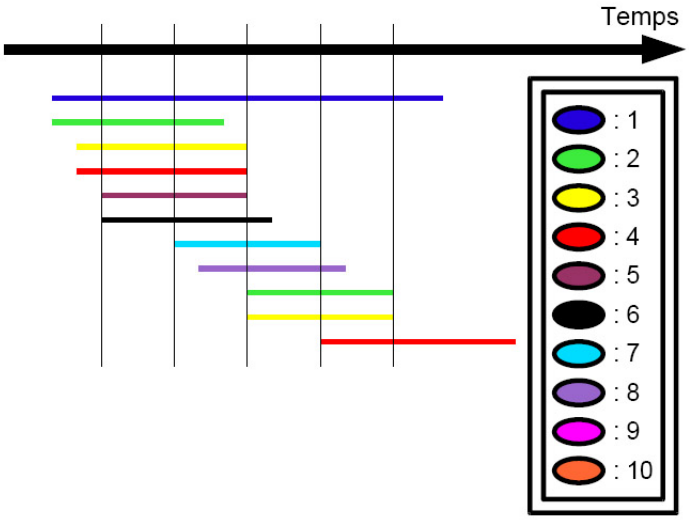


FIG. 4.136: *La coloration des intervalles que nous avons choisie donne une affectation en huit salles.*

Montrons que l'ordre que nous avons choisi donne une coloration optimale d'un graphe d'intervalles.

Supposons que l'algorithme nous retourne une coloration en k couleurs. À une certaine étape de l'algorithme, nous colorons donc un sommet s avec la couleur k. Cela signifie que s a au moins $k-1$ voisins déjà colorés avec les couleurs de 1 à $k-1$. De plus, ce voisinage est une clique : chacun des sommets déjà colorés voisin de v correspond à un intervalle qui intersecte la borne inférieure de l'intervalle représenté par v, intersection qui n'est pas réduite à ce point. Le sous-graphe induit par le sommet v et l'ensemble des sommets colorés qui lui sont adjacents est donc une clique de taille k, ce qui signifie que la coloration de ce graphe nécessite au moins k couleurs.

La coloration d'un graphe d'intervalle par l'algorithme glouton, avec un ordre tel que décrit ci-dessus, est une coloration optimale.

4.9.5 Connaissances mises en jeu dans le problème

Les différentes questions autour du problème de coloration des sommets d'un graphe décrites et développées dans le paragraphe précédent ne nécessitent, pour la plupart, pas de pré-requis particulier autre qu'une définition de la coloration et du nombre chromatique. Elles amènent à la construction de propriétés, en particulier :
- l'ensemble des sommets colorés de la même couleur forme un stable ;
- si le nombre chromatique d'un sous-graphe d'un graphe G est k, alors le nombre chromatique de G est supérieur ou égal à k ;
- le nombre chromatique d'un graphe complet est égal au nombre de ses sommets ;
- la taille de la plus grande clique est une borne inférieure du nombre chromatique ;
- quel que soit l'ordre des sommets d'un graphe, l'algorithme glouton fournit une colo-

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

ration (valide) du graphe ;
- l'algorithme glouton fournit une borne supérieure au nombre chromatique (si Δ est le plus haut degré des sommets d'un graphe, alors l'algorithme glouton utilise au plus $\Delta + 1$ couleurs et le graphe est donc $(\Delta + 1)$-colorable) ;
- il existe un ordre des sommets d'un graphe donné tel que l'algorithme glouton associé à cet ordre donne une coloration optimale. Cet ordre peut être déterminé de deux façons : en ayant au préalable une coloration optimale (l'algorithme est alors inutile) ou en essayant tous les ordres de sommets, ce qui représente un nombre de possibilités particulièrement élevé ($n!$ où n est le nombre de sommets du graphe) ;
- la coloration d'une carte géographique[1] où deux régions voisines[2] de la carte sont colorées de deux couleurs différentes peut être modélisée par la coloration d'un graphe, en supposant que chaque région de la carte est connexe. Le graphe obtenu en représentant chaque région par un sommet et chaque frontière par une arête est un graphe planaire. La connaissance de la formule d'Euler pour les graphes planaires peut amener à prouver le théorème des six couleurs. Les questions autour de la coloration des sommets d'un graphe amènent à un travail qui peut concerner à la fois la preuve, la modélisation et l'algorithmique. Pour que ces questions puissent se développer et avoir lieu, il paraît important de faire réfléchir les élèves sur les limites de l'algorithme de Welsh et Powell, en demandant par exemple de trouver des exemples de graphes pour lesquels il ne fournit pas de coloration optimale, sur des graphes dont le nombre chromatique n'est pas égal à la taille de la plus grande clique, sur la caractérisation des familles de graphes 1-colorables et 2-colorables, etc.

[1]On trouvera le compte-rendu de la recherche d'un atelier Math.en.JEANS de 1991-92 au sujet du problème des quatre couleurs à l'adresse suivante : `http://mathenjeans.free.fr/amej/edition/actes/actespdf/92119122.pdf`. Ce compte-rendu met en lumière les raisonnements qui ont été tenus par les lycéens autour de la modélisation et de la preuve.

[2]Deux régions sont considérées comme voisines si leur frontière n'est pas réduite à un point ou à un ensemble fini de points.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Conclusion

Des éléments de théorie des graphes sont au programme de l'enseignement de spécialité en Terminale ES depuis 2002. Cet enseignement, s'il concerne un public relativement réduit, est assez important en terme d'horaires : il représente une trentaine d'heures dans l'année. En plus d'introduire dans l'enseignement secondaire un champ des mathématiques qui n'y figurait pas, la mise en œuvre du programme est novatrice : la présentation des graphes se fera exclusivement par résolution de problèmes.

Deux hypothèses primordiales sous-tendent notre travail. D'une part, les élèves de Terminale ES sont capables de chercher en mathématiques (et ainsi de s'interroger, tâtonner, raisonner, émettre des conjectures, généraliser, prouver, ...). D'autre part, la théorie des graphes, comme appartenant aux mathématiques discrètes, est un domaine des mathématiques se prêtant bien la mise en oeuvre de SiRC. Un programme scolaire traitant de théorie des graphes avec une construction de connaissances basée sur la « résolution de problèmes » est en adéquation avec ces hypothèses.

Reprenons les motivations décrites par les concepteurs du programme justifiant l'apparition des graphes dans le secondaire. La première des motivations semble être l'introduction d'éléments algorithmiques. Une deuxième est « la puissance de la théorie des graphes pour la modélisation »[1]. Enfin nous ajoutons une motivation qui nous paraît inhérente à tout enseignement de mathématiques qui concerne la preuve et le raisonnement, même si cette motivation n'est pas explicite dans le programme.

– **Modélisation :** Les premiers graphes qui ont été dessinés par les mathématiciens étaient des objets servant de modèle. Ils n'étaient pas étudiés en tant qu'objets mathématiques propres, mais bien en tant que supports de représentation[2]. Par la suite, c'est lorsque le graphe, objet composé de points et de traits reliant ces points, a été étudié en tant que tel et qu'il s'est détaché de la théorie des relations, que la théorie des graphes a pu se développer.
  « La puissance de la théorie des graphes pour la modélisation » est indéniable : des relations entre personnes, aux cartes géographiques, en passant par les étapes d'un processus de fabrication industrielle, pratiquement tout système composé d'un ensemble d'objets ayant des relations entre eux peut être modélisé par un graphe. Mais quel est l'adéquation entre le modèle et le représenté ? L'information du système a-t-elle été

[1] Citation du programme de l'enseignement de spécialité de la Terminale ES, BO hors-série n°4 du 30 août 2001.

[2] Voir par exemple le graphe du parcours hamiltonien du cavalier sur l'échiquier (Chapitre 1, figure 1.3).

conservée dans le modèle ? La question que l'on se pose sur le système peut-elle être résolue dans le modèle ? Ce sont les réponses à toutes ces questions qui détermineront l'utilisation et la pertinence du graphe comme modèle d'une situation. Or, ces questions semblent largement éludées du document d'accompagnement des programmes (établi pourtant par les auteurs du programme). Dans les manuels scolaires, la modélisation est même absente, sa seule apparition étant dans l'intitulé d'exercices de type : « modéliser cette situation par un graphe où les sommets sont tels objets et les arêtes telles relations entre les objets ».
La modélisation n'est pas questionnée, mais un certain nombre de « situations de modélisation » semblent apprises : une carte géographique se modélise par un point pour chaque capitale régionale et un trait lorsque les régions ont une frontière en commun ; un problème d'incompatibilité se résout en traçant le « graphe d'incompatibilité » et en colorant les sommets du graphe ; etc.

– **Raisonnement et preuve :** Le graphe est un objet simple : des points reliés par des traits. Il permet de raisonner sans rencontrer d'obstacle notionnel, de prouver avec des preuves contenant peu d'aspects techniques[1]. Le débat du vrai et du faux peut, dans ces conditions, vivre dans les classes, et les preuves peuvent être construites par les élèves. Nous montrons dans le chapitre 4 de telles preuves (par exhaustivité des cas, par l'absurde, par induction, etc.). Nous montrons dans le chapitre 3 que les raisonnements sur lesquels sont basées ces preuves sont tenus par les élèves et leur sont donc accessibles. Or le programme ne fait pas de mention particulière du raisonnement, et la preuve ne fait pas partie de ses attentes explicites. La toute dernière page du document d'accompagnement mentionne six « propriétés » qui doivent être connues des élèves. Quatre d'entre elles[2] concernent les graphes et sont indiquées comme « [pouvant] être prouvées ou commentées ». C'est l'une des deux seules mentions du terme « preuve » (ou « prouver ») de tout le document d'accompagnement. Ainsi les preuves se limitent pour les élèves à l'application de « propriétés » pour la plupart admises.
Le programme affiche une volonté de ne pas utiliser de présentation magistrale, ni de formalisme. Comment, dans ces conditions, éviter une interprétation a minima du programme basé exclusivement sur l'apprentissage de techniques dédiées à la résolution de « problèmes-type » ? Il paraît primordial que, suite à la phase de recherche des élèves, l'enseignement comporte une phase d'institutionnalisation permettant à l'ensei-

[1] On pense évidemment aux preuves et raisonnements abordés dans ce document. Les articles de recherche actuels en théorie des graphes peuvent bien entendu faire appel à des notions complexes, et certains sont très techniques.

[2] Voir le document d'accompagnement des programmes page 122 :

1. La somme des degrés d'un graphe non orienté est égal à deux fois le nombre d'arêtes du graphe.
2. Soit A la matrice associée à un graphe. Le terme (i, j) de la matrice A^r donne le nombre de chaînes de longueur r reliant i à j.
3. Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal à $\Delta + 1$, Δ étant le plus grand degré des sommets.
4. Théorème d'Euler : « Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair vaut 0 ou 2. Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair. »

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

gnant de rassembler les connaissances construites. Or comment institutionnaliser des connaissances sans recours à un certain « formalisme » et sans appel à la théorie ? Quel statut les connaissances auront-elles si elles ne sont construites que localement en réponse à un problème donné ?
La résolution de problèmes appelle à des compétences spécifiques des enseignants, comme savoir abandonner son rôle contre celui de gestionnaire de la situation, savoir motiver les élèves, les interroger sans arriver à un effet Topaze[1], etc. La phase d'institutionnalisation est sûrement la plus délicate à gérer : l'enseignant, « en direct », doit pouvoir reformuler en termes accessibles à tous les propositions émises, animer le débat du vrai et du faux, créer des contre-exemples s'ils n'apparaissent pas dans la classe, enfin arriver à une preuve, qui contiendra le plus d'éléments possible venant des élèves. La résolution de problème n'est pas simple à gérer pour l'enseignant, surtout si le domaine mathématique dont on parle est peu familier.

– **Algorithmique :** De nombreux algorithmes ont été développés dans le domaines de la théorie des graphes. Le graphe, en tant qu'objet discret, se prête bien à l'implémentation informatique. Il est assez simple de le représenter par une structure matricielle ou par listes chaînées, et, ainsi, de pouvoir se déplacer de sommet en sommet ou le long des arêtes du graphe.
De la volonté affichée, par la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques (CREM), d'introduire des éléments d'algorithmique dans l'enseignement secondaire, apparaissent deux algorithmes dans le programme de l'enseignement de spécialité de Terminale ES : l'un de recherche de plus court chemin et l'autre de coloration. Le programme ne désigne pas spécifiquement ces algorithmes, mais le document d'accompagnement en propose deux qui sont les seuls repris dans les manuels scolaires. L'algorithme de Dijkstra permet de déterminer le plus court chemin entre deux sommets d'un graphe (orienté ou non) dont les arêtes sont affectées d'un poids positif. L'algorithme de Welsh et Powell fournit quant à lui une coloration (en toute généralité non optimale) d'un graphe. Quel est l'intérêt de ces algorithmes par rapport à un traitement « à la main » ? Quelles sont les limites de ces algorithmes ? Pourquoi « fonctionnent-ils » ? Peut-on prouver l'algorithme de Dijkstra ? Quels sont les graphes pour lesquels l'algorithme de Welsh et Powell ne donne pas une coloration optimale ? Pourquoi utiliser un ordre décroissant sur les degré des sommets dans cet algorithme ? Aucune de ces questions n'est abordée dans le document d'accompagnement. Pour l'algorithme de Dijkstra, il y est indiqué : « [à] la fin de l'algorithme, tous les poids marqués à l'encre donnent les longueurs des plus courtes chaînes reliant les sommets considérés au sommet initial. Une preuve[2] formelle de ce fait est difficile (comme il est difficile, par exemple, de prouver formellement que l'algorithme classique de multiplication des entiers donne le nombre cherché) et n'est pas exigible. »
Les élèves sont donc amenés à appliquer des algorithmes qui sont de simples techniques de résolution non questionnées.

[1]Dont les dictées étaient si bien articulées qu'on en entendait toutes les lettres. Certaines questions du professeur ont le même effet en mathématiques, elles donnent la réponse sans que l'enseignant n'en soit nécessairement conscient.

[2]C'est la seconde occurence du terme « preuve » du document d'accompagnement.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Ces constats, sur la distance entre ce qui pourrait être fait en Terminale ES et la pauvreté de ce qui est présenté aux élèves dans les manuels, montrent que le concept de graphe n'y est pas construit. Que l'on soit au niveau de la modélisation, du raisonnement ou de l'algorithmique, les problèmes posés aux élèves se ramènent à des exercices qui se résolvent par application de techniques élémentaires ou de techniques dédiées à des classes de problèmes, sans que ces techniques ne soient questionnées et puissent ainsi prendre un statut de connaissance. Nous nuancerons tout de même ce propos : les enseignants ont la liberté de faire vivre dans leurs classes des situations riches menant leurs élèves à des questionnements sur le raisonnement, la modélisation et l'algorithmique, et ce tout en restant dans les limites notionnelles du programme. La multitude de pages personnelles sur le web d'enseignants du secondaire traitant de théorie des graphes, la motivation des enseignants dans les stages de formation sur les graphes, montrent bien que l'opportunité d'un tel enseignement a été saisie par certains. Cette lecture du programme, basée sur une étude didactique et sur l'épistémologie de l'objet graphe, a aussi permis d'établir des résultats liés à des connaissances plus spécifiques. Nous reprendrons ici en particulier les conclusions auxquelles nous ont menés le problème de recherche de parcours eulériens et celui de coloration des sommets d'un graphe.

– **Problème eulérien :** Notre étude débute par une recherche sur l'histoire du problème eulérien considéré comme étant à l'origine de la théorie des graphes. L. Euler, auteur du premier article à ce sujet, y énonce un théorème donnant une condition nécessaire (CN) et suffisante (CS) à l'établissement d'un chemin passant une et une fois par chaque pont d'une ville. Contrairement à ce qu'affirment plusieurs ouvrages de référence en théorie des graphes, Euler n'utilise pas de graphes pour résoudre le problème. Sa modélisation du problème repose sur des conditions à imposer à une liste de lettres (correspondant aux berges de la ville). Plus étonnamment, Euler ne prouve pas la CS du théorème qu'il émet, qu'il semble considérer comme une évidence. Or c'est au contraire la CN qui est « évidente », un argument de type « on rentre, on sort, . . . , donc tout doit être pair » suffit à la prouver. La preuve de la CS n'est pas « difficile » en tant que telle (il suffit par exemple de considérer un chemin maximal), par contre il semble que la nécessité d'une preuve, la question même de cette CS n'aille pas de soi. Le fait qu'Euler ne l'ait pas vraiment vu ne fait que confirmer cette hypothèse.
  Une étude mathématique et didactique nous montre que la modélisation du problème des ponts de Königsberg par un graphe n'est pas unique. Si l'on demande un graphe représentant la situation, on a de fortes chances de voir apparaître dans les classes un graphe avec pour sommets les ponts (ce qui n'est pas « le » graphe attendu), étant donné que ce sont les ponts sur lesquels porte le problème.
  Plusieurs expérimentations sur les problèmes eulériens ont été menées. Dès le début du cycle 2 à l'école primaire, les enfants sont capables de comprendre l'énoncé du problème eulérien, de manipuler des graphes, et même de trouver très rapidement (moins d'une minute) un circuit eulérien dans un graphe à 7 sommets. L'intérêt de demander à des élèves de Terminale de résoudre plusieurs fois un problème analogue est plus que limité. Une autre expérimentation (les parcours de musées) cherchait en particulier à problématiser la question de la CS, et n'a pas suffit à la faire émerger. En revanche, elle a montré que la preuve de la CN peut être construite par les élèves dès la seconde, avec un peu de temps. L'argument d'entrée/sortie qu'ils utilisent pour cette preuve est plus

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

proche de la résolution que l'on trouve dans les livres de théorie des graphes actuels que ne l'est celle d'Euler. L'introduction d'une situation basée sur un « nouvel objet mathématique » n'a pas posé de difficulté, ni même de questions : les élèves se sont emparés du graphe, l'ont manipulé, étiré, retourné, ... et pour la plupart ont transposé rapidement les résultats qu'ils avaient obtenus pour les musées sur les graphes.
L'article même d'Euler a été utilisé pour construire une situation de réflexion et de débat autour de la preuve, du raisonnement et de la modélisation, en deuxième année d'école d'ingénieurs. Le décalage entre la forme de la preuve d'Euler et celle des preuves actuelles a constitué une surprise pour ces étudiants, les forçant à se détacher du texte et à se centrer sur le sens de la preuve. Même pour ces étudiants ayant un certain recul mathématique et des connaissances assez solides en théorie des graphes, la question de la CS n'est pas apparue comme une évidence.

– **Coloration :** Nombreuses sont les questions autour de la coloration de graphes ouvertes dans la recherche actuelle. La détermination du nombre chromatique d'un graphe dans le cas général fait partie de ces problèmes ouverts ; c'est un problème difficile (au sens de la complexité). Mais cela ne signifie pas que l'on ne puisse proposer des problèmes de coloration aux élèves. Il est possible de leur demander de déterminer le nombre chromatique d'un graphe particulier voire d'un ensemble de graphes. La question de la coloration des arbres, par exemple, pourrait faire partie des problèmes accessibles aux élèves de Terminale ES. Mais les arbres sont hors programme : ils apparaissent dans le programme dans les chapitres de « statistiques et probabilités » sous la forme d'arbre de probabilités, mais étrangement ils ne font pas partie du chapitre consacré à la théorie des graphes. Ne connaissant pas le nombre chromatique en général, on est amené à chercher des encadrements de sa valeur. Une borne inférieure « simple » est le nombre de sommets d'une plus grande clique du graphe. (Même si déterminer une plus grande clique d'un graphe est aussi un problème difficile, toujours au sens de la complexité).
Une borne supérieure assez triviale existe. On colore les sommets d'un graphe de façon gloutonne (c'est-à-dire avec une liste de sommets fixée à l'avance et sans revenir en arrière dans le parcours du graphe). Lorsque l'on colore un sommet donné, au pire, il peut avoir Δ voisins colorés avec Δ couleurs différentes. On utilisera donc une $(\Delta+1)$-ième couleur et le graphe sera coloré avec au plus $\Delta+1$ couleurs. De multiples questions peuvent naître à partir de cet encadrement. Peut-on trouver des graphes pour lesquels le nombre chromatique est égal à l'une de ces bornes ? Égal à ces deux bornes ? Existe-t-il un ordre de sommets garantissant une coloration optimale pour certaines classes de graphes ? Etc.
Dans les manuels scolaires de Terminale ES, le problème de coloration n'en est pas un. On voit d'une part une sorte d'« apprentissage de la modélisation », avec deux types de modélisations, celles de cartes géographiques et celles des problèmes d'incompatibilité. L'encadrement du nombre chromatique est donné ou admis. De plus, à une exception près, les graphes présentés sont tels que leur nombre chromatique est égal à la taille de la plus grande clique. L'algorithme glouton est présenté avec un ordre décroissant sur les degrés des sommets (algorithme de Welsh et Powell), cet ordre ne garantissant aucunement une coloration optimale. Or l'ensemble des exercices demandant une coloration par cet algorithme fournit une coloration optimale. On voit alors se profiler

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

pour les élèves une double conception erronée de la coloration : « l'algorithme de Welsh et Powell fournit une coloration optimale pour tous les graphes », « tout graphe a un nombre chromatique égal à la taille de sa plus grande clique ». On mesure ici comment les choix de transposition peuvent transformer un problème riche et non trivial, celui de la coloration, en quelques exercices-types que l'on peut résoudre avec des techniques élémentaires.

Prolongations possibles

Nous faisons l'hypothèse que tous les problèmes du chapitre 4 pourraient être adaptés pour les élèves de Terminale ES. Cette adaptation, qui a été faite pour le problème eulérien, reste à faire pour les autres. De nouvelles expérimentations au lycée nous paraissent indispensables pour mener à bien ce projet.

Nous pensons aussi créer des situations utilisant les graphes à destination d'élèves du collège et du primaire. Une expérience originale a été menée en début de primaire avec les graphes. Elle a donné lieu à un ouvrage [26] qui montre clairement que des apprentissages mathématiques sur les propriétés des graphes peuvent avoir lieu dès le plus jeune âge.

Nous aimerions aussi développer la description des caractéristiques des situations-recherche (en classe ou non) pour la gestion qu'elles impliquent de la part de l'enseignant.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Annexe A

Article d'Euler sur les ponts de Königsberg

SOLUTION D'UN PROBLEME APPARTENANT A LA GÉOMETRIE DE SITUATION PAR EULER, TRADUIT du LATIN, PAR M. E. COUPY, Professeur au collège militaire de la Floche.

Le problème dont je hasarde ici la traduction est inséré dans les Commentaires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg, tome VIII, page 128, année 1736. M. Poinsot, dans son célèbre Mémoire de 1810 sur les Polygones et les Polyèdres étoiles, et Lhuillier, de Genève, dans son Algèbre, l'ont mentionné tous deux. Ce problème intéressant, d'une solution fort ingénieuse, n'a été traduit, que je sache, dans aucun recueil français, et se trouve enfoui maintenant dans une volumineuse collection à la portée seulement des personnes qui habitent la capitale. J'ai pensé qu'on lirait, au moins avec curiosité, ce problème, c'est ce qui m'a décidé à publier cette traduction que j'ai faite, il y a quelques années, à Paris.

1. Outre cette partie de la géométrie qui traite des grandeurs et qui a été de tout temps cultivée avec beaucoup de zèle, il en est une autre, jusqu'à nos jours complètement inconnue, dont Leibnitz a fait le premier mention et qu'il appela géométrie de position. D'après lui, cette partie de la géométrie s'occupe de déterminer seulement la position et de chercher les propriétés qui résultent de cette position, dans ce travail, il n'est besoin, ni d'avoir égard aux grandeurs elles-mêmes, ni de les calculer, mais il n'est pas encore assez bien établi quels sont les problèmes de ce genre appartenant à la géométrie de position, et quelle méthode il faut employer pour les résoudre ; c'est pourquoi lorsque récemment il fut question d'un problème qui semblait, à la vérité, se rattacher à la géométrie ordinaire, mais dont cependant la solution ne dépendait, ni de la détermination de grandeurs, ni du calcul de quantités, je n'ai point balancé à le rapporter à la géométrie de position, d'autant plus que les considérations de position entrent seules dans la solution, tandis que le calcul n'y est pour rien. J'ai donc cru utile d'exposer ici, comme un exemple de géométrie de position, la méthode que j'ai trouvée pour résoudre les problèmes de ce genre.

2. Or ce problème, qu'on me disait être assez connu, était le suivant : À Kœnigsberg,

en Prusse, il y a une île A appelée le Kneiphof, entourée d'un fleuve qui se partage en 2 bras, comme on peut le voir sur la figure 1, mais les bras de ce fleuve sont garnis de 7 ponts a, b, c, d, e, f, g, et l'on proposait cette question sur ces ponts : Une personne peut-elle s'arranger de manière à passer une fois sur chaque pont, mais une fois seulement ? Les uns affirmaient que cela était possible ; d'autres niaient, d'autres en doutaient ; mais personne ne pouvait prouver. Quant à moi, j'ai fait de ce problème le suivant beaucoup plus général :

Quelle que soit la figure du fleuve et sa distribution en bras, et quel que soit aussi le nombre des ponts, trouver si une personne peut traverser le fleuve en passant une seule fois sur chaque pont.

3. Pour ce qui regarde les 7 ponts de Kœnigsberg, on pourrait résoudre le problème en faisant l'énumération complète de toutes les manières de passer qui peuvent avoir lieu, car on verrait par là quelle est celle qui satisfait, ou bien on reconnaîtrait qu'il n'y en a aucune. Mais ce mode de solution, à cause du si grand nombre de combinaisons, serait trop difficile et trop laborieux, et ne pourrait même plus s'appliquer dans les autres questions où il y aurait beaucoup plus de ponts. Au reste, si par ce moyen l'opération était conduite jusqu'au bout, on trouverait beaucoup de manières de passer qui ne satisfont pas à la question, et c'est en cela sans doute que consiste la cause d'une si grande difficulté. Ayant donc laissé de côté cette méthode, j'en ai cherché une autre qui me donne non pas toutes les manières de passer, mais me montre seulement celle qui satisfait à la question ; et je regarde une pareille méthode comme de beaucoup plus simple que la précédente.

4. Toute ma méthode se fonde sur une manière particulière de représenter chaque passage de pont, dans laquelle j'emploie les lettres majuscules A, B, C, D, qui sont écrites à chaque région que sépare le fleuve. Ainsi, si quelqu'un va delà région A à la région B, en passant sur le pont a ou sur le pont b, je désigne ce passage par les lettres AB. La première marque la région d'où sort le voyageur ; la seconde, la région dans laquelle il est parvenu après avoir passé le pont. Si ensuite le voyageur s'en va par les lettres BD, et je représente ces 2 passages successifs AB et BD seulement par 3 lettres ABD, celle du milieu B représentant, tant la région où il est parvenu par un premier passage que celle d'où il est sorti pour un second passage.

5. Par un moyen semblable, si le voyageur s'avance de la région D dans la région C par le pont g, je représenterai ces 3 passages faits successivement par 4 lettres $ABDC$, car on comprendra par ces 4 lettres $ABDC$, que le voyageur étant d'abord dans la région A, a passé dans la région B, de là s'est avancé dans la région D, et enfin, de là a passé dans la région C ; et puisque ces régions sont séparées mutuellement par l'eau les unes des autres, il est nécessaire que le voyageur ait passé sur 3 ponts. De même, les passages faits successivement sur 4 ponts seront représentés par 5 lettres, et si le voyageur continue sa marche autant qu'il y a de ponts, son voyage sera représenté par un nombre de lettres supérieur d'une unité au nombre de ponts. C'est pourquoi il faut 8 lettres pour représenter les passages sur 7 ponts.

6. Dans ce mode de notation, je ne considère point par quels ponts le passage se fait ; mais si le même passage d'une région à une autre peut se faire par plusieurs ponts, peu importe par quel pont on passe d'abord pour arriver dans la région désignée. On comprend, d'après cela, que si le voyageur peut continuer sa course sur les 7 ponts de la figure

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

1, de manière à passer une fois sur chacun d'eux, et jamais deux fois sur aucun, cette course pourra se représenter par 8 lettres, et ces lettres devront être disposées de telle sorte que la succession immédiate des lettres A et B se présente deux fois puisqu'il y a 2 ponts a et b qui joignent ces régions A, B : de même, la succession des lettres A et C devra aussi se trouver deux fois dans cette série de 8 lettres et pour la même raison, en suite la succession des lettres A et D devra s'y trouver une seule fois, et, enfin, il faudra semblablement que la succession des lettres B et D, et celle des lettres C et D se trouvent chacune une fois.

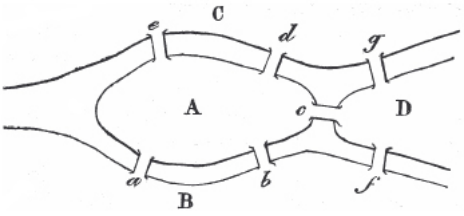


FIG. A.1: *Fig.1*

7. La question est donc ramenée à former avec 4 lettres A, B, C, D, une série de 8 lettres dans laquelle toutes ces successions se présentent autant de fois qu'il vient d'être trouvé. Mais avant de chercher une telle disposition, il convient de faire voir si ces lettres peuvent ou non être disposées d'une telle manière. Car si l'on pouvait démontrer qu'une telle disposition des 4 lettres A, B, C, D est tout à fait impossible, tout travail qui aurait pour but de la chercher, serait évidemment inutile. C'est pourquoi j'ai inventé une règle par le secours de laquelle, tant pour cette question que pour toutes celles du même genre, il est facile de discerner si un tel arrangement des lettres peut ou non avoir lieu.

8. Pour trouver cette règle, je considère une région unique A (fig. 2) à laquelle conduisent autant de ponts qu'on veut, $a, b, c, d, \ldots$, je prends d'abord un seul de ces ponts qui conduisent à la région A, par exemple a. Si maintenant le voyageur passe sur ce pont, ou bien il devra être avant le passage dans la région A, ou bien il parviendra après le passage dans cette région A ; c'est pourquoi, dans la manière établie ci-dessus de représenter les passages, il faut que la lettre A se trouve une fois. Si vous supposez 3 ponts a, b, c conduisant dans la région A, et que le voyageur ait traversé ces 3 ponts, alors dans la représentation de ce voyage la lettre A se trouvera deux fois, soit que ce voyage ait commencé en partant de A, soit qu'il ait commencé en y allant. De même, si 5 ponts conduisent en A, dans la représentation du passage sur tous ces ponts, la lettre A devra se trouver trois fois ; et, en général, si le nombre des ponts est un nombre impair quelconque, en augmentant ce nombre de 1, et prenant la moitié, on aura le nombre de fois que la lettre A doit se trouver dans la représentation du passage.

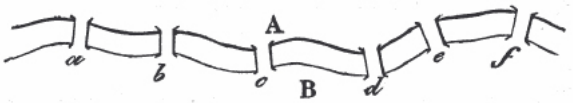


FIG. A.2: *Fig.2*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

9. Dans ce cas donc des ponts de Kœnigsberg (Fig. 1), puisque 5 ponts a, b, c, d, e, conduisent dans l'île A, il est nécessaire que dans la représentation du passage sur ces ponts la lettre A se trouve trois fois. Ensuite la lettre B, puisque 3 ponts conduisent dans la région B, devra se trouver deux fois ; de même la lettre D ainsi que la lettre C, devra se trouver deux fois et pour la même raison. Donc, dans la série des 8 lettres représentant le passage sur les 7 ponts, la lettre A devrait se trouver trois fois, et les lettres B, C, D, chacune deux fois, ce qui, dans une série de 8 lettres, est complètement impossible. Il suit clairement de là que sur les 7 ponts de Kœnigsberg, le passage demandé est impossible.

10. Par un procédé semblable, on peut dans tout autre cas, pourvu toutefois que le nombre de ponts qui conduisent dans chaque région soit impair, on peut reconnaître si le passage une seule fois sur chaque pont est possible. Car s'il arrive que la somme de toutes les fois que chaque lettre doit se trouver, soit égale au nombre de tous les ponts augmenté de 1, alors le passage demandé sera possible. Mais si, au contraire, il arrive, comme dans notre exemple, que cette somme soit plus grande que le nombre total des ponts augmenté de 1, alors le passage demandé ne pourra s'effectuer d'aucune manière. Mais la règle que j'ai donnée pour déduire du nombre de ponts conduisant dans la région A le nombre de fois que la lettre A doit s'écrire, s'applique également, soit que tous les ponts conduisent d'une seule région B comme le représente la figure 2, en A, soit qu'ils conduisent de plusieurs, car je considère seulement la région A et je recherche combien de fois la lettre A doit se trouver.

11. Mais si le nombre des ponts qui conduisent dans la région A est pair, alors il faudra distinguer, pour le passage sur chaque pont, si le voyageur a commencé ou non sa course en partant de la région A. En effet, si 2 ponts conduisent en A et que le voyageur ait commencé sa course en partant de A, alors la lettre A devra se trouver deux fois ; une fois elle représentera la sortie de A par l'un des ponts et encore une fois, pour représenter le retour en A par l'autre point. Mais si, au contraire, le voyageur avait commencé sa course en partant de l'autre région, alors la lettre A ne se présentera plus qu'une fois ; car écrite une fois elle représentera, d'après ma manière de représenter ces courses, tant l'arrivée en A que la sortie de cette même région.

12. Que 4 ponts conduisent dans la région A et que le voyageur commence sa course en partant de A ; alors, dans la représentation de sa marche complète, la lettre A devra se trouver trois fois, pourvu toutefois qu'il n'ait passé qu'une seule fois sur chaque pont. Mais s'il a commencé à marcher en partant de l'autre région, la lettre A se trouvera seulement deux fois. S'il y a 6 ponts qui conduisent dans la région A, alors la lettre A se trouvera quatre fois, si le voyageur a commencé par partir de A, sinon elle ne se trouvera que trois fois, et généralement si le nombre des ponts est pair, la moitié donne le nombre de fois que la lettre A doit se trouver si l'on n'a pas commencé à partir de A ; et cette moitié, augmentée de 1, sera le nombre de fois que A devra s'écrire, en commençant la course de la région A elle-même.

13. Voici de quelle manière je déduis du nombre de ponts qui conduisent à une région, le nombre de fois que cette région, présentée par une lettre, devra s'écrire dans la course désirée. Je prends la moitié du nombre des ponts augmenté de 1, si ce nombre de ponts est impair, et la moitié de ce même nombre s'il est pair. Ensuite, si le nombre de fois que toutes les lettres doivent s'écrire est égal au nombre des ponts augmenté de 1, alors le

passage désiré a lieu, mais on doit commencer à marcher d'une région à laquelle conduisent un nombre impair de ponts ; mais si ce nombre de fois est inférieur de 1 au nombre des ponts augmenté de 1, alors le passage a lieu en commençant par une région à laquelle conduise un nombre pair de ponts, parce que par ce moyen le nombre des fois qu'on doit écrire les lettres est augmenté de 1.

14. Etant donc proposée une rivière quelconque, garnie de ponts comme on voudra, pour trouver si une personne peut passer sur chaque pont une fois seulement, j'établis l'opération de la manière suivante :

1° je représente chacune des régions séparées mutuellement les unes des autres par l'eau, respectivement par $A, B, C, D, \ldots$;

2° je prends le nombre total des ponts que j'augmente de 1, et je note ce nombre pour l'opération suivante ;

3° à côté de chacune des lettres $A, B, C, \ldots$, écrites l'une au-dessous de l'autre, j'écris le nombre de ponts conduisant à la région marquée par la lettre que je considère ;

4° je marque d'un astérisque les lettres qui ont un nombre pair écrit à côté d'elles ;

5° j'écris les moitiés de tous ces nombres pairs et les moitiés des nombres impairs, augmentés de 1, dans une même colonne, chacune de ces moitiés dans la même ligne horizontale que la lettre d'où elle dépend ;

6° je fais la somme des nombres écrits en dernier lieu. Si cette somme est inférieure de 1, ou égale au nombre trouvé dans le 2°, qui est le nombre total des ponts augmenté de 1, j'en conclurai que le passage cherché est possible. Mais pour que cela soit possible, quand la somme trouvée est inférieure de 1 au nombre écrit en haut de sa feuille, on doit partir d'une région marquée d'un astérisque ; mais, au contraire, on devra partir d'une région non astérisquée, quand la somme sera égale au nombre précité.

Ainsi, par exemple, pour le cas des ponts de Kœnigsberg, j'établis l'opération comme il suit :

Nombre des ponts 7 ; j'ai donc 8.

	Ponts.	
A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2
		9

Et comme la somme 9 de la seconde colonne est > 8, le passage demandé est impossible.

15. Soient 2 îles A et B entourées d'eau, avec lesquelles communiquent 4 fleuves, comme le représente la figure 3 ;

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

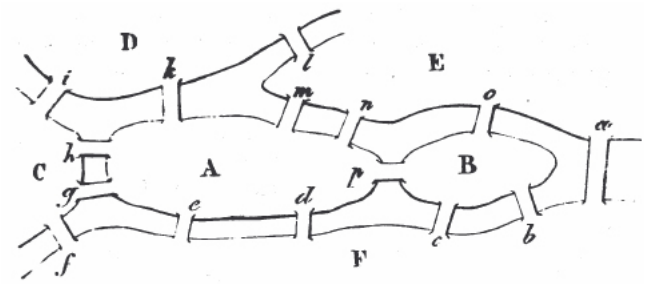


FIG. A.3: *Fig.3*

15 ponts sont jetés sur ces fleuves, et l'on demande si une personne peut s'arranger de manière à passer une fois et une seule fois sur chacun de ces ponts. Je désigne d'abord 1° toutes les régions séparées mutuellement par l'eau, par les lettres A, B, C, D, E, F : j'ai donc de la sorte 6 régions ; ensuite 2° j'augmente de 1 le nombre total des ponts, et j'écris le nombre 16.

A_*	8	4
B_*	4	2
C_*	4	2
D	3	2
E	5	3
F_*	6	3
		16

3° j'écris les lettres $A, B, C, \ldots$, les unes au-dessous des autres, et a côté de chaque lettre le nombre de ponts conduisant à la région que marque la lettre. Ainsi 8 ponts conduisant à A, 4 à B, etc. ; 4° Je marque d'un astérisque les lettres à côté desquelles se trouve un nombre pair ; 5° j'écris dans une troisième colonne verticale les moitiés des nombres pairs, j'augmente de 1 les nombres impairs, et j'écris de même les moitiés de ces nombres impairs ainsi augmentés de 1 ; 6° j'additionne les nombres de cette troisième colonne, et j'ai une somme 16 égale au nombre 16 écrit en haut : il en résulte que le passage peut être fait de la manière voulue, en partant soit de la région D, soit de la région E, car ces lettres ne sont pas marquées d'une étoile ; la course pourra se faire de la manière suivante :

$$EaFbBcFdAeFfCgAhCiDkAmEnApBoElD$$

notation dans laquelle j'ai placé entre les lettres majuscules les ponts sur lesquels le passage a lieu.

16. Il sera donc très facile par ce procédé de reconnaître dans chaque cas proposé, si le passage unique sur tous les ponts peut ou non s'effectuer. Cependant je donnerai encore un moyen beaucoup plus facile de reconnaître cela, lequel se déduira sans difficulté de ce qui précède, après que j'aurai exposé quelques observations que voici. Je remarque d'abord que la somme des nombres de ponts écrits à côté de chaque lettre $A, B, C, D, \ldots$, est double du nombre total des ponts ; la raison en est que dans le calcul qui donne tous les ponts conduisant à une région donnée, un pont quelconque est compté deux fois, c'est-à-dire que chaque pont est rapporté à l'une et l'autre des deux régions qu'il joint.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

17. Il suit de cette observation que le nombre total des ponts qui conduisent dans chaque région est, toujours un nombre pair, puisque la moitié de cette somme est égale au nombre des ponts. Il ne peut donc pas se faire que parmi les nombres de ponts conduisant à une région quelconque, il n'y en ait qu'un seul d'impair, ou trois, ou cinq, etc. C'est pourquoi, si des nombres de ponts adjoints aux lettres $A, B, C, \ldots$, sont impairs, il est nécessaire que le nombre de ces nombres impairs soit pair. Ainsi, dans l'exemple de Kœnigsberg, les nombres impairs adjoints aux lettres des régions $A, B, C, D, \ldots$, étaient au nombre de quatre (voyez n° 14), et dans l'exemple précédent du n° 15, il y a seulement deux nombres impairs, adjoints aux lettres D et E.

18. Puisque la somme de tous les nombres adjoints aux lettres $A, B, C, \ldots$, égale le double du nombre des ponts, il est manifeste qu'en augmentant cette somme de 2 et en en prenant la moitié, on aura le nombre établi au commencement de l'opération. Si donc tous les nombres adjoints aux lettres $A, B, C, \ldots$, sont pairs, et qu'on prenne la moitié de chacun d'eux pour former les nombres de la troisième colonne, la somme de ces nombres sera inférieure de 1 au nombre que nous savons. C'est pourquoi, dans ces cas, le passage sur tous les ponts pourra toujours s'effectuer ; car, en quelque région que la course commence, on sera conduit en cette légion par un nombre pair de ponts, ainsi qu'il est requis. Par exemple, dans le problème de Kœnigsberg, on peut s'arranger de manière à passer deux fois sur tous les ponts, car ce serait comme si chaque pont eût été divisé en deux, et alors le nombre des ponts conduisant dans une région quelconque sera pair.

19. Maintenant, si l'on suppose qu'il y a seulement deux nombres impairs adjoints aux lettres $A, B, C, \ldots$ (on sait qu'il ne peut pas y en avoir un seul), et que tout le reste soit pair, alors la course demandée est possible, pourvu que l'on parte d'une des régions à laquelle conduit un nombre impair de ponts. Car, si, selon la règle, on prend la moitié des nombres pairs, et la moitié des nombres impairs augmentés de 1, la somme de toutes ces moitiés sera supérieure de 1 au nombre de ponts, et par conséquent égale au nombre précité lui-même, et l'on voit par là que s'il y a ou quatre, ou six, ou huit,..., nombres impairs dans la deuxième colonne, alors la somme des nombres de la troisième sera plus grande que le nombre précité, et le surpassera ou de 1, ou de 2, ou de 3,..., unités, et que, par conséquent, le passage demandé sera impossible.

20. Quel que soit donc le cas proposé, on pourra très facilement reconnaître sur-le-champ, au moyen de la règle suivante, si le passage une seule fois sur tous les ponts est ou non possible. S'il y a plus de deux régions auxquelles conduisent un nombre impair de ponts, vous pouvez affirmer avec certitude qu'un tel passage est impossible. Mais si l'on est seulement conduit à deux régions par un nombre impair de ponts, le passage est possible, mais en commençant sa course par l'une ou l'autre de ces deux régions. Enfin, s'il n'y a aucune région à laquelle on soit conduit par un nombre impair de ponts, alors le passage pourra avoir lieu, comme on le désire, et en commençant sa marche par telle région qu'on voudra. Cette règle satisfait donc pleinement au problème proposé.

21. Mais, quand on aura reconnu que la question est possible, il restera encore à trouver comment la marche doit être dirigée. Je me sers pour cela de la règle suivante : qu'on néglige par la pensée, autant de fois qu'on peut le faire, 2 ponts conduisant d'une région à une autre ; par cette abstraction, le nombre des ponts se trouvera généralement de beaucoup réduit ; qu'on cherche alors, ce qui sera facile, la course demandée pour les

ponts qui restent, et cela trouvé, les ponts enlevés par la pensée ne troubleront pas beaucoup le résultat obtenu, comme il est aisé de le voir avec un peu de réflexion ; et je crois inutile d'insister davantage pour trouver la marche qu'on devra suivre pour répondre à la question proposée.

Note du traducteur. Une application intéressante du problème d'Euler peut être faite à Paris, sur les ponts nombreux qui garnissent la Seine, depuis le pont d'Iéna jusqu'au pont d'Austerlitz, et joignent les îles de la Cité et Saint-Louis. En jetant les regards sur un plan de Paris, en appelant D la rive droite, G la rive gauche, A et B les îles de la Cité et Saint-Louis, on reconnaît que 11 ponts conduisent en A, 8 en B, 14 en G, 15 en D ; donc le problème est possible, d'après la règle du n° 20, pourvu qu'on parte de la Cité ou de la rive droite, et il est très facile de trouver effectivement la marche à suivre. Il est clair que dans ce problème, le pont Neuf et celui de la Réforme doivent compter chacun pour deux ; car l'un mène de D en A et de A en G, et l'autre mène de D en B et de B en A.

Un autre problème célèbre de situation est celui du cavalier aux échecs, donné aussi par Euler, pour la première fois (Mémoires de Berlin, 1759) et dont Vandermonde donna depuis une solution plus simple, dans les Mémoires de l'académie des Sciences, pour 1771, page 566. M. Volpicelli s'est occupé récemment de ce problème. (Comptes rendus, 1850, tome **XXXI**, page 314.)

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Annexe B

Compte-rendu d'expérimentation en lycée - Parcours de musées et parcours de graphes

Nous donnerons ici les résumés des séances qui se sont déroulées à Cluses en novembre 2005. La transcription de la seconde séance pour le groupe F sera aussi donnée dans son intégralité.

Pour rester proches de la façon dont les élèves ont abordé le problème, nous conserverons parfois leur terminologie. Nous parlerons de l'« existence d'un chemin (resp. d'un circuit) » dans un musée pour l'« existence d'un chemin (resp. d'un circuit) passant une et une seule fois par chaque porte du musée ». Nous utiliserons parfois les expressions « salle paire » ou « salle impaire » pour désigner les salles ayant un nombre pair (resp. impair) de portes.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

B.1 Groupe A

GO : Denise

B.1.1 Première séance

Le groupe est composé de quatre élèves.

Les consignes sont données dans le groupe par le GO qui leur distribue le premier musée qui comporte deux salles ayant un nombre impair de portes[1].

A	*Il part d'où le visiteur ?*
B	*De n'importe où.* Elle commence à tracer sur sa feuille.
A	Trace et passe deux fois par la même porte.
C	Ne trace pas. Elle travaille avec le stylo au dessus du plan du musée.
B	*On n'est pas obligé d'arriver dans la même pièce ?*

Des premières solutions sont trouvées dans le groupe. A, D et C ont trouvé un chemin, B en a trouvé plusieurs. Le GO les interroge sur l'existence d'autres chemins dans le musée. Toutes cherchent un autre chemin. D trouve un circuit, puis se rend compte qu'elle a oublié une porte. Le GO leur donne une feuille récapitulative pour que les différents chemins puissent être tracés. Toutes trouvent et tracent 5 chemins différents, partant ou arrivant des mêmes pièces, mais pas avec le même cheminement. Environ 20 minutes se sont écoulées. Chaque élève commence alors individuellement à chercher des circuits, mais ne trouve que de « nouveaux chemins ». A émet l'hypothèse qu'il n'existe peut-être pas de circuit dans le musée, et demande par quelle porte leurs circuits ne passent pas. Toutes désignent alors la même porte :

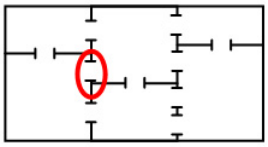


FIG. B.1: *On peut trouver un circuit dans ce musée mais il ne passe pas par la porte entourée.*

B est persuadée que s'il existe des chemins, alors il existe un circuit. Elles continuent leurs essais. D suggère que cela est peut-être dû au nombre de portes. A dit que « si on enlève n'importe quelle porte on pourrait y arriver » avant de se reprendre en disant que ce n'est pas « n'importe laquelle ».

Le deuxième musée leur est donné, toutes les salles ont un nombre pair de portes.

Immédiatement elles trouvent chacune des circuits. Une conversation s'engage sur le fait

[1] L'ensemble des musées, distribués dans l'ordre, est reproduit figure 3.16

que les points de départ ne sont pas les mêmes pour chacun de ces circuits, et sur la différence qui peut exister entre deux circuits. B considère que des circuits sont différents lorsque le visiteur ne « voit pas la même chose », le point de départ est donc important pour elle. Le groupe compte 6 circuits qui ne sont pas les mêmes. Commence alors une discussion sur l'existence de chemins. Toutes disent ne pas en trouver (elles recherchent en fait un chemin qui ne soit pas un circuit). Le GO les questionne sur comment elles recherchent les chemins. La réponse est : « un peu au pif ».

Le troisième musée leur est donné. Il comporte quatre pièces ayant un nombre impair de portes. Rapidement elles constatent qu'elles sont « bloquées ». A avance l'idée que cela vient du fait que deux pièces comporte trois portes, comme trois est impair, il faudrait « fermer une porte ou en ouvrir une autre » ce qui suscite un débat à l'intérieur du groupe. Le GO leur demande si elles avaient déjà eu un musée avec un nombre impair de portes dans une pièce. Elles reprennent alors le premier musée sans aboutir à une conclusion.

Le dernier musée leur est donné. Le GO leur demande d'anticiper sur l'existence de chemins et/ou de circuits.

B	*Quand on a deux portes, on a une entrée et une sortie. Et quand on en a trois, y'a plusieurs possibilités.*
C	Compte le nombre de portes par pièces
Toutes	Reprennent les quatre musées et comptent le nombre de portes dans chacune des pièces.
B	Elle montre le premier musée. *Le départ et l'arrivée, c'est toujours sur des pièces impaires.*

Elles constatent que le deuxième musée, qui comporte des circuits n'avait « que des pièces paires », et que le troisième pour lequel elles n'ont trouvé ni circuit ni chemin a quatre pièces impaires. B conjecture qu'il faut qu'il y ait plus de pièces paires que de pièces impaires, sinon on ne pourra pas « faire de chemin ».

B.1.2 Seconde séance

Les consignes sont données à la classe : « Vous devez étudier les possibilités d'existence de chemins ou de circuits passant par toutes les portes sans les tracer sur les plans. Établissez des conjectures qui pourraient être valables quel que soit le plan de musée que l'on vous propose. »

Les feuilles contenant le musée $A1$ sont distribuées dans le groupe, où chacun compte le nombre de portes par pièces Après un long silence, une première intervention dans le groupe :

102-105	A	*Là il y a un circuit parce que toutes les nombres de portes par pièce c'est pair.*
105-106	GO	*Parce que toutes les nombres ?...*
106-107	A	*Parce que dans chaque pièce, il y a un nombre pair de portes.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Le groupe se met au point pour la rédaction de la conjecture. La rédactrice a écrit qu'il existe un circuit car il y a dans le musée des pièces avec un nombre pair de portes. Le groupe modifie cette conjecture pour ajouter que « toutes les pièces ont un nombre pair de portes ».

134-138	B	*S'il y a un circuit il y a forcément un chemin, parce qu'un circuit c'est... un chemin qui se rejoint...* *Donc...*

La discussion s'éteint. La première conjecture est écrite. Le GO donne les feuilles du deuxième musée $A2$. C'est un musée équivalent au problème des ponts de Königsberg. Le groupe compte le nombre de portes par pièces, établit la séquence 3 3 3 5, et est d'accord pour dire qu'il n'existe pas de circuit dans le musée. Existe-t-il des chemins ?

166-168	B	*Non ! Parce que là on rentre par une porte, on ressort et on rerentre et après on ne peut plus sortir, quoi...*
172	A	*Il faut qu'il y ait plus de nombres pairs que de nombres impairs.*
173- 185	Toutes	Le groupe discute. La conversation est inaudible.
186-189	B	*Faudrait qu'il y en ait que deux de portes impaires. Comme ça, ça ferait un chemin avec un point de départ et un d'arrivée.*

Le groupe discute de la rédaction de nouvelles conjectures. En fait, deux conjectures sont en débat : pour qu'un chemin existe, faut-il que le nombre de « portes impaires » soit supérieur au nombre de « portes paires » ou faut-il qu'il y ait au maximum deux « portes impaires » ? Le débat n'est pas tranché, le GO distribue le dernier musée $A3$. Le groupe compte le nombre de portes par pièce, et obtient « quatre pièces avec un nombre impair », soit « plus de pairs que d'impairs ». L'un des membres du groupe résume alors sa position :

294-299	A	*Quand il n'y a que des nombres impairs, il n'y a rien.* *Quand il n'y a que des nombres pairs, il y a des circuits, donc des chemins.* *Et, quand il y a les deux, il y a des chemins,... mais il ne faut pas qu'il y ait plus de nombres impairs que de nombres pairs.*

La rédactrice, C, ne prend pas tout en note, et la discussion sur les conjectures est relancée. Le groupe cherche alors à dessiner un musée avec trois pièces, dont une avec un nombre pair de portes et deux avec un nombre impair pour tester leur double conjecture sur les musées comportant des pièces paires et des pièces impaires.

La mise en commun des conjectures des différents groupes a lieu, chaque groupe proposant une conjecture. Voici les différentes conjectures de tous les groupes proposées à l'oral :

« Si toutes les pièces ont un nombre pair de portes, alors on peut faire un circuit, mais pas de chemin qui ne revient pas à son point de départ. »

« S'il y a plus de deux salles ayant un nombre impair de portes, alors on ne peut rien faire, ni circuit, ni chemin. »

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

« S'il y a deux pièces paires, alors quelque soit le nombre de pièces impaires, on peut faire un chemin mais pas de circuit. »

« Il faut plus de pièces paires que d'impaires pour qu'un chemin soit possible ».

« S'il y a uniquement deux pièces impaires, on peut faire un chemin, mais pas de circuit. L'une des pièces impaires sert de départ et l'autre d'arrivée. »

« Le nombre de salles avec un nombre de portes impair est toujours pair. »

La première feuille avec des graphes est alors distribuée dans le groupe. Immédiatement, une élève remarque :

620-621	A	*C'est comme la maison que l'on doit dessiner sans lever le stylo...*

Des discussions sur l'organisation pratique ont lieu, puis le groupe commence à chercher. Toutes trouvent un circuit sur le premier graphe, mais ne trouvent « rien » pour le second. Après de nombreuses tentatives et discussions, B commence à compter les arêtes des deux graphes. Elle trouve 9 arêtes pour le premier graphe et 7 pour le second. C la reprend en disant qu'il n'y en a que 5 pour le premier. Un débat est initié sur ce qu'il s'agit de compter. Sommets ou arêtes ? Le groupe s'accorde pour penser que le nombre d'arêtes n'entre pas en jeu, étant donné que ce nombre est impair pour les deux graphes. Par contre le nombre de sommets pourrait jouer, le premier étant impair, le second pair.

Le groupe commence à tracer des graphes pour voir si le nombre de sommets du graphe entre en compte. Chacune trace des graphes à quatre sommets, sans tenir compte du nombre d'arêtes. Elles se rendent alors compte que certains de leurs graphes comportent des circuits, d'autres des chemins mais pas de circuit, et d'autres ni l'un ni l'autre. Une idée prédomine dans leurs échanges, l'existence ou non de chemin et de circuit dépend de la « forme » des graphes dessinés.

838-840	A	*Mais en fait, nos figures elles sont pas du tout pareilles. Par exemple, elle, ça fait plus des rectangles, et là c'est des espèces de boucles...*

Le groupe passe alors un certain temps à comparer deux graphes qui sont identiques à une arête près. L'un permet un chemin eulérien, l'autre non. Finalement au bout d'un certain temps :

971-972	A	*Là ! Regarde ! Y'a quatre arêtes qui arrivent sur un sommet... À chaque fois... Dans le premier... Ça fait 4 4 4 2...*
975	C	*Dans le deuxième c'est 3 3 3 5...*
976	A	*C'est encore avec les pairs...*
977-985	B	*Ben, c'est comme avec les portes. S'il y a une arrivée, une sortie, et... Tu vois ? Je ne sais pas comment expliquer, c'est...*
988	A	*Pour qu'il y ait un circuit ou un chemin, il faut qu'il y ait des sommets avec un nombre d'arêtes pair.*
1004	A	*Il faut qu'il y ait au moins un sommet avec un nombre d'arête pair...*
1021	B	*C'est comme avec les musées, en fait...* Toutes parlent alors en même temps, la conversation est inaudible.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

La deuxième feuille « graphe » est distribuée dans le groupe. Chacune établit le degré de chaque sommet et obtient une séquence de nombres pairs. Le groupe est d'accord pour penser qu'il doit donc exister un circuit dans le graphe. Elles cherchent alors à établir ce circuit sans y parvenir. L'une après l'autre, elles se retrouvent à un moment « bloquées ».

1083	D	*Si ça se trouve on part sur une mauvaise idée.*
1096-1112	B	*C'est peut-être pas vrai. Pas ça. Pas parce que tous les sommets ont un nombre d'arêtes pair qu'on peut faire un circuit.*
1117-1119	C	*En fait, c'est comme si on avait deux circuits superposés.* *Parce que là, la première fois, ça avait fermé sur un circuit. Et là pareil, mais c'est pas les mêmes arêtes que j'ai utilisées.*
1220-1238	GO	*« Si tout est pair, il y a un circuit », apparemment c'est faux. Vu qu'ici tout est pair et il n'y en a pas.* *Quelle est la différence ?* *Si vous ne voyez pas, au moins vous écrivez que c'est faux. Que ce n'est pas nécessaire ou pas suffisant, je ne sais pas. Est-ce que c'est nécessaire que ce soit pair ?*
1238-1242	B	*Non ! Lorsque les sommets ont un nombre d'arêtes pair, on n'a pas nécessaire... obligatoirement un chemin ou un circuit...*

Le groupe rédige cette dernière conjecture en précisant que dans ce cas, il manque une arête en commun aux deux circuits.

La synthèse pour toute la classe commence alors.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

B.2 Groupe B

GO : Charles

Le groupe est composé de trois élèves.

B.2.1 Première séance

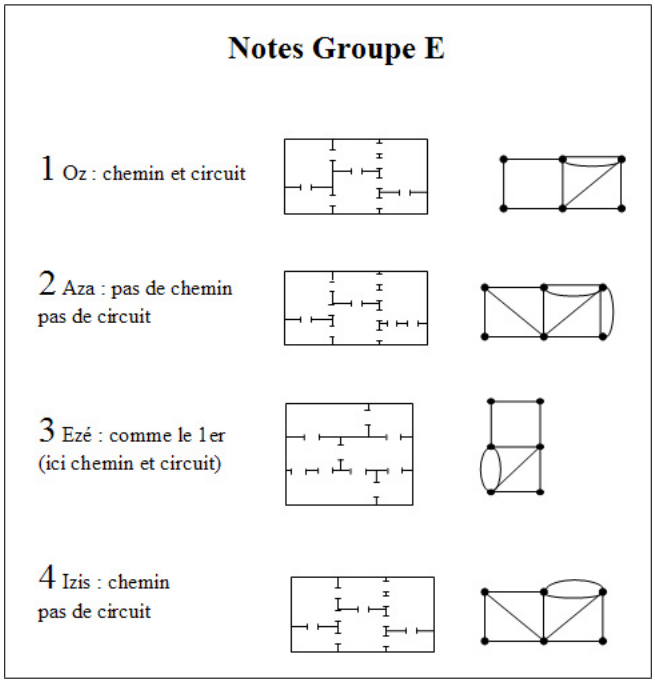


FIG. B.2: *La feuille de synthèse pour le groupe.*

Le premier musée leur est donné, il comporte un circuit. Les élèves commencent rapidement à essayer de tracer sur leurs feuilles des chemins, puis à compter le nombre de pièces et de portes. L'un trouve un circuit, et ils s'accordent pour dire qu'il existe donc un chemin dans le musée.

Le deuxième musée leur est distribué, il n'admet ni circuit ni chemin. Ils constatent rapidement qu'« il y a une porte qui coince ! », et cherchent à trouver un « bon » point de départ. L'idée de l'imparité est discutée, au départ il s'agit de l'imparité du nombre de portes par pièce, puis cela devient l'imparité du nombre total de portes dans le musée. Le musée comportant 6 pièces et 11 portes, l'un d'eux suggère qu'il n'y a pas de chemin car 11 n'est pas divisible par 3.

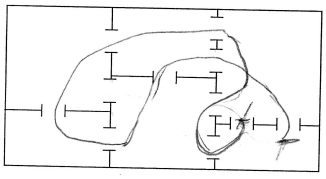


FIG. B.3: *On peut trouver un chemin si « on saute une porte ».*

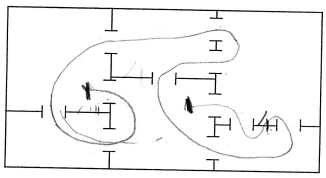


FIG. B.4: *On peut aussi trouver un chemin en ajoutant une porte.*

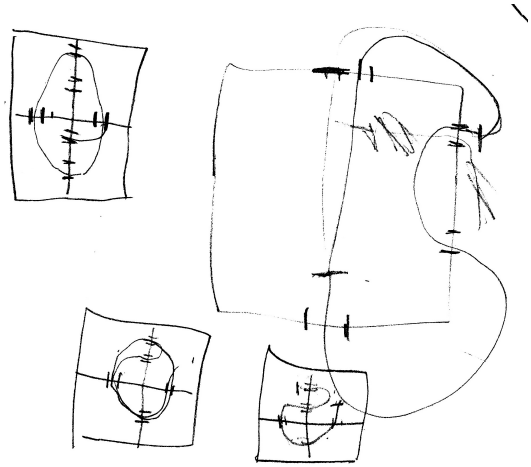


FIG. B.5: *Quelques dessins de musées dans le groupe. Les trois plus petits dessins sont destinés à tester la conjecture de divisibilité par trois.*

Le troisième musée leur est donné. Il est identique au premier et composé de 6 pièces et 9 portes. 9 étant divisible par 3, ils conjecturent qu'ils pourront trouver un chemin.

Ils trouvent rapidement un chemin dans le dernier musée. Leur recherche se modifie alors. Ils commencent à regarder le nombre de portes pour chaque pièce. Ils émettent alors rapidement plusieurs conjectures. « On ne peut pas faire de chemin quand les pièces ont un nombre impair de portes, sauf s'il y a deux pièces où ce nombre est impair ». « Pour qu'un circuit existe, il faut que toutes les pièces aient un nombre pair de portes ». Lorsqu'il y a deux pièces impaires, ils établissent qu'elles sont toujours au départ ou à l'arrivée.

B.2.2 Seconde séance

Nous n'avons pas pu récupérer les enregistrements de ce groupe. Nous n'avons à notre disposition que les traces écrites par les élèves, qui ont tracé un nombre impressionnant de graphes que leurs feuilles. Ce groupe est le seul dans lequel le lien entre les plans de musées et les graphes n'a pas été fait.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

B.3 Groupe C

GO : Michel Le groupe est composé de 4 élèves, LO, FL, AM, ES.

B.3.1 Première séance

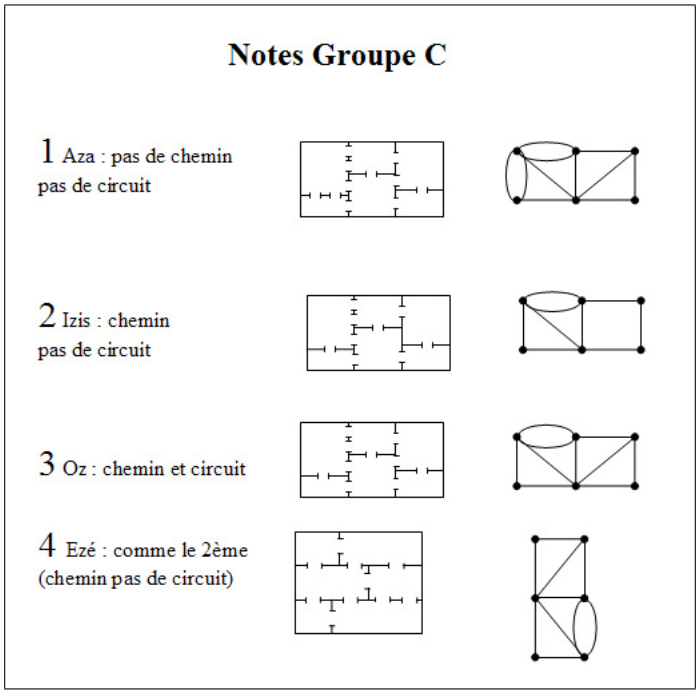


FIG. B.6: *La feuille de synthèse pour le groupe.*

Le premier musée, sans circuit ni chemin leur est distribué. Le travail commence immédiatement dans le groupe, il restera lors de toute la séance la plupart du temps individuel.

LO demande où est l'entrée du musée. Très vite ils se sentent « bloqués », et AM demande si le visiteur peut faire demi-tour. Elle trouve elle-même la réponse en se rendant compte que cela impliquerait de passer deux fois par la même porte. Ils pensent régulièrement avoir trouvé une solution, et s'aperçoivent que leur chemin « oublie toujours une porte ».

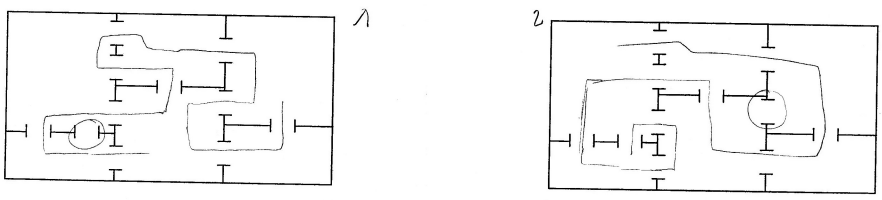


FIG. B.7: *Deux essais sur le même musée. Il manque toujours une porte, entourée ici.*

Après dix minutes, LO pense qu'il faut commencer par une pièces où il y a 3 portes, et ES commence à compter le nombre de portes par pièces. Elle remarque qu'« il y a un problème avec les pièces qui ont 3 ou 5 portes ». Elle trouve deux chemins disjoints qui traversent toutes les portes une et une seule fois. Elle affirme alors que le départ est forcément dans une pièce qui a 3 portes, LO la reprend en disant 3 ou 5 portes. Il émet alors la conjecture que si les 11 portes du musée étaient alignées (ie. si le musée comportait deux pièces séparées par 11 portes), on pourrait trouver un chemin, il complète en disant que le nombre de portes est important, mais que la disposition est elle essentielle.

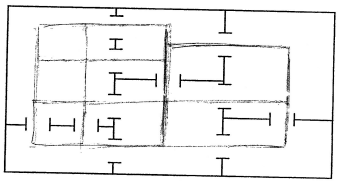


FIG. B.8: *Un type de représentation du chemin que l'on retrouve dans différents groupes.*

FL, AM et ES cherchent à trouver tous les chemins joignant deux portes données. Ils recherchent des symétries dans la figure, et ne trouvent qu'« une symétrie pour les murs, mais pas pour les portes ».

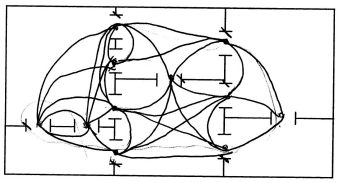


FIG. B.9: *En joignant les différents couples de portes donnant sur chaque salle, on obtient une représentation « hamiltonienne » du problème : on cherche à passer une et une seule fois par chaque sommet du graphe, sommets qui sont ici les portes du musée.*

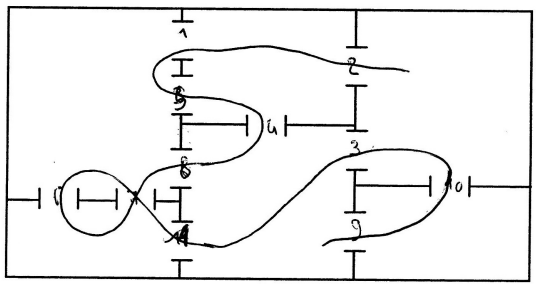


FIG. B.10: *Deux chemins sont représentés sur le même plan. L'un par un trait continu, l'autre par la numérotation des portes.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

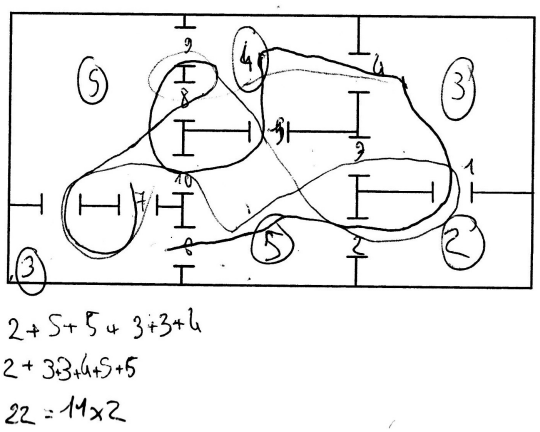


FIG. B.11: *Deux chemins sont aussi représentés sur le même plan. La séquence du nombre de salles par pièces a été écrite, puis réécrite ordonnée, enfin l'élève a remarqué que la somme de l'une de ces séquences étaient égale au double du nombre de portes dans le musée* ($22 = 11 \times 2$). *Il n'a pas fait part de ce constat aux autres membres du groupe.*

Après presqu'une heure, le GO leur donne le deuxième musée, avec deux salles ayant un nombre impair de portes. AM et LO trouve très rapidement un chemin dans ce musée, et ils constatent que ce ne sont pas les mêmes. En quelques minutes, chacun a trouvé un chemin, et ils comptent le nombre de portes par pièce, sans aboutir à une conjecture.

Le troisième musée, pour lequel toutes les salles ont un nombre paires de portes, leur est donné. Ils trouvent presque immédiatement un circuit, puis constatent que toutes les pièces ont un nombre pair de portes. LO pense qu'« on ne peut faire qu'un circuit, et pas de chemin qui soit strictement un chemin ».

B.3.2 Seconde séance

Après que les consignes sont données à la classe et au groupe, LO propose de compter le nombre de portes par pièces, avec la conjecture que « plus il y en a, plus c'est dur ». Il ajoute : « quand il y a quatre salles avec des nombres impairs, il est impossible de trouver un chemin ». Les trois musées leur sont donnés, et ils commencent à compter. ES compte le nombre total de portes et de salles du musée. Elle se demande pourquoi toutes les salles d'un musée ont un nombre pair de portes, alors que le nombre total de portes est impair.

LO résume sa position :

120	LO	En parlant du nombre de salles ayant un nombre impair de portes : *à mon avis, quand il y en a 4, c'est pas possible. Quand il y en a deux, c'est possible, mais on ne peut pas faire de circuits. Quand il y en a zéro, c'est possible et on est obligé de faire un circuit. Enfin, faudrait réessayer...*
125	FL	*Peut-être qu'il y a le nombre de pièces aussi qui joue.*

AM et FL reprennent l'idée de l'importance de la parité du nombre total de pièces et de portes.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

LO aimerait essayer à nouveau, dans la mesure où leurs conjectures sont basées sur les quatre musées vus les fois précédentes : « on ne peut pas vraiment faire de généralités avec quatre ». Le GO essaie de les convaincre qu'il faudrait une démonstration pour être sûr, et que de nouveaux essais ne feraient que les « conforter dans l'idée que c'est juste ».

Les élèves cherchent sur les trois musées à leur disposition. En fait, ils cherchent à tracer les chemins au dessus de la feuille, ES numérote les portes. Pour trouver le nombre de portes, LO propose d'additionner le nombre de portes donnant dans chaque pièce et de diviser par deux. AM lance l'idée que si les salles sont majoritairement paires, alors on trouvera un chemin.

260	LO	*Là, ça va pas être possible, parce qu'il y en a 4 d'impairs.*
263	FL	*Oui mais si ça se trouve quand tu as un nombre pair de salles, et un nombre impair de portes, peut-être que ça ne marche pas.*
265	ES	*Oui, mais par exemple, quand on a une seule salle avec un nombre impair, on peut...*
267	LO	*Ce n'est pas possible d'avoir une seule salle avec un nombre impair. Il en faut deux. Parce que forcément le nombre par salles est pair, vu que toutes les portes sont communes à deux salles.*
269	FL	*Non, c'est bon, ça marche...*
270	LO	*Le nombre de portes, 'fin... C'est pas possible qu'il n'y ait qu'une seule salle qui ait un nombre impair. Puisque toutes les portes elles sont communes à deux pièces. Donc toutes les portes, elles comptent deux fois, alors il faut multiplier le nombre de portes par deux, et donc c'est forcé qu'il y ait au moins deux pièces impairs. Ou alors zéro.*

Quelques instants plus tard, LO précise sa pensée : « il y a forcément un nombre pair de salles avec un nombre impair de portes ».

334	ES	*Je ne suis pas satisfaite de ce qu'on a trouvé. On n'est pas assez sûr de nour, parce qu'on a pas assez fait de trucs...*
336	LO	*'Fin... Le prof le disait tout à l'heure, que de toutes façons, même si on en faisait mille, si ça se trouve, y'en aurait un qui serait une exception, et on pourrait peut-être pas le trouver, donc...*
338	GO	*Oui, mais je suis d'accord avec ce que tu dis ES. Tu dis, si je fais plus d'exemples, je suis quand même plus sûre de moi. Je suis d'accord. Mais on n'est jamais sûr à cent pour cent...*
339	FL	*Faudrait trouver un cas général.*
340	ES	*Faudrait trouver une règle en fait.*

La mise en commun commence. Dans le groupe la question se pose de savoir quelle conjecture ils vont énoncer étant donné que deux des leurs ont déjà été données par d'autres groupes. AM propose de donner celle du nombre pair de salles impaires. LO lui rétorque : « elle est plutôt simple, c'est assez logique, pas besoin d'être Einstein ». Ils donnent cette conjecture, ainsi qu'une autre : « plus il y a de salles avec un nombre impair de portes, plus il est difficile d'établir un chemin ». Ils précisent à l'oral, que quand il y a 0 salle impaire on peut faire un circuit, 2 salles un chemin et 4 salles ou plus on ne peut faire ni l'un, ni l'autre.

La première feuille de graphe leur est donnée.

LO remarque que ça revient à ce qu'ils faisaient « quand ils reliaient toutes les portes », mais

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

les autres le reprennent, ici il faut passer par toutes les arêtes, pas par tous les « points ». Ils réussissent alors à trouver un circuit dans le premier graphe. Après moins de trente secondes de réflexion :

557	LO	*Ah oui ! C'est dans le même genre... En fait ça fait comme si ça c'étaient des pièces, et le nombre d'arêtes c'est le nombre de portes. Et donc le nombre de trucs qui partent de chaque point, ce serait comme... En fait, les points c'est comme les pièces. Et le nombre de traits qui partent de chaque point, si c'est impair, ça fait comme si c'était une pièce avec un nombre de portes impair. Et là, donc celui-là* (il désigne le deuxième musée)*il est impossible parce qu'il y en a trois... Ça fait comme un truc où il y aurait 4 pièces impaires...*

Ils vérifient sur ces deux exemples que leurs conjectures sont valides. Ils additionnent les degrés de chaque sommet et divisent par deux pour avoir le nombre d'arêtes. Ils estiment que le problème est bien trop simple pour eux.

Le GO leur donne la deuxième feuille graphe, qui contient un graphe non connexe où tous les sommets sont de degré pair. Ils établissent le degré de chaque sommet.

649	ES	*Je suis sûre qu'on pourrait faire un espèce de musée avec ça.*
650	FL	*Ouais . Ben il est tordu le musée. C'est un architecte moderne qui aurait fait le truc...*
651	ES	*On pourrait réorganiser le truc, sans les croiser, et ça ferait un musée en fait.*

(Le graphe est effectivement planaire, il est même tracé de façon plane, il suffit de séparer les deux composantes connexes pour le voir).

Le groupe est convaincu de trouver un circuit comme tous les sommets sont de degré pair. LO précise que lorque les arêtes se croisent en un point qui n'est pas un sommet « il faut aller tout droit ». (Cette remarque est importante, car si chaque croisement d'arêtes était considéré comme un sommet, le graphe serait connexe et eulérien, chaque sommet ajouté au graphe ayant un degré pair, 4 en l'occurence). Il remarque aussi que les sommets de degré 2 « ne servent à rien, on peut les supprimer ». Ils cherchent sans trouver, et gomment beaucoup. LO propose de numéroter les sommets dans l'ordre de parcours, puis après 5 minutes, propose de numéroter plutôt l'ordre des arêtes.

Huit minutes après que le graphe leur a été donné, FL dit avoir trouvé un chemin. Mais il n'a pas noté l'ordre dans lequel il l'a trouvé, du coup personne ne peut lire sa solution. Ils décident de tous numéroter les sommets ou arêtes traversés lors de leurs tentatives. FL pense qu'il faut remettre en question leur conjecture. Les trois autres ne sont pas d'accord.

775	GO	*cCa a l'air de ne pas marcher. Pourtant ça marche dans certains cas.*
777	FL	*Peut-être que là ce n'est pas la même propriété.*
778	AM	*Oui, mais là ils sont superposés aussi.*

AM essaie d'expliquer sa position, qui est de dire qu'il est difficile de trouver un chemin étant donné que le dessin lui même est compliqué, et que les arêtes se croisent.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

787	LO	*Je sais pourquoi. C'est parce qu'il y a deux circuits différents. On peut pas les relier. Celui-là, il est indépendant par rapport à l'autre. Y'en a un qui est indépendant. Ils ne se relient jamais. Faudrait les dessiner en rouge et en bleu pour les différencier.*

Une fois les couleurs ajoutées, le groupe est convaincu. Ils cherchent maintenant à voir si chacun contient des circuits.

831	LO	*C'est possible d'en finir un et de finir l'autre, mais c'est impossible de les relier vu qu'il n'y a pas de portes intermédiaires.*
833	GO	*Et ce sont des circuits ?*
833	LO	*Y'a deux circuits différents.*
833	GO	*Et ce sont des circuits ? Ou ce sont des chemins différents ?*
833	LO	*Ah ! Je ne sais pas.*
834	FL	*On est sûrs que ce sont des chemins différents. Après des circuits... Faut voir.*

FL compare les arêtes qui se croisent à des couloirs qui ne se croiseraient pas, ce qu'il a du mal à visualiser. Après avoir trouvé les deux circuits, ils comptent le nombre d'arêtes qui les composent, et se rendent compte que l'un d'eux est composé d'un nombre impair d'arêtes, ce qui semble les déstabiliser un instant.

FL exprime l'image qui lui manquait : « ce sont les deux étages d'un musée, sans escalier ». Le GO cherche à leur faire modifier leurs conjectures. Ce à quoi le groupe résiste. Leurs conjectures sont justes, c'est seulement qu'on leur a donné deux graphes différents superposés. Avec l'aide du GO, ils disent que la condition de parité des degrés est une condition nécessaire, et ajoutent qu'il ne faut qu'il n'y ait pas d'arêtes isolées des autres. Le GO essaie de leur faire dire une phrase exprimant la condition nécessaire.

Ils ajoutent à leur « règle » qu'il faut que chaque sommet soit accessible à partir des autres » (ce qui est une définition correcte et formulée presqu'à l'identique d'une défintion traditionnelle de la connexité).

Le dernier musée leur est donné. Ils vérifient que « tout est bien relié », avant de commencer à compter le nombre d'arêtes par sommet. Ils trouvent deux sommets de degré impair, et conjecturent qu'un circuit est impossible, et qu'un chemin doit exister partant de l'un de ces sommets « impairs ». Après cinq minutes, FL a trouvé un chemin. ES pense « quil faut avoir du bol pour le réussir ». LO se rend compte qu'il a « bloqué le haut » (le graphe est composé de deux composantes connexes reliées par une arête ; LO a commencé dans l'une d'elle et est passé dans l'autre sans l'achever). Voyant l'échec des autres, FL pense, puis affirme qu'il s'est trompé. Après une bonne dizaine de minutes de recherche sur le graphe, ils commencent à se demander si leur propriété est vraie. ES pense que l'on choisit les graphes au fur et à mesure pour leur faire compléter leurs conjectures.

LO pense avoir trouvé un chemin, mais la synthèse commence avant que le groupe n'ait vérifié sa validité.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

B.4 Groupe D

GO : Marie-Jo

B.4.1 Première séance

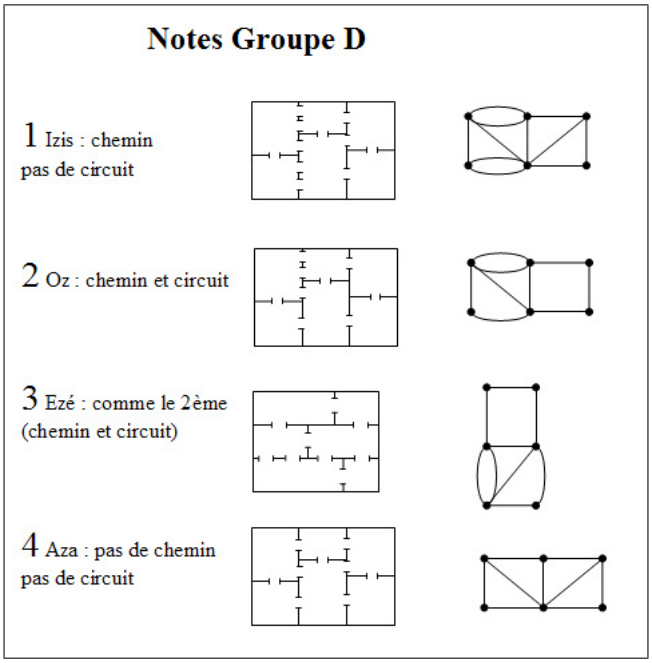


FIG. B.12: *La feuille de synthèse pour le groupe.*

B.4.2 Seconde séance

Après que les consignes sont données à la classe puis dans le groupe, la feuille $A1$ est distribuée. Le groupe cherche à se remémorer les conjectures émises lors de la séance précédente :

31	A	*Si on a plus de deux salles impaires, on ne peut rien faire.*
49	B	*Si y'a que des nombres pairs de portes on peut tout faire. On peut faire un circuit.* La conversation sur le musée de la feuille $A1$ commence. Ils écrivent sur leurs feuilles le nombre de portes dans chaque pièce.
65	C	*Il n'y a pas de chemin. Parce qu'il faut qu'il y ait deux salles impaires. Une où on démarre. L'autre où on arrive.*

Un court débat sur la différence entre chemin et circuit s'engage dans le groupe :

75-76	B	*Un circuit, c'est un chemin.*
76-78	A	*Mais un chemin ce n'est pas un circuit.*
81-82	C	*Parce qu'un chemin, ça peut revenir au point de départ.*

Le groupe discute un moment pour retrouver une conjecture concernant « le nombre de salles de portes impaires ». Puis le GO distribue les feuilles $A2$ et $A3$. Le groupe pense que ces deux musées ne permettent pas de « faire des chemins » (donc des circuits), puis s'interroge sur un musée qui ne comporterait qu'une seule salle impaire.

204	A	*Mais si y'en a qu'une, on peut faire un circuit !*
206	D	*On avait regardé, je crois...*
208	C	*Si y'en a qu'une, on ne peut pas faire un circuit, parce qu'on ne peut plus repartir de cette...*
210	A	*En fait il n'y en a pas de comme ça...*
215	B	*Si ! On peut faire un chemin. Mais pas de circuit.*
222	A	*Parce que, en fait, pour faire un chemin, il faut deux portes, pile ! Ah ben non ! Non, non, non...*
230	B	En montrant une salle avec une seule porte : *En fait il faut partir de la salle toute seule.*
231	A	*Ouais, mais tu vois celle à trois portes ? Si y'en a qu'une seule, on sera obligés de rentrer ou de sortir dedans.*
233	C	*Mais en fait, imaginons qu'on fait tout le circuit. Comme ça. On sera obligés de ressortir. Donc ça fera pas un circuit, donc notre machin il marche toujours.*

Discutent sur cette conjecture. Est-elle une nouvelle conjecture, ou revient-elle au même que la précédente ? Discussion pratique sur la rédaction de la conjecture, et sur la différence chemin-circuit. Le groupe lit les conjectures écrites sur leur feuille.

« Quand il y a un nombre impair de portes dans une salle, on ne pourra jamais avoir un circuit. Car, dans une salle au nombre de portes impaires, on peut rentrer dedans mais pas y rester. »

La première synthèse commence. Puis la première feuille de graphes est distribuée dans le groupe.

Deux élèves discutent du fait que le problème est le même que celui de la maison que l'on doit tracer sans lever le stylo. L'une des élèves a des doutes sur le problème, doit-elle passer par tous les traits ou croiser chacun des traits ? Chacun tente de résoudre le problème sur sa feuille. Le premier est résolu presque immédiatement par tous. La seule difficulté est de faire apparaître l'ordre des arêtes empruntées. Une élève décide de noter son départ et son arrivée, et se rend compte que quelque soit l'endroit d'où elle commence, elle revient au même point de départ.

Le groupe est vite persuadé que le deuxième graphe est « impossible ». Ils comptent le nombre de sommets, d'arêtes, mais n'aboutissent pas. Une élève remarque qu'il suffirait de changer une seule arête pour qu'un chemin soit possible.

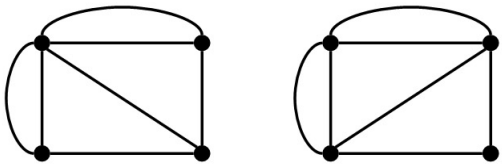


FIG. B.13: *Si l'on change l'arête « en diagonale » du graphe de gauche, alors un chemin eulérien dans le graphe de droite est possible.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

623-624	B	*Moi ce qui m'énerve c'est cette barre là. Elle n'est pas dans le bon sens.*
625-627	GO	*Ça changerait quoi ? Par rapport à... Essaie de voir pourquoi ça ne marche pas dans un cas...*
628-629	A	*Ah ! C'est parce qu'elle arrive au milieu de deux...*
630-631	GO	*Pourquoi ça marche là, pourquoi ça marche pas là, pourquoi ça marcherait là ?*
631-635	A	*Parce qu'elle arrive au milieu de quatre intersections. Alors que là, elle arriverait à trois intersections. Parce que là, vu qu'ils sont déjà quatre, une de plus c'est une de trop.*
636	B	*Oui, mais là aussi il y a quatre intersections.*
643	A	*Si ça arrive à un nombre impair d'intersections, ça ne marche pas.*

Le groupe regarde les différents graphes et comptent les arêtes qui arrivent à chaque « intersection ». Les élèves cherchent à comparer ces résultats par rapport à l'existence de chemin ou de circuit. La conjecture qu'ils obtiennent est : « s'il y a un nombre pair d'arêtes qui partent de chaque point, alors on peut faire un circuit ».

Le groupe se pose alors la question de l'existence de chemin. Ils ne voient pas comment un chemin qui ne reviendrait pas à son point de départ pourrait être possible étant donné « que l'on veut refaire toute la figure », et « que l'on doit passer par tous les points ». Le GO leur donne un exemple d'un tel chemin. A et D ont du mal à être convaincues par l'exemple. Les élèves cherchent à comparer ce nouveau graphe aux autres. Puis ils commencent à compter le nombre total d'arêtes pour chaque graphe, avec la conjecture « si le nombre total d'arêtes du graphe est pair alors il y a un circuit ».

842-844	D	En montrant le premier graphe de la feuille. *Là, si on rajoute une arête on peut partir d'un endroit et arriver à un autre. Alors que comme ça on peut pas faire un chemin, on revient toujours au même point.*
844	GO	*Donc on n'a que des chemins qui sont des circuits, c'est ça que tu veux dire ?*
844	D	*Oui*
845	GO	*D'accord. Et si tu rajoutes une arête... Donc tu dirais que c'est le nombre d'arêtes ?*
846	B	*Moi je dirais que c'est l'intersection, là. Parce qu'il y a quatre arêtes qui arrivent à cette intersection. Donc s'il y a au moins une intersection où il y a un nombre pair d'arêtes dans la figure... on peut faire un chemin. Mais s'il n'y a que des intersections avec des nombres impairs d'arêtes qui arrivent, alors on ne peut rien faire.*

Ils recommencent à compter le nombre d'arêtes qui arrivent en chaque « intersection ». Et se rendent compte que la transformation consistant à ajoutant une arête au deuxième graphe amène à transformer le degré de deux sommets en degré pair, les deux autres restant inchangés. Ils se rendent alors compte que les points de départ et d'arrivée de leurs chemins sont les deux sommets de degré impair.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

909	A	*En fait, ça revient au même que dans les musées... Ça va être les mêmes règles que dans les musées.*
912	GO	*C'est-à-dire ?*
913-915	A	*Les pièces ça va être les points, et les portes ça va être les arêtes.*
915-918	C	Elle lit. *« Si toutes les pièces ont un nombre pair de portes alors on peut faire un circuit »,* (elle montre le premier graphe) *c'est ce qu'on a là.*

Ils continuent d'essayer de « traduire » leurs conjectures sur les musées en termes de graphe. « Tout marche », ce qui leur fait dire que nous leur avons fait « une bonne blague ».

La deuxième feuille de graphe leur est distribuée. Tout le groupe travaille sur le même dessin, et ne réussit pas. Très vite (une vingtaine de seconde) une élève se rend compte qu'« il y a un truc », qu'« ils ne sont pas collés ».

971	C	*Je vois pas, quand on est là, comment on peut arriver à rejoindre, là. Tu vois, il y a un problème*
974	D	*Y'a une partie qui est indépendante, là !*
976	B	*C'est pas relié entre eux, la bonne blague !*

Une discussion s'amorce sur leur conjecture. Vu que chaque partie contient un circuit, leur conjecture est-elle infirmée ou confirmée ? Une discussion sur la connexité commence : « il faut que les figures soient reliées », « il ne faut pas que les figures soient indépendantes », « il faut que les figures soient ensemble, il ne faut pas qu'il y en ait une qui aille se balader ailleurs ». Les élèves finissent par se mettre d'accord pour dire qu'il manquait seulement une condition à leur conjecture.

Le dernier graphe leur est distribué.

1004	GO	*Qu'est-ce que vous en concluez ?*
1004	A	*Que toutes les propriétés du musée, elles...*
1005	B	*Elles sont justes. Mais il faut en rajouter une. Celle qu'on a dit tout à l'heure. Faut tous qu'ils soient reliés entre eux. Faut pas que ce soit disjoint.*

Le groupe « traduit » ses conjectures, puis les élèves cherchent à traduire les conjectures écrites au tableau, et à tester leur validité. Ils se penchent en particulier sur les conjectures : « s'il y a deux pièces paires, alors quelque soit le nombre de pièces impaires, on peut faire un chemin mais pas de circuit. » et « le nombre de salles avec un nombre de portes impair est toujours pair ». Pour la première, le groupe finit par se convaincre que la conjecture n'est pas vérifiée, et qu'elle est en contradiction avec leur propre conjecture. Pour la seconde, le GO dessine un graphe et leur demande de vérifier ce qu'il se passe dès qu'il ajoute une arête. Le groupe est convaincu que l'ajout d'une arête modifie la parité du degré de deux sommets, ce qui donne toujours un nombre pair de sommets de degré impair.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

B.5 Groupe F

GO : Léa Le groupe est composé de 4 élèves, DA, GE, MA et PO.

B.5.1 Première séance

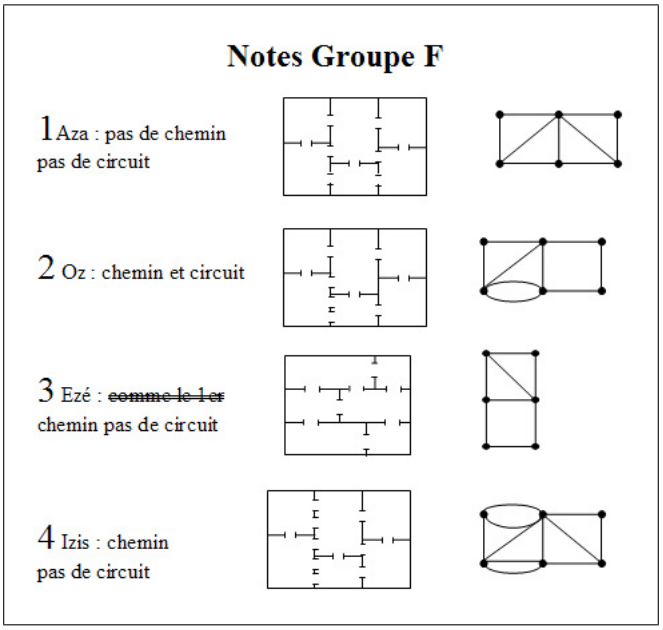


FIG. B.14: *La feuille de synthèse pour le groupe.*

Le groupe s'engage tout de suite dans une démarche d'essais/erreurs sur la première feuille qui leur a été distribuée. Ce premier musée ne peut être parcouru de façon eulérienne. Après des tentatives infructueuses, GE aimerait « condamner une porte », en effet il lui « manque toujours une porte » lors de ses parcours. Les discussions fournies dans le groupe tournent autour de cette impossibilité. Pour que ce soit possible, il faudrait soit enlever un mur (et les portes que ce mur supporte), soit condamner une porte.

100	DA	*J'pense que le truc, c'est qu'il y a un nombre impair de portes, là. C'est ça le truc.*
102	MA	*De toutes façons c'est une question. Si ça se trouve la réponse, c'est non.*
110	DA	*Regarde, ils disent une seule fois par chaque porte, ils ne mentionnent pas que c'est une seule fois par chaque pièce.*

Le groupe réfléchit un moment à cette proposition, puis l'abandonne vu qu'elle ne change pas leur façon de chercher un chemin.

155	MA	*En fait, je crois qu'il faut commencer... Que le point de départ, ce soit dans une pièce où il y a trois portes.*

Ils cherchent des chemins en partant d'une pièce ayant un nombre impair de portes. PO aimerait répondre « non » à la question et « c'est tout ». DA propose une recherche exhaustive en partant d'une pièce donnée. Mais ils abandonnent très vite l'idée. Tous se penchent sur un dessin particulier de tracé dans le musée, « la fleur » :

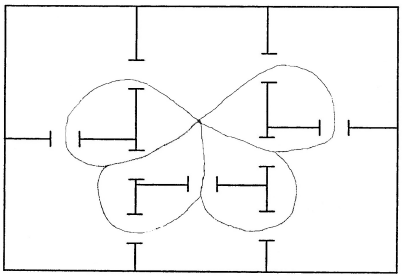


FIG. B.15: *Le motif de la fleur.*

En relisant l'énoncé, ils se rendent compte qu'ils n'ont pas traité la question du circuit.

358	GE	*Si ça se trouve on va finir par trouver le circuit du premier coup. Puis le chemin on l'aura pas trouvé.*
360	PO	*Ben, si on trouve le circuit, on peut trouver le chemin.*
360	GE	*Non ! Ce sera un circuit, mais après il faudra trouver un autre truc encore.*

Une discussion s'engage sur la différence circuit/chemin. PO est persuadée qu'il n'y en aura pas, vu qu'« un circuit c'est encore plus dur à trouver qu'un chemin ». GE est lui persuadé que l'on peut rajouter une nouvelle porte n'importe où, il y aura toujours un chemin.

PO propose d'utiliser la stratégie du labyrinthe, en cherchant à aller toujours à droite ou tout droit.

GE et MA continuent à chercher un chemin en systématisant leur recherche.

La deuxième feuille leur est donnée. Toutes les pièces ont un nombre pair de portes.

En moins de dix secondes, l'un d'eux a trouvé un circuit. Existe-t-il alors un chemin dans le graphe ?

470	GO	*La question que j'ai envie de vous poser, c'est pourquoi là. . . .*
470	GE	*parce qu'il y a un nombre pair de portes !*
471	PO	*1, 2, . . . Non, c'est toujours 9 portes.*
471	GE	*Tu rigoles ?*
473	PO	*Parce que y'a pas de pièces avec trois portes. Y'a que des pièces avec un nombre pair de portes*
474	MA	*Voilà, c'est ça !*

PO essaie de convaincre le GO qu'elle a raison. Pendant ce temps GE et DA discutent d'une symétrie du musée par rapport à un axe vertical. Le groupe reprend la discussion sur l'existence

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

d'un chemin dans le musée qui serait difficile à trouver. Finalement MA leur relit la définition du terme « circuit » : « un circuit et un chemin qui revient à son point de départ », mais elle ne semble pas avoir convaincu les autres.

501	DA	*Faut trouver une pièce qui a un nombre de portes impair. Parce que si y'a un nombre de portes pair, on reviendra toujours à notre point de départ.*

Le groupe continue à chercher un chemin qui ne soit pas un circuit.

Le troisième musée leur est distribué. Une vingtaine de secondes plus tard, GE et DA essaient de convaincre les autres que ce musée est identique au premier (ce qui devrait être le cas, mais ne l'est pas : une porte a du être effacée lors des manipulations de l'image). Ils cherchent à nouveau et trouvent très vite des chemins dans le graphe, ils cherchent alors des circuits.

559	GE	*Y'a des portes qui sont en nombres impairs. Donc, on est obligé de finir à l'intérieur.*
560-563	PO	*Oui, mais vu qu'il y en a plusieurs, tu peux pas finir à l'intérieur de trois pièces.* Elle montre un circuit sur sa feuille.*Eh ! Là, il y a toujours une porte en trop. Ces musées ils sont mal foutus, franchement...*
573-574	GE	*Non, mais c'est trop dur ! En fait, celles qui sont en nombres impairs, on est obligés soit de commencer, soit de finir dedans.*
574-576		Tous parlent en même temps.
577	GE	*Oh, réfléchis, réfléchis ! En fait, t'as trois portes. Tu entres dans cette salle, tu sors, et tu rerentres. Ben oui mais, tu es obligé de finir dedans. Ou de commencer...*
578	PO	*Attends ! Tu sais lesquels ont trois portes ?*
579	GE	*T'en as deux. C'est le point de départ et le point d'arrivée du chemin. Du coup le circuit c'est pas possible.*

Le groupe se convainct petit à petit des arguments de GE. D'autres questions se posent alors. Et s'il n'y avait qu'une salle avec un nombre impair de portes ? Que se passait-il dans le premier musée pour qu'il n'y ait ni circuit ni chemin ? Le GO leur propose alors de rédiger leurs différentes conjectures, en les dissuadant de décrire leurs recherches musée par musée, les autres groupes n'ayant pas forcément les mêmes.

628	GE	*Faire un circuit dans un musée nécessite que chacune des pièces ait un nombre pair de portes !*
629	PO	*Oui, mais ça c'est peut-être pour nous. Peut-être qu'eux ils ont un truc avec des nombres pairs, et ils ne sont pas arrivés à faire de circuit.*
630	GE	*Oui, mais c'est ce qu'on a trouvé. Si ça se trouve c'est complètement faux. On va voir après.*
631	PO	*Oui, mais il faut faire un truc qui est vrai. Enfin, à mon avis c'est ce qu'ils nous demandent...*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

La discussion sur les conjectures est relancée. PO pense qu'il ne faut pas compter le nombre de portes par pièces étant donné que lorsqu'on quitte une pièce on entre dans une autre. Chaque porte ne devrait donc être comptée qu'une seule fois, soit de la pièce dont on sort, soit dans la pièce dans laquelle on entre.

658	MA	*Oui, une porte ça vaut deux...*
659	PO	*Une porte ça vaut pour deux pièces, en fait.*
659	MA	*Non ! Une pièce ça vaut deux sur ton schéma. Si tu traverses, là. Du coup tu en enlèves une là, et une de ce côté. Mias ce n'est pas grave, parce qu'après tu peux généraliser.*
662	GE	*Parce que regarde, là.* Il montre le premier musée. *On n'a pas pu y arriver parce qu'il y en a plus de deux.*
663	MA	*Quand c'est un nombre impair de pièces à portes impaires...*

Ils regardent le premier musée. PO et MA pensent que c'est parce qu'il y a trois (soit un nombre impair de) pièces impaires qu'aucun chemin n'est possible. GE leur montre la quatrième salle impaire et réaffirme qu'il ne doit pas y avoir plus de deux pièces impaires car elle doivent servir de départ ou d'arrivée.

PO relance l'idée d'un axe de symétrie. Elle trace une ligne qui partage le musée en deux parties.

683	PO	*Mais lui, il a dit tout à l'heure que cétait un axe de symétrie.* Elle montre une pièce sur cet axe de symétrie. *Si on arrive à faire un chemin qui arrive là, et un de l'autre côté, et qu'ils arrivent dans cette pièce tous les deux, après t'as plus qu'à faire un chemin...*
686	GE	*Je n'ai rien compris.*
686	PO	*Il a dit que cette porte elle faisait office d'axe de symétrie. Si t'arrives à faire un chemin qui passe par ce côté là, et qui arrive dans ce truc là, et un chemin qui passe par toutes les portes de ce côté là...*

Seule MA semble quelque peu convaincue de l'idée. PO et MA réessaient de faire deux chemins qui se rejoindraient, pendant que GE et DA commencent à rédiger leurs « hypothèses » :

« Un circuit nécessite que toutes les pièces possèdent un nombre pair de portes ».

« Une pièce ayant un nombre impair de portes doit servir de départ ou d'arrivée au chemin ».

MA complète cette dernière conjecture : « Donc, quand il y a plus de deux pièces ayant un nombre impair de portes, c'est impossible de faire un chemin sans passer deux fois par la même porte ».

Ils dessinent deux musées pour tester leurs conjectures

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

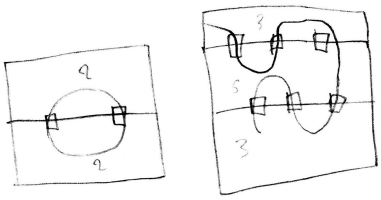


FIG. B.16: *Deux musées. Le premier avec seulement des salles paires comporte un circuit. Le second avec deux pièces impaires contient un chemin qui commence et se termine par ces deux salles.*

Le dernier musée leur est donné. Il comporte deux salles impaires. Le groupe compte les portes dans chaque pièce, repère les deux pièces impaires, et commence de l'une en pensant finir par l'autre. Un chemin est établi en quelques secondes. Ils sont persuadés de pouvoir maintenant trouver si un chemin, un circuit ou ni l'un ni l'autre existent dans le musée « en un seul coup d'œil » et leur recherche s'éteint. Le GO leur demande ce qu'il se passerait si le musée contenait une seule pièce avec un nombre impair de portes. GE pense alors à condamner des portes, ou à en créer sur l'un des musées qu'ils ont déjà en main pour obtenir un musée avec une seule salle impaire. Mais dès qu'il en crée une il se rend compte que « ça ne va pas faire ».

688	GE	*Tu sais pourquoi ? Parce quand on va supprimer une porte, on va la supprimer dans deux pièces en même temps, donc on va se retrouver avec deux pièces qui ont un nombre impair. Donc on n'arrivera pas à le faire. Faudrait qu'on en crée un, mais ça va être dur.*
693	MA	Elle montre aux autres qu'elle a réussi à obtenir un musée avec une seule pièce impaire. Les autres lui montrent qu'elle a oublié de compter l'une des portes dans une salle.
694	GE	*C'est impossible alors, en gros. . . . Ou bien il faut faire la porte d'entrée. . .*

Ils continuent tous d'essayer. MA a ajouté une pièce. Ils cherchent à regarder de musées pour lesquels les deux pièces impaires ont un nombre de portes supérieur à 3. Ils sont convaincus que cela marche même pour un nombre impair « important », et le vérifient sur un exemple à 5 portes.

Une courte discussion sur leur travail de la séance s'engage. Ils sont contents de ce qu'ils ont trouvé, et de leurs conjectures qui leur permettent de trouver « instantanément la réponse ».

974	GE	*Oh ! MA ! On peut effacer « hypothèses » maintenant, on sait que c'est bon.*
975	MA	*Ben non, on ne sait pas. On suppose que c'est ça.*
976	GE	*Ben pourtant, ça marche sur tout ce qu'on a testé.*

Ils recommencent, sous l'impulsion de PO à chercher un musée avec une unique salle impaire. Elle pense qu'ils n'ont pas tout essayé, et que cela doit exister. Elle pose aussi la question du

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

nombre total de pièces dans leurs musées, ce à quoi GE répond que ça n'a pas d'importance.

1049	GE	*Nous, ce qu'on compte c'est le nombre de portes.*
1050	PO	*Oui, mais t'es sûr que ça ne compte pas le nombre de pièces ?*
1050	GE	*Oui, je pense*
1050	MA	*Ah, non remarque. Pas sûr.*
1051	GE	*Tout ce qui compte, nous ce qu'on avait dit, c'est de ne pas en avoir plus de deux qui sont impaires. Mais après, le reste...*

PO recommence à proposer des musées dans lesquels elle cherche à n'avoir qu'une salle impaire. Devant un nouvel échec de sa tenative, elle semble commencer à se convaincre que cela ne marche pas. La conversation s'éteint. Le GO leur demande alors, s'ils ont des justifications à leurs conjectures, pourquoi ces conjectures seraient-elles vraies. La réponse de GE est « aucune idée », celle de PO « parce qu'on a essayé, et au bout d'une vingtaine d'essais, on en a déduit que ».

1103	GO	*Vous êtes sûrs ? Si je vais chercher d'autres feuilles là-bas...*
1103	PO	*Ben ouais !*
1103	GE	*Ouais !*
1103	MA	*Non ! Non, on n'est pas sûr.*
1104	PO	*Mais on n'a qu'à essayer !*
1104	GE	*On n'a qu'à essayer !*

Tous parlent en même temps. Ils discutent à la fois de leurs certitudes par rapport à leurs conjectures, de ce qu'il se passerait avec des musées plus complexes. Ils se posent alors la question de la forme des pièces, de ce qu'il se passerait avec des pièces triangulaires.

Un « grand » musée avec 6 salles ayant un nombre impair de portes leur est distribué. Ils cherchent pendant une bonne dizaine de minutes. Ils demandent alors un musée « super compliqué, mais avec que des portes paires ». Ils prennent un autre grand musée et constatent que toutes les pièces sont paires. En moins de 20 secondes ils trouvent un circuit « ce qui confirme leurs hypothèses ».

1223	MA	*Pourquoi c'est comme ça ?*
1223	PO	*Pourquoi c'est comme ça ? Ben, parce que quand tu as une pièce. Soit tu commences par en sortir, parce que c'est ton point de départ. T'en sors, t'en rentres, tu pourras pas faire l'arrivée. Soit tu le prends comme point d'arrivée, tu rentres tu sors...*

La discussion se poursuit. GE, PO et DA cherchent à convaincre MA que cet argument est valide et suffisant. PO joue sur le contrat : « Pourquoi ils nous auraient donné des plans avec une fois tout pair, une fois deux impairs, et d'autres fois rien qui ne marche ? Il faut quand même les construire ces musées. Donc, c'est qu'on a raison... »

La séance s'achève.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

B.5.2 Seconde séance

Deuxième séance avec Léa pour GO, 4 élèves.

Consignes données à la classe

-64	Denise	*Alors votre prof dit qu'il faut écouter, alors vous allez écouter. Donc aujourd'hui nous faisons une 2ème séance et c'est la dernière. Je le dis parce que... Bon. On sait jamais. Peut-être vous le saviez. Vous allez... Alors, on va faire plusieurs choses. Dans un premier temps vous allez travailler en groupes, pour essayer, en quelque sorte, de vous souvenir et de récapituler ce à quoi vous êtes arrivés la dernière fois. Parce que c'est pas toujours facile. D'une semaine à l'autre on peut oublier des choses. Alors, pour cela, on vous a préparé 2 ou 3 autres musées, mais on va vous demander cette fois, non pas de tracer, d'essayer de tracer des chemins et des circuits, mais de... d'anticiper. Vous savez ce que ça veut dire anticiper ? Ça veut dire on va vous passer 3 musées différents, et pour chacun vous allez essayer, en regardant, juste en regardant la figure, le dessin, de dire si vous pensez qu'il existe un circuit ou un chemin et de donner les raisons. Pourquoi ? Hein ? Et vous allez essayer d'écrire... D'essayer de trouver, d'une manière générale, si jamais on vous donnait encore un énième, un autre musée, très grand, avec 100... 100 salles, enfin, etc., 3 étages, je ne sais pas, sans que vous ayez besoin de faire des essais, est-ce que vous seriez capables de dire s'il existe un chemin ou s'il n'en existe pas, et s'il existe un circuit ou s'il n'en existe pas. Donc il faut trouver ce qu'on appelle des conjectures, c'est-à-dire des propriétés générales sur les dessins qui vous permettent de dire à l'avance : oui/non. Hein ? Voilà. Alors, ça c'est un premier temps de travail.*
-35	Charles	*Vous aviez déjà trouvé des idées la fois dernière.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

-35	Denise	*Voilà. c'est-à-dire, il y en a ... Y'a pas mal de groupes où il y a déjà eu des idées. Mais du coup, en vous redonnant des dessins, on pense que, ça va vous aider à vous rappeler, un petit peu, ce que vous aviez trouvé. Alors ensuite on fera une séance... un petit moment collectif, c'est-à-dire que, Charles ou moi, on va passer au tableau, et on va noter vos conjectures au tableau. C'est-à-dire on va noter tout ce que vous avez trouvé. Pour que tout le monde soit au courant de ce que chaque groupe, un petit peu a fait. Et là où vous en êtes des résultats sur ce problème. Et puis après, vous allez refaire un travail de groupe sur autre chose. Complètement autre chose. C'est-à-dire on va vous poser un autre type de problème et on vous dira tout à l'heure de quoi il s'agit. Et puis à la fin de la séance et ben, on va récapituler tout ça. Et on essaiera de voir qu'est-ce que vous avez appris, qu'est-ce qui vous a intéressé, etc. Voilà. Bon, alors, euh... Vous êtes... Vous avez bien repris vos groupes, et on va faire comme l'autre jour, comme la dernière fois, c'est-à-dire, les observateurs sont là pour noter, vous pouvez quand même leur poser des questions, etc. Voilà, alors vous êtes partis pour 1 quart d'heure, là. D'accord ?*

Consignes dans le groupe

00	GO	*La dernière fois, vous étiez arrivés à un certain nombre de... si vous vous souvenez. Vous les aviez écrites sur une feuille.*
01	PO	*Ouais.*
–>09		INAUDIBLE
10	PO	*On peut pas relire ce qu'on avait marqué la dernière fois ?*
10	GO	*Si, mais par contre n'écrivez pas sur ces feuilles, je vous en donne des nouvelles.*
11	PO	*OK, OK.*
12	GO	*Enfin, je vous donne de nouveaux musées. Ce ne sont pas les mêmes que la dernière fois, même s'ils se ressemblent un peu, ce ne sont pas tout à fait les mêmes.*
14	GO	*Bon, je vous donne ça.* Donne la feuille F1. *Voilà. Je vais vous donner un peu de papier et je vous laisse réfléchir.* Donne des feuilles blanches.
17	MA	Montrant F1 : *C'est là-dessus qu'on peut pas écrire.*
18	GO	*Oui, je vous demande de ne pas écrire là-dessus.*
19	PO	*Oui ?*
20	GO	*Mais ce n'est pas ne pas écrire, c'est ne pas faire de dessin, de tracé, et je vais chercher votre feuille.*

Prise en main du problème dans le groupe :

24	GE	*9h37. Il est 9h 37.*
28	MA	*Tu mets la feuille au milieu s'te plaît.*

29	GE	*Ah oui, merde. On n'en a pas...*
30	PO	*Et il faut qu'on essaie de deviner si il y a un circuit ou un...*
32	GE	*Ben il faut compter les portes.*
33	PO	*Ben, 1, 2, 3, 4, ...*
34	GO	Rend au groupe leur feuille de synthèse de la séance précédente. *Voilà, je vous demande de ne pas réécrire sur celle-là. On est d'accord ?*
35	GE	*Ouais, ouais...*
37	PO	Montrant l'un des « musées ». *On peut écrire dessus le nombre de portes ?*
38	GE	*Le nombre de portes ?*
38	GO	*Oui, oui !*

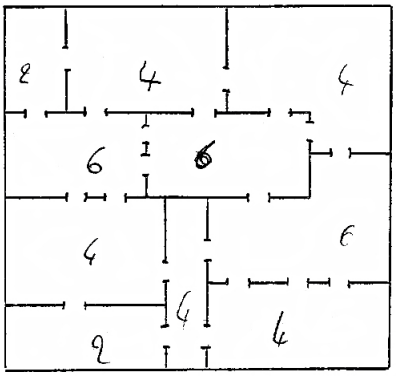


FIG. B.17: *Les premières annotations de la séance dans le groupe F*

43	GE	*On l'a pas déjà fait la semaine dernière celui-là ?*
45	MA à PO	*Y'en a 6 là.*
46	GE	*Ouais, c'est bon donc, c'est un circuit.*
46	GO	*Pourquoi ?*
47	PO	*On peut faire passer...*
47	GE	*Parce qu'il...*
47	DA	*Y'a 10 portes..., non, y'a 10 salles.*
48	PO	*Oui mais y'a que des salles avec des portes impaires. Euh des...*
49	PO	*Des portes paires.*
49	GE	*Des portes paires.*
49	PO	*Regarde !*
50	GE	*Donc c'est un circuit.*
51	PO	Elle lit une des conjectures écrites la fois précédente : *« Un circuit nécessite que toutes les pièces possèdent un nombre pair de portes ». Donc on peut faire un circuit et si on peut faire un circuit on peut forcément faire un chemin.*
52	MA	*Ouais.*
52	GE	*Mais si on avait eu 2 impairs ça nous aurait fait un chemin.*
53	MA et PO	*Ouais.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

54	GE	*Et sinon, ben, rien.*
55	PO	*Ben alors faut réécrire ça, c'est ça ?*
56	GO	*C'est... En fait, vous allez les proposer, après, pour être mis en commun. Donc il faudra que vous les donniez à la personne qui sera au tableau...*
58	PO	*Si toutes les pièces ont un nombre de portes pair on peut faire un circuit et un chemin, non ?*
60	GE	*Et ben... Si toutes les pièces, euh...*
62	MA	*Ouais. Si toutes les pièces ont un nombre pair de portes.*
64	GE	*On fera... On fera un circuit.*
68	PO	*Si toutes les pièces ont un nombre pair de portes, on peut faire un circuit...*
69	MA	*Alors un circuit est possible.*
70	GE	*Alors on peut faire un circuit. Point barre.*
71	PO	Écrit la conjecture.

Une discussion chemin VS circuit s'engage.

75	PO	*On peut faire un chemin et un circuit, ou un circuit tout court ?*
76	DA	*Un circuit, ben...*
76	MA	*Ben un chemin c'est forcément un circuit*
77	DA	*Non, non, non. Un circuit, hein ?*
78	MA	*Oui mais un chemin c'est aussi un circuit. Euh...*
79	GE	*Non !*
79	MA	*Si !*
79	DA	*Non !*
79	MA	*Mais si !*
80	PO	*Un circuit c'est pas un...*
80	MA	*Un circuit c'est pas un chemin, mais un chemin c'est un circuit.*
81	PO	*Non !*
81	DA	*Bof !*
82	PO	*Un chemin c'est pas un circuit, mais un circuit c'est un chemin*
83	GE et DA	*Oui !*
83	MA	*Oui, voilà !*
84	GE	*Bof.*
84	MA et DA	*Mais si !*
84	PO	*Mais si ! Regarde. Là. Si tu fais ça...*
85	GE	*Je m'incline.*
85	PO	*C'est un circuit.*
86	MA	*Parce que c'est comme l'exemple : « Si tu es haut savoyard tu es français. Mais si tu es français tu n'es pas forcément haut savoyard. »*
87	GE	*N'empêche que eux sur les fiches, ils différencient.*
88	MA	*Oui, mais il y a une différence, mais un...*
89	PO	*Circuit, ça revient forcément à la porte de départ. Un chemin ça peut revenir à la porte de départ, mais c'est pas obligé.*
91	GE	*Mais ça peut pas revenir à la porte de départ.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

91	PO et DA	*Mais si !*
92	MA	*Éventuellement.*
92	PO	*Un chemin. Mais si ! Regarde, au pire tu le modifies à la dernière... À la dernière porte tu modifies le sens où tu vas. Comme ça, ça te fait forcément...*
94	MA	*Mais un chemin, c'est un circuit. Bon d'accord, si tu veux.*
95	GE	*Mais la semaine dernière on avait essayé de faire un chemin, là. T'arriveras jamais à faire un chemin avec ça.*
96	PO	*Mais si !*
97	MA	*Mais un chemin c'est aussi un circuit.*
97	GE	*Ouais. Bon d'accord, mais... Ouais. Mais j'sais pas... Pourtant sur les fiches, ils différencient.*
99	MA	*Parce qu'il y a une différence. Mais un chemin c'est forcément un circuit, mais un circuit n'est pas forcément un chemin.*
102	GO	*Vous vous souvenez comment était défini un circuit la dernière fois ?*
102	GE	*Ouais, c'est un tour. Un tour complet en fait.*
103	MA	*Quand le point d'arrivée c'est le même que le point de départ.*
103	GE	*C'est le point de départ.*
106	PO	*Si ! On peut faire un chemin.*
106	GE	*Ah oui ! Ben vas-y dis-moi comment.*
107	PO	*On n'écrit pas. On ne peut pas écrire sur les feuilles.*
108	PO	Elle montre sur la feuille sans tracer. *Comme ça.*
109	MA	*Après, là, on va forcément revenir au point de départ.*
110	GE	*Donc tu pars de laquelle, déjà ?*
110	PO	*Tu pars de celle que tu veux.*
111	DA	*Mais, moi j'pense qu'il faut se fier à ce que l'on a dit. Ça sert à rien de...*
112	MA	*Mais oui, la dernière fois on avait vu que...*
113	PO	*Mais j'te dis. On peut faire.*
113	DA	*Non !*
113	PO	*Un chemin.*
113	GE	*On avait essayé la semaine dernière.*
114	MA	*Bon, alors. On peut faire un circuit. Voilà.*
114	DA	*On va...*
114	MA	*Alors faudra marquer un circuit.*
115	DA	*On va pas rentrer dans les détails, aussi...*
115	PO	Continue de chercher un chemin qui ne soit pas un circuit dans un musée où toutes les pièces ont un nombre pair de portes.
117	PO	*Je suis déjà passée comme ça.*
120	GE	*Tu ne serais pas déjà un peu passée par toutes ces portes ?*
121	PO	*Peut-être, j'sais pas.*
121	DA	*Enfin, bref.*
122	Tous	Inaudible.
123	GE	*Si, toutes les portes ont un nombre... Non. Si toutes les pièces ont un nombre de portes pair, sauf 2...*
124	MA	*Oui mais, attend. On va voir par rapport aux autres.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

125	PO	*Par rapport aux autres trucs*
		Ils regardent un autre musée, le musée F2, celui des « ponts de Königsberg ».
125	GE	*OK.*
126	GE	*1, 2, 3.* *1, 2, 3.* *1, 2, 3.*
128	MA	*Ça marchera pas.*
129	GE	*1, 2, 3, 4, 5.*

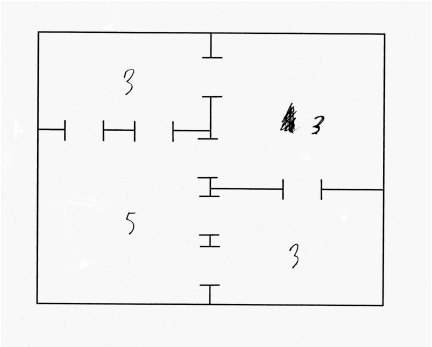


FIG. B.18: *Le musée des « ponts de Königsberg », où le nombre de portes de chaque pièce est noté. Cela correspond dans le graphe où chaque pièce est représenté par un sommet, au degré de chaque sommet.*

129	DA	*C'est bon là ?*
130	GE	*Ça marchera pas.*
130	MA	*Non.*
130	DA	*Ben si parce qu'il y a 4 pièces.*
131	GE	*Mmmm.*
131	MA	*Non ! C'est pas les pièces qui...*
131	DA	*Y'a 4 pièces, et euh...*
132	GE	*Oui, mais on n'a pas 4 arrivées. Et portes. On n'en a que 2.*
133	MA	*Regarde on a marqué : « Une pièce ayant un nombre impair de portes doit servir de départ ou d'arrivée au chemin ».*
134	GE	*Voilà.*
135	MA	*Et... Donc quand il y a plus de 2 pièces ayant un nombre impair de portes, c'est impossible de faire un chemin sans passer 2 fois par la même porte.*
137	GE	*Et puis aussi regarde : Hop, hop, et puis voilà enfermé. Hop, hop, hop...*
138	MA	*En fait il faut qu'il y en ait que 2 de pièces avec un nombre impair.*
138	GE	*Enfermé.*
138	DA	*Ouais.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

139	GE	*Voilà. Et si donc à deux. Et ben ça fera un chemin.*
141	MA à PO	*C'est bon, là, attend.*
141	GE à DA	*On n'a pas réussi à en faire un avec une seule pièce* (ayant un nombre impair de portes).
142	MA à PO	*Tu veux que je marque la propriété ?*
142	GE à DA	*Et après, c'est impossible.*
143	PO à MA	*C'est quoi la propriété ?*
143	MA à PO	*Enfin, la propriété. Ce qu'on a trouvé.*
144	PO	*Si...*
144	GE	*Si toutes les portes, toutes les pièces ont un nombre de portes pair...*
146	MA	*Non...*
146	GE	*Sauf 2.*
146	MA	*Non, si...*
146	DA	*Attends.*
147	MA	*Attends. On écrit. Si plus de 2 pièces ont un nombre impair de portes...*
149	GE	*Non, mais ce... Plus de 2... T'as déjà réussi à trouver une seule pièce impaire ?*
151	GE	*On l'a jamais fait ça.*
152	MA	*Oui mais, bon...*
152	GE	*On a essayé de faire des circuits, on n'a jamais réussi et ils nous en ont jamais proposés avec...*
153	MA	*Si... Oui... Plus de 2...*
155	GE	*Vaudrait pas mieux mettre 2 ? 2 ? Si un circuit comporte 2 pièces ayant un nombre de portes impair et toutes les autres ayant un nombre pair...*
157	PO	*Si un musée comporte 2 pièces ayant...* Elle écrit. *Si un musée... Mais là, on pourra faire un chemin mais pas un circuit.*
159	GE	*Ouais.*
160	MA	*Non...*
160	PO	*Si !*
160	MA	*Oui, oui, oui, d'accord.*
160	PO	*Ben si, parce que, une pièce impaire on peut passer d'un côté et revenir de l'autre.* Elle écrit. *Si un musée comporte... Combien de pièces ? 2 pièces.*
164	GE	*Deux pièces ayant un nombre de portes impair.*
165	MA	*Faut préciser qu'il y en a 1 qui sert d'arrivée et l'autre de départ.*
166	PO	*Impair de portes...* Elle écrit, sous la dictée de MA. Presque inaudible.
167	DA	*Si par exemple, y'a 4 pièces qu'ont un nombre pair. Non, si y'a 6 pièces qui ont un nombre pair. Et 4 qui ont un nombre impair. Ça marche ça ?*
169	MA	*Non, ça marche...*
169	GE	*Ça marche pas.*
169	MA	*...pas.*
170	GE	*Ben la preuve, là.* Il montre les ponts de Königsberg.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

170	MA	*Parce qu'il faut partir d'une pièce...*
171	GE	*Y'en a 4.*
171	DA	*Oui, mais il en y a 4. Si jamais y'avait 6 pièces, par exemple...*
172	GE	*Ça marche jamais.*
173	PO	*Ben non parce que 6 pièces tu peux pas partir d'une pièce, partir d'une pièce, partir d'une pièce.*
174	GE	*Ou alors il faut faire plusieurs circuits. Regarde, là, là ça marche. Tu vois, genre...*
175	MA	*Faut pas écrire dessus.*
176	GE	*Merde.* Il cherche une gomme.
177	PO	*T'es enregistré, GE !*
180	PO	*On peut faire un chemin mais pas de circuit, c'est ça ?*
181	GO	*Efface pas. N'efface pas, tu peux même continuer.*
182	PO	*On peut faire un chemin mais pas de circuit, c'est ça ?*
183	DA	*Ouais, ben t'as mis quoi ? C'est quoi déjà ?*
184	PO	Elle lit. *Si un musée comporte 2 pièces...*
185	GE	*Ayant un nombre de portes impair...*
186	PO	Elle écrit en même temps. *Ayant un nombre de portes impair...*
187	PO	*L'une servant d'arrivée, l'autre de départ... On peut faire un chemin mais pas de circuit.*
188	GE	*Euh, ouais, t'as oublié.*
189	DA	*Faut aussi dire que toutes les autres sont paires.*
190	MA	*Oui. Enfin... On en déduit que s'il y a que 2 qui sont impaires...*
191	DA	*Ouais. Bon*
191	MA	*Alors attends.* Elle lit. *Si un musée comporte 2 pièces ayant un nombre impair de portes, l'une sert d'arrivée, l'autre de départ, on peut faire un chemin...*
193	GE	*Lui il comporte 2 pièces ayant un nombre impair de portes.* Il montre les ponts de Königsberg. *Après il y en a peut-être plus.*
195	PO	*Deux pièces maximum.*
196	MA	*Deux pièces uniquement.*
196	GE	*Comportant maximum. Non. Comportant uniquement 2 pièces.*
197	MA	*Oui. Oui, uniquement, voilà.*
198	PO	écrit.
199	MA	*Et l'autre ce sera, si... Un musée...*
200	PO	*T'as essayé l'autre... L'autre truc ?* Elle montre l'une des feuilles posées sur la table.
201	MA	*Oui, mais justement ce n'est pas la propriété qui correspond à celui-là en fait.*
202	GE	*Lui on sait que c'est impossible par ce qu'il y en a plus de deux. Point barre.*
203	MA	*Voilà.*
203	PO	*Si un musée comporte plus de 2 pièces ayant un nombre de portes impair, on ne peut faire ni circuit,...*
204	MA	*Ni chemin.*
205	PO	*... ni chemin.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

205	GE	*Voilà.*
207	GE	*Faut l'essayer lui ?*
207	DA	*Faut pas préciser, on ne peut faire ni un circuit ni un chemin en passant par toutes les portes ?*
208	GE	Compte les portes du 3ème musée.*1, 2, 3, 4, 5.*
209	DA	*Parce que sinon tu peux quand même faire un chemin.*
210	MA à GE	*4 ici.*
213	MA	*Non on ne le trouvera pas ce chemin.*
213	GE	*Non, on peut pas.*
220	DA	*Pas possible.*
220	MA	Elle lit. *Si un musée comporte plus de 2 pièces ayant un nombre impair de portes, alors on ne peut tracer ni chemin, ni circuit.*
225	GO	*Dans moins de 5 minutes, on va écrire vos propositions au tableau. Vous avez toutes vos conjectures de la dernière fois ?*
226	Tous	*Mmmm.*
227	PO	*Et le dernier musée y'a une propriété spéciale ou pas ?*
228	MA	*De quoi ?*
228	PO	*Pour le dernier musée, y'a une propriété...*
229	MA	*Ben en fait...*
230	GE	*Ben... Là y'en a plus. Y'en a plus de 2, donc, c'est impossible.*

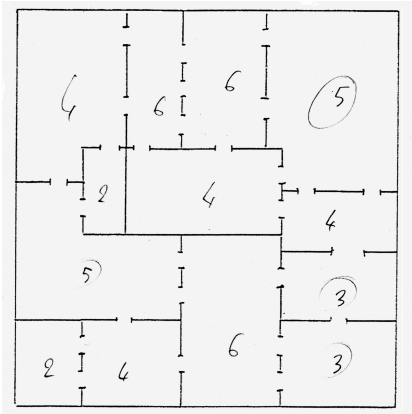


FIG. B.19: *Le groupe utilise ses conjectures pour affirmer qu'il n'existe pas de chemin ni de circuit dans ce « grand » musée.*

231	PO	*Donc, c'est la dernière propriété.*
234	GO	*En montrant des dessins de musées dans les petits cas. Vous aviez dit des choses à propos de ça la dernière fois. Vous vous souvenez ?*
235	GE	*Euh...*
235	PO	Montrant une propriété. *Ben, c'est ça, non ?*
239	GE	*Pas moyen d'écouter les cassettes de la semaine dernière, non ?*
240	Tous	Aparté sur le fait d'être enregistrés.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

248	MA	*Là, c'est quand il n'y a que 2 pièces. 'Fin. C'est des cas particuliers, après.*
250	GE	*Je sais, y'a un truc. On peut pas marquer. Oui, une feuille blanche.*
252	MA	*Attends y'en a une là.*
253	GE	*Merci.*
253	PO et GE	Tracent des musées.
259	PO	*C'est bon j'ai fait le même musée que lui. Où t'étais pas sûr qu'on pouvait faire un chemin.*
261	MA	*Moi, j'crois qu'en fait, là, t'es obligée de faire un circuit.*
261	MA et PO	Tracent, cherchent un chemin qui ne soit pas un circuit. Elles murmurent.
266	GE à GO	*Mais, je vois pas ce qu'on avait fait de plus.*
268	GE	*On avait essayé d'en faire un avec une seule pièce impaire.*
268	PO	*Ouais, ça fait un circuit en fait.*
269	MA	*Ouais mais un chemin c'est forcément un circuit en fait.*
269	GE à GO	*Vous avez pas un indice ?*
270	MA à PO	*C'est comme si tu es haut savoyard, tu es...*
271	MA et PO	*...français, si tu es français, tu n'es pas...*
271	GO à GE	*Je n'avais pas tout...*
272	PO à GE	*On arrive à faire un circuit, hein.*
272	GE	*Hein ?*
272	PO	*On arrive à faire un circuit pour le premier.*
273	MA	*Ouais mais en fait c'est pas un chemin, mais, c'est pareil, 'fin.*
273	GE	*De quoi ? Hein ? Qu'est-ce que tu racontes ?*
274	PO	*Tu sais, t'étais pas sûr qu'on puisse faire un circuit.*
274	GE	*Si ! J'étais sûr.*
275	MA	*Non, c'était pour le chemin. Parce qu'il est pas convaincu que le chemin c'est aussi un circuit.*
276	PO	*Ah, bon.*
276	GE	*Si on considère que le circuit qu'on a fait n'est pas un chemin,... T'arriveras pas à faire un chemin,... un... truc, qui arrive à 2 portes différentes...*
277	MA	*Non, tu peux pas.*
278	GE	*À 2 pièces différentes.*
278	PO	*Ah, ben faut p't-être le marquer ça.*
280	GO	*Si vous vous souvenez de comment c'était défini un circuit la dernière fois...* Donnant une feuille B1 à GE. *Pour répondre à ta question de tout à l'heure.*
281	PO	*Ben, voilà.* Lisant. *« Un circuit est un chemin ». Montre la feuille aux autres.*
283	GE	*Ah ouais.*
283	PO	*Faut p't-être le marquer, puisque soit on fait toutes les pièces ...*
285	GE	*On arrivera pas à faire un chemin qui ait, euh... Dont le départ et l'arrivée sont différents...*
286	PO	*Ben, un chemin, c'est forcément...*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

287	GE	*Dans 2 pièces différentes.*
287	PO	*Le départ et l'arrivée...*
287	MA	*Mais, c'est la même chose.*
287	GE à PO	*Mais non ! Là ils disent, un chemin c'est...*
288	PO	*Un chemin qui revient à son point de départ c'est un circuit.*
289	MA	*Un circuit, c'est...*
289	PO	*Un chemin ça revient jamais à son point de départ.*
290	GE	*Voilà. Donc...*
290	MA à PO	*Non !*
290	PO à MA	*Si ! Mais si, ça peut revenir.*
291	GE	*Donc, si on a un nombre...*
291	MA à PO	*Regarde celui-là.*
292	PO à MA	*Ben dans ce cas-là, ça s'appelle un circuit.*
293	GE	*Si on n'a que des pièces ayant des nombres pairs de portes, on n'arrivera pas à faire un circuit...*
295	PO	*Un chemin.*
295	GE	*Ah merde ! Un chemin qui ne...*
296	PO	*Un chemin tout court. Un chemin ça ne revient pas à son point de départ sinon ça s'appelle...*
297	GE	Il lit et montre la définition. *« Un circuit est un chemin qui revient à son point de départ ». Donc il faut dire que c'est un chemin qui ne revient pas.*
298	PO	*Un chemin ça ne revient pas à son point de départ, sinon ça s'appelle un circuit.*
299	GE	*Voilà, OK.*
299	MA	*Mais, en fait on n'a... C'est bon là. Pourquoi tu marques autre chose en fait ?*
300	PO	*Mais, j'sais pas. Il faut pas marquer qu'on n'a que des pièces avec des nombres de portes pairs, on peut pas faire de chemins...*
302	MA	*Eh ben, on peut faire un circuit.*
302	GE	*Oui, mais dit quand même « on ne peut pas faire de chemin qui ne soit pas un circuit ».*
302	MA	*C'est bon ! Tu l'as déjà marqué.*
303	PO	*Ah, mais, on l'a déjà marqué*
303	GE	*Ah bon ?*
303	PO	Elle lit.*On peut faire un circuit passant par toutes les portes, mais pas un chemin.*
304	GE	*Ouais...*
305	MA	*Si on part de l'idée qu'un chemin ce n'est pas un circuit... Euh qu'un circuit ce n'est pas un chemin. Enfin, bon, bref...*
306	PO	*Mais, si un chemin, c'est...*
306	MA	*Ben non...*
307	PO	*Un chemin, c'est...*
307	MA	*'Fin, bref, peut importe.*
307	PO à MA	*Un circuit c'est un chemin.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

307	GE	*Ben, j'pense qu'il faudrait p't-être le dire quand même. Un chemin qui ne revient pas à son point de départ.*
308	PO à MA	*C'est sûr ! Un circuit est un chemin...*
308	MA	*Voilà, tu vois, c'est bon...*
309	PO	*...qui revient à son point de départ. Donc un circuit c'est un chemin.*
310	GE	*Ouais. Ça veut dire que si un circuit est un chemin, ce que tu as mis, ça veut rien dire. Ce... C'est pas bon.*
311	PO	*Un circuit c'est forcément un chemin.*
311	GE	*T'as mis que...*
312	PO	*Mais un chemin, c'est pas forcément un circuit.*
312	GE	*On peut faire un circuit, mais pas un chemin. Alors que là, ils disent qu'un chemin est justement un circuit. Faut dire...*
313	PO	*Non ! Un chemin c'est pas forcément un circuit.*
314	GE	*Faut rajouter après ça. Tu dis...*
314	MA	*C'est un circuit qu'est un chemin.*
315	PO	*C'est un circuit qu'est un chien. Euh, un chemin.*
316	GE	*Ouais, ouais. T'as écrit, « on peut faire un circuit passant par toutes les portes, mais pas un chemin ».*
317	PO	*Et ben oui !*
317	GE	*Mais, justement ! Là, ils disent que un chemin, ça ...ça fait partie d'un circuit...*
318	MA	*Non !*
318	PO	*Non ! C'est un circuit...*
318	MA	*C'est à cause de ça. Comme tu nous croyais pas qu'on t'a rajouté ça, et maintenant t'es plus d'accord.*
320	PO	*On rajoute pas « mais pas un chemin », parce que ça perturbe tout le monde.*
321	GE	*Mais tu dis : « mais pas un chemin qui ne revient pas à son point de départ ». Il martèle les mots. C'est tout ce que je te demande...*
323	DA	Prenant un voix aiguë et suppliante *C'est tout ce que je te demande-euh...*
323	PO	*Mais regarde ! Un chemin ça fait toujours, par exemple comme ça.*
324	MA	*Et si jamais par hasard, ça revient, c'est quand même un chemin, sauf que ça s'appellera un circuit.*
325	GE	*Oui, mais...*
325	PO	*Regarde. Un chemin, ça fait comme ça par exemple...*
325	GE	*Oui voilà...*
325	PO	*Si t'as une porte là, et une porte là. Pas exemple, un chemin ça fait ça.*
326	GE	*Voilà.*
326	PO	*Et si jamais ton chemin, il revient au point de départ...*
327	GE	*Voilà, c'est un circuit...*
328	PO	*C'est un circuit.*
328	MA	*C'est un circuit, mais c'est quand même un chemin.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

328	GE	*Voilà.*
329	PO	*Mais, ça s'appelle un circuit.*
329	MA	*Mais c'est quand même un chemin. Donc, c'est pareil.*
330	PO	*Mais un circuit, il peut jamais faire ça.*
330	GE	*Mais c'est quand même un chemin.*
330	MA	*Et ben voilà !*
330	GE	*Et toi tu viens de dire qu'on peut un circuit mais qu'on peut pas faire un chemin, alors que, en lui-même un circuit est un chemin...*
331	MA	*Mais c'est parce que tu nous as embrouillé.*
331	PO	*Ah oui !*
331	PO à MA	*Il a raison !*
332	MA à PO	*Oui, mais c'est parce que il nous a embrouillé.*
332	GE à PO	*Donc, tu rajoutes « On ne peut pas faire de chemin qui ne revient pas à son point de départ » !*
334	PO	*Qui ne revient pas... Ouais !*
334	GE	*Pfffff...*
334	PO à GE	*En fait, t'as raison depuis le début, j'crois...*
336	MA	*Oui sauf que... Il faut bien argumenter un peu. Là, la prof de français elle serait contente. Un bon p'tit débat sur... Un circuit et un chemin...*
337	GE à DA	*C'est Harry Potter ça : « On pardonne plus facilement à ceux qui ont tort, qu'à ceux qui ont raison. »*
338	PO	Elle écrit. *« Mais pas de... » Pas de quoi ? « Pas de chemin qui ne revient pas à son point de départ. »*
342	PO	*Point de vue, non mais n'importe quoi. Point de départ. Tu vois maintenant avec tes trucs de français, maintenant ça m'embrouille.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

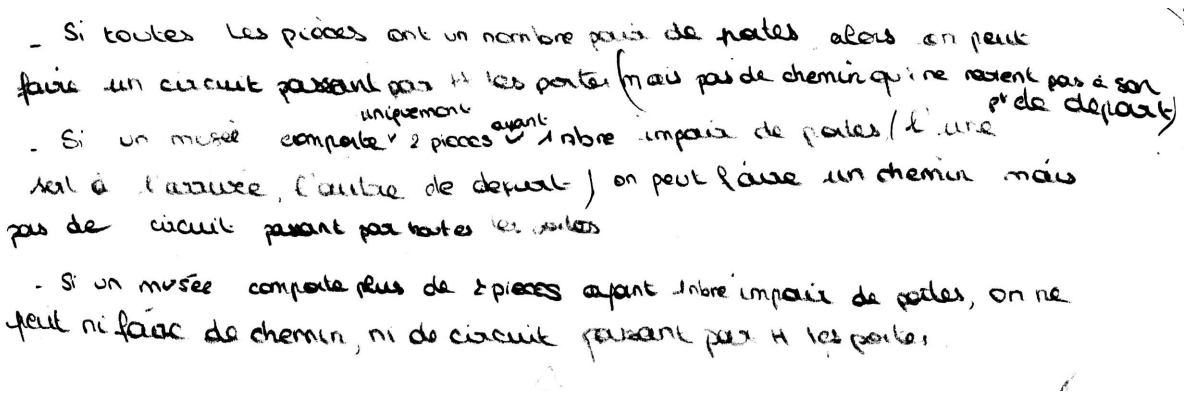

- Si toutes les pièces ont un nombre pair de portes alors on peut faire un circuit passant par toutes les portes (mais pas de chemin qui ne revient pas à son pt de départ)
- Si un musée comporte uniquement 2 pièces ayant 1 nbre impair de portes (l'une sert à l'arrivée, l'autre de départ) on peut faire un chemin mais pas de circuit passant par toutes les portes
- Si un musée comporte plus de 2 pièces ayant 1 nbre impair de portes, on ne peut ni faire de chemin, ni de circuit passant par toutes les portes.

FIG. B.20: *À ce stade, l'ensemble des conjectures sur les musées écrites par le groupe : « Si toutes les pièces ont un nombre pair de portes, alors on peut faire un circuit passant par toutes les portes, mais pas de chemin qui ne revient pas à son point de départ. Si un musée comporte uniquement deux pièces ayant un nombre impair de portes (l'une sert à l'arrivée, l'autre au départ) on peut faire un chemin mais pas de circuit passant par toutes les portes. Si un musée comporte plus de deux pièces ayant un nombre impair de portes, on ne peut ni faire de chemin, ni de circuit passant par toutes les portes. »*

Synthèse

344	Denise	*Bon allez, on fait une petite synthèse, là. Alors, euh...*
344	GE à PO	*T'as écrit « qui ne revient pas à son point de départ » ?*
344	PO	*Oui.*
346	GE	*Ben voilà, on a nos 3 règles. 3 règles ultimes.*
347	PO	*Y'en a p't-être plus que 3, hein ?*
347	Denise	*Allez, on va mettre...*
348	GE	*'Tend, nous elles englobent tout.*
348	Denise	*Bon, alors, vous, vous donnez votre résultat le plus important. On va demander à chaque groupe ce qui lui paraît le plus important, puis après on rajoutera.*
350	PO	*Mais, on en a 3...*
350	GO	*C'est pas grave, on rajoutera*
350	MA	*Ben dis la première.*
350	GE	*Non, la dernière, la dernière, celle qui dit que c'est impossible, s'il y a plus que 2, parce que ça peut faire tout...*
351	Denise	*Est-ce que vous avez trouvé des conditions...*
352	PO à Denise	*Oui, mais on en a trouvé 3, en fait.*
353	Denise	*Bon alors, vous donnez les 3.*
353	PO à tous	*Alors.* Elle lit. *« Si toutes les pièces ont un nombre pair de portes, alors on peut faire un circuit passant par toutes les portes, ...*
355	Denise	*Bon alors, « si...*
355	PO à tous	*...mais pas de chemin qui ne revient pas à son point de départ ».*
356	GE	*Elle t'a un peu coupé sur la fin...*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

357	Denise	*Je suis désolée, ça fait du bruit mais...* (Le stylo grince sur le tableau) *je ne peux pas casser la craie... « Alors... ?*
360	PO à tous	*« on peut faire un circuit »...*
360	Denise	*« On peut faire un circuit ».*
361	PO à tous	*« Qui passe par toutes les portes ».*
361	Denise	*Oui, on va pas rajouter, ça veut dire qu'il passe une fois et une seule par toutes les portes. Hein ? D'accord ?*
363	PO à tous	*« Mais pas de chemin qui ne revient pas à son point de départ »*
363	PO au groupe	*Bon on l'enlève ça !*
364	Denise	*« Mais pas de chemin » ?*
364	GE à tous	*« Mais pas de chemin... »*
365	PO à tous	*« De chemin qui ne revient pas à son point de départ ».*
370	GE	*Ben, dis la deuxième.*
371	PO à tous	*Euh... « Si un musée... »*
372	GO à tous	*On va p't-être changer de groupe, non ? On en donne une importante, comme...*
372	Denise	*Ben, oui. Et puis vous rajouterez les autres, s'ils n'ont pas été trouvés. D'accord ?*
374	GE	*Ouah... C'est pas juste...*
374	Denise	*Bon alors vous, vous avez déjà... Allez, je continue là-bas. Alors le groupe de M-Jo. Est-ce que vous aviez cette conjecture ? Cette propriété. Vous l'avez.*
376	?	*Oui mais.*
376	Denise	*Dans quels groupes vous l'avez cette propriété ? Peut-être le début mais pas la fin ?*
377	?	*Pas la fin parce que un circuit c'est un chemin...*
378	GE	*Oui, mais un chemin qui revient à son point de départ.*
379	Denise	*C'est-à-dire qu'ils ont l'air de dire qu'il n'y en a pas d'autres. Bon, alors qui est d'accord avec cette phrase, du moins avec la première partie de cette phrase ? Je crois que tout le monde est d'accord avec la première partie, et avec la deuxième partie ?*
382	?	*P't-être pas.*
382	Denise	*Peut-être pas, vous n'y avez pas réfléchi. Bon, d'accord. Alors maintenant vous avez une autre conjecture ? Une autre propriété ? Allez !*
386	?	*« S'il y a plus de 2 salles de nombre de portes impair »... Euh... On peut rien faire.*
391	GE	*Espérons qu'on puisse caler la 3ème. 'Fin la 2ème.*
392	PO	*On en a déjà dit une. C'est pas mal.*
392	GE	*Ouais mais bon.*
393	Denise	*« S'il y a plus de 2 salles...*
393	GE	*Pfft. Y'a les 2 tiers de nos données qui sont parties dans le vent.*
394	Denise	*... ayant un nombre impair de portes »... Plus ça veut dire trois ?*
395	GE	*Un seul tiers a été retenu à la postérité quand même.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

395	Denise	*Quatre, cinq, hein ? D'accord ? Euh qu'est-ce que c'est la conclusion ?*
397	?	*On ne peut rien faire.*
397	Denise	*« On ne peut rien faire ». Qu'est-ce que ça veut dire on ne peut rien faire ?*
397	?	*Ni circuit, ci chemin.*
397	Denise	*« Ni circuit, ni chemin ». Qui est-ce qui est d'accord avec ça ? C'est-à-dire, qui est-ce qui a trouvé quelque chose de ce genre ? Vous, vous, vous. Vous, vous vous êtes en tout cas posé la question. Oui, oui. D'accord. Bon alors après, le groupe là-bas.*
403	Charles	*Eux ils ont dit ça, mais après ils ont changé d'avis.*
404	?	*Ouais, on a trouvé en fait que...*
405	Denise	*Oui. Vous. Oui, mais j'espère qu'il y a d'autres avis. Alors, finalement ?*
406	?	*Ben ouais. On était parti sur ça, puis finalement on a remarqué que si on avait 1 pièce paire ça pouvait marcher...*
407	Denise	*Vous écoutez, et puis vous direz après si vous êtes d'accord.*
407	?	*Mais on n'avait pas remarqué que si y'avait 1 pièce paire, y'en avait forcément 2. Nous on pense que si y'a 2 pièces paires dans n'importe quel musée avec autant de nombre de portes impaires, c'est possible.*
412	Denise	*Oui, alors y'avait aussi cette propriété dans mon groupe qui est apparue. Alors vous étiez pas tous seuls. Donc si, il y a... C'est quoi, c'est 2 pièces. C'est exactement 2 ? Ou c'est...*
414	Charles	*Deux ou au moins 2 ?*
415	?	*Euh, c'est... 2.*
415	Denise	*Bon. 2, eh ben c'est 2. « S'il y a 2 pièces... ». On va mettre « paires », ça veut dire ayant un nombre pair de portes, hein ? D'accord ?*
418	GE	*Mais qu'est-ce qu'il a fait lui ?*
418	MA	*On n'a pas trouvé ça.*
418	GE	*Ben non ! On a trouvé le contraire.*
418	Denise	*Alors qu'est-ce qu'il se passe ? Quelque soit le reste...*
419	?	*Quelque soit le nombre de portes impaires...*
419	Denise	*Quelque soit le reste... Le nombre...*
420	?	*Le nombre de salles impaires...*
421	Denise	*Le nombre de salles impaires... Oui de pièces...*
422	?	*Et ben, on peut faire un chemin.*
422	MA	*En fait nous c'est l'inverse qu'on a trouvé.*
422	PO	*Ben non on n'a pas trouvé ça, nous.*
423	GE	*Nous, on a trouvé l'inverse, nous. Il nous faut pas 2 pièces impaires, et tout le reste pair. Eux ils ont trouvé exactement l'inverse.*
424	PO	*Ben, ça peut marcher les 2.*
425	Denise	*Et, pour le circuit ?*
425		Inaudible.
426	Denise	*D'accord. Donc là, on peut pas faire de circuit ?*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

427	?	*Non.*
427	Denise	*Non, si vous êtes cohérents avec ce qu'il y a là-haut. OK. D'accord. Donc, effectivement, dans l'autre groupe, ça a été dit ça aussi, ça. Dans le groupe où j'étais, et...*
428	M-Jo	*Donc, le grand A retourné, là, ça veut dire quelque soit. (?) Pour euh, les élèves qui ne savent pas.*
429	Denise	*Ah!* Elle montre le symbole. *Quelque soit. C'est joli, non? Comme ça.*
430	GE	*Ah oui! Ça fait anarchie à l'envers.*
431	Denise	*Après je vous en montrerais un autre. Alors, euh. Qui est-ce qui est d'accord avec ça? En tout cas, là, c'est une question, et puis les autres non. Est-ce qu'il y en a qui ne sont pas d'accord avec ça?*
433	Plusieurs	*Ouais.*
433	Denise	*Bon, alors, voilà. On ne va pas le régler maintenant ça. Ça veut dire que ça, je mets un point d'interrogation, parce que vous êtes pas forcément d'accord. Et les autres je ne sais pas, si je mets un point d'interrogation. On verra. Sur les autres aussi?*
437	?	*Non, sur la...*
437	Denise	*Sur la 2ème?*
437	?	*Non, sur la dernière.*
438	Denise	*Bon alors, qu'est-ce qu'il y a d'autre? Bon alors, vous, est-ce que vous avez quelque chose de différent?* *Alors vous, vous aviez, si! Y'avait quelque chose d'intéressant, qui, précise un peu ça. C'est que quand il y a des pièces impaires et des pièces paires, il faut qu'il y ait plus de pièces impaires que de pièces paires, pour qu'il y ait un chemin.* *C'est encore plus précis que ce qui est dit là.*
444	Charles	*Plus de paires que d'impaires.*
444	Denise	*Plus de paires que d'impaires. Hein? Bon. Donc il faut plus de paires que d'impaires...*
446	PO	*Tiens, on n'a pas réfléchi à ça, nous.*
447	GE	*Plus de paires que d'impaires? Non!*
447	MA	*Tu te retrouves forcément coincée.*
447	GE	*Moi, j'ai fait un chemin. Regarde, je te le fais. Regarde le chemin. Le chemin de base.*

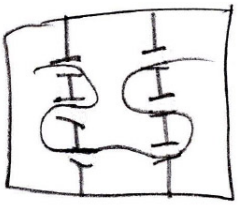


FIG. B.21: *Un contre-exemple à la conjecture qui vient d'être émise*

450	Denise	*Et les autres, vous êtes d'accord avec ça ? Ou pas ?*
450	Plusieurs	*Non !*
451	Denise	*Vous n'y avez peut-être pas réfléchi tous, non ?*
451	GE	*Si ! Y'a plus d'impaires que de paires.*
452	Denise	*Donc, point d'interrogation. Voilà. Et vous ? Alors, qu'est-ce que vous avez, donc, chacun a donné quelque chose. Alors...*
452	PO	*Ah ouais.*
453	Denise	*Vous, vous avez quoi de différent ?*
453	GE	*Donc c'est bidon.*
453	Denise	*Vous avez ça, je crois. Déjà.*
453	MA	*Quoi ?*
453	PO à MA	*Regarde ! Ça là !*
453	GE	*J'ai plus de pièces impaires que de pièces paires.*
454	Denise	*Voilà ! Les deux premiers.*
454	GE	*Et pourtant j'ai réussi à faire un chemin. Donc ça colle pas leur truc.*
455	PO à MA	*Regarde, là, y'a 3 portes, et là y'en a 6.*
456	Denise	*Bon, alors, vous, vous en aviez d'autres. Est-ce qu'elles sont finalement écrites là-dessus ou non ?*
457	GE à tous	*Non ! Ben, en fait on en a une, mais c'est carrément le contraire de...*
457	Denise	*Ah ! Alors c'est le contraire, donc il faut la mettre. Alors c'est laquelle ?*
458	GE à tous	*Euh... Si...*
458	PO à tous	*« Si un musée comporte uniquement 2 pièces ayant un nombre impair de portes, l'une sert d'arrivée, l'autre de départ, on peut faire un chemin mais pas de circuit. »*
461	Denise	*Alors, « quand on a... » Combien ? Je n'ai pas compris.*
461	PO à tous	*« Uniquement 2 pièces ayant un nombre de portes impair... »*
462	Denise	*« Il y a... »*
462	PO à GE	*C'est ça, hein ?*
462	GE à PO	*Ouais.*
463	Denise	*« 2 pièces impaires »...*
463	GE à PO	*Tout le reste, c'est dans mon papier, c'est pas grave.*
464	Denise	*Je réduis un peu, hein ? Mais c'est... « On peut faire un chemin » ?...*
464	PO à tous	*« On peut faire un chemin, mais pas de circuit. »*
466	Denise	*Bon !*
467	GE à PO	*Et, ces pièces c'est l'arrivée et le départ, aussi, il faut le dire.*
468	PO à GE	*Ouais, mais... J'pense qu'elle l'a compris.*
468	GE à PO	*C'est important quand même.*
468	Charles	*Et elle a rajouté que le chemin... Le point de départ et le point d'arrivée...*
469	PO à tous	*Y'en a... Une des pièces sert de départ, et l'autre qui sert d'arrivée.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

472	Denise	*J'pense qu'il y a des groupes où ça a été un peu discuté, aussi ça. Hein ? Simplement c'est sous forme de questions. Hein ? Vous, vous l'aviez sous forme de questions.*
474	PO à GE	*Et ben dis que t'es pas d'accord, si on a plus de paires que... De pièces paires que d'impaires, parce que... On a fait un chemin et que ça marche pas.*
475	GE à tous	*La propriété, qu'il faut plus de paires que d'impaires pour qu'il y ait un chemin... C'est faux. J'ai fait un...*
477	Denise	*Mais, je pense que même le groupe qui a évoqué ça, était en train de trouver un contre-exemple. Donc euh...*
479	M-Jo	*Y'a une autre conjecture, là.*
479	Michel	*Là aussi, une autre conjecture.*
480	Denise	*Alors... Est-ce que...*
481	Michel	*Eux d'abord, ils ont pas dit encore.*
481	Denise	*Vous en avez une nouvelle encore ? Oui ?*
482	?	*« Plus il y a un nombre de salles au nombre de portes impaires important, plus il est difficile d'établir un chemin, et le nombre de salles avec un nombre de portes impaires est pair. »*
484	Denise	*Alors, « le nombre de salles avec un nombre de portes impaires est toujours pair ».*
485	GE	*Ah, oui ! Ça c'est vrai, ça.*
485	PO	*Ah, on n'a pas cherché ça.*
486	Denise	*Et puis je vais noter l'autre du début après.*
486	GE	*En fait on s'en est pas trop soucié, parce que, nous on avait dit qu'il en fallait deux, donc après... C'est vrai, regarde, 1, 2, 3, 4.*
489	Charles	*Ça, c'est une condition, ou une propriété toujours vraie ?*
490	?	*C'est obligé !*
490	Michel	*C'est toujours vrai.*
491	Charles	*Ça, vous dîtes que c'est toujours vrai ? D'accord.*
491	Denise	*Est-ce qu'il y en avait qui avaient vu ça, ou bien qui pensent que ça peut être vrai. Ça veut dire que quelque soit les musées qu'on dessine... Vous comprenez ce que ça veut dire ? Quand vous compterez le nombre de salles impaires, vous allez tomber sur un nombre pair.*
494	GE	*J'ai l'impression que c'est vrai, c'truc-là.*
494	Denise	*Vous ne pouvez pas avoir 3 salles impaires, ou une seule impaire.*
495	MA	*Oui, y'en avait pas. Vous vous souvenez ?*
496	Denise	*Donc, c'est aussi... C'est donné comme une propriété, mais on verra. Alors, il y avait autre chose, avant. C'était « plus il y a... de »*
497	?	*« De nombre de salles »...*
498	Denise	*« De salles impaires, moins... »*
499	?	*Ben en fait... « Plus c'est difficile »...*
499	Denise	*« Plus c'est difficile de trouver un chemin ».*
500	GE	*C'est pas difficile, c'est carrément impossible.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

501	?	*Ça veut dire que qu'en il y en a 0, c'est facile, c'est un circuit. Quand il y en a 2, on peut quand même trouver un chemin. Et quand il y en a 4, eh ben, on peut pas trouver.*
503	Denise	*D'accord. Donc, c'est quand même... OK.*
504	M-Jo	*Il y a encore quelque chose là.*
505	Denise	*Donc, ils viennent de dire que, quand il y a 0... Donc, effectivement il a raison de dire que c'est un peu écrit de partout... Quand il y a 0 pièce impaire, on peut trouver un circuit. Quand il y a 2 pièces impaires, on peut trouver un chemin. Et j'imagine pas un circuit, c'est ça que vous vouliez dire ? Donc 2 pièces impaires, vous pouvez trouver un chemin et pas un circuit. Et quand il y en a 4, on trouve plus rien. Et vous parlez pas de 1 et 3, parce que vous avez cette propriété-là ?*
510	Le groupe	*Ouais.*
511	Denise	*Vous ne dîtes pas quand il y a 1 pièce impaire, et quand il y a 3 pièces impaires...*
513	?	*Nous, on n'avait pas la propriété-là, mais on avait trouvé que si il y avait qu'une seule pièce impaire, on peut faire un chemin mais pas de circuit. Quand il y a une ou 2 pièces dans la même...*
514	M-Jo	*Enfin, dès que il y avait une pièce impaire...*
514	Denise	*« Dès qu'il y a une pièce impaire... » Il y a quoi ?*
515	M-Jo	*« Il y a peut-être un chemin, mais pas de circuit. »*
515	Denise	*D'accord, mais, ça veut dire que... C'est ça. Il y a peut-être un chemin, mais pas de circuit. Et, est-ce que ce n'est pas un peu ce qui est écrit, là ? Puisque dès que... Puisque il faut... Vous avez écrit... Il faut que tout soit pair, pour qu'il y ait un circuit. Non ?* *Bon, ben, j'vais la noter, hein ?*
520	?	*Mais en fait, elle va avec la dernière. Avec la première...* Discussions sur le fait que le groupe voulait rajouter cela à une conjecture déjà écrite.
530	M-Jo	*Ils étaient en train de se demander si il y avait possibilité de faire un musée avec une seule pièce impaire.*
531	Denise	*D'accord. Bon, alors, qu'est-ce qu'on fait. Charles, on passe à l'activité suivante ? Hein ? Alors on va pas les résoudre... On va pas...*
533	Charles	*Gardez ça en tête.*
534	Denise	*On va... Je les laisse au tableau. On ne va pas tout de suite discuter de ce qui est vrai et faux, là-dedans. Hein ? On va vous poser un 2ème problème.*
536	PO	*Ça a un rapport avec les musées ?*
536	Charles	*On reviendra peut-être après là-dessus. Après, à la fin, peut-être, on reviendra là-dessus.*
537	MA à PO	*Tu verras bien.*
538	PO à GE	*Oui, mais il est bien ton schéma.*
538	Denise	*Bon, alors, vous allez reprendre votre travail de groupe.*

Interlude, retour sur le contre-exemple de GE à la proposition : « pour qu'il y ait un chemin, il faut qu'il y ait plus de pièces impaires que de pièces paires », voir son contre-exemple figure 3.23.

538	GE à PO	*Qu'est-ce que tu dis ?*
539	PO à GE	*Il était bien ton schéma.*
540	GE	*Mon schéma ?*
540	DA	*Elle a craqué pour ton schéma.*
540	PO	*Ça, là. Là y'en a 6, là y'en a 3, là y'en a 3. Et pourtant...*
541	GE	*On arrive à faire.*
542	DA	*C'est bon, hein, t'emballe pas ! Elle a juste craqué pour ton schéma.*
543	GE à DA	*Là, t'as buggé, là.*

Les graphes – prise en main du problème :

544	GO	*Alors. Je vais vous passer la suite, maintenant. Ce qu'il se passe c'est que je vais vous donner une page chacun, mais juste pour que vous lisiez. Après vous travaillerez tous sur la même. D'accord ?*
545	Ensemble	*Oui.*
546	DA	*Bizarre le musée, hein ?*
546	MA	*Mais c'est plus des musées.*
547	GE	*C'est de l'art moderne.*
547		Ils lisent chacun leurs feuilles.
556	MA	*En fait c'est exactement la même chose que les musées, non ?*
561	PO	*On a le droit de sortir du dessin ?*

MA et PO cherchent un problème quelque peu différent de celui de l'énoncé. Le problème est de passer sur chaque arête une et une seule fois. En voici un exemple tracé en rouge :

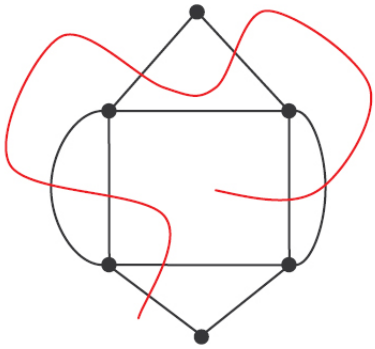


FIG. B.22: *Un début de recherche sur un problème dual.*

562	GO	*Comment sortir du dessin ?*
562	PO	*'Fin... Aller ici, là ?*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

563	GO	*Si tu lis l'énoncé... Pourquoi tu poses cette question ?*
564	PO	*Non, mais on n'est pas obligé de rester à l'intérieur de ...*
565	MA	*De sortir comme ça, du...*
565	GO	*Ben, je ne sais pas ce que vous êtes en train de faire, là.*
566	PO	*Ben, si on a notre schéma, est-ce qu'on est obligé de rester à l'intérieur de ces limites-là, ou si on peut aller ici, ici, ici...*
567	MA	*Ben, t'es obligée de sortir. 'Fin.*
567	DA	*Euh, non !*
568	GO	*Euh, je n'ai pas compris ce que vous cherchiez à faire, là, en fait.*
569	DA	*Ben, il faut passer par les arêtes, là, pas autour.*
569	MA	*Ah OK ! D'accord.*
569	DA	*Mais, c'est bon, moi j'ai trouvé. Regarde !*
570	PO	*Quoi ?*
570	DA	*Tac, tac, tac...*
570	MA à PO	*Ben ouais, on n'a rien compris.*
570	GE	*Ouais, c'est un escargot, en gros.*
571	DA	*Tac ! Tac ! Et tac !*
571	PO	*Aaah... Ah, moi j'croyais que les arêtes c'étaient des portes en fait...*
572	GO	*D'accord, tu cherchais, en fait, à passer par chacune... À travers chacun des traits ?*
573	DA	*J'ai trouvé, r'garde !*
573	PO	*Ouais, t'as trouvé.*
574	DA	*Tu fais comme... Tac, tac, tac, tac, tac, tac, ...*
574	GE	*J'ai trouvé.*
574	PO	*Ah, c'est comme les maisons comme ça.* Elle dessine une « enveloppe ».

Premières conjectures

574	GE	*J'ai trouvé une hypothèse. J'me suis basé sur ce qu'on avait fait.*
575	PO	*Et t'as trouvé quoi comme hypothèse ?*
576	GE	*Ben en fait celui-là* (il montre le graphe des ponts de Königsberg), *j'arrive pas à le faire. Et quand on le regarde, celui-là, (il montre le premier graphe) y'a que 2 arêtes qui partent de chaque point. Donc en fait y'a que des nombres pairs d'arêtes qui partent de chaque point. Alors que dans l'autre y'a que des nombres impairs, et dans l'autre on n'y arrive pas. En gros c'est un peu... les propriétés de l'autre.*
580	DA	*Ça fait... Ça fait un circuit, ici.*
581	GE	*Mais, par contre j'arrive pas à l'expliquer.*
581	MA	*Ouh la ! C'est confus mon truc, là.*
582	GE	*Un circuit ? Ah oui, ça fait un circuit. Ça fait un circuit parce que il y a un nombre pair d'arêtes qui partent de chaque point.*
584	GO	*Vous avez déjà fait des problèmes de ce type-là ?*
584	PO	*Ouais.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

584	Les autres	*Non !*
584	PO	*Ah, mais ? En seconde ?*
584	GO	*Non, non...*
585	PO	*En CM2.*
585	MA	*Si moi j'm'éclatais à faire des maisons comme ça...* *Bon, alors. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.* Elle compte les arêtes du premier graphe.
588	PO	*Non, ça fait pas un circuit.*
588	MA et DA	*Si !*
588	PO	*Non, parce que regarde, si tu fais tac, tac, tac, tac, tac, tac, tac, tac, tac, t'arrives là, et ...*
589	GE	*Et c'est un circuit. Donc.*
590	DA	*Encore une belle bêtise.*
590	PO	*Non, mais en fait j'pensais que tu voulais repasser par l'arête, et comme on a le droit d'y passer...*
591	DA	*Si jamais c'est un circuit de toutes façons, c'est que tu peux passer...*
591	PO	*Non, non, non, non, non. C'est bon ! Je n'ai rien dit...*
592	GE	*Et là regarde. Je vais compter un truc.*
594	MA	*Mais, après... Faut qu'on compare avec ceux d'après. Enfin celui d'après.*
595	PO	*Celui d'après, si on enlève une arête, on y arrive.* Elle montre l'arête partant du sommet en haut à gauche, et allant vers celle en bas à droite, qu'ils qualifieront d'arête « en diagonale ».

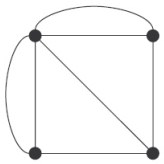


FIG. B.23: *Le graphe des ponts de Königsberg et son arête « en diagonale ».*

Le lien entre les deux problèmes se fait, le contrat didactique jouant dans ce mécanisme.

596	GE	*C'est marrant parce que regarde. Celui qu'on arrive pas,... C'est... Il est... C'est un nombre impair.*
597	MA	*Oui, mais, c'est pour ça.*
598	PO	*Ben ça doit être lié de toute façon, étant donné qu'on fait ça juste après les musées.*
598	GE	*Ben oui, si ça se trouve c'est ...*
599	MA	*Mais, c'est quoi qui est un nombre impair en fait.*
599	PO	*Ça, là, regarde.*
599	GE	*Le nombre d'arêtes qui partent de chaque... point. De chaque sommet.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

600	PO	*En partant de ce point, tu as 1, 2, 3, 4, 5 arêtes qui partent de ce point-là.*
601	GE	*Ouais, c'est pareil, en fait je suis sûr que si on tombe sur un truc où il y en a que 2 on devra s'en servir de point de départ et d'arrivée.*
602	MA	*Ouais.*
603	GE	*Parce que, regarde, c'est comme une porte, en fait, regarde là. Y'en a trois, j'dois faire ça, hop, et repartir.*
604	MA	*Et là en fait le chemin est tracé.*
604	PO	*Et là, y'a que des portes impaires.*
604	GE	*C'est comme si je pars de la salle. Je pars de la salle...*
605	MA	*Là, c'est le chemin qui est tracé, en fait...*
605	PO	*Y'a 5, 3, 3, 3.*
605	MA	*C'est comme si le chemin était déjà tracé.*

L'équivalence entre les deux problèmes se concrétise

606	GE	*En fait, en gros ça c'est une salle.* Il montre un sommet. *En fait, dis-toi que ça, c'est une salle... Et ça c'est une porte.* Il montre une arête.
607	MA	*Oui, et puis ça, ça représente le chemin. Mais, qu'on peut pas faire, parce que...*
608	GE	*Mais, c'est juste une porte, en fait. C'est exactement pareil que l'autre. Et là, tu vois, on a 2 portes qui partent de la salle. Donc, c'est bon. Et là, on en a plus que 2. On a plus que 2 salles qui ont 3 portes...*
610	MA	*Donc, là, c'est pas possible.*
610	GE	*Euh, qui ont un nombre impair de portes qui partent. En fait, il faut se dire ça.*
611	MA	*Donc là, c'est pas possible.*
611	GE	*Non, c'est impossible. En fait, c'est exactement pareil que l'autre truc, en fait... C'est juste que...*
613	MA	*Alors, il faut qu'on commence à marquer les trucs.*
614	GE	*Ouais, les coués..., les con-juc...*
614	MA	*Les conjonctures...*
614	GE	*Ouais, comment elle appelle ça ?*
614	DA	*Les conjectures.*
614	GE	*Conjectures.*
614	PO	*Ouais, on n'y arrive pas* (à trouver un chemin dans le graphe des ponts de Königsberg).
615	GO	*Oui, pensez aux conjectures, mais il y a une question supplémentaire, par rapport à la dernière fois.*
616	GE	*« Expliquez pourquoi ». Alors, voilà...*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

616	PO	*Eh, ben, par exemple si tu nommes les points, A, B, C, D. En partant de A. Il y a 5 arêtes qui partent du point A. Il y a 3 arêtes qui partent du point B, y'a 3 arêtes qui partent du point C, et y'a 3 arêtes qui partent du point D. Ça veut dire qu'il y a 4 points... Y'a plus que 2 points, où un nombre pair... Impair...*

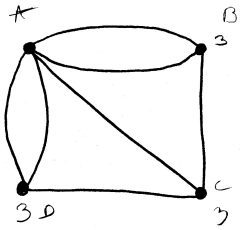


FIG. B.24: *Le graphe des ponts de Königsberg avec les sommets nommés et leur degré respectif indiqué.*

621	MA	*On ne sait pas si ça marche, ça. Oui mais en fait, là on sait pas parce que là, tout était pair, mais si ça se trouve si y'en a 4, ça suffit.*
622	PO	*De quoi ?*
623	MA	*Si, par exemple, y'en a qu'un qui a un nombre impair, ça suffit. On sait pas, on n'a pas vu encore... Là, ils étaient tous pairs.*
624	GE	*Y'en a qu'un qui a un nombre impair ?*
624	MA	*Non, là il y en a 4 qui ont un nombre impair. Mais vous dîtes, si il y en a plus de 2, mais on ne sait pas.*
625	GE	*Mais, c'est exactement comme,... Mais toi...*
626	MA	*Mais, on en a...*
626	GE	*Mais toi... Mais c'est exactement pareil que ce que l'on vient de faire. C'est juste le schéma qui est différent. Dis toi que ça c'est une salle, et ça c'est une porte.*
627	MA	*Oui, mais... On n'a pas vu...*
627	GE	*Sauf que les portes, elles sont beaucoup plus grandes.*
628	MA	*Oui, mais, on n'a pas vu de schéma, ou de dessins, où est-ce que l'on a vu que si y'en avait que 2 impairs, ça marchait.*
629	GE	*Ben, faudrait... On verra.*
629	MA	*Ben, ouais.*
629	PO	*2 d'impairs ? Tiens.*
630	GE à GO	*On pourrait en avoir un autre ?*
630	GO	*Non, il faut dessiner là... C'est facile à dessiner.*
630	PO	*Non, mais c'est bon. Là, regarde. Là t'en as 3, là, t'en as 1, 2, 3. Là, t'en as 2. Donc là, t'as 2 portes, qui...*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

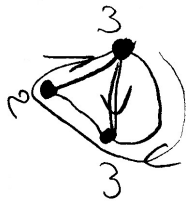


FIG. B.25: *Un premier dessin de graphe, graphe avec un parcours eulérien et deux sommets de degré impair.*

632	MA	*Ouais, mais...*
633	PO	*Et tu peux faire un chemin, pas de circuit. Un chemin.*
633	GE	*Ouais. Et c'est pareil que l'autre.*
634	MA à PO	*Ouais, ben efface pas ton dessin. Et si t'en as que 3,... Attends, je ne sais pas si tu vas y arriver.*
635	GE	*T'arriveras pas à en faire un qui a une seule...*
635	PO	*Mais ils ont dit « Le nombre de salles impaires est toujours pair ». Tu peux pas arriver à faire trois salles qui ont un truc impair.*
636	GE	*Oui, tu n'y arriveras pas. Tiens une enveloppe.*
637	MA à PO	*Mais si j'y arriverais, regarde. 2, 3,...*
638	GE à MA	*Non ! Ça va bugger quelque part.*
639	MA	*Ouais, il me semble que j'ai du mal calculer quelque chose.*

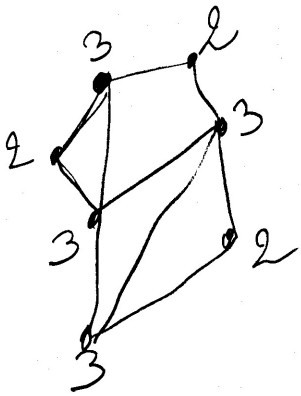


FIG. B.26: *MA a d'abord tracé « le haut » du graphe en notant le degré des sommets, et n'a pas recalculé les degrés en continuant de dessiner (2 sommets de degré 4 sont notés de degré 3).*

639	GE	*Ouais, ouais, t'as buggé.*
639	DA	*Tac, tac, tac, non, non !*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

640	GE	*T'as 3...*
640	PO	*Ben, t'as 2 salles qu'on un nombre impair, c'est tout !*
640	GE	*T'as 2 salles qu'on un nombre impair.*
641	DA	*Ça fait un chemin.*
641	GE	*Ça fait un chemin.*
642	MA	*Mouais. Et là, on peut faire quelque chose de... Ouais ben, là, ça marche. Et donc si y'en a... S'il y a... Ouais. Ben en fait, c'est la même chose.*
647	PO	*Y'a 3 points qui ont des arêtes...*
647	MA	*T'as oublié celui-là.*
648	GE	*Ouais, donc t'en as...*
648	MA	*Et ça marche si t'en as 4 ?*
648	GE	*Ben, non, ça marche pas parce que c'est un nombre supérieur à 2. Ben là on en a 4* (Il montre le graphe des ponts de Königsberg). *Hé-ho ! Là on en a 4 !*
650	PO	*Ah, le truc de... Impairs.*
650	GE	*Non, pairs. Et voilà, perdu.*
651	PO	*On va commencer de là. Hein ? On va dire qu'on commence par là.*
652	GE	*C'est pas une bonne solution on a toujours dit qu'il fallait commencer par les impairs.*
653	MA	*Oui mais on essaie de...*
653	GE	*On a toujours dit qu'il fallait commencer par les impairs.*
653	PO	*Oui, ben là, on commence par une impaire, non ? Non. Ça marche pas. Parce que, après tu vas là... Et après t'es bloquée.*
654	MA	*Donc voilà.*
655	GO	*Si c'est possible de ne pas effacer...*
656	PO	*Vous voulez que...*
656	GO	*Non, simplement tu ne l'effaces pas. Tu peux redessiner...*
657	GE	*C'est plus facile que de faire un musée, ça.*
659	GO	*Bon. Ce que je vais vous proposer maintenant... Je ne sais pas... Ce sont des graphes qui sont un petit peu plus complexes...*
662	MA	*Mais est-ce que l'on écrit d'abord ce que l'on pense, comme ça on peut s'aider après...*
662	GO	*Je pense que ce serait pas mal, bien sûr. Comme ça quand je vais vous donnez les plus complexes vous pourrez regarder avant de chercher...*
664	MA	*Donc on marque quoi ?*
664	GO	*Vous avez encore des feuilles blanches ?*
664	PO	*Euh oui. Tu écris ? On a des feuilles blanches, là. Mais on écrit peut-être à la suite des autres. Ou on sépare.*
665	GO	*Sur la feuille commune ? À la limite, oui, on peut faire ça.*
666	PO	*Là, on sépare. Ouhla, j'ai fait...*
667	MA	*C'est pas grave...*
667	GE	*Regarde, j'en ai fait un là, ça marche bien. Ouais, c'est pareil.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

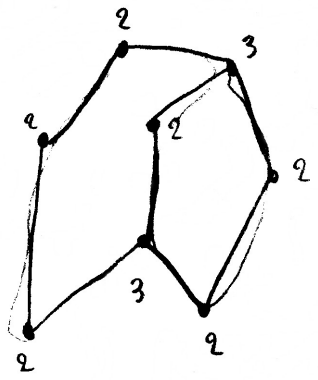


FIG. B.27: *Une autre illustration de la conjecture.*

668	PO	*Les musées...*
669	GE	*Eh PO. En fait tout ce qu'on a à faire, c'est de réécrire les anciennes propositions, en disant que les...*
671	PO	*Avec les points et les arêtes.*
671	GE	*En remplaçant porte par point et... Euh, non. En remplaçant salle par point, et porte par arête.*
672	MA	*Ouais, mais bon. On va peut-être quand même regarder.*
673	PO	*« Si tous les points ont un nombre d'arêtes pair »... Comme le premier dessin. « On peut faire un circuit, et donc un chemin. »*
674	MA	*Ouais, non. « Mais pas un chemin qui ne revient pas à son point de départ ». En fait c'est la même chose.*
675	PO	*« Si tous les points... »*
676	MA	*« Ont un nombre pair... d'arêtes »...*
678	GE	*Même si ça se ressemble plus du tout à la même chose, c'est exactement le même truc.*
679	PO	*« On peut faire »...*
679	MA	*« Un circuit »...*
680	PO	*« Un circuit »...*
680	MA	*« Mais pas de chemin »...*
681	PO	*« Mais pas de chemin »...*
681	MA	*« Qui ne revient pas à son point de départ ».*
681	GE	*Ah, au fait j'ai aussi un truc. Ah. Ça c'est bon aussi. Regarde, j'ai trafiqué l'autre, maintenant, ça fait, là. On n'en a plus que 2 d'impairs. Et ça marche.*
685	PO	*Ça marche ?*
685	MA	*Mais, il faut partir d'un...*
685	GE	*Ouais, ouais, faut partir... Regarde, je suis parti de là. Et je fais ça. Hop !*
686	PO	*Par contre, tu ne fais pas de circuit.*
686	GE	*Hop ! De circuit ? Non, non. J'peux pas.*
687	DA	*T'as fait comment, là ? Ah ouais... Avec un...*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

687	GE	*Là il passe maintenant. J'ai rajouté un truc, là. J'ai un peu triché. Là, j'suis parti. Hop, hop...*
688	MA	*Y'en a toujours un qui sert de départ et l'autre d'arrivée.*
689	GE	*Ouais. Ouais. C'est ça, hein. C'est ça sauf qu'on a changé les termes.*

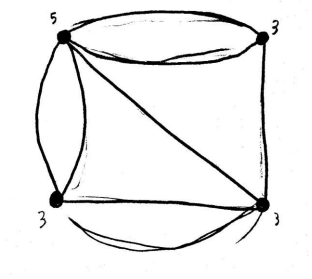


FIG. B.28: *Un chemin eulérien dans le graphe des ponts de Königsberg en « trichant un peu ».*

691	PO	*« Si un graphe comporte uniquement 2 points ayant... »*
693	MA	*« Ayant un nombre impair d'arêtes. » L'une servant d'arrivée... Enfin... Oui. C'est pareil. Y'a arrivée et départ, sauf que là c'est les points. Et qu'on peut passer plusieurs fois par chaque point. Ouais, en fait les points, c'est pièces, et...*
697	GE	*Voilà.*
700	PO	*Voilà. Et ensuite ? « Si un graphe »...*
701	MA	*« Comporte plus de 2 points »...*
704	PO	*« Ayant un nombre de »...*
705	DA	*Eh ? Non, mais oh ça va pas ?*
706	PO	*Oh ! Mais c'est le mien quand même.*
706	DA	*Ah, d'accord.*
707	PO	*« Un nombre impair de »... Non, non, mais vas-y.*
707		Discussions sur le matériel. PO finit de recopier les conjectures précédentes en les traduisant en termes de graphes.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

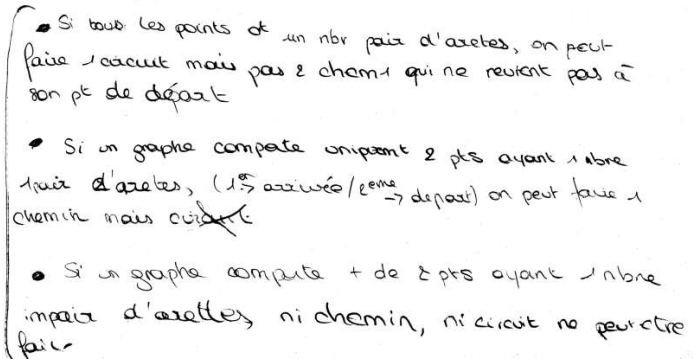


FIG. B.29: *Les 3 conjectures émises par le groupe. Elles ont la même forme que les précédentes étant des « traductions » : « Si tous les points ont un nombre pair d'arêtes, on peut faire un circuit, mais pas de chemin ne revient pas à son point de départ. Si un graphe comporte uniquement deux points ayant un nombre impair d'arêtes, (premier arrivée, 2ème départ), on peut faire un chemin mais pas de circuit. Si un graphe comporte plus de 2 points ayant un nombre impair d'arêtes, ni chemin, ni circuit ne peut être fait. »*

712	PO	*Mmmm. On demande les trucs plus compliqués alors ?*
713	MA	*Ah ouais, ben ouais.*
713	PO à GO	*Ah. On a fini de marquer.*
714	MA à PO	*Tiens marque la légende : point égal pièce et...* Elle montre la feuille de GE sur laquelle est encadré :

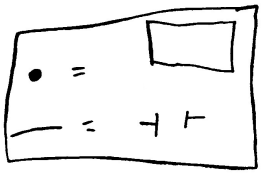


FIG. B.30: *La « traduction » graphe vers musée, où un sommet est une pièce et une arête est une porte.*

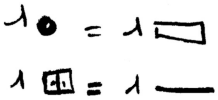


FIG. B.31: *La même « traduction » devient sur la feuille commune : un sommet pour une pièce, une porte pour une arête.*

715	GO	*Je vous en donne un pour tout le groupe ?*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

715	MA	*Ouah...*
715	DA	*Oh la, ouais,...*
715	GE	*Ça c'est du costaud.*
715	DA	*C'est un peu plus complexe...*
716	PO	*Ah oui effectivement. Marquez déjà, autour des points...*
716	GE	*Alors... 2, 2...*
717	DA	*Ça c'est de l'art moderne.*
718	GE	*Ça va plus vite à compter, ça. C'est mieux.*
719	PO	*Voilà, comme ça. Hein c'est qu'des trucs impairs. Euh, pairs.*
721	GE	*On a tout fait. Ouais c'est bon, c'est un circuit.*
721	PO	*Ben, attends. Essaie de le faire. Si on part, on part de là.*
722	GE	*On s'en fiche. Tu pars d'où tu veux.*
723	MA	*Ça marchera forcément.*
724	PO	*T'as un crayon de couleur ?*
725	DA	Incompréhensible. *Parce que regarde, ça sert à rien ça.*

FIG. B.32: *DA montre les sommets de degré 2 représentés de cette manière, c'est-à-dire. les sommets de degré 2 pour lesquels les arêtes entrantes et sortantes forment un angle plat.*

726	MA	*Oui, les points là, ils ne servent à rien. T'arrives là, tu fais, tac, tac, ça change rien.*
726	GE	*Ils servent à faire joli. C'est histoire de compliquer un peu l'affaire. Ils auraient pu en mettre 15 000 ici, si ils voulaient.*
730	MA	*Normalement à moins de te bloquer. Je ne suis même pas sûre que ce soit possible de se bloquer tout seul.*
732	GE	*Tu pars par où ?*
732	PO	*Là ?*
732	GE	*Ouais, si tu veux. Ouais normalement, t'as raison c'est impossible de se bloquer, je pense.*

Changement de cassette.

Ils découvrent assez vite que le graphe est composé de 2 composantes connexes, et que si tous les sommets sont de degré pair, cela ne suffit pas à garantir l'existence d'un circuit. Ils parlent d'un « piège » dans lequel ils seraient tombés.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

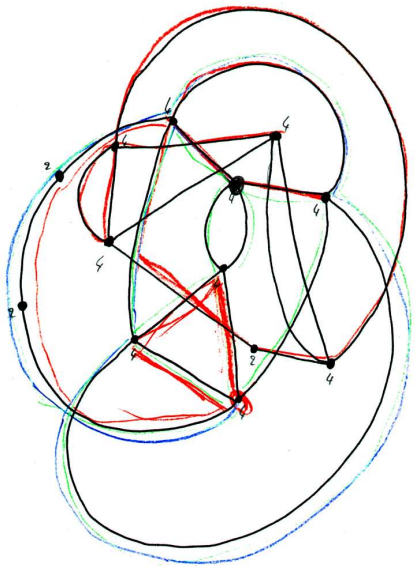


FIG. B.33: *Les deux composantes connexes apparaissent, le degré de chaque sommet est indiqué.*

Ils cherchent alors à ajouter une conjecture à l'ensemble des conjectures déjà émises pour éviter le cas de graphes non connexes.

002	PO	*. . . pas de point en commun on ne peut pas faire de circuit. C'est ça, hein ?*
003	GE	*Si on a 2 groupes de points qui n'ont aucun point commun entre eux.*
004	PO	*Si on a 2 groupes. . .*
005	MA	*. . . reliés entre eux.*
006	GE	*. . . qui n'ont aucun point qui les relie entre eux.*
007	MA	*Faut préciser que les groupes, ils sont reliés.*
008	PO	*« Si on a 2 groupes de points qui n'ont aucun point ». . .*
010	MA	*Deux groupes de points reliés, non ? Faut pas dire.* Incompréhensible.
013	PO	*Oui, mais. . . Faut pas que ce soient les deux groupes qui soient reliés.*
015	MA	*Non, mais. . .*
015	PO	*« Si on a 2 groupes de points reliés. . . qui n'ont aucun point en commun ». . . Non. C'est ça ?*
017	MA	*Ouais.*
018	PO	*« . . . qui n'ont aucun point commun ». . .*
019	MA	*C'est bien pas « point commun », mais « point en commun ».*
020	PO	*Ouais ?*
021	MA	*Ouais ? Non, non, mais il faudrait faire la différence. Parce que, tu sais, un point commun, c'est. . . quelque chose de pareil.*
022	GE	*Ah ouais ? Parce qu'ils en ont des points communs, hein.*
023	MA	*Oui, mais là, c'est un point EN commun.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

024	GE	*Ouais ! Donc c'est pour ça qu'il ne faut pas mettre point commun parce que... Point commun ? C'est tous les 2 des circuits.*
025	MA	*Oui !*
025	PO	*Oui. « Qui n'ont aucun point commun »... euh... « en commun »*
028	MA	*Oui c'est bon... On expliquera.*
029	PO	*Donc y'a un... Bout en commun ? Comme ça... « Qui n'ont aucun points (z-)en commun »...*
031	GE	*« point EN commun »...*
032	PO	*Oui, mais... Point en commun ça peut dire une ressemblance aussi. « Qui n'ont aucun point en commun, on ne peut pas faire »...*
034	DA	*Aucune petite boule noire. (Il montre les sommets)*
035	GE	*Oui !*
036	PO	*... « on ne peut pas faire de chemin »... Donc pas faire de circuit. « Pas faire de chemin », « ...faire de chemin ».*
040	DA	*Mais si on peut ! On en a fait. On en a fait 2.*
040	PO	*Commun !*
041	DA	*Ah, OK. C'est bon.*
041	PO	*... « de chemin commun, ni de circuit commun »... Il revient souvent notre mot « commun ».*
044	GE	*Ouais, c'est un peu... Mais bon.*
048	GO	*C'est bon ?*(Le GO s'était absenté depuis la distribution de la dernière feuille)
048	PO	*Ouais. À peu près. En fait, on a trouvé une propriété, mais on n'est pas sûrs que ce soit vraiment... que ça en soit vraiment une, quoi.*
050	GE	*Ouais c'est pas une propriété, c'est... C'est vaguement un truc...*
051	GO	*C'est une conjecture.*
052	MA	*Oui, voilà.*
052	GE	*Ben, on n'a pas de moyen, on n'a pas vraiment de...*
053	GO	*Une conjecture, c'est...*
053	MA	*C'est des hypothèses, en fait.*
054	GE	*On n'a pas le moyen de... Je sais pas...*
056	GO	*Une hypothèse, c'est autre chose en maths. Mais...*
057	MA	*Oui, non, mais, c'est une supposition...*
058	GO	*Oui, une conjecture. Quelque chose que l'on va discuter, après. On va voir si c'est faux, si c'est...*
060	PO	*Bon, alors on le met ! Si c'est faux, c'est faux ! C'est ce qu'on pense avoir trouvé.*
061	GO	*Voilà. Ce qui n'empêche pas de chercher des arguments pour dire si c'est effectivement vrai ou si c'est effectivement faux.*
065	PO à GO	*Ben, ils ont aucun point en commun, donc les circuits peuvent pas se relier entre eux. Donc on peut pas faire un circuit commun.*
068	MA	*Ça paraît logique.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

068	GO	*Il ne faut pas chercher à me convaincre moi. Peut-être les autres...*
070	PO au groupe	*Tout le monde est convaincu ?*
070	DA	*De quoi ?*
070	PO	*De ça.*
071	DA	*C'est quoi déjà ?*
072	GE	*Vas-y, redis.*
072	MA	*La phrase que t'as dite.*
073	PO	*« Si on a 2 groupes de points reliés qui n'ont aucun point en commun »... « Qui n'ont pas 1 seul point commun »... « on ne peut pas faire de chemin commun, ni de circuit commun aux 2 »...*
076	GE	*On a 2 circuits différents.*
077	PO	*« aux 2 »... groupes*
077	GE	*On a 2 chemins ou 2 circuits différents.*
078	MA	*Oui, on peut pas faire 1 circuit...*
078	PO	*Oui, on a 2 groupes de points reliés.*
079	MA	*Mais non, parce que on a 2 chemins, ou 2 circuits différents.*
080	PO	*« Si on a 2 groupes de points reliés qui n'ont aucun... petite boule noire en commun, on ne peut pas faire de chemin commun, ou de circuit commun aux 2 groupes. »*
083	MA	*Voilà.*
084	GE	*Aux 2 groupes ?*
084	PO	*Aux 2 groupes.*
084	MA	*Oui. Y'a 2 groupes de points.*
085	GE	*Euh, ouais, ouais... Si on veut.*

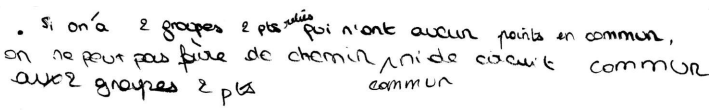


FIG. B.34: *Une conjecture pour éviter la non connexité : « Si on a deux groupes de points reliés qui n'ont aucun point en commun, on ne peut pas faire de chemin commun, ni de circuit commun aux deux groupes de points ».*

Le GO cherche à amener le groupe à discuter les conjectures émises par les autres groupes, qui sont toujours au tableau.

090	GE à GO	*On peut en avoir un autre ? S'il vous plaît ?*
092	GO	*Oui. Je vais vous en donner un autre.*
093	PO	*C'est un 4ème. Oh, pardon*
094	GO	*Il y a quand même des questions. Vous avez écrit un certain nombre de conjectures. Vous avez fait un lien entre ce qui s'était passé la séance précédente et maintenant, on est d'accord ?*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

097	PO	*Ouais.*
098	GO	*Il y a un certain nombre de choses qui sont écrites aussi au tableau. Ça a été aussi un peu discuté, ou...*
100	PO	*Ah pour les... Il faut voir si...*
100	GO	*Donc, ce que je vous propose... Il y a 2 possibilités. Soit vous pouvez passer à regarder ça et peut-être le traduire, voir si vous arrivez à...*
103	MA	*Ah oui. Traduire ça en ça.*
103	GE	*Par contre là maintenant, ça soulève un petit truc, ça.*
104	PO	*C'est, est-ce que ça marche pour les musées.*
105	GE	*Non, non ! C'est que, maintenant, si on en a genre 6 qui ont des portes, euh, des nombres impairs, ça veut dire qu'on a peut-être 3 circuits. Euh, 3 chemins.*
109	PO	*Mais si ils ont un point en commun, on peut essayer, si ils ont pas...*
111	GE	*Attends. T'as pas bien compris. En fait, là, on a 2 circuits. Imagine qu'on ait 2 chemins. On aurait, pour chaque, 2 points, 1 point de départ, 1 point d'arrivée.*
114	PO	*1 point d'arrivée...*
115	GE	*Donc, en tout, on en aurait 4.*
116	PO	*Ouais.*
116	GE	*Et ça veut dire qu'au début, on se serait dit « non, il est impossible ». Alors qu'en fait on en avait simplement 2. Donc en fait, faudra revoir, faut revoir celle-là en fait.*
118	PO	*J'ai pas compris ce que tu as dit.*
120	MA	*Pour les musées, il y avait 2 trucs possibles et en fait...*
120	GE	*Là, voilà. Ici, on peut... Merde.*
121	PO	*Ouais. Si on fait qu'un seul chemin, ouais.*
122	GE	*On a 1 chemin... Au lieu de...*
123	PO	*Par exemple, si on coupe ici...*
123	GE	*Non, attends... Euh, non pas ça.*
124	PO	*Ben si. Si t'as un point ici.*
124	GE	*Ben, celui-là, là, tu le fais partir d'ici.*
125	PO	*Ouais.*
125	GE	*Ça fait que lui il se retrouve avec 5. Et lui il se retrouve avec 3. Ça fait qu'on va être obligé de partir de l'un des 2, machin, gnagnagna...*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

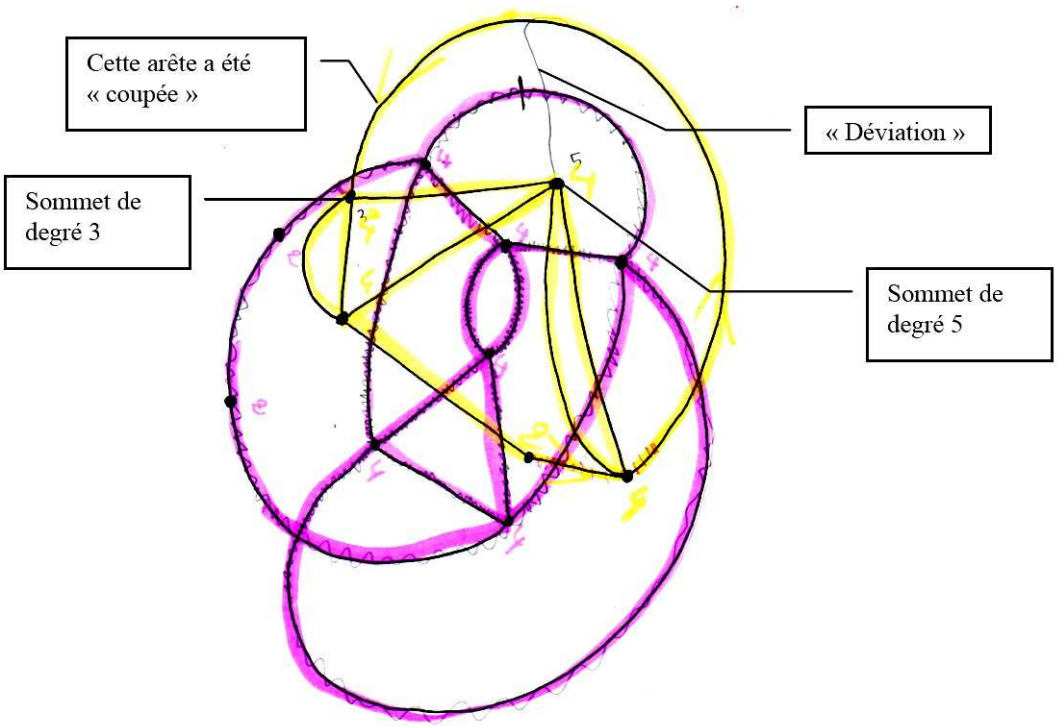


FIG. B.35: *L'illustration de ce qu'explique GE.*

128	PO	*Il se retrouve... Ouais...*
128	GE	*On fait pareil ici.*
128	PO	*Pourquoi ? Pourquoi : 1, 2, 3, 4 ?*
130	GE	*Non, on a coupé ça... Il existe plus.*
130	PO	*Ah ouais.*
131	GE	*T'sais, on dévie là. Y'a une déviation. Donc ça veut dire qu'on aura un chemin maintenant. C'est-à-dire qu'on a déjà 2...*
133	PO	*Un point d'arrivée, un point de départ.*
134	GE	*On a 2 points impairs.*
134	PO	*Ouais.*
134	GE	*T'es d'accord. Maintenant, on fait pareil avec l'autre, on aura un point, 2 points impairs en plus.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

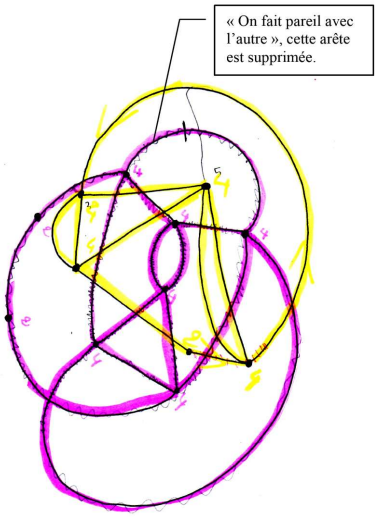


FIG. B.36: *La suppression d'une seconde arête.*

136	PO	*Ouais.*
137	GE	*Ce qui nous donnera 4, sur le graphe.*
138	PO	*Ouais. Ouais mais les 4 sur le graphe ils sont pas reliés.*
139	GE	*Ouais ! Mais ça, comment on peut le savoir du premier coup d'œil ?*
140	MA	*Ben on peut pas le savoir.*
140	PO	*Ben tu vois bien qu'il n'y a pas de point noirs qui sont rouges, y'a pas de points noirs...*
141	GE	*Ben, j'sais pas. Maintenant qu'on a mis de la couleur d'accord. Mais, sinon...*
142	PO	*Mouais.*
143	GE	*Donc, en fait, faudra faire... Faudra faire gaffe, quoi. En gros maintenant on a tout à recommencer.*
145	PO	*Pourquoi ?*
145	GE	*En fait, ces propriétés, elles marchent, euh ouais, ... vaguement, quoi.*
146	MA	*Ben oui, pas tout le temps. Dans certains cas.*
146	GE	*Elles marchent si on n'a qu'un seul circuit par graphe, ou qu'un seul chemin par graphe.*
148	PO	*Ah ! Si on n'a qu'un seul circuit par graphe, ça marche ?*
148	MA	*Ben attends, si t'as qu'un seul circuit par graphe, tu sais que...*
148	GE	*Par contre, si on a 2 circuits, eh ben, il faut tout refaire.*
150	MA	*Oui, mais ça c'est démontré.*
151	GE	*Ouais, en fait ça bugge tout. Parce qu'en fait, si on se retrouve avec 6, avec 6 machins, soit ça veut dire que c'est impossible, soit ça veut dire qu'il y a 3 chemins... Si on se retrouve avec 6 nombres... 6 nombres, euh, 6 points impairs, hein ? Soit on a 3 chemins...*
157	MA	*Soit c'est impossible.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

157	GE	*Soit c'est impossible. Ça veut dire que si on se retrouve avec, avec justement ça, il faudra...*
159	PO à GO	*Vous avez pas un... Un graphe avec... plusieurs... groupes de points... euh...*
161	GO	*Mais, vous pouvez le faire. Non ?*
162	PO	*Bon, alors on va le faire. Là derrière.*
163	GO	*Là, pour le coup ce n'est pas...*
163	MA	*Oui, ce n'est pas pareil.*
163	GO	*Je vous en donne un autre ?*
164	GE	*Ouais, tant qu'à faire.*
165	GO	*Tant qu'à faire.*
165	PO	*Ah, mais de feuilles blanches. On en avait...*
166		Brouhaha
173	PO	*Là, c'est bon ? On a...*
174	GE	*Ouais, c'est un circuit...*
174	PO	*Ouais, mais tu veux des circuits, toi, non ?*
174	GE	*Non, je veux...*
174	PO	*Ah, des chemins...*
176	GE	*Passe moi une feuille blanche, je vais en faire aussi. Allez, c'est parti.*
178	PO	*Ben voilà, comme ça.*
179	DA	*Ah, en passant... En passant que par un point ?*
179	PO	*Ouais. C'est bon ! Faut que t'en... On a fait 1, ... T'en veux 6 ? Là, c'est qu'un chemin, t'es d'accord ?*
182	GE	*Ouais, ouais.*
182	PO	*T'en veux 6 superposés ?*
183	GE	*Non, euh, 4, déjà. Ça veut dire, que, à la base, c'est impossible. Parce qu'on en a 4. Mais on pourra quand même le faire avec ça.* *On prend le... Allez, hop !*
187	MA	*Ohlala... J'comprends rien de ce que vous êtes en train d'essayer de faire.*
187	DA	*Moi non plus.*
190	MA à PO	*Hein ? Qu'est-ce que tu essaies de faire ? Après, tu peux les faire différents à côté, de toute façon, on y verra plus clair. Pas obligé qu'ils soient superposés...*
192	PO	*Si ! Il veut les 4 superposés.*
193	MA	*Mais ça revient au même en fait, sauf que ça t'embrouille encore plus.*
196	DA	*Ben, là, de toute façon t'as fait un circuit, là.*
196	PO	*Ben, imagine que c'est fermé.*
197	MA	*Mais ça revient au même, PO, si tu les mets à côté, vus qu'ils ne se touchent pas.*
198	PO	*Ouais, mais bon ! Il me dit de les faire superposés, alors... On dirait des étoiles.*
200	MA	*Oui, mais c'est juste une question de logique. Ça s'... Ça s'complique... Enfin, bon...*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

204	PO	*Voilà. Là, y'en a 4 superposés. Et après on fait quoi ?*
206	GE	*4 superposés ? Ouais ? Ben,...*
208	GO	*Qu'est-ce que vous êtes en train de faire, en fait ?*
209	PO	*Ben, j'sais pas, il veut faire 4 trucs superposés.*
210	GE	*J'te montre juste comme ça.*
210	GO	*Pourquoi les faire superposés ?*
210	PO	*Parce que là, y'en avait 2 superposés.*
		Discussions inaudibles. Chacun travaille de son côté.
234	GE	*Là, regarde, là. Quel moyen de voir qu'ils sont superposés ? Qu'il y a 2 circuits différents ? Ou 2 chemins ?*
235	MA	*T'as aucun moyen, mais, c'est comme ça.*
236	GE	*Ouais, mais c'est ça qui faut qu'on trouve, en fait.*
236	MA	*Mais non ! Mais ça, après tu le vois comme ça. Donc...* Elle montre le graphe où les 2 composantes connexes sont coloriées en rose et jaune.
237	GE	*Oui, là d'accord, là tu vois. Mais là ?*
238	MA	*Mais, là, en fait, après c'est...*
239	GE	*Ou alors faudrait demander à (? ?).*
239	MA	*Non, mais non. Mais ça c'est à partir... Tu peux pas le voir directement comme ça. Mais après tu te doutes.*
240	GE	*Oui, mais justement. Faudrait un truc qui ferait qu'on pourrait le voir directement.*
241	MA	*C'est impossible... de le voir directement sur le circuit.*
243	DA	*2 circuits différents. Faut le trouver en fait. 2 chemins.*
244	MA	*Tu peux pas... Tu le vois comme ça. Faut regarder, faut forcément y passer..., tu vois...*
251	GO	*Du coup, je vous ai posé une question, et je n'ai pas entendu la fin de votre réponse. Pourquoi vous vouliez superposer ? Quel est l'intérêt ?*
252	MA	*C'était pour voir si on pouvait... 'Fin... Il veut voir si on peut les différencier comme ça... 'Fin... Il veut trouver quelque chose pour voir qu'il y a 2 types de circuits.*
254	GO	*D'accord.*
255	GE	*Donc, regarde. Là en fait, j'en ai... J'en ai 4, donc soit c'est impossible, soit il y a 2, en fait. Donc déjà, donc déjà, après, on sait qu'il faut en chercher 2...*
258	MA	*Ou que c'est impossible.*
258	PO	*Pourquoi tu sais que c'est impossible ?*
259	GE	*Ben, d'après les autres, sur un seul circuit, c'est impossible d'en avoir 4 impairs.*
260	PO	*Pourquoi ?*
260	MA	*Si, c'est possible ! Mais dans ces cas-là on ne pourra pas faire de circuit.*
262	GE	*Ouais, mais c'est impossible... Mouais. Mais, c'est impossible de le faire, si on en a 4 impairs.*
263	MA	*Mmmm*
263	GE	*Donc...*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

263	PO	*Même 3, hein ?*
264	GE	*Ouais, mais on a... Avec leur truc-là, on a vu qu'on arrivait pas à en avoir 3. (Il montre au tableau la propriété « Le nombre de salles impaires est toujours pair »). Que 3 salles... T'sais avec impair...*
265	PO	*Ouais.*
266	GO	*C'est une conjecture, hein ? Tout ce qui est écrit au tableau, ce sont des conjectures.*
267	GE	*Ouais, mais bon. On prend base sur ces... machins...*
268	GO	*Mais il y en a certaines sur lesquelles vous n'êtes pas d'accord, donc...*
268	MA	*Oui, mais celle-là on est d'accord.*
269	GO	*D'accord.*
269	MA	*'Fin...*
269	GE	*Donc, ça veut dire que soit c'est impossible, soit y'en a 2. Donc, après, y'a qu'à... Enfin... C'est un peu du pif, quoi... On en prend... On prend un point d'arrivée, et un point de départ et puis on essaie d'y faire.*
272	MA	*Oui, mais après... J'pense que du premier coup d' œil, tu pourras pas savoir.*
273	GE	*Mais au moins, déjà, on sait, à la base, que on peut en avoir 2. Ou si on en a 3, si on en a 6, on sait qu'il y a 3 chemins.*
276	GO	*Bon, allez. Moi je vous en propose un suivant. Je vous en donne un encore.*
278	PO	*Bon alors on n'a qu'à déjà tout de suite repasser aux couleurs, voir si...*
278	GE	*Ben déjà on compte.*
278	MA	*Ouais. On compte.*
280	PO	*4, 4, 5...*
281	GE	*5, 2, 4, 2, 4, ... 1, 2, 3, 4, 5... 1, 2, 3, 4...*
284	PO	*Là 4, là 4.*
284	MA	*Donc on peut être sûr que si y'en a...*
284	PO	*Donc là, on peut faire un chemin, mais pas de circuit.*
286	GE	*Ah ben ça on n'en sait rien ! Si ça se trouve, y'a un chemin et un circuit.*
287	PO	*Ben, d'après nos trucs, si on a 2 pièces impaires on peut faire un chemin, mais pas de circuit.*
287	GE	*Oui d'accord. Donc, déjà là, on a un chemin. Mais si ça se trouve y'a un circuit superposé dans le tout. Ça on n'en sait rien.*
289	MA	*Oui !*
289	GE	*Faut qu'on voie.*
290	PO	*Bon alors, attends. On essaie ?*
290	GE	*Allez.*
290	MA	*Bon, alors. Pars du 5, mais va pas vers l'autre 5.*
291	GE	*Pars du 5, ouais.*
291	PO	*Je pars là ?*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

292	GE	*Pars où tu veux, oui, on s'en fiche.*
293	MA	*Soyons fous. Bon, alors ensuite. Monte de ce côté-là. Comme ça on aura fait le grand tour-là. On sera débarrassés. Ensuite, euh...*
296	PO	*On continue là-bas ?*
296	GE	*Ouais, tant qu'à faire.*
297	MA	*Reviens, là. Là. Remonte là. Va là. Là, tu vas pas trop bouger.*
300	GE	*Mince !*
300	PO	*Et après ? Ah si, là.*
300	MA	*Si on peut encore.*
301	GE	*Ah ouais, c'est bon. Et voilà.*
303	MA	*Ensuite, va là.*
304	GE	*Attends.*
304	MA	*Faudra terminer par le 5. En dernier. Ouais. Tac, tac. Ça marche.*
307	GE	*Ça va, donc, là on n'a qu'un chemin.*
307	PO	*Ben, oui parce qu'il y a que 2... C'est pas ça. Y'a que 2 pièces impaires, on peut faire un chemin.*
309	MA	*Mais pas de circuit.*
309	GE	*Oui, mais on aurait pu faire un cir... T'sais, là... On part... On dit que y'aurait peut-être eu une superposition*
311	PO	*Ouais.*
311	MA	*Oui, s'il y a une superposition.*
311	GE	*Oui, ben. T'aurais pu avoir un circuit. Là tu le voyais pas qu'il y avait un circuit...*
312	MA	*Oui, parce qu'il y avait que des nombres pairs.*
312	GE	*... vu qu'il y avait que des nombres pairs. Donc en fait on aurait pu avoir un chemin et un circuit séparé.*
313	MA	*Oui, mais, là, vu qu'on l'a tracé, on a vu que c'était pas le cas.*
314	GE	*Oui, maintenant qu'on l'a tracé, on sait que ... On a pu tout faire, quoi.*
315	PO	*Mouais.*
315	GE	*En gros.*
317	PO à GO	*Faut les inventer quand même ces graphes.*
318	GE	*Ouais.*
318	PO	*Non, mais...*
319	GE	*Donc, ouais... Mais ça apporte pas grand-chose de...*
319	MA	*Donc, là, on sait juste que la propriété qui était valable pour les musées...*
320	GE	*On sait juste que maintenant on peut se faire prendre à un gros piège. Maintenant. Voilà.*
322	PO	*Quoi ?*
322	GE	*Ben, y'a des gros pièges. Là, on aurait pu avoir un circuit par-dessus ou des trucs comme ça.*
323	MA	*Oui, mais dans ces cas-là, on aurait vu que...*
324	PO	*Au musée on peut pas. Parce qu'on peut pas superposer de musées.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

324	GE	*Oui. Oui, c'est vrai. C'est l'avantage.*
325	MA	*Oui, mais sans être superposés, ils auraient pu être à côté et dans ce cas-là, on le verrait.*
327	GO	*Ça existe souvent. Dans les musées. Dans les vrais musées.*
328	PO	*Oui mais ils ont une pièce en commun...*
328	GE	*De quoi ?*
329	GO	*Que tu aies différents musées avec un hall en commun ou avec seulement (...) extérieur.*
330	PO	*C'est-à-dire ?*
331	GO	*Et ben... Tu ne peux pas passer dans toutes les pièces effectivement. Tu es obligé de sortir, et puis tu passes...*
333	PO	*Ah ouais... Ben c'est nul.*
333	MA	*Ben, non. C'est une question de pratique. Ils ne vont pas faire des couloirs de partout.*
334	GO	*Bon. Alors maintenant ce qui pourrait être bien, c'est de passer à tout ça.* En montrant le tableau. *Voir si tout est « traduisible » directement. Parce que il y en a certaines que vous avez discutées, pas toutes.*
337	PO	*Reprenons le premier.*
337	GO à MA	*Il y en a une, vous l'avez prise. Vous avez dit, c'est bon...*
337	GE	*C'est exactement celle-là, quand on n'a qu'un seul chemin, ou qu'un seul circuit sur un graphe. Mais dès qu'on en a 2, c'est tout...*
339	PO	*Alors. Si tout est pair.*
340	GO à MA	*Il y en a une au moins de propriété...*
340	MA	*Oui, « le nombre de salles impaires est toujours pair »...*
341	GO	*Ouais. Ça vous ne l'avez pas... Vous l'avez prise, comme ça... Vous ne l'avez pas du tout discutée, quoi. Vous avez dit : « Oui, c'est vrai ».*
342	GE	*Oui, mais ça, j'pense que c'est vrai.*
343	PO	*Si on reprend dans l'ordre... Si toutes les pièces ont un nombre pair...*
343	GE	*Ben, quand on regarde.*
344	GO	*Et dans toutes les questions il y avait des « Expliquez pourquoi »*
344	GE à GO	*Là il y en a 4, là il y en a 2. On n'a jamais réussi à en faire... On n'a jamais réussi à faire un nombre impair...*
345	PO	*Ben non ! Parce que, en fait, si on rajoute une porte...*
346	GO	*Ne pas réussir, ce n'est pas un argument, ce n'est pas...*
347	PO	*Non ! Mais en fait... Parce que... C'est simple. Parce que si jamais on rajoute une porte... Si on a notre musée comme ça. Elles en ont chacune 2 par exemple.*
351	MA	*Mmm, mmm !*
351	PO	*C'est bon. Elles en ont chacune 2.*
351	MA	*Dès que tu rajoutes une porte quelque part...*
352	PO	*Si on rajoute une porte par exemple là, ça rajoute forcément la porte qui est adjacente à...*
353	GE	*T'en as 2.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

353	MA	*Sauf si on fait une porte d'entrée.*
354	PO	*Si on rajoute une porte dans une pièce, ça la rajoute forcément dans la pièce adjacente.*
355	GE	*Ouais. Dans la pièce où la porte donne, en gros.*
355	PO	*Où le mur est commun aux 2 pièces.*
356	GO	Inaudible.
357	PO	*Pardon ?*
357	GO	*Pourquoi ça fait ça là, aussi là ?* En montrant un graphe.
357	GE	*Ben, parce que c'est un simple musée en gros.*
358	PO	*Parce que si jamais...*
358	GE	*Ouais.*
358	MA	*Parce que dès que l'on rajoute...*
358	GE	*C'est exactement le même...*
358	PO	*Parce que si jamais on rajoute une arête quelque part, il faut qu'elle soit reliée à un autre point. Donc ça rajoute une arête au point où elle est reliée. Une arête, elle peut pas s'arrêter en plein milieu.*
361	GE	*Ouais, ouais...*
361	PO	*'Fin... Tu peux pas faire... 'Fin... On peut pas faire un graphe où ça fait comme ça...*
362	MA	*Parce que l'arête, elle s'arrête sans point au bout.*
363	PO	*Et on peut pas faire une arête qui s'arrête comme ça. C'est pas possible...*
363	MA	*Non ! C'est pas possible.*
364	PO	*...si y'a pas de point. Donc, si on rajoute une arête à ce point là, faut forcément la relier à un autre point, et ça en rajoute une à l'autre point. Donc on pourra jamais faire un nombre impair de portes...*
367	GE	*Puis même si elle s'arrête en plein milieu...*
368	PO	*À moins qu'on fasse une porte...*
368	GE	*Oh, PO, même si elle s'arrête en plein milieu, on n'y arrivera pas, hein ?*
369	GO	*Un nombre impair de portes, on pourra jamais le faire ?*
370	PO	*Un nombre pair de portes...Non ! Un nombre impair de portes impaires, on pourra jamais le faire.*
371	MA	*Là, on parle de ça...*
371	PO	*De ça impair. Non, un nombre...*
371	GE	*Regarde, oh ! Oh, regarde ! Là...*
372	MA	*Ohlala, j'comprends plus rien...*
372	PO	*Ah, mais c'est le nombre de salles impaires...Pas de portes impaires...*
373	MA	*Ben oui.*
374	GO	*Le nombre de salles avec un nombre de portes impair...C'est ce qu'on avait dit, ça a été raccourci. Mais, peut-être qu'il faut le réécrire, justement.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

375	GE	*Mais, regarde, oh, PO. Là, même si ça s'arrête en plein milieu ta... ta... ta diagonale, t'arriveras jamais à faire un nombre impair.*
377	PO	*Oui, mais, j'veux dire... Elle peut pas s'arrêter sans point.*
377	GE	*Ouais, mais, ouais... On fait un point.*
378	PO	*Ouais !*
378	GE	*Et ce point, il aura une porte, en fait, en gros. Bon...*
379	PO	*Donc ça rajoute une truc impaire. Forcément.*
379	GE	*Ouais. Et ça en enlève. Ça en... En fait, si on fait ça, regarde, si je le rattache...*
380	PO	*Ben, ça en rajoute une là.*
380	GE	*Si je le rattache à ici...*
381	PO	*Ça en rajoute une là. Donc ça en rajoute forcément une là. Donc...*
381	GE	*Là...*
381	PO	*Donc elles vont forcément...*
381	MA	*Si on en rajoute quelque part,...*
381	GE	*Donc ça en fera un double. Et si je le rattache ici, celle-là, elle devient...*
382	PO	*A moins que...*
382	GE	*... paire. Et en fait, c'est celle-là qui...*
383	MA	*C'est pas « si on rajoute une arête quelque part, elle sera... ce sera toujours par 2 », en fait ?*
383	PO	*Elle sera toujours paire ?*
384	MA	*Ça rajoutera toujours à un autre point une arête.*
384	PO	*A moins que il y ait 3 là, 3 là... On rajoute une porte, par exemple là.*
385	GE	*Non, mais vrai que c'est un peu...*
385	MA	*A moins que le point ne reçoive qu'une seule arête.*
387	PO	*Attends, regarde. A moins que ça soit ça.*
387	GE	*Mouais.*
388	PO	*Non ! C'est pas ça que je veux faire. C'était ton dessin, ça. OK ?*
390	GE	*Ouais.*
390	PO	*Si on rajoute une porte... là ! Ça fera un nombre pair, et dans ce truc ça fera un nombre impair. Ah oui, mais y'aura toujours 2 salles impaires.*
393	GE	*Voilà. Donc voilà. T'arrives jamais.*
393	PO	*Donc c'est juste. Parce que si on rajoute une porte quelque part, ça rajoute une porte... Ça rajoute toujours une porte à la pièce Elle murmure impaire.*
396	GO à GE	*Dis-moi quel musée c'est, ça ?* Montrant le K5.
396	MA	*Quel musée ?*
396	GO	*Mmm. Tu m'as dit que c'était toujours un musée. Donc ça, c'est quel musée ?*
396	PO	*C'est toujours quoi ?*
397	GO	*Est-ce que tu peux dessiner un musée...*
398	GE	*D'accord !*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

398	MA	*A côté, un musée qui corresponde à ça.*
399	PO	*A côté, un musée qui corresponde à ça ?*
399	MA	*En prenant ta légende : 1 point =...*
400	PO	*Un point est égal à une salle. Donc déjà, là, t'as une salle.*
401	GE	*Ouais, mais ça va être chaud là, déjà.*
401	PO	*Donc, là, t'as une salle, là t'as une porte, là t'as une salle.*
402	GE	*Ouais.*
402	PO	*Si on prend ça.*
402	GE	*Ouais. Après t'as une... T'as encore une porte.*
403	MA	*Oui, mais le problème, c'est que là, les portes...*
403	PO	*Sauf que les salles elles peuvent pas se...*
403	MA	*Elles peuvent pas se coller.*
404	GE	*Là, t'as une salle...*
404	PO	*Nonnn ! Pourquoi encore une porte ? Elle part en diagonale, là, hein ?*
404	GE	*Ouais, mais, ouais...*
404	PO	*Ben, tu fais ta porte comme ça. Ta salle, comme ça. Ça se peut avoir des salles comme ça, hein. Là, t'as... Ah nonnn ! Non ! C'est la porte qui est en diagonale. La porte c'est une arête. C'est la porte qui est en diagonale. T'as ta salle... En fait, t'as une salle là, une salle là, une salle là, une salle là et une salle là ?*
410	GE	*Mmm.*
410	PO	*Et après faut les relier.*
410	GE	*Attends !*
413	PO	*Une porte en commun, une porte en commun, une porte en commun*
413	PO à GO	*Ben, c'est possible de faire un musée avec ça !*
414	MA	*Ouais mais dans ces cas-là, enfin... Elles se touchent pas... Tu peux pas faire une porte.*
415	PO	*Ben... Si !*
416	MA	*Oui, faut la faire en diagonale sinon.*
416	PO	*Oui, tu peux faire une salle en diagonale. Ah, mais attends, il faut faire des portes aussi, qui partent... en faisant l'étoile. Donc c'est pas possible.*
418	GE	*Ouais, c'est encore,... Par contre... Ouais.*
418	PO	*Ça peut pas faire l'étoile.*
419	GE	*Ouais. C'est ça le piège.*
419	DA	*Pourquoi ?*
420	GE	*Y'a... En fait... Ben, attends.*
420	Denise	*On va bientôt faire la synthèse.*
421	PO	*Mais MA pour dessiner l'intérieur, la porte, là...*

La synthèse commence alors pour la classe. Elle lieu en deux parties, et est animée par Charles. Il commence par décrire rapidement ce qui a été fait dans les différents groupes avant de donner une preuve du théorème : « un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair contient un parcours eulérien ». Il montre ensuite que si un graphe connexe a deux sommets de degré

impair, il suffit d'ajouter une arête entre eux pour obtenir un graphe dont tous les sommets sont de degré pair, et établir le théorème : « un graphe connexe dont tous les sommets sauf deux sont de degré pair contient un chemin eulérien qui commence et se termine sur un sommet de degré impair ».

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Annexe C

Compte-rendu de formations d'enseignants

Lors de mon stage de Master 2 et durant ma thèse, j'ai participé à deux séances de formation d'enseignants. La première séance a eu lieu en 2004 à Montélimar, et a orienté mon travail de thèse dans la mesure où l'objet graphe était alors un objet d'enseignement nouveau en France (seul un enseignant parmi la douzaine présente, avait en charge une classe de spécialité de terminale ES). Cette séance m'a semblé prouver l'intérêt d'une recherche didactique sur ce sujet. Je résumerai brièvement cette séquence avant de décrire une seconde intervention auprès d'enseignants qui s'est tenue en 2006 à Meylan.

C.1 Une première session de formation

Nous utiliserons pour la compréhension et la lisibilité de ce compte-rendu le codage suivant :

Les textes *en italique* sont des retranscriptions d'interventions orales.
Les textes **en gras** partagent la séance en unités de sens.

Les textes ou figures encadrés sont des retranscriptions du tableau.

Les textes ou figures margés sont des retranscriptions des brouillons des enseignants.

Introduction par S et D

Après une présentation succincte des intervenants, un enseignant pose la question de ce qui va être traité durant la formation. *Nous nous intéresserons particulièrement aux aspects modélisation et résolution de problèmes qu'offrent les graphes, conformément au programme de TES.*

Les enseignants posent quelques questions préliminaires :
- Où trouve-t-on des graphes ?
- Est-ce un outil répandu ?
- Le retrouve-t-on dans les écoles de commerce, facs d'économie ou d'autres formations qui sont la suite logique de la TES ?

Des éléments de réponses sont donnés : *Les chercheurs français en théorie des graphes appartenaient d'abord à des facultés d'études économiques et sociales, ce qui peut expliquer pourquoi elle se retrouve dans une filière économique et sociale. On la retrouve peu dans les études supérieures, pourtant elle est très utilisée en économie, en informatique, dans la gestion de files d'attente, ...*

Elle se retrouve plus dans les filières informatiques et parfois en sciences sociales (en particulier comme modélisation de problèmes réels avec résolutions algorithmiques et sans référence à la théorie des graphes en tant que telle), très peu dans les filières mathématiques, sauf parfois dans des modules d'ouverture.

Aucune définition du graphe n'est donnée, ni aucune description.

C.1.1 Premier problème : Poignées de mains

Exposé du problème au tableau

Groupe de 20 personnes. 2 personnes qui se connaissent se serrent la main. C : Conjecture « On peut trouver 2 personnes au moins qui serrent le même nombre de mains. »

Dévolution très rapide

Des réponses fusent :
- Si on se connaît tous, alors on se serre tous la main.
- Si personne ne se connaît, alors personne ne serre de main.
- Si deux personnes se connaissent alors, c'est bon, elles serrent le même nombre de mains (avec l'idée que « les amis de mes amis sont mes amis », qui sera vite abandonnée).

Une question est posée sur la transitivité de la relation. Réponse de S : *la relation n'est pas transitive.*

Dans deux des groupes, une recherche est faite sur C. (L'activité de preuve a débuté, immédiatement, à l'énoncé du sujet).

Les premiers graphes apparaissent sur les brouillons.

Une solution au problème est proposée

Un enseignant passe au tableau :

Supposer P vraie :
P : Aucune personne n'a serré le même nombre de mains.

Numéro des personnes	1	2	3	...	20
Nb de mains serrées	0	1	2	...	19

Le 20 a serré la main de 19 autres, donc celle du premier. La contradiction est insurmontable.

Les hypothèses utilisées pour la résolution du problème apparaissent

Sous l'hypothèse que personne ne se serre la main !

Réaction d'un autre groupe : *Si on ne suppose pas que l'on ne se serre pas la main (à soi-même),*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

alors il n'y a plus de contradiction, car on peut avoir de 0 à 19 (on peut avoir 20 personnes qui serrent toutes un nombre différent de mains, si l'on considère que l'on peut se serrer la main à soi-même).

On pourrait aussi avoir 20. Cette idée n'est pas reprise.

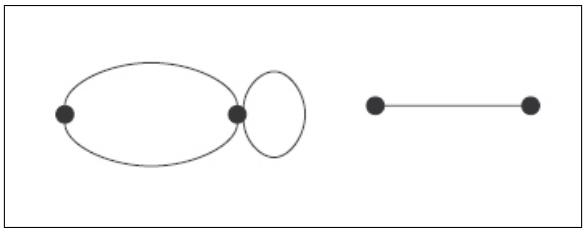
Si chacun se serre la main une fois, le problème est le même que précédemment (celui qui a été résolu : graphe simple sans boucle).

Intervention de D : *Il y a en fait deux hypothèses dans votre démonstration :*

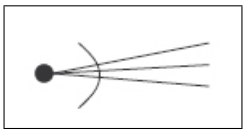
Deux hypothèses : – Personne ne se serre la main. – Deux personnes ne se serrent la main qu'une seule fois.

Première apparition du graphe au tableau, premières définitions

Ce qui correspond à un graphe simple sans boucle ni double arête.



S intervient et définit le degré d'un sommet :



Reprise de l'énoncé en terme de graphe

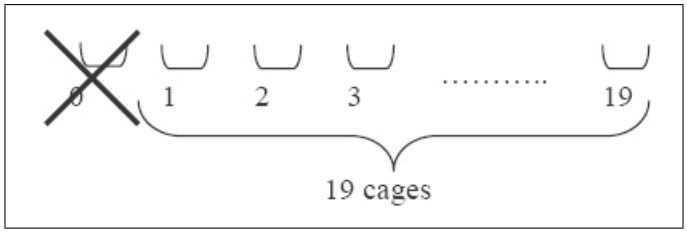
(D) *La démonstration revient donc à : « Dans tout graphe simple sans boucle, il y a au moins deux sommets de même degré. »*

Un détour du côté du principe de Dirichlet, dit des « cages à pigeons »

(D) *La démonstration utilise le principe des « cages à pigeons » :*

Si on a n cages et $n+1$ pigeons (ou plus) et que l'on met tous les pigeons dans les cages, alors il y a une cage qui contient (au moins) deux pigeons.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009



Les réactions sont vives à l'écriture du principe de Dirichlet : « Ca ne sert à rien ! », « La deuxième partie est inutile. »

S et D argumentent, *la preuve donnée repose sur le principe de Dirichlet, c'est ce principe que vous avez mis en œuvre dans votre démonstration.* Mais les protestations perdurent : « C'est évident, et redondant par rapport à la première partie. », « C'est une illustration de ce qui a été fait avant en plus compliqué. »

S et D argumentent à nouveau : la preuve repose sur ce principe. Le fait d'avoir mis en relation dans un tableau des numéros de sommets et des degrés permet de faire apparaître, visuellement, l'impossibilité d'avoir 20 sommets de degré différent. Mais le principe mathématique sous-jacent dans cette preuve est le principe de Dirichlet.

Que devient le problème sous d'autres hypothèses

Une nouvelle question est posée par un stagiaire : que se passe-t-il si on se serre plusieurs fois la main ? S reprend la question, et la pose à la salle.

On se serre plusieurs fois la main.

Il y a eu une réaction immédiate à cette « hypothèse » dans Gr1 : *Si on peut se serrer plusieurs fois la main, ça augmente le nombre de cages, alors c'est bon, on a fini.*

(Que signifie ici le « c'est bon » ? Cette remarque peut avoir pour origine deux conceptions :
- s'il n'y a pas assez de cages, alors la conjecture est vérifiée ; donc s'il y a assez de cages, alors la conjecture devient fausse, conception erronée : l'implication $A \Rightarrow B$ est traduite par $\neg A \Rightarrow \neg B$?
  ou
- l'outil ne marche plus donc la preuve et la conjecture sont fausses, conception erronée sur la validité d'une preuve) ?

Nous ne retranscrirons pas l'intégralité de cette partie, l'activité dans les groupes étant tellement fournie et diverse, qu'il est difficile d'en donner un état d'après nos seules notes. En effet, chaque groupe a inventé de « nouvelles hypothèses » que nous regroupons ici :

MG : multigraphe sans boucle

MGB : multigraphe avec boucle (unique ou multiple)

SBM : graphe simple avec boucles multiples

SBU : graphe simple avec la possibilité de boucle unique pour certains sommets

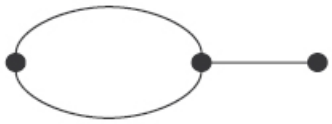
Pour chacune des hypothèses et dans tous les groupes, il y a eu recherche de génération de familles de contre-exemples.

Commençons par regrouper ces contre-exemples dans le cas des multigraphes

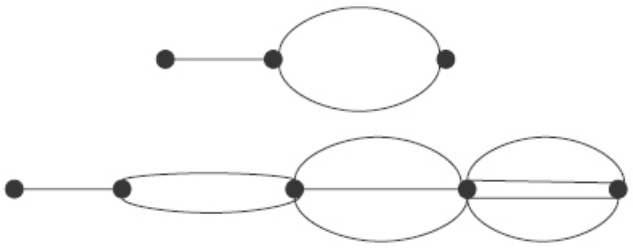
tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Un premier contre-exemple à C :

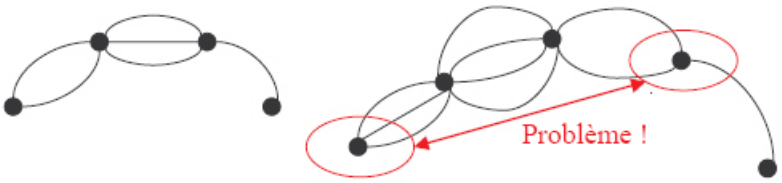
tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009



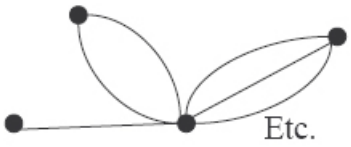
Il y a un problème de parité pour ce dernier type de contre-exemple : pour n pair deux sommets sont de même degré, ce n'est donc pas un contre-exemple à la conjecture.



Le même type de contre-exemples avec la même difficulté dans un autre groupe.



Un autre contre-exemple : le graphe en étoile



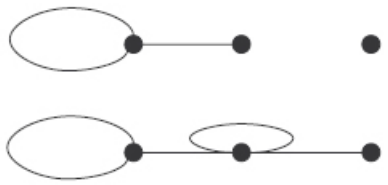
Ces différents types de contre-exemples ont alors été généralisés dans les groupes.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Pour les graphes avec boucles (MGB et SBU), de nombreuses confusions ont eu lieu dans tous les groupes, liées principalement à la définition de la contribution de 1 d'une boucle au degré d'un sommet, qui ne correspond pas à la propriété de parité de la somme des degrés d'un graphe.

Pour SBU, une enseignante explique ce qu'elle a trouvé à une autre personne du groupe. *C toujours fausse sauf pour* $n = 2$

- *C'est faux pour 2 sommets car les degrés c'est 0-1, 0-2 ou 1-2. Aucun n'est possible* (soit aucun graphe simple avec boucle unique ne peut correspondre à ces séquences de degré, soit la parité de la somme des degrés n'est pas respectée).
- *C'est faux pour* $n = 3$. *Tu as soit 0 1 2 soit 1 2 3 et ça donne l'un de ces deux graphes* :



Vois maintenant combien tu peux faire de contre-exemples.

Comme il n'y en a pas d'autres, alors dans le cas général, on passe de deux contre-exemples qui marchent à n *sommets à l'étape* $n + 1$ *:*

- *si tout est « plein » on ajoute un sommet isolé* ;
- *sinon on ajoute un sommet et on lui donne un degré* $n + 1$ *en le reliant à lui-même et à tous les autres sommets.*

Pause : trois heures se sont écoulées depuis que le premier problème a été posé.

Au retour de nouvelles questions sont posées :

Alors ça c'étaient des graphes ? (Dans le sens « ce n'est donc que ça ! »)

Le simple fait d'avoir regardé les choses comme ça, d'avoir fait les dessins, c'est faire des graphes ?

Des réponses sont apportées :

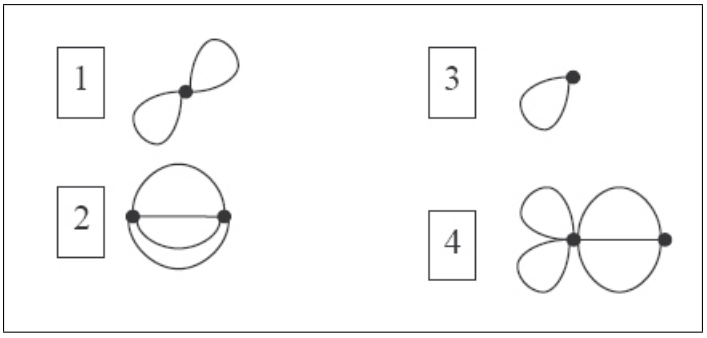
Effectivement le modèle est simple, inhabituel, mais il permet, et vous l'avez vu, un accès à des raisonnements mathématiques, vous avez pu démontrer vos résultats en ne connaissant presque rien des graphes.

Il semble que la « facilité » du modèle, son accessibilité et le fait qu'il ait été construit par les enseignants eux-mêmes en ait déconcerté certains.

Synthèse du problème des poignées de mains

S : *Vous avez travaillé sur des choses différentes, on peut donner 4 cas* (il en donne au départ 3 mais les enseignants en ajoutent un) :

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009



On a donc quatre cas :
- *Boucles multiples*
- *Boucles simples*
- *Plusieurs arêtes sans boucle*
- *Plusieurs arêtes et plusieurs boucles*

Synthèse pour les graphes avec boucle unique et sans arêtes multiples

Gr1 : (O. au tableau) montre que la conjecture est fausse pour les graphes simples avec boucles (chaque sommet ne pouvant comporter qu'une seule boucle.)

On va procéder par récurrence (sur le nombre de sommets du graphe). *Il y a deux contre-exemples à deux sommets :*

Le premier type de contre-exemple sera le type A. Il contient un sommet isolé. Le second type de contre-exemple sera le type B. Il contient un sommet « saturé ».

Le cas 0-2 est impossible. (On ne peut pas avoir un graphe à 2 sommets ayant un sommet de degré 2 et un de degré 0). *Ces deux contre-exemples sont donc uniques.*

Par récurrence on démontre que ça marche au rang $n+1$. S'il existe un contre-exemple à n sommets de type A, il en existe un à $n+1$ sommets de type B, et, s'il existe un contre-exemple à n sommets de type B, il en existe un à $n+1$ sommets de type A.

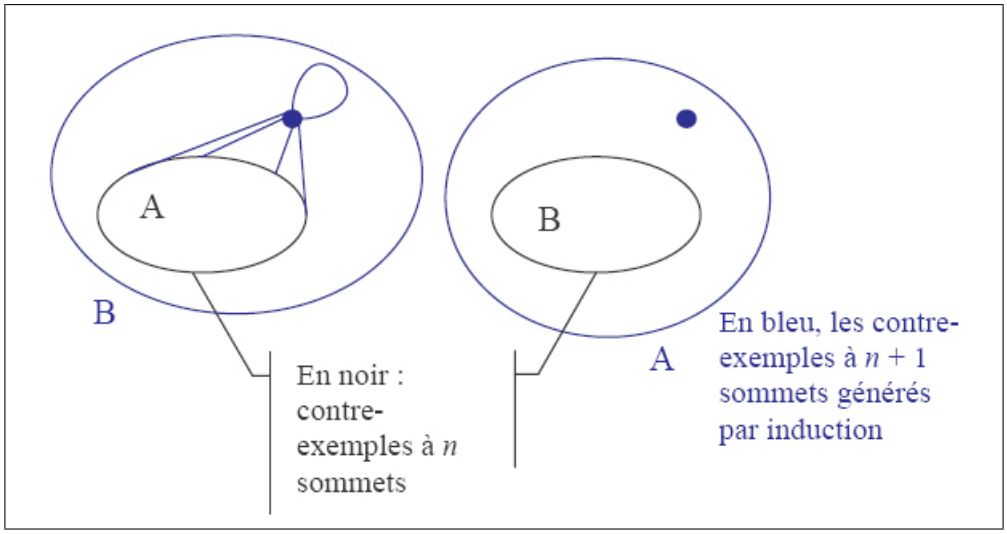
Intervention de S : *On va même montrer plus que cela : on va montrer par induction que, pour ce type de graphes, il n'existe que deux sortes de contre-exemples à chaque rang n un contre-exemple de type A et un contre-exemple de type B.*

O reprend la parole : *Si le graphe est de type A, on lui ajoute un sommet que l'on sature. Si le graphe est de type B, on lui ajoute un sommet isolé.*

On obtient ainsi deux graphes ayant $n+1$ sommets, et qui sont des contre-exemples de la conjecture :

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009



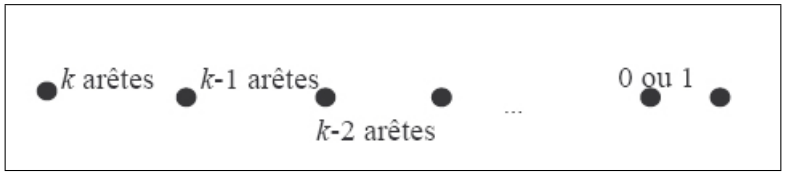
Beaucoup de questions sont posées sur l'unicité des contre-exemples construits. Par induction, il a été montré que des contre-exemples d'ordre n existent, mais on aurait pu montrer[1] de plus qu'étant donné la séquence de degrés et la méthode de construction, les contre-exemples de type A et B sont uniques. (Il n'y a pas de contre-exemple de type C).

S : *La conjecture est donc « presque toujours vraie » pour ce type de graphes, sauf pour 2 graphes à n sommets qui nous servent de contre-exemples.*

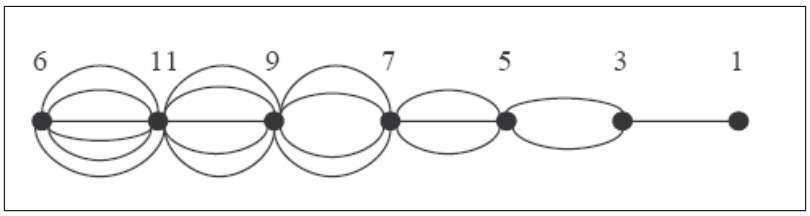
Synthèse pour les multigraphes sans boucle

R, du groupe 1 passe au tableau.

On a construit une chaîne reliant n sommets. Soit k l'entier pair précédent n. Alors la chaîne suivante est un contre-exemple de la conjecture :

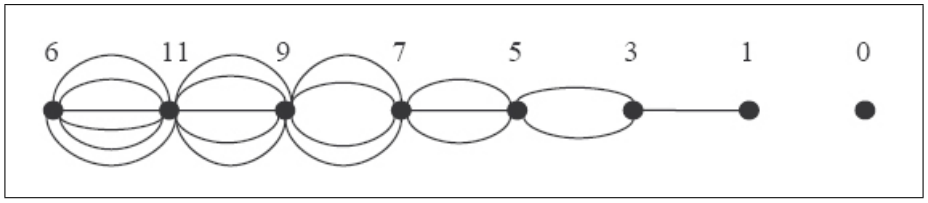


Par exemple, pour 7 sommets, $k = 6$ et on obtient le contre-exemple suivant :



Pour 8 sommets, on a aussi $k = 6$ et on obtient le contre-exemple :

[1]Voir chapitre 4 paragraphe 4.2.2.



L'idée c'est de faire une séquence de degrés telle que deux sommets soient toujours de degré différent. Et le problème, c'est que si on commence par un sommet de degré impair alors deux sommets peuvent être de même degré. Alors on se débrouille pour partir toujours d'un sommet de degré pair.

Intervention de S : *Ceci est un contre-exemple, dans les autres groupes vous en avez trouvé d'autres comme l'étoile, il n'y a pas d'unicité des contre-exemples dans ce cas-là.*

Synthèse pour les graphes avec boucles multiples

La synthèse se fait à l'oral, tous les groupes ayant trouvé des contre-exemples simples. *On peut par exemple prendre un graphe composé seulement de boucles : le premier en a une, le deuxième deux, etc.*

On peut même transformer tous les graphes qu'on veut en contre-exemples avec cette méthode. (On peut toujours pour un graphe donné, ajouter des boucles pour obtenir une séquence de degrés tous différents).

C.1.2 Deuxième problème : Ramsey(3, 3)

Présentation du problème

D présente le problème et écrit l'énoncé au tableau :

> Existe-t-il un nombre R tel que pour un groupe de n personnes, $n \geq R$ on ait ou 3 personnes qui se connaissent 2 à 2, ou 3 personnes qui ne se connaissent pas du tout ?

Des demandes de précision sur la relation sont formulées, l'énoncé est détaillé ainsi :

> Trois personnes A, B et C se connaissent 2 à 2, si :
> – A connaît B, et
> – B connaît C, et
> – A connaît C.
>
> Trois personnes ne se connaissent pas du tout, si :
> – A ne connaît ni B ni C, et
> – B ne connaît ni A ni C, et
> – C ne connaît ni A ni B.

À la suite de questions, il est précisé que la relation est bien symétrique.

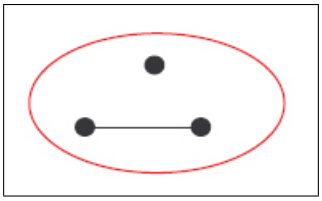
tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

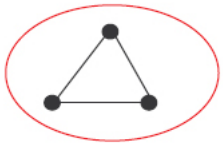
Dévolution du problème, premières explorations sur des graphes à 3 ou 4 sommets

La dévolution est très rapide, et chaque groupe étudie les cas pour des petits graphes :

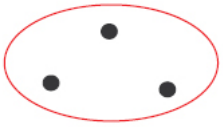
Gr2 : Pour $n = 3$, ça ne marche pas :



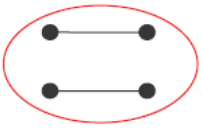
Les enseignants traduisent le problème : *on recherche la taille maximum d'un graphe pour être sûrs qu'il ne contient pas de « triangle » :*



Ni graphes formés de ces 3 points isolés :



Pour $n = 4$, on a un contre-exemple :



Donc, n doit être supérieur à 4.

Les éléments de résolution du problème sont déjà présents

L'une des personnes du groupe a l'idée que l'on recherche deux formes particulières :

Il s'est passé un quart d'heure depuis l'exposé du problème, les éléments de réponse sont déjà présents dans le dialogue entre les personnes du groupe. Si le groupe avait été composé de personnes ayant déjà exploré l'objet graphe, on peut penser que le problème aurait directement été résolu dans ce groupe.

Exploration de l'énoncé, cas des « petits » graphes

Gr3 : *Si on trouve que pour $n = 18$ la propriété est fausse alors on est sûr que la propriété est fausse pour tout $n \geq 18$.* (Par existence d'un sous-graphe de taille $n = 18$) Une recherche est faite par l'un des enseignant sur le complémentaire des graphes contre-exemples trouvés.

C'est le même graphe ! Un triangle fermé !

$R(3,3) = 5$ **?**

Gr2 : Le groupe recherche un « contre-exemple » (c'est le terme que le groupe emploie) à 5 sommets, et n'en trouve pas. Ils pensent qu'il n'en existe pas. (Ils finiront par le trouver auprès du groupe 3)

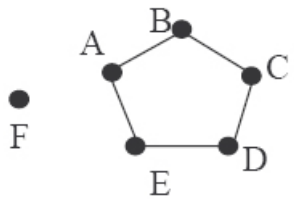
$R(3,3) > 5$

Gr1 : Recherche d'un contre-exemple pour 5 sommets :

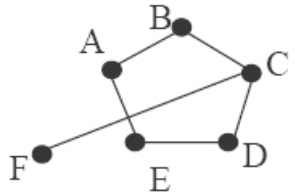
Il n'y a ni triangle ni triplet de points isolés. C'est fini !

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Recherche d'un contre-exemple à 6 sommets à partir de C_5[1]. *Comment relier le sixième point aux autres pour conserver un contre-exemple ?*



Si on relie A et F alors il ne faut pas relier F et B,ni F et E. On relie donc F et C.



Mais alors, B, E et F ne se connaissent pas ! Pour 6 c'est ardu !

Propriété et recherche exhaustive

Gr3 : *Si on trouve pour n, alors tout graphe de taille supérieure à n contient un sous-graphe de taille n pour lequel ça marche.*

Une personne tente de décrire tous les graphes de 6 sommets, pour étudier l'existence de contre-exemple.

Premières recherches sur les graphes complémentaires

Gr2 : Plusieurs questions se posent entre les enseignants du groupe : *Qu'est-ce que le complémentaire d'un graphe ? Qu'est-ce que la négation de la proposition ?* L'idée de la recherche est basée sur le fait que l'on recherche des figures sans triangle et dont le complémentaire ne contient pas non plus de triangle.

Tous les éléments de réponse sont présents

Gr1 : Une idée très forte est née (la preuve de $R(3,3) = 6$ est basée sur cette idée) : à partir d'un sommet, on ne peut pas en avoir 3 qui partent, car on aurait l'une de ces « figures » :

[1] C_5 est le cycle à 5 sommets que le groupe vient de trouver comme contre-exemple.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

On recherche donc le plus petit graphe tel qu'on soit sûr de trouver la première ou la seconde figure.

Recherche exhaustive de « contre-exemples » parmi les graphes à 6 sommets générés par les « contre-exemples » à 5 sommets

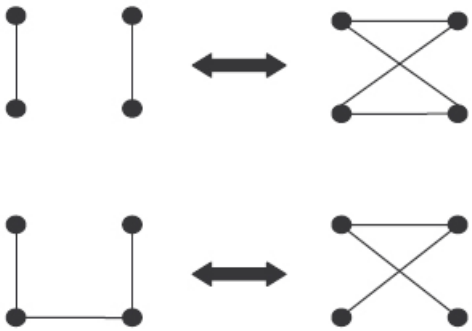
Gr3 : La question se pose : *pourquoi ne pas partir d'autres graphes à 5 sommets. Est-on sûr que les graphes à 5 sommets qui ne sont pas des contre-exemples ne permettent pas de construire des contre-exemples à 6 sommets ?* Ces questions reviennent de façon très ponctuelle, et sont vite écartées.

Gr1 : *On cherche à montrer que ça n'existe pas pour 6 sommets.*

Contre-exemples à 3, 4 et 5 sommets, et lien avec les graphes complémentaires

Gr2 : *Pour $n = 3$, on a :*

Pour $n = 4$, on a :



Pour $n = 5$, on a :

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

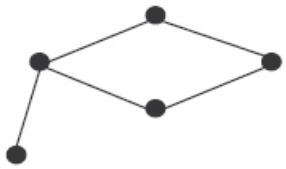
Des questions se posent sur ces 2 dernières représentations : ces graphes sont les mêmes, mais si on les considère comme complémentaires, alors ils représentent des relations différentes. Ce ne sont donc pas les « mêmes » graphes. Une autre question est posée : *Pourquoi partir de ces contre-exemples à 5 pour générer les contre-exemples à 6 ?*

Il est évident que si ça marche à 4, ça marche à 5. Si on a un triangle ou 3 points isolés à 4 alors ils sont toujours là quand on ajoute un 5ième *point.*

Si on trouve $R = 7$ *par exemple, (on sait déjà que* $R > 5$*) toutes les configurations à 7 contiennent soit un triangle, soit 3 points « sans lien », alors pour* $R > 7$ *ça marche encore, ça contient toujours soit un triangle, soit 3 points « sans lien ».*

Recherche de contre-exemples à 5 sommets, reprise sur les graphes complémentaires

Gr3 : *Ce graphe est un contre-exemple :*



La nécessité de revenir au sujet apparaît. *On a perdu notre fil d'Ariane, là !*

S relance l'idée de travailler sur le complémentaire. Cette piste est reprise et le problème devient : *On recherche la taille minimale d'un graphe tel que, soit il contient un triangle* (C_3)*, soit son complémentaire contient un triangle.*

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Le deuxième graphe contenant un triangle, le premier n'est donc pas un contre-exemple.

Par contre, notre contre-exemple, le seul que nous avons trouvé pour $n = 5$ pour l'instant, est bien un contre-exemple :

Une discussion a lieu autour de la question : *ces graphes sont-ils les mêmes ?* L'idée qui ressort est : *Ça dépend du contexte.*

Une propriété intéressante

Deux autres personnes du groupe propose un certificat permettant d'affirmer que si un graphe à 5 sommets est un « exemple » alors un graphe généré à partir de ce graphe sera lui aussi un exemple :

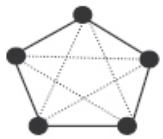
Ça ne sert donc à rien de chercher des « contre-exemples » à 6 sommets à partir d'« exemples » à 5 sommets.

Apparition de la seconde représentation

Une autre personne du groupe trace dans le même graphe d'une couleur la relation « se connaissent » et d'une autre couleur la relation « ne se connaissent pas ». La figure obtenue ne doit pas contenir de triangle monochrome.

Gr1 : Les graphes sont représentés avec leurs complémentaires sur le même dessin, l'un en pointillés l'autre en traits pleins :

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009



C'est dual comme problème ! Dans le sens où les couleurs jouent un rôle symétrique, de même que les graphes et leurs complémentaires.

En termes de graphe, le problème se ramène à la recherche du graphe complet de taille maximale, tel qu'il existe une bicoloration des arêtes ne contenant pas de cycle de longueur 3 dans chacune des couleurs. Le problème est exposé comme tel par S, sans utiliser les termes qui n'ont pas été définis : *Vous cherchez en fait à colorer les arêtes du graphe avec deux couleurs, sans que des triangles d'une seule couleur apparaissent.*

Par exemple, est-ce que ça marche pour celui-là ?

La synthèse approchant, S donne la solution à un groupe

S : *La solution vous l'avez depuis plus de deux heures ; vous disiez qu'il ne fallait pas qu'une personne en connaisse trois, car cela menait à l'obligation de trouver :*

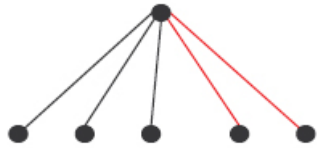
comme graphe, ce qui n'est pas possible. De la même façon, si on ne connaît pas trois personnes, on se ramène (par le complémentaire) au même problème.

Maintenant, à partir de quelle taille dans un groupe est-on sûr soit de connaître 3 personnes, soit de ne pas connaître 3 personnes ?

La réponse « 6 » est donnée immédiatement, par les trois participants du groupe, unanimes.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Elle amène à une nouvelle représentation permettant de faire apparaître ce qui se passe pour l'une des personnes :



Avec 6 personnes, il y en a toujours au moins 3 qui se connaissent ou trois qui ne se connaissent pas du tout. Donc on retrouve la figure précédente qui nous montre que la propriété ne peut plus marcher pour $n = 6$. Donc $R = 6$.

Synthèse du problème de Ramsey :

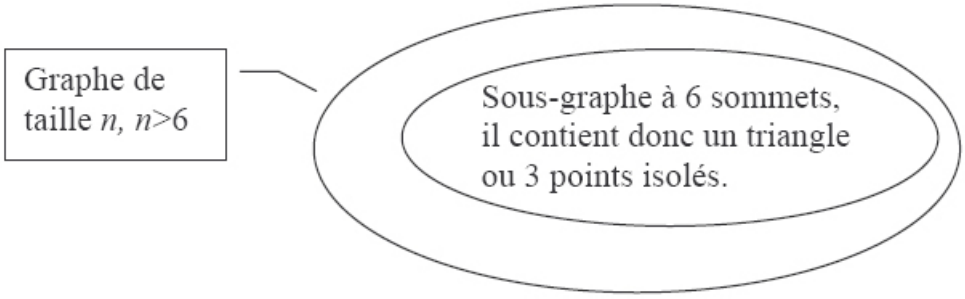
S : *Dans tous les groupes vous avez montré qu'il existe un graphe à 5 sommets qui marche :*

Ces 2 graphes (le rouge et le noir) sont appelés « auto-complémentaires », vous avez aussi rencontré un tel graphe à 4 sommets :

Pour $n = 6$, tous les graphes semblent contenir soit un triangle soit 3 points isolés, $R = 6$ est donc candidat.

Pour $n > 6$, tout graphe contient un graphe de taille 6, il contient donc soit un triangle soit 3 points isolés :

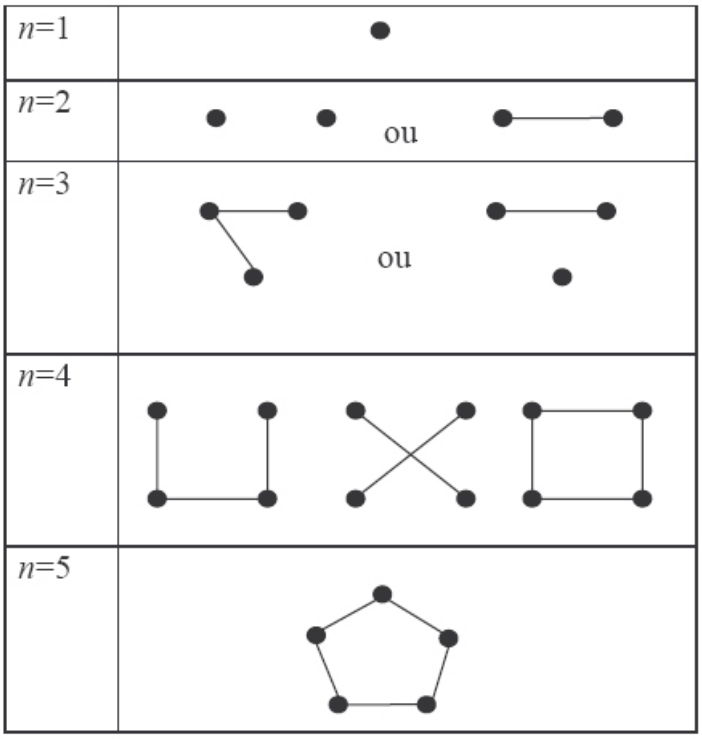
tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009



On a 2 types de preuves pour les différents groupes : une preuve énumérative (pour les groupes 2 et 3) *et une preuve descriptive* (pour les groupes 1 et 2).

Preuve énumérative

On cherche à construire tous les contre-exemples, à partir des contre-exemples de taille inférieure. On obtient :



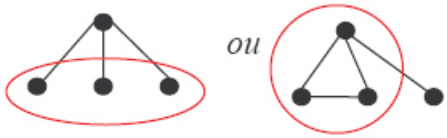
Puis vous avez essayé de générer un contre-exemple à 6 sommets à partir de ce dernier graphe, C_5, et montré que cela n'était pas possible en énumérant toutes les possibilités de relier ce nouveau

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

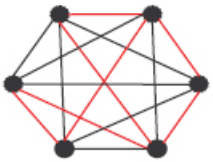
sommet aux 5 déjà présents.

Preuve descriptive

L'idée, c'est que dans le dessin, il y a des contraintes, et que si un sommet est voisin de 3 autres alors on a un problème. On trouvera alors :

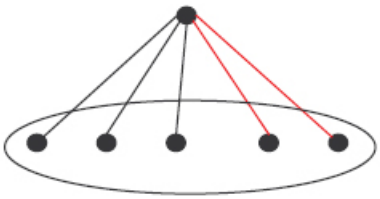


Si on dessine le fait de se connaître et de ne pas se connaître avec deux couleurs sur le même graphe, cela revient à rechercher les triangles d'une même couleur dans un graphe complet (un graphe complet, c'est quand on a toutes les arêtes) :



Y a-t-il des triangles rouges ou des triangles noirs dans cette figure ?

Lorsque l'on a 6 sommets, alors forcément l'un des sommets est relié à au moins trois sommets, soit par des arêtes rouges, soit par des arêtes noires :



Dans ce cas on aura toujours un triangle monochrome. Donc $R(3,3)$ est bien égal à 6.

Retour au problème général

Si l'on revient au problème général, avec $R(p,q)$, p et q étant quelconques, alors le problème reste ouvert.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

On peut assez facilement montrer, avec l'argument précédent de taille des groupes, la majoration suivante :

$$R(p,q) \leq 2^{p+q}$$

Des réactions à cette majoration. *Ce n'est pas bon comme majoration.*

Qu'est ce que ça donne pour notre problème ?

Des calculs sont faits. On revient à l'énoncé pour retrouver à quoi correspondent p et q. Calculs faits, le groupe obtient : $R(3,3) \leq 2^{3+3}$, avec $2^{3+3} = 32$ (Erreur de calcul)

Ce n'est pas très bon comme majoration !

La journée est terminée.

C.2 Une seconde session de formation

C.2.1 Présentation de la session de formation

Questions introductives

Les enseignants sont, dès leur arrivée dans la salle, empressés d'entendre des réponses à leurs questions. Visiblement les réponses institutionnelles semblent être insuffisantes, dans la mesure où ce sont les mêmes questions que nous avions eues deux ans auparavant à Montélimar, et que nous croisons ponctuellement lors de nos rencontres avec des professeurs de mathématiques en charge de la spécialité de TES depuis. Ces questions tournent autour de la justification de l'introduction d'éléments de la théorie des graphes en TES : pourquoi introduire cette branche des mathématiques ? Pourquoi dans cette filière ? D'où viennent ces mathématiques (au niveau historique, en France,. . .) ? Où sont-elles utilisées ? Les étudiants de TES vont-ils retrouver des graphes plus tard, dans leur cursus universitaire ?

Un autre type de questions apparaît dans le groupe, né de l'expérience d'enseignement que nos interlocuteurs ont vécue. Ils se demandent si l'enseignement qu'ils dispensent est correct, et dans la conformité au programme, et dans la pertinence des exemples qu'ils choisissent. Plusieurs nous font part de la difficulté de savoir « où s'arrêter » dans le programme, jusqu'à quel niveau doivent être décrites les notions abordées.

Organisation pratique des séances

Onze enseignants sont présents lors de la première séance, dix le lendemain (jour de l'écrit de l'agrégation interne). Ils s'organisent en trois groupes de travail qui resteront les mêmes sur les deux jours. La session sera de douze heures réparties en quatre tranches de trois heures. Trois animateurs seront présents, deux par session entre Roland Bacher, Sylvain Gravier et Denise Grenier. Je serai présente lors des 4 séances en tant qu'observatrice, sauf lors de la troisième session où j'interviendrai dans son déroulement. Les séances se dérouleront pour la plupart avec une phase de travail en groupe et une phase de mise en commun et d'apport d'éléments mathématiques, pour chacun des problèmes posés à la salle.

Les problèmes proposés

Les problèmes proposés lors de cette session sont résolus dans le chapitre 4. Ce sont les suivants : poignées de mains, construction de graphe n-régulier, propagation de lumière dans un graphe,

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

plus court chemin entre deux sommets d'un graphe, nombre de chemins entre deux sommets d'un graphe, problème de Ramsey(3, 3) et coloration de graphes.

Compte-rendu

Nous utiliserons pour la compréhension et la lisibilité de ce compte-rendu le codage suivant :

Les textes *en italique* sont des retranscriptions d'interventions orales.
Les textes **en gras** partagent la séance en unités de sens.

Les textes ou figures encadrés sont des retranscriptions du tableau.

Les textes ou figures margés sont des retranscriptions des brouillons des enseignants.

Le compte-rendu sera synthétique et linéaire, nous privilégierons la retranscription des raisonnements ou tout au moins de leurs traces écrites ou orales, par rapport aux autres activités des enseignants, même si elles ont été nombreuses.

Ce compte-rendu est issu de prises de notes, il ne montre donc pas tout ce qui a pu se passer durant ces deux jours, en particulier toutes les interactions à l'intérieur des groupes et avec les animateurs, toujours au moins deux à chaque séance.

Les enseignants s'étant répartis dans trois groupes, nous les nommerons $G1$, $G2$ et $G3$; $g1a$, $g1b$, etc. correspondant au premier, deuxième, ... membre du groupe $G1$.

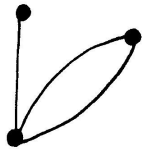
C.2.2 Les poignées de main

Le premier problème proposé est celui des poignées de mains. Il est proposé au tableau comme suit :

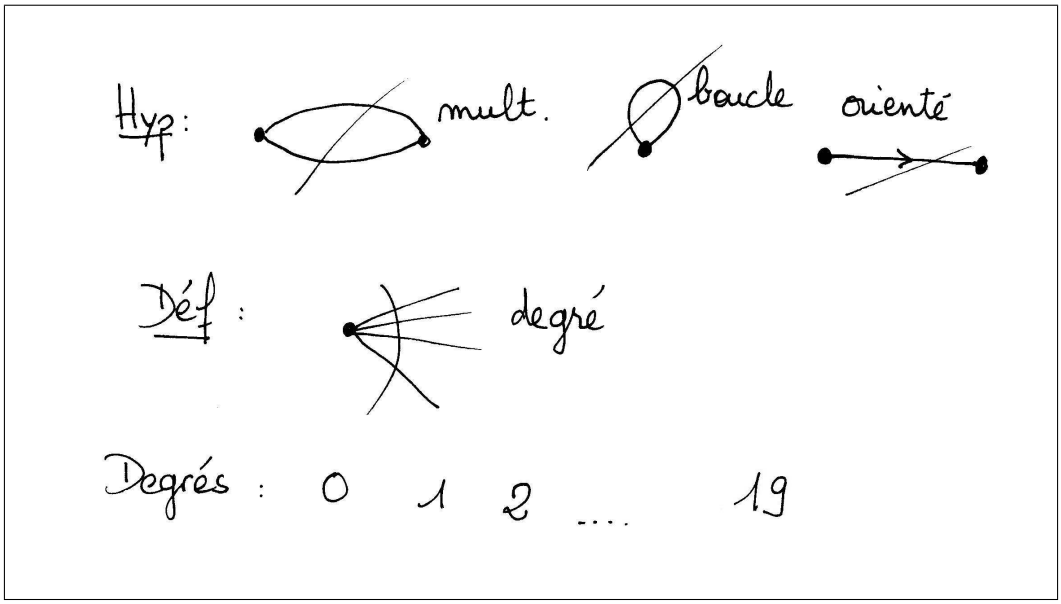
Problème : poignées de mains 20 personnes. Si elles se connaissent, elles se serrent la main. Conjecture : On peut trouver deux personnes qui serrent le même nombre de mains.

La recherche dans chacun des groupes commence tout de suite. Étant donnée la configuration de la salle, le groupe observé sera plutôt le groupe $G1$. Dans ce groupe, l'un des enseignants a de façon assez systématique critiqué les consignes et les problèmes proposés. Pour ce problème, elle trouve que le « contexte n'est pas drôle ». Les autres membres du groupe se posent la question du domaine de validité de la conjecture. Avec une double question :
– Si on se serre la main à soi-même.
– Si on sert plusieurs fois la main aux personnes qu'on connaît.
Ils établissent par exemple un premier contre-exemple, sous la forme d'un graphe, sur le principe que les gens qui se connaissent peuvent se serrer la main deux fois, une fois pour dire bonjour, l'autre au revoir :

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009



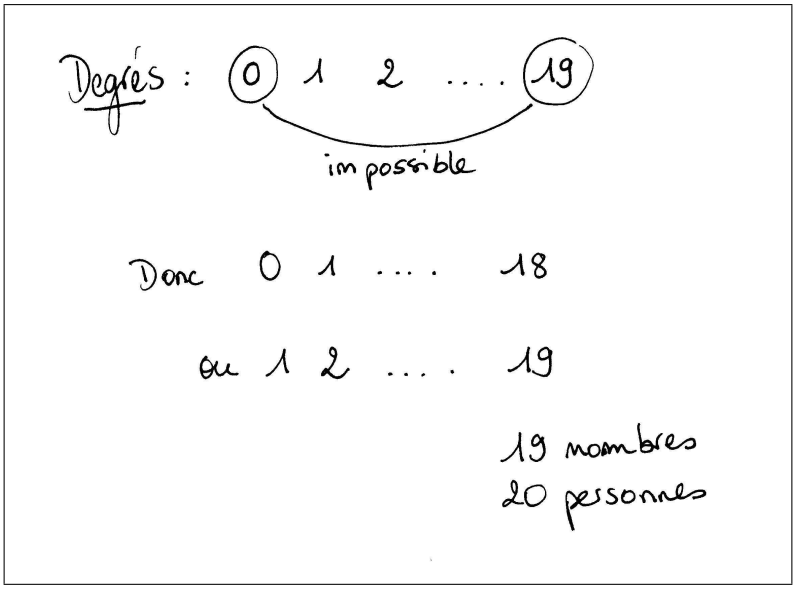
Dans les autres groupes, la réflexion est centrée sur le problème simple sans multipgraphe, ni boucle. Et l'argument de la séquence de degré incompatible avec le nombre de personnes apparaît. Une première mise en commun est donc proposée. Elle reprend d'une part la restriction du domaine de validité de la conjecture excluant les mutigraphes, les graphes orientés et les boucles, et d'autre part l'idée de la séquence de degré des sommets représentant les 20 personnes. Elle intègre aussi la définition orale du degré d'un sommet comme « nombre d'arêtes partant de ce sommet » :



S. retranscrit à l'oral ce qui s'est dit dans $G2$ et $G3$: il retrace l'idée que pour 20 personnes, pour que toutes serrent un nombre différent de mains alors la première doit en serrer zéro, la deuxième une, ..., la vingtième dix-neuf, ce qui correspond à la séquence de degrés notée au tableau. Or, si on nomme chaque personne par le nombre de mains qu'elle serre, *le 19 serre les mains de tout le monde, y compris le 0 : le 19 contrarie le 0* ce que redit autrement $g3b$: *si une personne connaît tout le monde, personne ne peut connaître personne.*

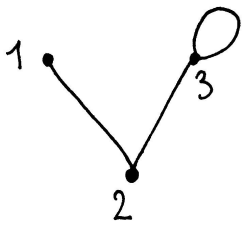
S. et D. demandent sur quel principe repose cette affirmation et comment la généraliser pour un groupe de n personnes. La question semble déconcerter le groupe qui ne voit pas d'éléments de réponse autres que *c'est évident !* ou *c'est logique !*. S. présente alors le principe de Dirichlet ou principe des cages à pigeons (et repousse au passage le principe des tiroirs que proposent certains qui est plus général). Aux questions : *Que sont les cages , que sont les pigeons et combien y-en a-t-il respectivement* les réponses sont immédiates. Les cages sont les 19 nombres compris entre 0 et 18 ou entre 1 et 19, et les pigeons sont les 20 personnes. On a donc au moins une cage contenant deux pigeons, autrement dit deux personnes serreront le même nombre de mains.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009



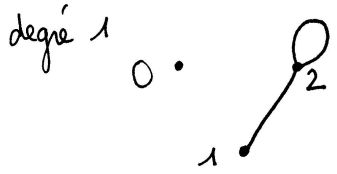
S. propose alors d'étudier la conjecture avec d'autres conditions, il propose au groupe $G1$ de regarder les graphes comportant des boucles, au groupe $G2$ les graphes orientés, et au groupe $G3$ les multigraphes. Une question apparaît immédiatement dans le permier groupe, relayée dans les autres : *Quel est le degré d'une boucle ? Considère-t-on qu'il est de 1, comme si le graphe était orienté, ou de 2 ?* S. répond que cette définition dépendra du contexte, que c'est un choix.

$G1$: Cette réponse ne satisfait pas entièrement le groupe $G1$, et $g1a$ me montre le graphe suivant :



Sur ce graphe, si le degré d'une boucle est 2 alors c'est un contre-exemple à la conjecture, tous les degrés sont différents. Si le degré est 1 alors ce n'est plus un contre-exemple. Le groupe reste un moment sur cette difficulté en cherchant à revenir au problème de départ : *Si quelqu'un se serre la main à lui-même il n'y a qu'une personne qui s'est serrée la main, mais si on compte le nombre de mains serrées, c'est 2.* Ils cherchent un contre-exemple à la conjecture si le degré d'une boucle est 1 et exhibent ce contre-exemple :

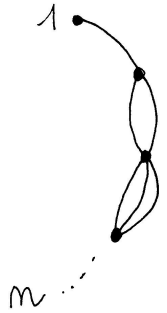
tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009



Ayant exhibé un contre-exemple pour chaque définition, le groupe commence à chercher des contre-exemples pour les autres conditions.

$G2$:Le groupe cherche un lien entre le problème précédent et le problème avec des graphes orientés. Il en vient à la conclusion que le travail sur le graphe orienté revient à *compter les allers-retours*, une arête entre deux sommets dans le graphe non orienté correspondant à deux arcs de sens contraire dans le graphe orienté correspondant.

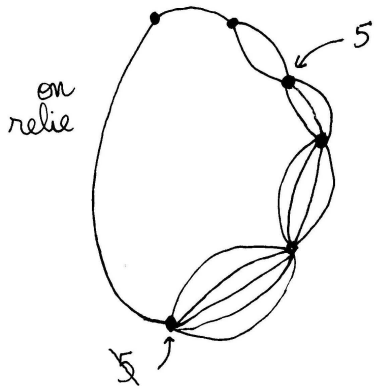
$G3$: Le groupe cherche des contre-exemples pour toutes valeurs de n. Il propose celui-là :



Je leur soumets ce graphe pour $n = 5$ (n étant le degré du dernier sommet) en leur montrant que 2 sommets sont de même degré :

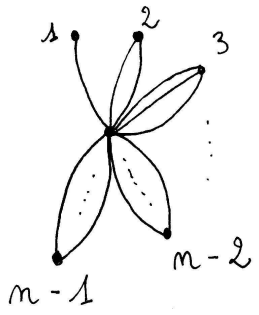
tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Le groupe constate : *en milieu de chaîne, tous les sommets sont de degrés impairs car ils sont la somme d'un sommet de degré pair et d'un sommet de degré impair. Donc pour que notre contre-exemple reste un contre-exemple, si le bout de chaîne est impair on le relie au sommet de degré 1 sinon on ne relie pas.* L'exemple pour $n = 5$ devient :



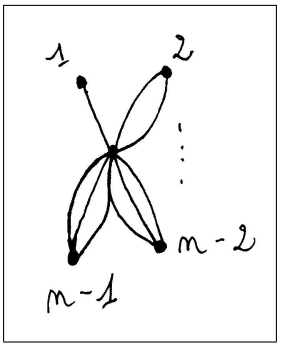
Le groupe exhibe alors un autre contre-exemple pour tout n :

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009



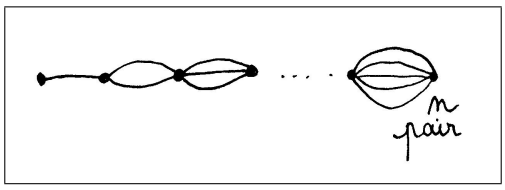
Mise en commun

S. commence la mise en commun par le groupe $G3$: *on a deux types de contre-exemples pour les graphes multiples, voilà le plus simple :*



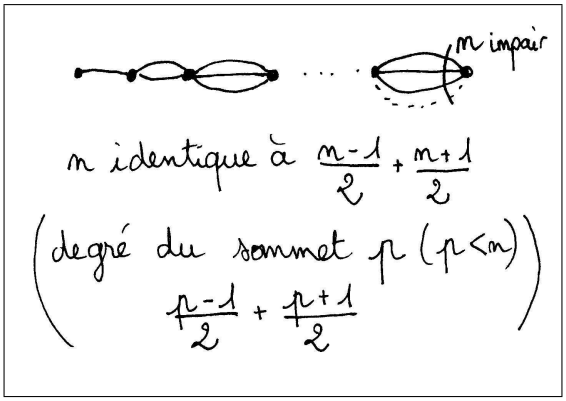
$g2a$ pose la question du cas $n = 2$. Après quelques secondes de réflexion, plusieurs personnes répondent simultanément, que dans ce cas la proposition est vraie.

Le deuxième type de contre-exemple est proposé :

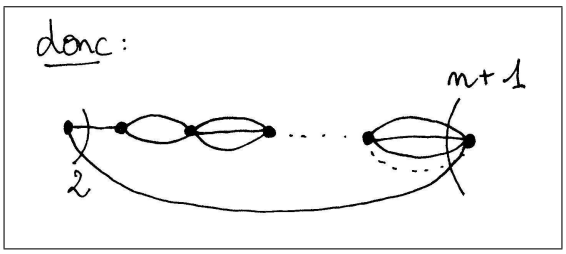


S. explique : *Si n, le degré du dernier sommet, est pair on n'a pas de problème, par contre si n est impair, alors on a un problème car 2 sommets sont de même degré, le dernier et un autre.* Il montre le sommet, et donne le degré d'un sommet qui n'est pas « en bout de chaîne » :

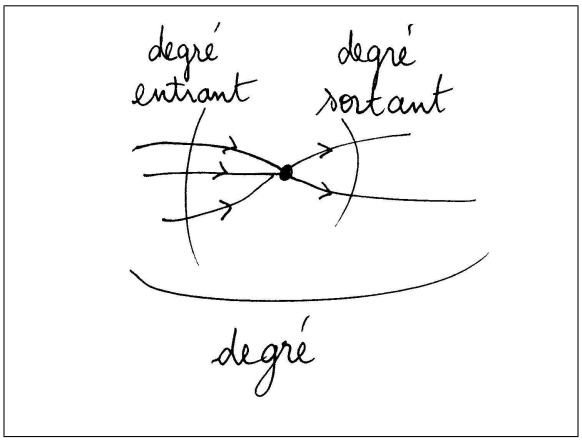
tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009



Dans ce cas, une solution consiste à relier les sommets en bout de chaîne :

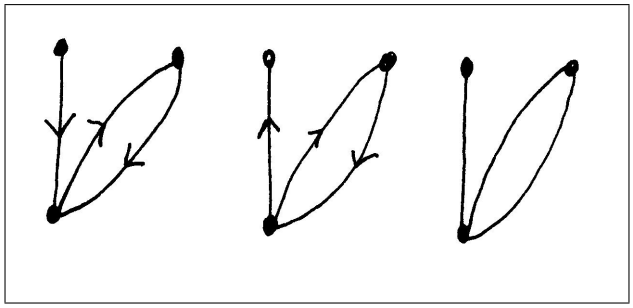


La mise en commun s'oriente vers le cas des graphes orientés, étudié plutôt par le groupe $G2$. Une première question est celle du degré d'un sommet dans un graphe orienté. Quelle définition adopter pour un tel graphe ? S. montre cette définition sur un exemple : *dans un graphe orienté, en un sommet vous avez un certain nombre d'arcs qui entrent, un certains nombre qui sortent. On appelera respectivement ces nombres degré entrant et degré sortant, leur somme sera appelée degré du sommet.*

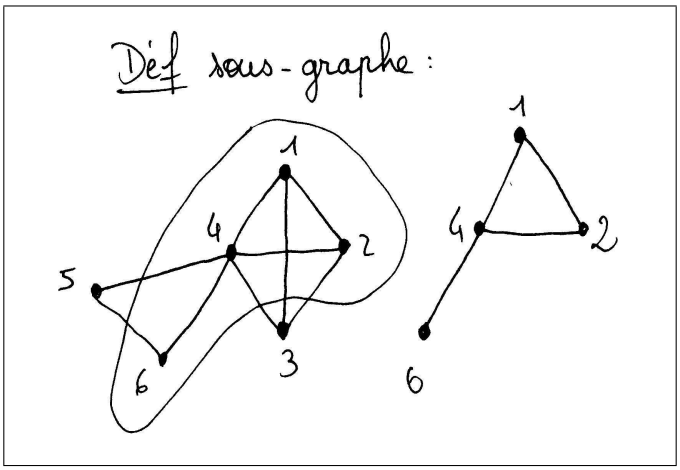


Par exemple, voici trois graphes qui ont tous même score, le score étant la liste des degrés des sommets, mais tous différents, plusieurs graphes orientés pouvant s'identifier à un seul et même graphe non orienté :

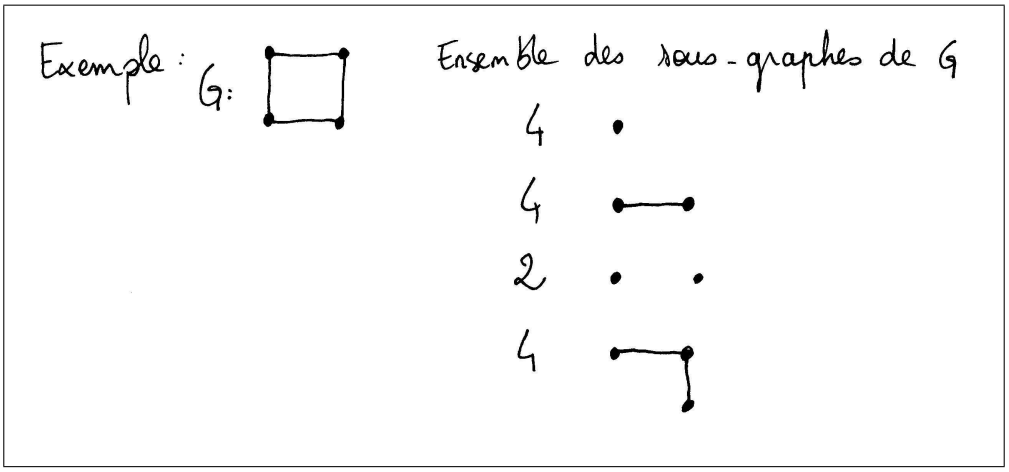
tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009



Ces trois graphes sont des contre-exemples à notre conjecture. Ce que vous avez essayé de faire dans chaque groupe, est en fait de trouver des graphes ayant un score ne contenant pas deux fois la même valeur. Le problème général, si on donne un score de donner un graphe correspondant est en fait un problème difficile. Il est lié à la conjecture d'Ulam. La salle demande cet énoncé, S. fait donc une parenthèse sur cette conjecture, en commençant par définir le sous-graphe d'un graphe (au sens strict, i.e. dont le nombre de sommets est inférieur strictement au nombre de sommets du graphe) en donnant l'exemple suivant :



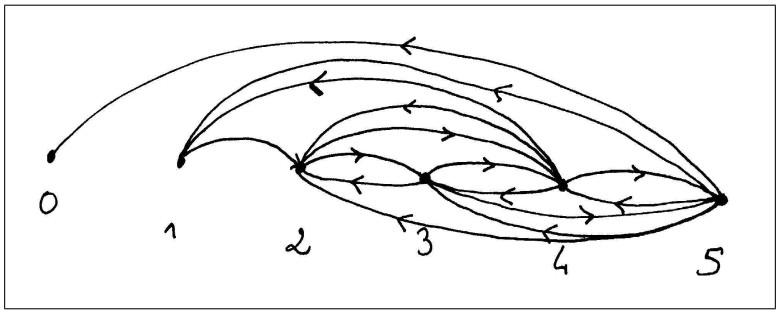
Soit G un graphe à n sommets. Avec tous les sous-graphes de G, on est capable de reconstituer G de façon unique. Par exemple :



tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

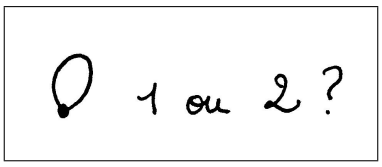
Cette conjecture n'a pas de contre-exemples pour les graphes simples, même en se contentant de ne donner que les sous-graphes à $n-1$ sommets. Elle est fausse si on donne les sous-graphes à $n-2$ sommets, et même si on donne l'ensemble des sous-graphes de G jusqu'à $n-2$ sommets. Vous pouvez réfléchir à un contre-exemple.

S. retourne au problème de départ. Le groupe 1 propose une interprétation pour le cas des graphes orientés. Un arc du graphe représenterait un bisou, la relation n'étant pas symétrique dans ce cas. Ils montrent que l'on peut toujours avoir un nombre de bisous donnés différents, ce qui correspond à trouver un graphe où tous les sommets ont des degrés sortants différents. Voici leur exemple pour un graphe à 5 sommets :



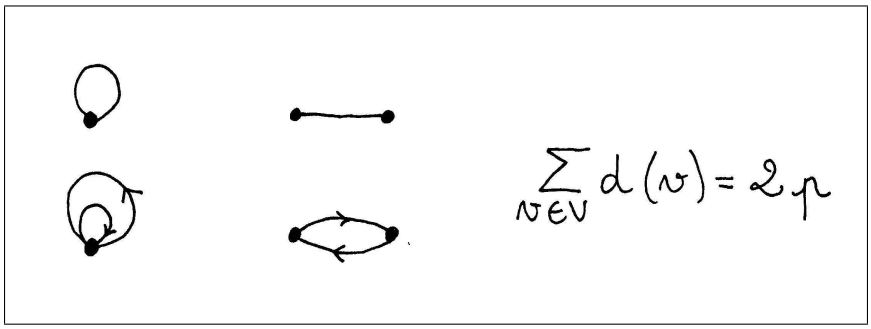
Le groupe remarque que pour que le nombre de bisous reçus soit différent pour chaque personne, il suffit de changer l'orientation des arcs pour trouver des graphes « qui marchent », c'est-à-dire qui aient leurs sommets de degrés entrants tous différents.

Nous nous intéressons alors au cas des boucles. La première question est celle du degré d'une boucle.



S. explique qu'il n'y a pas de raison a priori pour privilégier la valeur 1, ou la valeur 2.

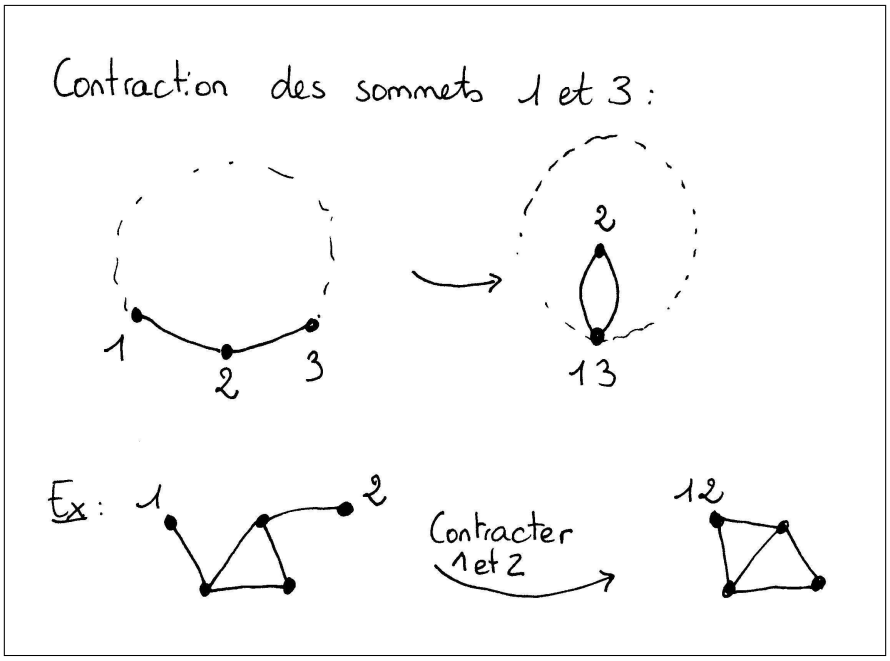
Si vous considérez que le degré d'une boucle est deux, c'est que vous considérez que la boucle est composée d'un arc entrant et d'un arc sortant :



De la même façon, c'est considérer qu'un graphe simple est un graphe orienté possédant un arc entrant et un arc sortant que l'on « simplifie » en ne dessinant qu'une arête. C'est ce que l'on

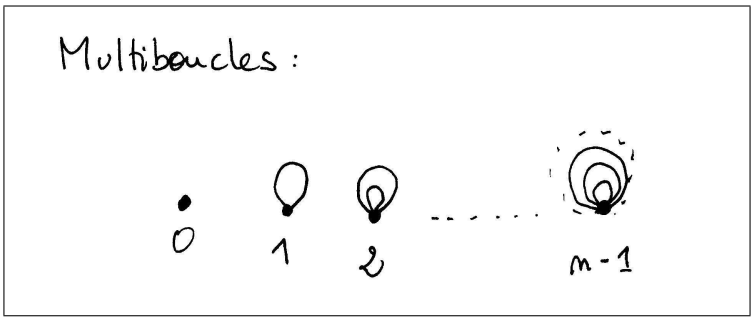
tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

considère lorsque l'on utilise le théorème sur la somme des degrés d'un graphe simple avec boucle qui reste double du nombre d'arêtes du graphe.
Par contre si vous vous intéressez à la topologie d'un graphe vous considérerez que le degré d'une boucle est 1. Or c'est en topologie que la boucle est intéressante. Par exemple on obtient naturellement des boucles en contractant les sommets d'un graphe. S. donne quelques exemples pour expliquer ce qu'est la contraction de sommets dans un graphe :



Quand obtient-on des boucles en contractant des sommets ? On en obtient en contractant des sommets adjacents. Dans ce cas, le degré qui nous intéresse c'est le nombre d'arêtes qui sortent d'un sommet. Quand on contracte 2 sommmets on ne conserve que les arêtes différentes partant de chaque sommet. Une boucle est une arête, on la considère alors de degré 1.

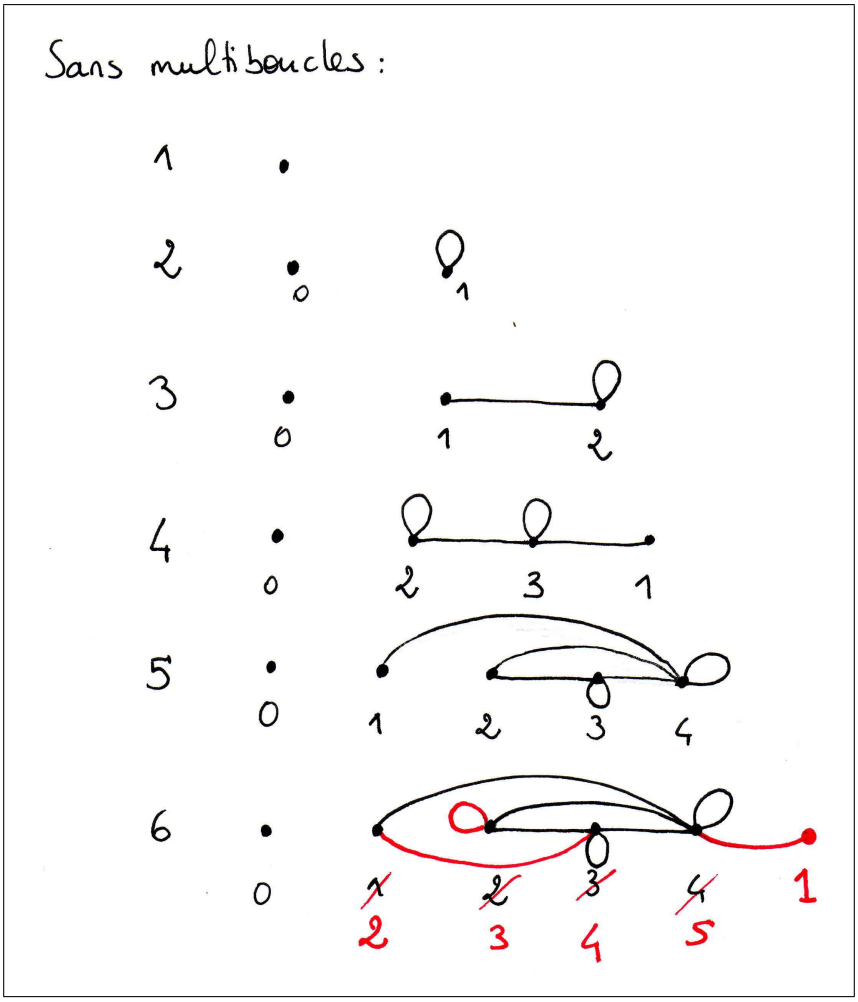
Le groupe 1 propose un contre-exemple pour les graphes avec boucles, exemple comportant des multiboucles :



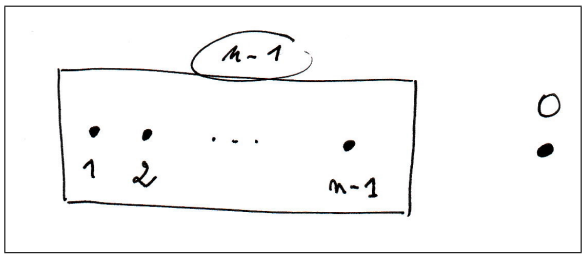
L'ensemble de la salle cherche alors à construire des contre-exemples n'utilisant pas plus d'une boucle par sommet. Ils proposent une série de graphe à 1, 2, 3, 4, et 5 sommets, puis cherchent à construire le contre-exemple à 6 sommets à partir de celui à 5 sommets :

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

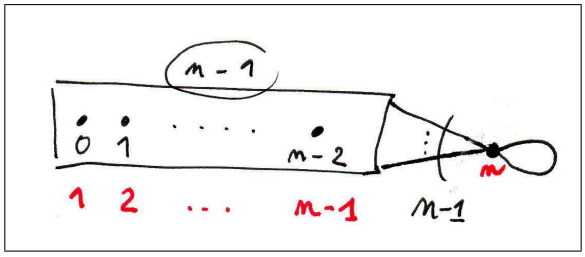
tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009



Mais il se trouve que la généralisation de ce passage de $n-1$ à n sommets leur pose problème. Après un moment de réflexion S. propose une piste consistant à décrire les graphes recherchés. La première constatation est la suivante : *pour la même raison que celle évoquée précédemment, le score du graphe attendu ne peut contenir conjointement 0 et n. Restent deux posssibilités de scores* $0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots \quad n-1$ *et* $1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad n$. *Supposons que nous ayons construit un graphe contre-exemple ayant un score de* $1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad n-1$, *comment construire un graphe à n sommets à partir de celui-ci et qui reste un contre-exmple ? Il suffit de lui ajouter un sommet isolé* :



Maintenant si nous supposons que nous ayons un graphe à $n-1$ sommets avec un score de $0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots \quad n-2$, *on peut obtenir un graphe à n sommets à partir de celui-ci qui restera un contre-exemple, en lui ajoutant un sommet avec boucle que nous relions avec l'ensemble des autres sommets :*



S. affirme alors que *seul un type de contre-exemple existe, et c'est celui-là. Par hypothèse d'induction. En fait on a deux types pour chaque taille de graphe, un « gros » et un « maigre », et ils sont uniques. Leurs scores sont de type séquences d'entiers de 0 à $n-1$ ou de 1 à n.*

Une personne pose la question de l'« initialisation de la récurrence ». S. répond en précisant que le terme « initialisation » lui semble peu approprié, particulièrement dans des domaines de ce type proches de la programmation informatique où le terme initialisation est un terme dédié. *Ici, comme souvent en maths discrètes, la base de l'induction est le plus petit objet que l'on ne peut casser, c'est-à-dire ici un graphe à 1 sommet.* On a deux types de graphe à 1 sommet, (les 2 étant des contre-exemples) l'un avec boucle, le second sans boucle.

Une discussion sur l'induction s'engage, en particulier sur le fait que cette induction est à la fois constructive et preuve de l'existence de l'objet qu'elle construit. Un petit débat s'ensuit sur les supposées difficultés de ce type de raisonnement avec des élèves, que S. illustre par une utilisation de ce type de raisonnement par des élèves de 4ème dans un exemple de solitaire bicolore.

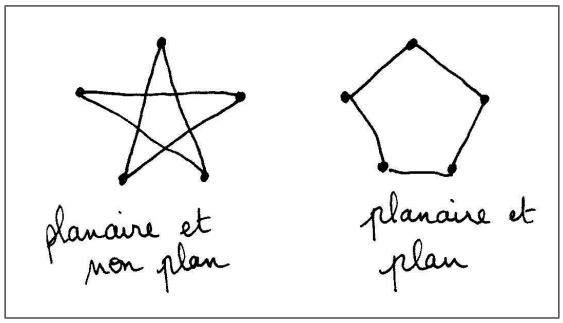
La matinée s'achève.

C.2.3 Construction de graphes en lien avec les polyèdres

L'après-midi débute avec un changement d'animateurs. Sont présents D. et R., ainsi que moi-même.

R. présente le problème :

On vous demande de construire un graphe planaire dans le plan. Le graphe est planaire si de façon abstraite il peut être dessiné dans le plan. Le fait qu'un graphe soit plan concerne sa représentation matérielle. Par exemple voici deux représentations du même graphe planaire, l'une plane, l'autre non :



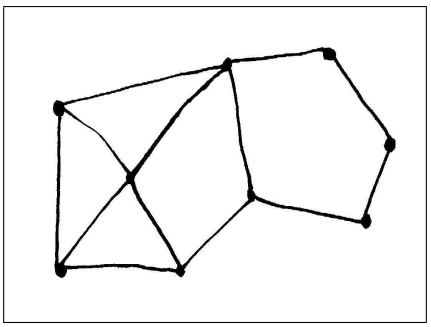
R. explique la planarité en prenant pour exemple les graphes complets, comme potentiellement de bons exemples de « petits » graphes non planaires, et montre en particulier le K_4 que l'on

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

ne représente souvent pas plan, puis le K_5 comme plus petit graphe non planaire en terme de nombre de sommets. Ces précisions données, le problème est écrit au tableau :

Construire un graphe plan(aire) dans le plan, 3-régulier et dont toutes les faces sont des pentagones.

Les définitions de la 3-régularité et de face sont données à l'oral : *Dire qu'un graphe est 3-régulier signifie que de chacun de ses sommets partent 3 arêtes. Une face, dans un graphe simple plan est la zone délimitée par un cycle. Voici un exemple comportant trois faces triangulaires, une face pentagonale, par exemple* :



Une personne du groupe 3 interroge R. sur le nombre de faces effectives de la figure, puis précise le sens de sa question : *la figure comporte-t-elle une face extérieure ?*

R. confirme que la figure considérée comporte une face octogonale *à l'infini*, puis il complète l'énoncé du problème au tableau :

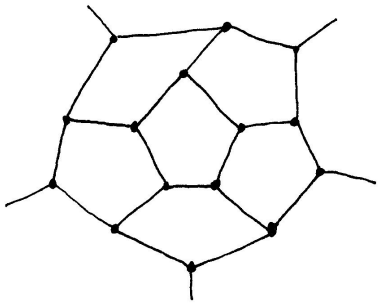
Construire un graphe plan(aire) dans le plan, 3-régulier et dont toutes les faces sont des pentagones. Étudier le(s) graphe(s) obtenu(s).

Les différents groupes commencent leur travail en commun.

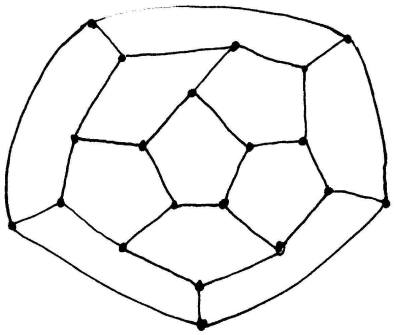
Dans le groupe 1, la première piste abordée est celle d'une recherche de contraintes numériques sachant que si on a un graphe à n sommets et a arêtes alors la somme des degrés du graphe sera telle que : $\sum$ degré $= 3n = 2a$, d'où $n = 2a/3$.

Ce résultat ne leur semblant pas pertinent, les membres du groupe commencent par tâtonnement à chercher un graphe correspondant à l'énoncé :

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009



À cette étape, ils se rendent compte que l'*on ne peut plus mettre d'arêtes, il faut boucler* :



Notre compte-rendu se termine ici bien que cette séquence de formation ne le soit pas. Nous avons en particulier abordé par la suite le problème d'un plus court chemin dans un graphe, celui du nombre de parcours entre ses sommets, la recherche de Ramsey(3, 3) et la coloration de graphes à travers un problème de gestion d'emploi du temps et la présentation des graphes de Mycielsky, une famille de graphe non k-colorables qui ne contiennent pas de triangle.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Bibliographie

[1] **Aldon Gilles, Mény Jean-Manuel, Xavier Lionel (2005)** *Introduction à la théorie des graphes — Butinage graphique*, Éd.CRDP de l'académie de Lyon.

[2] **Arsac Gilbert, Germain Gilles, Mante Michel (1988)** *Problème ouvert et situation-problème*, IREM de Lyon.

[3] **Arsac Gilbert (Ouvrage coordonné par) (1994)** *La transposition didactique à l'épreuve*, Yves Chevallard, Jean-Louis Martinand et Andrée Tiberghien, La pensée sauvage éditions, Collection Travaux et thèses de didactique, série Sciences.

[4] **Bacher Roland, Cartier Léa, Grenier Denise, Schmitt Marie-Jo (2006)** *Activité : Autour des polyèdres de Platon* , Petit x n°70, pp 73-79, IREM de Grenoble.

[5] **Balmand Laure (1998)** *Étude d'un objet combinatoire : Le graphe. Une analyse écologique et rapports d'enseignants à l'objet mathématique*, Mémoire de DEA, Universités Joseph Fourier, Grenoble et Lyon 1.

[6] **Baranov Valerii Ivanovich, Stechkin Boris Sergeevich (1995)** *Extremal Combinatorial Problems and Their Applications*, Kluwer Academic Publishers.

[7] **Becq de Fouquières Louis (1869)** *Les jeux des anciens*, C. Reinwald, Paris.

[8] **Berge Claude(1958)** *Théorie des Graphes et ses Applications*, Dunod, Paris.

[9] **Biggs N. L., Lloyd E. K., Wilson R. J. (1976)** *Graph theory 1736-1936*, Oxford University Press.

[10] **Bondy A., Murty U. S. R. (1976)** *Graph Theory with Applications*, North-Holland.

[11] **Brousseau Guy (2004)** *Théorie des situations didactiques*, Deuxième édition (première édition en 1998), Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

[12] **S .A . Burr, Pál Erdős (1975)** *On the magnitude of generalized Ramsey numbers for graphs*, Infinite and Finite Sets, Vol . I, Colloquia Mathematics Societatis Janos Bolyai, 10, North-Holland, Amsterdam-London, pp 214-240 .

[13] **Cartier Léa (2004)** *Les graphes en Terminale ES — Étude didactique de l'introduction d'éléments de la théorie des graphes au programme de l'enseignement de spécialité en Terminale économique et sociale*, Mémoire de Master 2 Recherche, Université Joseph Fourier, Grenoble.

[14] **Cartier Léa, Godot Karine, Knoll Eva, Ouvrier-Buffet Cécile (2008)** *Les situations-recherche : un outil pour apprendre à chercher en mathématiques*, Actes du 49ème congrès AMQ.

[15] **Chevallard Yves (1999)**, *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*, Recherches en didactique des mathématiques, vol. 19.2, pp. 221-266, Éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

[16] **Cogis Olivier, Robert Claudine (2003)** *Au-delà des ponts de Königsberg — Théorie des graphes — Problèmes, théorèmes, algorithmes*, Éditions Vuibert,Paris.

[17] **Coupy E. (1851)** *Solution d'un problème appartenant à la géométrie de situation par Euler*, Nouvelles annales de mathématiques, tome 10, 1851, pp 106-119.

[18] **Dasgupta Sanjoy, Papadimitriou Christos, Vaziranu Umesh (2006)** *Algorithms*, McGraw-Hill.

[19] **Decaillot-Laulagnet Anne-Marie (1999)** *Edouard Lucas (1842–1891) : le parcours original d'un scientifique français dans la deuxième moitié du XIXème siècle*, Thèse de doctorat, Université René Descartes, Paris.

[20] **Deloustal Virginie (1998)** *Le concept d'implication — L'objet mathématique, quelques aspects dans les manuels, conceptions de futurs enseignants*, Mémoire de DEA, Universités Joseph Fourier, Grenoble et Lyon 1.

[21] **Dépret Christian (2002)** *Dimensions épistémologique, psychologique et didactique des phénomènes de modélisation et de conceptualisation : une étude comparée appliquée au principe d'Archimède*, Thèse de doctorat, Université Pierre Mendès France, Grenoble.

[22] **Diestel Reinhard (2005)** *Graph theory*, troisième édition, Springer-Verlag.

[23] **Euler Leonhard (1736)** *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 8, pp 128-140.

[24] **Euler Leonhard (1766)** *Solution d'une question curieuse qui ne paroit soumise à aucune analyse*, Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, Opera omnia 1 Volume 7, pp 26-56.

[25] **Fleury Gérard, Cogis Olivier (2002)** *Graphes à deux voix*, Brochure APMEP n°149.

[26] **Frédérique et Papy, Incolle Danielle (1968)** *L'enfant et les graphes*, Marcel Didier.

[27] **Giroud Nicolas (2007)** *La démarche expérimentale en mathématiques*, Mémoire de Master 2 Recherche, Université Joseph Fourier, Grenoble.

[28] **Godot Karine (2005)** *Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation - Exemple de la roue aux couleurs*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

[29] **Godot Karine (2006)** *La roue aux couleurs : une situation-recherche pour apprendre à chercher dès le cycle 3*, Grand N 78, IREM de Grenoble.

[30] **Grenier Denise, Payan Charles (1998)** *Spécificités de la preuve et de la modélisation en Mathématiques Discrètes, Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 18.2, pp. 59 -100, Éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

[31] **Grenier Denise, Payan Charles (2002)** *Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation en mathématiques discrètes*, Cahiers du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques, Édité par l'ARDM, Paris.

[32] **Grize Jean-Blaise (1996)** *Logique naturelle et communication*, PUF, Paris.

[33] **Hierholzer Carl (1873)** *Über die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholungund ohne Unterbrechung zu umfahren*, Mathematische Annalen 6, pp 30-32.

[34] **Houdebine Jean (Sous la direction de) (1998)** *La démonstration — Écrire des mathématiques au collège et au lycée*, Hachette Éducation, Collection « Pédagogies pour demain / Didactiques », Paris.

[35] **Kruja Eriola, Marks Joe, Blair Ann, Waters Richard (2001)** *A short note on the History of graph drawing*, Springer Lecture Notes in Computer Science, Vol. 2265, pp. 272-286. `www.merl.com/reports/docs/TR2001-49.pdf`

[36] **Laborde Colette, Perrin-Glorian Marie-Jeanne (Editrices) (2005)** *Educational Studies in Mathematics*, Volume 59, Springer.

[37] **Lakatos Imre (1984)** *Preuves et réfutations — Essai sur la Logique de la découverte mathématique*, Traduction de l'édition anglaise de 1976 et annotations de N. Balacheff et J.M. Laborde, Éditions Hermann, Paris.

[38] **Legrand Marc (1993)** *Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse*, Repères IREM n°10, p. 123-159, Topics Editions.

[39] **Leibniz (1995)** *La caractéristique géométrique*, Éd. Vrin.

[40] **Lucas Édouard (1882)** *Récréations mathématiques - Tome 1 - Les traversées. Les ponts. Les labyrinthes*, Gauthier-Villars, Paris. (Ce document est accessible sur le site de la Bibliothèque Nationale de France à l'adresse suivante : `http://gallica.bnf.fr/`).

[41] **Lucas Édouard (1883)** *Récréations mathématiques - Tome 2 - Qui perd gagne. Les dominos. Les marelles. Le parquet. Le casse-tête. Le jeu des demoiselles. Le jeu icosien d'Hamilton*, Gauthier-Villars, Paris. (Ce document est accessible sur le site de la Bibliothèque Nationale de France à l'adresse suivante : `http://gallica.bnf.fr/`).

[42] **Nimier Jacques (1989)** *Entretiens avec des mathématiciens*, IREM de Lyon.

[43] **Ouvrier-Buffet Cécile (2003)** *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble. Disponible en ligne `http://tel.ccsd.cnrs.fr`.

[44] **Ouvrier-Buffet Cécile (2007)** *Des définitions pour quoi faire ? Analyse épistémologique et utilisation didactique*, Collection « Éducation et sciences » dirigée par Sylvette Maury, Éditions Fabert.

[45] **Rolland Julien (1999)** *Pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentissage de la modélisation et de l'implication*, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

[46] **Rouse Ball Walter William(1892)** *Mathematical recreations and problems of Past and Present times*, Macmillan, Londres.

[47] **Sachs Horst, Stienitz Michael, Wilson Robin J. (1988)** *A historical note : Euler's Königsberg letters*, Journal of Graph Theory 12, pp 133-139.

[48] **Sainte-Laguë André (1937)** *Avec des nombres et des lignes — Récréations mathématiques*, Nouvelle édition mai 2001, édition Vuibert.

[49] **Sylvester J. J. (1878)** *Chemistry and Algebra*, Nature, vol. 17, num. 432, pp. 284

[50] **Vergnaud Gérard (1991)** *La théorie des champs conceptuels*, Recherches en Didactique des Mathématiques 6(1), pp 133-169.

[51] **Wilson Robin J. (1986)** *An eulerian trail through Königsberg*, Journal of graph theory, Vol. 10, pp 265-275.

[52] **Wittgenstein Ludwig (1978)** *Remarks on the foundations of mathematics*, MIT Press.

[53] **Déclic Maths Terminale ES obligatoire et spécialité (2002)**, Édition Hachette Education.

[54] **Mathématiques Terminale ES obligatoire + spécialité (2002)**, Collection Dimathème, Les Éditions Didier.

[55] **Term ES obligatoire et spécialité (2002)**, collection Transmath, Édition Nathan.

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Index

algorithme glouton de coloration, 198
arbre, 201
arc, 112
arête, 112
    incidente, 112

boucle, 113

chaîne, 114, 205
chemin, 139
    eulérien, 136, 139
    fermé, 139
    hamiltonien, 48
    ouvert, 139
$\chi(G)$, 198
clique, 114, 199
coloration, 197
    optimale, 198
composante connexe, 139
cycle, 114

degré
    d'un sommet, 113
    d'un sommet d'un graphe orienté, 121
    entrant, 121
    sortant, 121
$\Delta(G)$, 200
distance, 169
dual d'un graphe planaire, 162

extrémité
    d'un chemin, 139
    d'une chaîne, 114

face, 147
formule d'Euler, 160

graphe, 112
    auto-complémentaire, 126
    biparti, 200
    complémentaire, 125
    complet, 113, 127
    connexe, 139
    d-régulier, 146
    eulérien, 139
    isomorphe, 56, 125
    k-colorable, 197
    k-dégénéré, 203
    non orienté, 112
    orienté, 112
    planaire, 146
    pondéré, 169
    simple, 113
    stable, 160
graphe-arête, 46
griffe, 127, 129

isthme, 90

matrice
    d'adjacence, 57, 195
    d'incidence, 57
multigraphe, 113

$n-$coloration des arêtes, 127
nombre chromatique, 198

$\omega(G)$, 200

parcours, 194
principe de Dirichlet, 115
principe des cages à pigeons, 115

séquence de degrés, 119
solides de Platon, 146
sommet, 112
    isolé, 113
sommets adjacents, 112
sous-graphe, 113
    induit, 113
    partiel, 144
squelette, 147
stable, 114, 127

triangulation d'un graphe planaire, 161

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

tel-00416598, version 1 - 14 Sep 2009

Le graphe comme outil pour enseigner la preuve et la modélisation

La raison initiale du sujet de cette thèse est l'introduction, pour la première fois en France, d'éléments de théorie des graphes dans un curriculum de l'enseignement secondaire, à savoir celui de la spécialité mathématiques de la Terminale économique et sociale (ES) en 2002.

Après une brève étude historique de la genèse – relativement récente – du graphe en tant que concept mathématique et de la signification épistémologique de cette genèse, nous analysons les choix faits pour la transposition de ce concept, en particulier les énoncés proposés aux élèves, qui montrent le décalage entre les intentions affichées et la réalité. Cette partie du programme de terminale ES se particularise par sa mise en oeuvre « axée sur le seule résolution de problèmes ». Or, nous montrons que les manuels scolaires sont dans ce chapitre composés d'exercices et non de problèmes. L'enseignement de théorie des graphes, s'il se limite à la résolution, locale, de ces exercices ou de « casse-tête » mathématiques, ne permet pas aux élèves de comprendre les concepts mathématiques sous-jacents ni surtout d'accéder au sens du raisonnement mathématique (en particulier autour de la modélisation et de la preuve) et à la richesse de la démarche scientifique, ce qu'aurait dû permettre ce domaine facilement abordable des mathématiques.

Une étude théorique et expérimentale du problème de « parcours eulériens dans les graphes » a ensuite été menée, du primaire au supérieur, sous des formes différentes (situations-recherche en classe avec ou sans support matériel, étude de documents). Des éléments didactiques ont aussi été tirés de deux stages de formation d'enseignants en théorie des graphes pour la Terminale ES.

Ces différentes études nous ont conduit à proposer un nouvel ensemble organisé de problèmes à destination des enseignants de Terminale ES, accompagnés de leurs résolution et d'analyses didactiques qui attestent que des mathématiques plus consistantes peuvent être abordées et construites sur ce thème.

Mots-clé : Didactique des mathématiques – Situations-recherche en classe – Théorie des graphes – Preuve – Modélisation – Formation d'enseignants – Parcours eulériens dans les graphes – Ponts de Königsberg