Chapitre 1

Taux d'évolution

Sommaire

1.1 Activités

Activité 1.1.
Le tableau ci-contre donne la fréquentation à midi de la cantine d'un lycée du lundi au mercredi :

Lundi	Mardi	Mercredi
1200	1340	520

1. (a) Calculer la variation absolue entre lundi et mardi.
   (b) Calculer la variation relative entre lundi et mardi. Cette variation est appelée taux d'évolution entre lundi et mardi.
   L'exprimer sous forme décimale, puis en pourcentage.
   (c) Calculer le taux d'évolution entre mardi et mercredi.
2. (a) Le taux d'évolution entre lundi et jeudi est $-3,5\,\%$.
   Calculer la fréquentation de la cantine le jeudi.
   (b) Le taux d'évolution entre mardi et vendredi est $+0,012$.
   Calculer la fréquentation de la cantine le vendredi.

Activité 1.2.

En 2 004, il y avait 250 adhérents dans un club de tennis. Ce nombre a augmenté de 4 % en 2 005 et ensuite a baissé de 5 % en 2 006.

1. Compléter le tableau 1.1 de la présente page.

TABLE 1.1 – Tableau de l'activité 1.2, question 1

Année	Effectif	Variation en %	Taux d'évolution	Coefficient multiplicateur
2 004	250			
2 005		hausse de 4 %	$t_1 = \ldots\ldots$	$k_1 = \ldots\ldots$
2 006		baisse de 5 %	$t_2 = \ldots\ldots$	$k_2 = \ldots\ldots$
Résumé des deux évolutions		.........de ...... %	$T = \ldots\ldots$	$K = \ldots\ldots$

2. (a) Déterminer la valeur arrondie au millième du nombre k tel que : $k^2 = K$.
   (b) En déduire la valeur arrondie au millième du nombre t tel que : $(1+t)^2 = K$.
   (c) Si le taux d'évolution du nombre d'adhérents de ce club avait été t % par an sur ces deux années, quel serait le taux global d'évolution ?
3. (a) Compléter le tableau 1.2 de la présente page où l'on remplacera la valeur de t par celle trouvée précédemment.

TABLE 1.2 – Tableau de l'activité 1.2, question 3a

Année	Effectif	Variation en %	Taux d'évolution	Coefficient multiplicateur
2 004	250			
2 005		.........de ...... %	$t = \ldots\ldots$	$k = \ldots\ldots$
2 006		.........de ...... %	$t = \ldots\ldots$	$k = \ldots\ldots$
Résumé des deux évolutions		.........de ...... %	$T = \ldots\ldots$	$K = \ldots\ldots$

   (b) Quel résultat le tableau permet-il de vérifier ?

Activité 1.3.

Le tableau ci-dessous donne le nombre d'animaux dans un zoo.

Année	2 000	2 001	2 002	2 003	2 004	2 005
Population	1 250	1 200	1 000	1 250	1 500	2 000
Indice	100					

1. (a) Quel est le taux d'évolution du nombre d'animaux entre 2 000 et 2 001 ?
   (b) Interpréter ce résultat en terme d'augmentation ou de diminution en pourcentage.
2. (a) Si la population avait été de 100 animaux en 2 000, quel aurait été le nombre d'animaux en 2 001 avec le taux d'évolution trouvé en 1a ?
   (b) Compléter la case correspondante dans le tableau.
   Cette valeur trouvée est appelé indice de la population en 2 001 avec pour base 100 en 2 000.
   (c) Compléter la troisième ligne du tableau selon le même principe qu'en 2b.
   (d) Donner la signification des indices trouvés en 2 002, en 2 003 et en 2 005.

Activité 1.4.

La population A d'une ville a augmenté de 1 % par an pendant deux ans entre 2 004 et 2 006.
La population d'une ville B a augmenté de 30 % pendant cette même période.
Anne habite la ville A et dit que la population de sa ville a augmenté de 2 % sur cette période ($2 \times 1\,\% = 2\,\%$).
Blanche habite la ville B et dit que la population de sa ville a augmenté de 60 % sur cette période ($2 \times 30\,\% = 60\,\%$).

1. (a) Pour chacune des deux villes, quel est le coefficient multiplicateur correspondant à l'augmentation entre 2 004 et 2 006 ? En déduire le taux d'évolution correspondant.
   (b) Qui, de Anne ou de Blanche, est la plus proche de la réalité ?
2. (a) Compléter le tableau 1.3 page ci-contre.
   (b) Expliquer pourquoi les résultats des deux dernières colonnes sont identiques.

TABLE 1.3 – Tableau de l'activité 1.4, question 2a

Taux t	$(1+t)^2$	$1+2t$	$(1+t)^2-(1+2t)$	t^2
0,2				
0,1				
0,01				
0,005				

TABLE 1.4 – Tableau de l'activité 1.4, question 3a

Taux d'évolution t	k	k'	différence $k-k'$	différence en %
+40 %	1,96	1,8	0,16	16 %
+10 %				
+5 %				
+1 %				

(c) Compléter la phrase suivante pour la rendre correcte : $(1+t)^2 \approx 1+2t$ si ....

3. (a) Compléter le tableau 1.4 de la présente page.
   (b) Que peut-on dire à la lecture de ce tableau ?
   (c) Quel est le lien avec ce tableau et celui du 2a ?

Activité 1.5.

Pour une évolution au taux t, on multiplie par .... : $x \longrightarrow y$
Pour retrouver la valeur de départ, on divise par .... : $x \longleftarrow y$

1. Un prix a subit une évolution au taux t, le nouveau prix est y.
   Parmi les propositions suivantes, choisir celle(s) qui convient (conviennent) :
   - $y = tx$;
   - $y = x + t$;
   - $y = (1+t)x$;
   - $x = \frac{1}{1+t}y$;
   - $x = y - tx$;
   - $x = \frac{y}{t}$;
2. (a) Compléter le tableau ci-dessous :

Taux t	$\frac{1}{(1+t)}$	$1-t$	Différence
+20 %	$\approx 0,83$	0,80	0,03
+10 %			
+5 %			
+1 %			

   (b) Compléter la phrase suivante pour la rendre correcte :

$$\frac{1}{(1+t)} \approx 1-t \text{ si } \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3. Dans quels cas, une hausse de t % est-elle à peu près compensée par une baisse de t % ?

Activité 1.6.

En 2 004, le prix d'un article était 150 €. Ce prix augmente de 20 % entre 2 004 et 2 006.

1. (a) Calculer le prix de cet article.
   (b) Assia affirme « puisque le prix a augmenté de 20 % sur deux ans, cela revient au même que s'il avait augmenté de 10 % chaque année ». A-t-elle raison ?
2. (a) En notant k le coefficient multiplicateur correspondant à l'évolution au taux t et k' le coefficient multiplicateur correspondant à deux évolutions successives au taux $\frac{t}{2}$, compléter le tableau ci-dessous :

Taux t	k	Prix correspondant	k'	Prix correspondant	Différence de prix
$+0,40$	1,40	$150 \times 1,40 = 210$	$1,20^2 = 1,44$	$150 \times 1,44 = 216$	$216 - 210 = 6$
$+0,10$					
$+0,05$					
$+0,01$					

   (b) Que peut-on dire à la lecture du tableau ?

1.2 Taux d'évolution et coefficient multiplicateur (rappels)

1.2.1 Calculs

Calcul d'un pourcentage

Propriété 1.1. *Le pourcentage d'une quantité A par rapport à une quantité B est :* ....

Exemple 1.1. 36 élèves sur 250 sont internes. Quel pourcentage des élèves, les internes représentent-ils ?

Pourcentage d'une quantité

Propriété 1.2. *t % d'une quantité B est égal à :* ....

Exemples 1.2.
- 75 % de 1 200 est égal à : ....
- Dans un lycée, les 76 élèves de TSTG représentent 12 % des élèves. Combien y a-t-il d'élèves dans le lycée ?

1.2.2 Taux d'évolution et coefficient multiplicateur

Propriété 1.3. *Si une quantité varie de y_1 à y_2, alors le taux d'évolution de y_1 à y_2 est le nombre t tel que :*

$$\frac{y_2}{y_1} = \ldots\ldots\ldots = k \text{ ou encore } t = \ldots\ldots\ldots$$

$k = \ldots\ldots\ldots$ est le coefficient multiplicateur.

Remarques. t est aussi appelé la variation relative de y_1 par rapport à y_2.
- Si t est positif, l'évolution est une ....
- Si t est négatif, l'évolution est une ....

Exemples 1.3.
- Un produit coûtant 50 € en 2 004 a coûté 55 € en 2 005.
  Le coefficient multiplicateur permettant de passer de 50 à 55 est : $k = \ldots\ldots\ldots\ldots$ donc $t = \ldots\ldots\ldots\ldots$ soit une ....de ....%.
- Ce produit a ensuite coûté 49,5 € en 2 006.
  Le coefficient multiplicateur permettant de passer de 55 à 49,5 est : $k = \ldots\ldots\ldots\ldots$ donc $t = \ldots\ldots\ldots\ldots$ soit une ....de ....%.

1.2.3 Augmenter en pourcentage

Propriété 1.4. *Une quantité y_1 augmente de t %. Sa nouvelle valeur est égale à $y_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$.*
$k = \ldots\ldots\ldots\ldots$ est le coefficient multiplicateur permettant de passer de y_1 à y_2.

Exemple 1.4. Un prix de 520 € augmente de 24 %. Quel est le nouveau prix ?
Augmenter un prix de 24 % revient à le multiplier par : ....
Le coefficient multiplicateur permettant de trouver le nouveau prix est : $k = \ldots\ldots\ldots\ldots$.
Le nouveau prix est : ....

1.2.4 Diminuer en pourcentage

Propriété 1.5. *Une quantité y_1 diminue de t %. Sa nouvelle valeur est égale à $y_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$.*
$k = \ldots\ldots\ldots\ldots$ est le coefficient multiplicateur permettant de passer de y_1 à y_2.

Exemple 1.5. Un ordinateur 865 € baisse de 20 %. Quel est le nouveau prix ?
Augmenter un prix de 20 % revient à le multiplier par : ....
Le coefficient multiplicateur permettant de trouver le nouveau prix est : $k = \ldots\ldots\ldots\ldots$.
Le nouveau prix est : ....

Exercice 1.1.
Compléter le tableau suivant :

Évolution en %	Augmentation de 35 %	Diminution de 12 %		
Taux d'évolution t	$+0,35$		$-0,54$	
Coefficient multiplicateur k	1,35			2,3

1.2.5 Évolutions successives

Propriété 1.6. *Une quantité x subit une évolution au taux t_1 ; le coefficient multiplicateur est : $k_1 = \dots\dots\dots$.*
Cette quantité subit ensuite une seconde évolution t_2 ; le coefficient multiplicateur est : $k_2 = \dots\dots\dots$.
Le coefficient multiplicateur global est : $k = \dots\dots\dots\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

Exemple 1.6. Un article augmente de 20 %, puis baisse 15 %. Quel est le taux d'évolution global ?
- Augmenter un prix de 20 % revient à le multiplier par : ....
  Le coefficient multiplicateur est : $k_1 = \dots\dots\dots$
- Diminuer un prix de 15 % revient à le multiplier par : ....
  Le coefficient multiplicateur est : $k_2 = \dots\dots\dots$.
- Le coefficient multiplicateur global est : $k = \dots\dots\dots$.
  Il a donc finalement subit une évolution globale au taux : $t = \dots\dots\dots$ soit une .... de .... %.

Conclusion : Augmenter un nombre de 20 %, puis diminuer de 15 %, revient à .... de .... %.

1.2.6 Évolutions réciproques

Propriété 1.7. *Si le coefficient multiplicateur permettant de passer de y_1 à y_2 est k, le coefficient multiplicateur permettant de passer de y_2 à y_1 est ....*

Exemple 1.7. Un article valant 50 € augmente de 25 %.
Le coefficient multiplicateur permettant de trouver le nouveau prix est : $k = \dots\dots\dots$.
Le coefficient multiplicateur permettant de passer de .... à 50 est : ....
Ce qui correspond à une .... de .... %.
Conclusion : Pour compenser une augmentation de 25 %, il faut effectuer une .... de .... %.
On dit que l'évolution réciproque d'une augmentation de 25 % est une .... de .... %.

1.3 Taux d'évolution moyen et moyenne géométrique

Propriété 1.8. *Si une quantité subit deux évolutions successives à des taux respectifs t_1 et t_2, le taux global est T qui vérifie : $1 + T = \dots\dots\dots\dots$*
On appelle taux moyen d'évolution, le taux unique t qui, répété deux fois, fournit le même résultat que les évolutions successives, c'est-à-dire que : $1 + T = \dots\dots\dots\dots$.
Autrement dit : $(1+t)^2 = \dots\dots\dots\dots$ ou encore : $1 + t = \dots\dots\dots\dots$.
On dit que : $1 + t$ est la moyenne .... de .... et ....
t est le taux moyen d'évolution : il s'interprète en terme de hausse et de baisse en pourcentage.

Exemple 1.8. En 2 004, le taux d'évolution du prix du livre était de $+0,10$ et en 2 005, pour le même livre, le taux d'évolution était de $-0,05$.

1. Calculer le taux global T correspondant à ces deux évolutions successives. Interpréter ce taux en terme de hausse ou de baisse en pourcentage.
2. Calculer le taux moyen annuel t d'évolution durant cette période (arrondir au centième) et interpréter ensuite en terme de hausse ou de baisse en pourcentage.

1.4 Indices

Les indices sont essentiellement utilisés dans des séries chronologies.

La valeur d'une grandeur observée une année ou un mois sert de référence (indice 100) et toutes les autres données (antérieures ou ultérieures) sont exprimées sous forme de pourcentage par rapport à cette année de référence.

Indices et grandeurs sont alors proportionnels.

Les indices sont particulièrement utiles pour comparer des évolutions de deux grandeurs quand les grandeurs ne sont pas du même ordre ou n'ont pas les mêmes unités (comparer PIB et population par exemple).

Exercice 1.2.

On veut connaître l'évolution du PIB par habitant en France depuis 1 990 qui servira d'année de référence.
On dispose du tableau suivant qu'on complètera au fur et à mesure par les réponses aux questions :

Année	1 990	1 991	1 992	1 993	1 994	1 995	1 996	1 997	1 998	1 999
PIB (en $)	1 195	1 201	1 322	1 250	1 331	1 535	1 554	1 406	1 447	1 432
Indice										

1. Calculer l'indice des années 1 991, 1 995, 1 996 et 1 999 (arrondis à 0,1).
2. En déduire le pourcentage d'évolution du PIB par habitant entre :
   - 1 990 et 1 991 ;
   - 1 990 et 1 995 ;
   - 1 990 et 1 999 ;
3. Quelle est l'unité de l'indice ?

Exercice 1.3.

Le tableau ci-dessous donne les montants, en millairds d'euros, des cotisations sociales versées par les non-salariés en France, de 1 994 à 1 999 (*source : INSEE*) :

Année	1 994	1 995	1 996	1 997	1 998	1 999
Montant	16,66	17,33	19,03	19,25	15,23	15,99

1. En prenant 100 pour base en 1 994, calculer les indices des autres années.
2. En déduire les pourcentages d'évolution de ces montants de 1 994 à 1 996, de 1 994 à 1 998, 1 994 à 1 999.
3. En utilisant ces indices, calculer les pourcentages d'évolution de ces montants de 1 997 à 1 999.

Exercice 1.4.

Le tableau ci-dessous done l'évolution de l'indice des prix à la consommation en France entre 1 998 et 2 004 en prenant pour année de base l'année 1 998 (indice 100) (*source : INSEE*) :

Année	1 998	1 999	2 000	2 001	2 002	2 003	2 004
Indice	100	100,5	102	103,5	105,6	107,6	109,3

1. Donner l'évolution globale des prix consommés par les ménages entre :
   - 1 998 et 1 999 ?
   - 1 998 et 2 001 ?
   - 1 998 et 2 004 ?
   - 2 000 et 2 002 ?
   - 2 000 et 2 004 ?
2. Reconstruire un tableau donnant l'évolution de l'indice des prix entre 2 000 et 2 004, en prenant 2 000 come année de référence (indice 100).

Exercice 1.5.

Le tableau suivant indique l'évolution du PIB base 100 en 1 980 aux États-Unis (EU), au Japon et dans l'Union Européenne (UE) :

Année	1 980	1 990	1 999
EU	100	132,6	172,3
Japon	100	155,2	166,0
UE	100	126,8	146,8

1. Donner le pourcentage d'évolution du PIB aux EU entre 1 980 et 1 990 puis entre 1 980 et 1 999. Faire de même pour le PIB du Japon et dans l'UE.
2. Pour les EU, calculer l'indice du PIB en 1 999 base 100 en 1 990. faire de même pour le Japon et l'UE (valeurs arrondies à 0,1 près).
3. Si le PIB aux EU était de 5 554 milliards de dollars en 1 990, calculer le PIB en 1 980 et en 1 999 (valeurs arrondies au milliard de dollars).
4. Peut-on dire que le PIB du Japon est supérieur à celui de l'UE ?

Exercice 1.6.
Les quatre premiers pays producteurs de gaz naturel et leur production en millions de m^3 sont donnés dans le tableau ci-dessous :

	1 990	2 002	2 003
Russie	641 000	595 300	616 500
États-unis	504 900	537 000	541 000
Canada	106 800	187 800	180 500
Royaume-Uni	49 600	102 600	102 800

Source : Comité professionnel du pétrole Cédigaz.

1. Reproduire ce tableau en affectant pour chaque année l'indice 100 à la Russie. Quelle évolution étudie-t-on dans ce cas ?
2. Reproduire ce tableau en affectant pour chaque pays l'indice 100 à l'année 2 002. Quelle évolution étudie-t-on dans ce cas ?

1.5 Approximation d'un taux d'évolution

1.5.1 Formule d'approximation locale

Propriété 1.9. *Pour t proche de 0,* $(1+t)^2 \approx \ldots\ldots\ldots$ *et* $\frac{1}{1+t} \approx\approx \ldots\ldots\ldots$

1.5.2 Application aux petits taux

Propriété 1.10. *Pour t proche de 0 :*
- *Deux évolutions successives aux taux t correspondent approximativement à une évolution au taux de :* ....
- *Le taux réciproque d'une évolution au taux de t est approximativement de :* ....

Attention ! : Ces approximations sont vraies seulement si t est très proche de 0.

Exemple 1.9. Un CD coûte 15 €. Son prix augmente deux fois de suite de 0,5 %.

1. Donner l'ordre de grandeur de l'augmentation en pourcentage, et à l'aide de cette approximation, calculer le nouveau prix du CD.
2. Calculer la valeur exacte du prix du CD.
3. Comparer les résultats des deux questions.