Chapitre 1

Compléments sur les fonctions

Sommaire

1.1 **Activités** 1
1.2 **Fonctions affines par morceaux** 3
1.3 **Interpolation linéaire** 3
1.3.1 Le principe 3
1.3.2 Un exemple 4
1.4 **Exercices et problèmes** 4
1.4.1 Exercices 4
1.4.2 Problèmes 6

1.1 Activités

Activité 1.1 (Rappels de Seconde).

1. Les fonctions f, g, h, k et m sont définies sur $\mathbb{R}$ par :
   - $f(x) = 3x^2 - 1$;
   - $g(x) = 2x^2 - x(1+2x) + 3$;
   - $h(x) = \dfrac{x}{5} - 4$;
   - $k(x) = \dfrac{x+1}{x^2+4}$;
   - $m(x) = 10$;
   - $l(x) = 2x$.

   Lesquelles sont des fonctions affines ?
2. f, g, h et k sont les focntions définies sur $\mathbb{R}$ par :
   - $f(x) = 2x + 1$;
   - $g(x) = -1$;
   - $h(x) = -x + 3$;
   - $k(x) = \frac{1}{3}x - 2$.

   Tracer les courbes représentatives de ces fonctions dans un même repère.
3. f est une fonction affine. Compléter le tableau suivant **sans** chercher l'expresssion algébrique de $f(x)$:

x	2	6	10	-2	4
$f(x)$	5	2			

4. f est la fonction affine telle que $f(2) = 7$ et $f(5) = 3$. Trouver l'expression de $f(x)$ pour tout réel x.
5. (a) f est la fonction définie sur $[-4; +\infty[$ représentée par la courbe page suivante. Cette courbe est la réunion de quatre éléments. Quelle est leur nature ?
   (b) Pour chaque élément de la courbe, donner une équation de la droite dont il fait partie et préciser dans quel intervalle varie x.

Activité 1.2 (Envois de colis).

Les tarifs d'envois de colis en France métropolitaine pratiqués par une entreprise de connectique sont donnés dans le tableau page suivante.

1. Quel est le prix à payer pour l'envoi d'un colis de 2,5 kg en Chronopost ?
2. Quel est le prix à payer pour l'envoi d'un colis de 12 kg en Colissimo + recommandé ?
3. Quel est le prix à payer pour l'envoi d'un colis de 9 kg en Colissimo + recommandé + contre-remboursement ?
4. Représenter ces tarifs, pour un poids inférieur ou égal à 15 kg, sur un même graphique en portant le poids (en kg) en abscisse et le prix (en €) en ordonnée.

FIGURE 1.1 – Courbe de l'activité 1.1

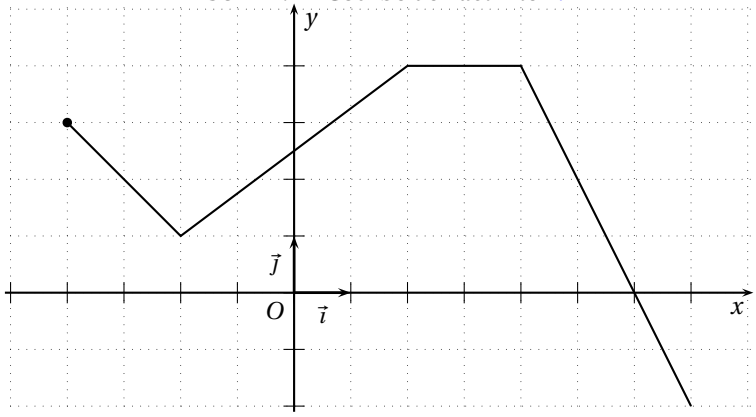
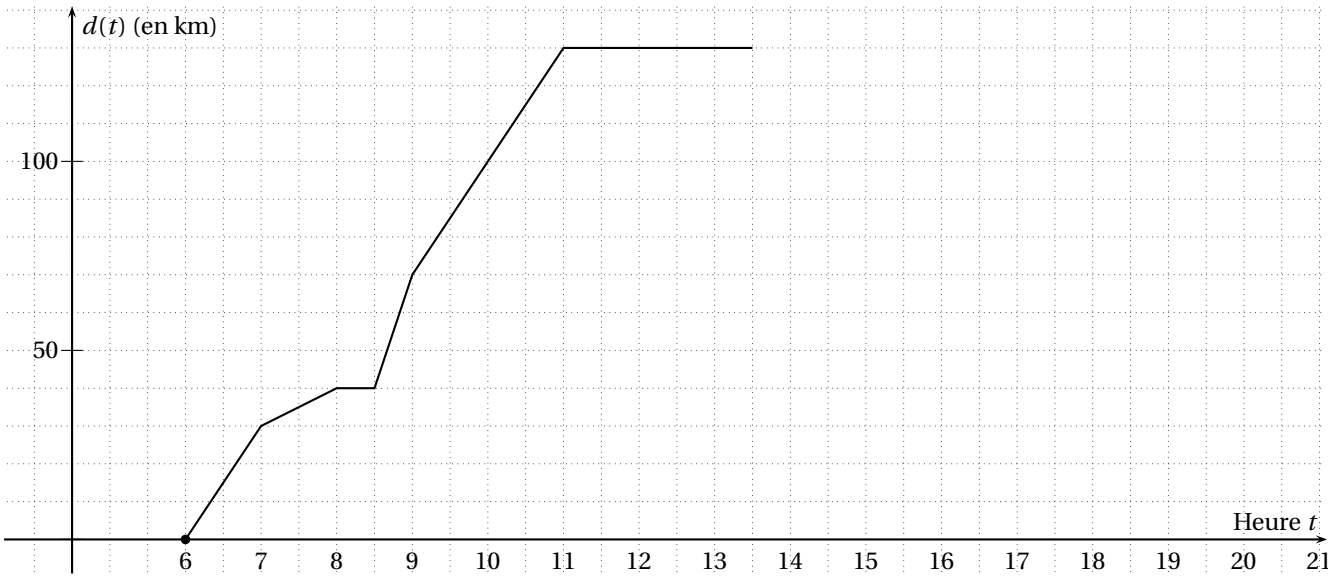


TABLE 1.1 – Tarifs postaux vers la France et Monaco

Poids jusqu'à	Colissimo + recommandé	Colissimo + recommandé + Contre-rembrousement	Chronopost
2 kg	16	31	38
3 kg	17	32	
5 kg	19	33	46
7 kg	20	35	
10 kg	23	38	59
15 kg	25	40	72
30 kg	32	47	110

Activité 1.3 (À vélo).
Un cycliste part pour la ville A à 6 h afin de rendre visite à un ami dans la ville B. Il quitte son ami à 14 h. Le graphique de la présente page représente la distance $d(t)$ (en km) à laquelle le cycliste se trouve de A en fonction de l'heure t.

FIGURE 1.2 – Courbe de l'activité 1.3



1. À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes :
   (a) Quelle est la distance entre A et B ?
   (b) Combien de temps met le cycliste pour parvenir en B ?
   (c) Le cycliste s'arrête-t-il en route ?
   (d) Combien de temps passe-t-il chez son ami ?

(e) Le trajet se compose d'une partie plate, de la montée et de la descente d'un col, puis une nouvelle partie plate. À quelle distance de A se trouve vraisemblablement le début de la montée au col ? Le sommet du col ? La fin de la descente du col vers B ?

(f) Quelle est la vitesse du cycliste sur les parties plates ? En montée ? En descente ?

2. Compléter le graphique en utilisant les renseignements donnés ci-dessous :
   - Pour $14 \leqslant t \leqslant 16$: $d(t) = -30t + 550$;
   - Pour $16 \leqslant t \leqslant 19$: $d(t) = -10t + 230$;
   - Ensuite, le cycliste se repose 30 min ;
   - Pour 19 h 30 $\leqslant t \leqslant$ 19 h 40 : $d(t) = -60t + 1210$;
   - Pour 19 h 40 $\leqslant t \leqslant$ 20 h 40 : $d(t) = -30t + 620$.
3. D'après les données ci-dessus, ses vitesses en montée, en descente et en terrain plat sont-elles les mêmes au retour qu'à l'aller ?
4. Au bout de combien de temps a-t-il parcouru la moitié de la distance AB à l'aller ? À quelle heure repasse-t-il à cet endroit ?

Activité 1.4 (Mortalité infantile).
Le tableau de la présente page donne, pour quelques années, le taux de mortalité infantile, c'est-à-dire la proportion d'enfants qui décèdent avant l'âge d'un an, calculée pour 1 000 naissances vivantes.

TABLE 1.2 – Mortalité infantile

Années	1930	1935	1950	1955
Taux de mortalité	78,8 ‰	67,6 ‰	47,2 ‰	34,2 ‰

1. Tracer un repère, où les années figureront en abscisse et les taux de mortalité en ordonnée (unités : 1,5 cm pour 5 ans et 0,5 cm pour 10 ‰) et y représenter le tableau ci-dessus.
2. Pour estimer les taux de mortalité en 1940 et 1945, une personne utilise la droite passant par les points correspondants à 1935 et 1950.
   Déterminer graphiquement les estimations qu'elle trouve, puis vérifier par le calcul.
3. Une autre personne choisit de procéder de même, mais en traçant la droite passant par les points correspondants à 1930 et 1955. Faire les calculs correspondants.
4. Une troisième fait les calculs équivalents entre 1935 et 1955. Faire ces calculs.
5. Comparer les différentes estimations obtenues.
6. D'autres sources reprennent les données ci-dessus et les complètent pour le années 1940 et 1945 : 86,6 ‰ et 110 ‰. Analyser la différence entre les valeurs estimées ci-dessus et les valeurs réelles.

1.2 Fonctions affines par morceaux

Définition 1.1. Une fonction définie sur la réunion d'un nombre fini d'intervalles et qui, sur chacun de ces intervalles, coïncide avec une fonction affine est appelée *fonction affine par morceaux*.

Propriété 1.1. *Dans un repère, la courbe repésentative d'une fonction affine par morceaux est une réunion de segments de droites ou de demi-droites.*

1.3 Interpolation linéaire

1.3.1 Le principe

Dans certains cas on ne connaît que certaines valeurs d'une grandeur (relevés de température, horaires de marées, tables de remboursements, etc.) et l'on peut être amené à vouloir *estimer* des valeurs intermédiaires (la température entre deux relevés, la hauteur de l'eau à une certaine heure, le remboursement selon un taux non renseigné, etc.). La façon la plus simple de procéder est de considérer les deux valeurs connues les plus proches et de considérer que la progression est affine entre ces deux valeurs. Cette méthode est appelée *interpolation linéaire*.

La valeur obtenue n'est qu'une valeur approchée, les phénomènes observés n'étant que rarement affines (l'évolution de la température, la hauteur de l'eau en fonction de l'heure, le montant des remboursements en fonction du taux, etc. ne sont pas des fonctions affines), mais, dans beaucoup de cas, cette estimation est suffisante.

1.3.2 Un exemple

Un tableau donne les hauteurs des marées heure par heure dans un port de Bretagne et en particulier les deux informations suivantes :

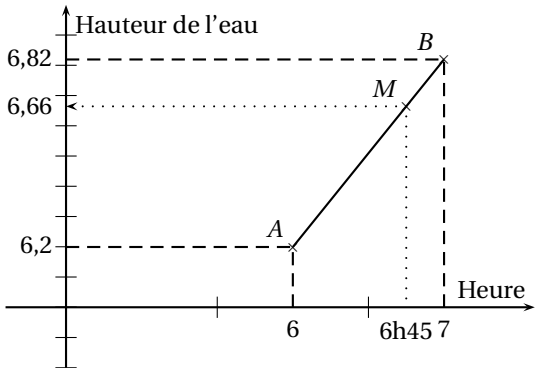
- *à 6h la hauteur de l'eau sera de 6,20 m ;*
- *à 7h de 6,82 m.*

On cherche une estimation de la hauteur de l'eau à 6h45.

Graphiquement

En plaçant les deux points correspondants aux deux relevés dans un repère, on peut obtenir une première estimation graphique (la moins précise) :

FIGURE 1.3 – Interpolation linéaire graphique



En obtenant l'expression de la fonction affine

On cherche la fonction affine $f(x) = mx + p$ où x est l'heure (en h) et $f(x)$ la hauteur (en m) telle que $f(6) = 6,2$ et $f(7) = 6,82$.

On sait que $m = \dfrac{f(7) - f(6)}{7-6} = 0,62$ et que $f(6) = 0,62 \times 6 + p = 6,2 \Leftrightarrow p = 2,48$ donc $f(x) = 0,62x + 2,48$.

Enfin, 6h45 = 6,75h donc $f(6,75) = 0,62 \times 6,75 + 2,48 = 6,665$ m.

Par comparaison des coefficients directeurs

Les droites (AM) et (AB) ont même coefficient directeur donc :

$$\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Leftrightarrow \frac{y_M - 6,2}{0,75} = \frac{0,62}{1} \Leftrightarrow y_M - 6,2 = 0,62 \times 0,75 \Leftrightarrow y_M = 6,2 + 0,465 = 6,665$$

1.4 Exercices et problèmes

1.4.1 Exercices

Exercice 1.1.

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{si} \quad x < -3 \\ 5 & \text{si} \quad -3 \leqslant x \leqslant 2 \\ -2x+1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

   (a) Calculer $f(-5)$, $f(-3)$, $f(0)$, $f(2)$ et $f(3)$.

   (b) Représenter cette fonction dans un repère approprié.

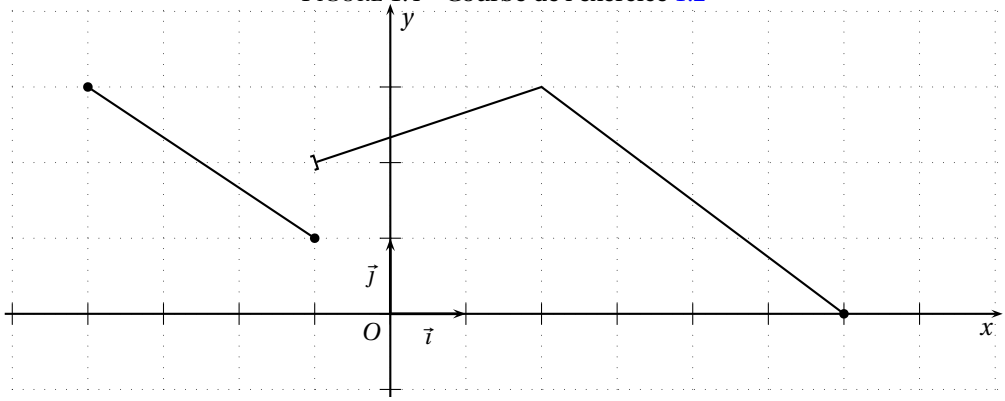
2. Représenter la fonction f définie sur $]-\infty ; 6]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x-4 & \text{sur} \quad]-\infty ; 2] \\ -x+2 & \text{sur} \quad]2 ; 4] \\ x-5 & \text{sur} \quad]4 ; 5[\\ 2x-10 & \text{sur} \quad [5 ; 6] \end{cases}$$

Exercice 1.2.

La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f affine par morceaux définie sur $[-4;6]$. Déterminer l'expression de f.

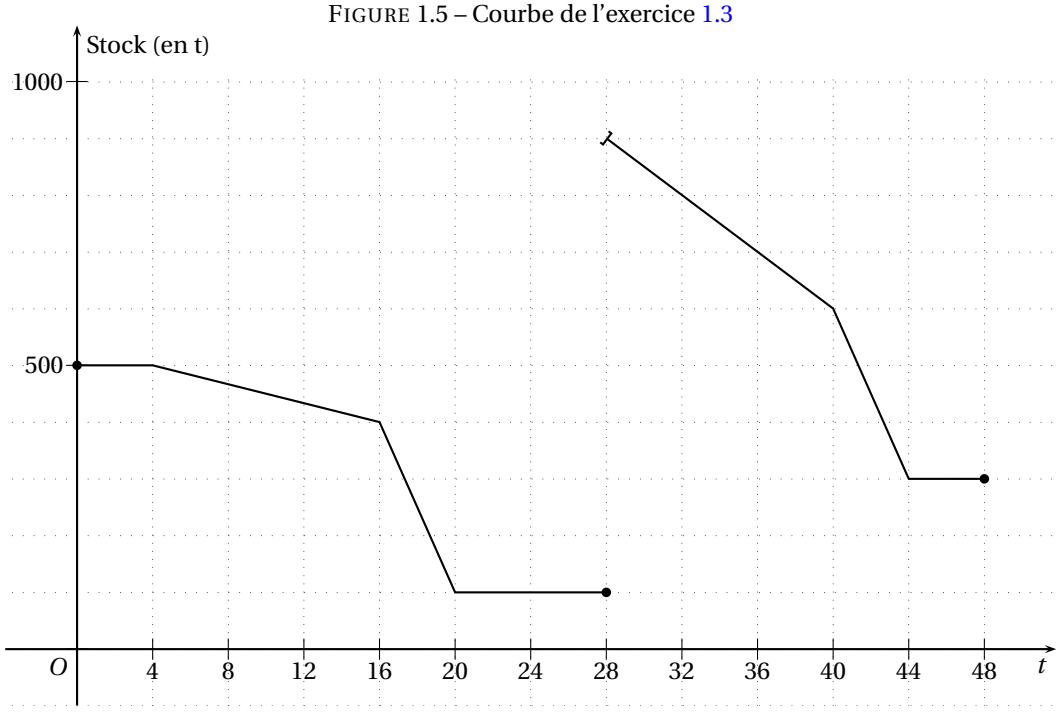
FIGURE 1.4 – Courbe de l'exercice 1.2



Exercice 1.3.

Une usine stocke une certaine matière pour une fabrication. Le graphique de la présente page donne, pendant 48h, le niveau du stock en tonnes en fonction du temps t en heures.

FIGURE 1.5 – Courbe de l'exercice 1.3



1. Comment expliquer les segments horizontaux, ainsi que le saut ?
2. À quel moment de la journée le produit est-il le plus utilisé ?
3. Déterminer l'expression de la quantité stockée $Q(t)$ en fonction de t pour $t \in [0;48]$.
4. Déterminer l'expression de la quantité totale $U(t)$ utilisée à partir de l'heure 0 en fonction de t pour $t \in [0;48]$ et la représenter dans un repère.

Exercice 1.4.
Le 28 juillet 2004, les taux d'ozone (en $\mu g/m^3$) relevés dans la région de Saint Étienne ont évolué de la façon donnée par le tableau suivant :

taux	42	109	164	188	194	180	132
heure	10	12	14	16	18	20	22

Par interpolation linéaire :

1. estimer graphiquement le taux d'ozone à 11h30 ;
2. estimer par le calcul le taux d'ozone toutes les 30 min entre 12h et 14h ;
3. estimer par le calcul l'intervalle sur lequel le taux est supérieur 180 $\mu g/m^3$ dans la journée.

1.4.2 Problèmes

Problème 1.1 (Comparaison de tarifs).
Le tableau ci-dessous présente un extrait des tarifs des forfaits non bloqués pour téléphones portables, proposés par une société de téléphonie fictive.

Forfait	Min comprises dans le forfait	Coût du forfait (en €)	Par min de dépassement (en €)
1	90	33	0,30
2	180	43	0,25
3	300	57	0,18

Pour les forfaits 1, 2 et 3 on désigne, respectivement, par $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ le prix à payer en euros pour une durée totale de communications de x minutes.

1. (a) Exprimer $f_1(x)$ en fonction de x lorsque $0 \leqslant x \leqslant 90$ puis lorsque $x > 90$.
   (b) Dans un repère orthogonal, représenter graphquement la fonction f_1 pour x compris entre 0 et 400.
2. Exprimer $f_2(x)$ et $f_3(x)$ en fonction de x et représenter sur le graphique précédent ces deux fonctions.
3. Lire sur le graphique quel est le tarif le plus avantageurx en fonction de la durée mensuelle des communications.

Problème 1.2.
Le tableau ci-dessous donne des informations sur les distances d'arrêt d'un véhicule sur route sèche selon la vitesse.

vitesse v en km/h	distance parcourue pendant le temps de réaction	distance parcourue pendant le temps de freinage	$d_t(v)$
50		16	
90		52	
130		109	
140		123	
180		207,5	

On se pose la question suivante : « un automobiliste roulant à 80 km/h voit surgir un obstacle à 60 m devant lui. Pourra-t-il s'arrêter à temps ? »

1. Le temps de réaction y_0 est de 0,8 s. Compléter la deuxième colonne en arrondissant au dixième de mètre puis la quatrième, $d_t(v)$ étant la distance totale parcourue entre l'apparition de l'obstacle et l'arrêt.
2. Placer les points de coordonnées $(v ; d_t(v))$ obtenus dans le tableau et les joindre par des segments de droites.
3. Utiliser une interpolation linéaire pour répondre à la question.
4. En réalité, la distance de freinage d s'exprime en fonction de v sous la forme $d(v) = av^2 + b$. Trouver a en utilisant la distance de freinage à 50 km/h et à 90 km/h.
   Calculer alors la distance de freinage à 80 km/h avec cette deuxième modélisation. Conclure.

Problème 1.3.
Un élève recopie les données pour la population française fournie sur le site de l'INED (www.ined.fr) dans le tableau ci-dessous.

1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
56 710	56 978	57 242	57 470	59 661	57 847	58 029	58 210	58 398	58 620

1. Représenter graphiquement ces données dans un graphique approprié.
2. Que remarque-t-on sur ce graphique ? Comment l'expliquer ? Comment y remédier ?
3. Un élève retourne sur le site et lit, pour l'année 1994, une population de 57 661. Il lit aussi sur le site que les recensements n'ont été faits qu'en 1990 et en 1999 ; pour les autres années, on a appliqué les formules données par un modèle. Ce modèle correspond-il à une interpolation linéaire ? Justifier.

Problème 1.4 (Impôt sur le revenu).
On trouve sur le site de l'administration fiscale (http ://www.impots.gouv.fr/) les informations résumées dans le tableau ci-dessous qui permettent de déterminer le montant de l'impôt sur le revenu.

Tranches de revenus nets imposables	Taux marginal d'imposition
De 0 à 5 614 €	0,00 %
De 5 614 à 11 198 €	5,50 %
De 11 198 à 24 872 €	14,00 %
De 24 872 à 66 679 €	30,00 %
Au-delà de 66 679 €	40,00 %

Pour calculer le montant de l'impôt sur le revenu on procède de la manière suivante : le revenu net imposable est découpé en tranches et le montant de chaque tranche est imposé au taux indiqué.
Ainsi si un célibataire déclare 16 000 € de revenu net imposable, les 5 614 premiers euros sont imposés à 0 %, les $11\,198-5\,614=5\,584$ euros suivants sont imposés à 5,50 %, enfin les $16\,000-11\,198=4\,802$ derniers euros sont imposés à 14,00 %. Le célibataire devra donc payer $5\,614\times\frac{0}{100}+5\,584\times\frac{5{,}50}{100}+4\,802\frac{14}{100}=979{,}40$ €.
On appelle taux réel d'imposition le pourcentage que représente l'impôt sur le revenu payé du revenu net imposable. Dans l'exemple ci-dessus $\frac{979{,}40}{16\,000}\approx 0{,}0612=\frac{6{,}12}{100}$; le taux réel d'imposition est donc de 6,12 %.

1. Déterminer pour les montants nets imposables suivants le montant de l'impôt sur le revenu et le taux réel d'imposition :
   - 10 000 € ;
   - 20 000 € ;
   - 40 000 € ;
   - 80 000 €.
2. De façon générale, on note R le revenu net imposable en euros pour l'année 2007 et $f(R)$ le montant de l'impôt sur le revenu.
   (a) Vérifier que si $5\,614\leqslant R\leqslant 11\,198$, $f(R)=0{,}055R-308{,}77$.
   (b) Vérifier que si $11\,198\leqslant R\leqslant 24\,872$, $f(R)=0{,}14R-1260{,}60$.
   (c) Exprimer $f(R)$ en fonction de R pour chacune des autres tranches et vériier les résultats obtenus à la question précédente.
3. (a) Représenter la fonction f dans un repère orthogonal (unités : 4 cm pour 4 000 € en abscisse, 1 cm pour 1 000 € en ordonnée ; prévoir une feuille entière et bien placer les montants des impôts aux changement de tranches).
   (b) Trouver graphiquement une valeur approchée du montant de l'impôt correspondant à un revenu net imposable de 25 000 € pour un célibataire.
   (c) Trouver le revenu net imposable d'une personne qui doit payer un impôt de 12 000 €.
4. M. Faure se rend compte que l'année précédente il avait déclaré 24 000 € alors que cette année il va en déclarer 25 000. Il pense que l'augmentation de son revenu net imposable va disparaître dans ses impôts. Quelle part des 1 000 € est versée à l'État ?
5. Mme Smet explique qu'elle séjourne en Suisse parce que le fisc français lui prend plus 50 % de ce qu'elle gagne. Peut-il s'agir de l'impôt sur le revenu ?
6. Une des déductions d'impôt en France (ce n'est pas le cas dans la plupart des autres pays européens) provient des enfants à charge. Si un célibataire a un enfant à charge son revenu imposable est divisé par 1,5 et l'on calcule ensuite comme précédemment.
   (a) Refaire les calculs de la question 1 en supposant que le foyer est maintenant constitué d'un célibataire ayant un enfant à charge.
   (b) La réduction d'impôt obtenue est-elle plus grande pour un célibataire modeste ou un célibataire aisé ? Et proportionnellement ?