Devoir surveillé n°9

Statistiques – Probabilités – Fonction exponentielle de base a

Exercice 9.1 (4 points).

Dans cet exercice tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} *près.*

Le tableau ci-dessous donne le PIB de la Chine, en milliards de dollars, entre 1 982 et 2 002.

Année	1 982	1 986	1 990	1 994	1 998	2 002
Rang x_i de l'année	0	4	8	12	16	20
PIB y_i	280	300	384	546	945	1 232

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\,;\,y_i)$ dans un repère orthogonal du plan.
   Les unites graphiques seront de 1 cm pour deux années sur l'axe des abscisses et de 1 cm pour 100 milliards de dollars sur l'axe des ordonnées.
2. L'équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés est $y = 48,98x + 124,71$.
   (a) Tracer cette droite sur le graphique.
   (b) Avec cet ajustement, estimer par le calcul le PIB de la Chine en 2 004.
   Commenter le résultat obtenu.
3. On envisage dans cette question un ajustement exponentiel.
   En posant $z = \ln y$, on obtient une droite d'ajustement de z en x d'équation $z = 0,08x + 5,46$.
   (a) On se propose de déterminer alors y en fonction de x sous la forme $y = k \times a^x$ où k et a sont deux réels.
   Montrer que $y = 235,10 \times 1,08^x$.
   (b) Tracer sur le graphique la courbe d'équation $y = 235,10 \times 1,08^x$, pour $x \in [0\,;\,24]$.
   (c) Avec cet ajustement, estimer par le calcul, le PIB de la Chine en 2 004.
4. Le PIB de la Chine pour 2 004 était de 1 650 milliards de dollars.
   Calculer en pourcentage par rapport à la valeur réelle, les erreurs commises en prenant comme PIB les estimations obtenues aux questions 2b et 3c.

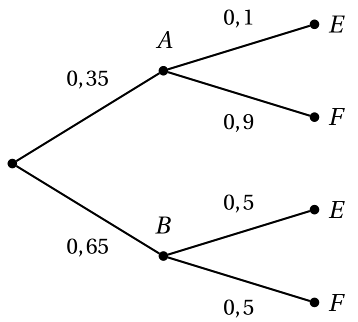
Exercice 9.2 (6 points).

Pour les élèves ***ne suivant pas*** *l'enseignement de spécialité.*

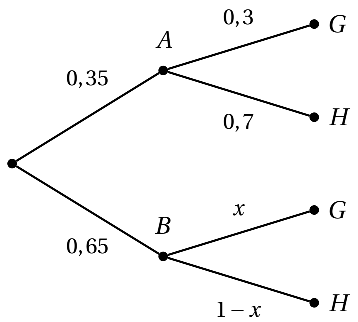
Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Cocher la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte 1,5 point. Une mauvaise réponse enlève 0,75 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève, aucun point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

Les trois arbres donnés ci-dessous représentent des situations probabilistes. Les nombres indiqués sur les différentes flèches sont des probabilités, et en deuxième niveau, des probabilités conditionnelles. Ainsi pour l'arbre donné dans la question 1 : $0,35 = p(A)$ et $0,1 = p_A(E)$

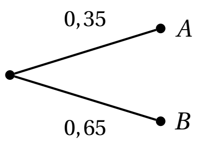
1. La probabilité de l'évènement E est égale à :
   ❐ 0,5
   ❐ 0,1
   ❐ 0,6
   ❐ 0,36



2. Les évènements A et G étant supposés indépendants, x est égal à :
   ❐ 0,35
   ❐ 0,1
   ❐ 0,3
   ❐ 0,36



Ici la situation probabiliste est associée à une expérience aléatoire schématisée par l'arbre ci-dessous.



Cette expérience aléatoire est répétée quatre fois de façon indépendante.

3. La probabilité d'obtenir au moins une fois l'évènement A est égale à :
   - ❒ 0,35
   - ❒ 0,82149375
   - ❒ 0,17850625
   - ❒ 0,01500625

4. On peut espérer que l'événement A se produira :
   - ❒ 2 fois
   - ❒ 1 fois
   - ❒ 1,5 fois
   - ❒ 1,4 fois

Exercice 9.2 (6 points).

Pour les élèves ***suivant*** *l'enseignement de spécialité.*

La suite (u_n) est telle que $u_0 = 50$, $u_1 = 100$ et, pour tout entier naturel n, la relation $\mathscr{R}$ suivante est vérifiée

$$\mathscr{R} : u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}$$

1. Calculer les termes de la suite jusqu'au rang 5.
2. Soit (v_n) une suite géométrique de raison q vérifiant la relation $\mathscr{R}$.
   (a) Montrer qu'alors q est solution de l'équation $q^2 - \frac{1}{2}q - \frac{1}{2} = 0$.
   (b) Déterminer q_1 et q_2 les deux solutions de cette équation.
3. On admet que toutes les suites (s_n) qui vérifient $\mathscr{R}$ sont de la forme $s_n = \alpha \times q_1^n + \beta \times q_2^n$, pour tout entier naturel n. En particulier, on admet que $u_n = \alpha \times q_1^n + \beta \times q_2^n$, pour tout entier naturel n.
   (a) À l'aide de u_0 et de u_1 déterminer α et β pour la suite (u_n).
   (b) Étudier la convergence de (u_n).

Exercice 9.3 (10 points).

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

Une nouvelle console de jeux est mise sur le marché. Soit x le prix unitaire en centaines d'euros de cette console.

La fonction d'offre des fournisseurs (en milliers de console) est la fonction f définie sur $]0;6]$ par $f(x) = 0,7\mathrm{e}^{0,5x+2}$, où $f(x)$ est la quantité proposée par les fournisseurs pour un prix unitaire de x.

La fonction de demande des consommateurs (en milliers de console) est la fonction g définie sur $]0;6]$ par $g(x) = 10\ln\left(\frac{20}{x}\right)$ où $g(x)$ est la quantité demandée par les consommateurs pour un prix unitaire de x.

1. (a) Les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ des fonctions f et g sont tracées dans le repère orthogonal de la figure 9.1 page ci-contre.
      i. Identifier les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. Expliquez votre choix.
      ii. Que représente le point A d'un point de vue économique ? Lire ses coordonnées $(x_A\,;\,y_A)$ sur le graphique.
   (b) Pour déterminer les coordonnées de A de façon précise, on est amené à résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
   On pose, pour tout x appartenant à $]0;6]$, $h(x) = f(x) - g(x)$.
      i. Montrer que $h'(x) = 0,35\mathrm{e}^{0,5x+2} + \frac{10}{x}$.
      ii. Étudier le signe de la dérivée h' et en déduire le sens de variation de h.
      iii. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution x_1 sur l'intervalle $[2;3]$.
      Déterminer alors la valeur arrondie au dixième de x_1 à l'aide de la calculatrice.
      iv. En déduire le prix unitaire d'équilibre de cette console en euros et le nombre de consoles disponibles à ce prix (arrondir à la centaine).
2. On prendra dans cette question $x_A = 2,7$ et $y_A = 20$.
   (a) Déterminer une primitive F de f sur l'intervalle $]0;6]$.
   (b) On appelle surplus des fournisseurs le nombre $S = x_A y_A - \displaystyle\int_0^{x_A} f(x)\mathrm{d}x$.
   Ce nombre représente une aire.
   Représenter cette aire sur le graphique précédent.
   Calculer S.
3. Déterminer les valeurs approchés au millième des réels k et a tels que $f(x) = k \times a^x$.

FIG. 9.1 – Figure de l'exercice 9.3