Devoir surveillé n°6

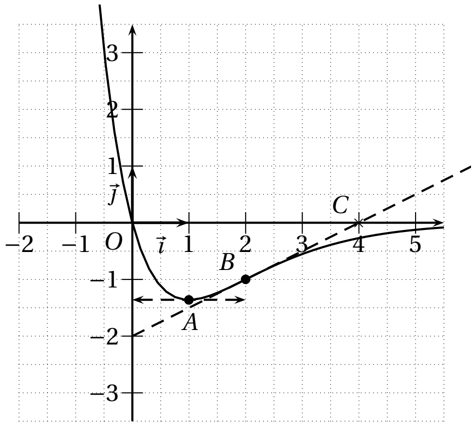
Fonction dérivée – Matrices

Exercice 6.1 (3,5 points).

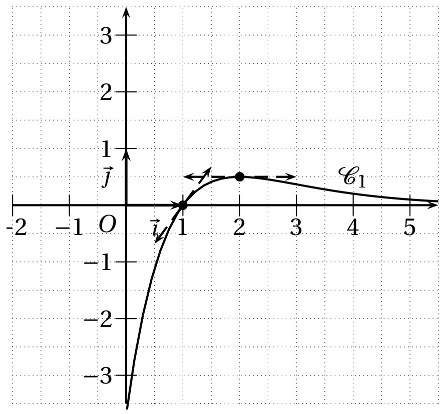
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure ci-contre est une partie de la courbe représentative, relativement à un repère orthogonal, d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

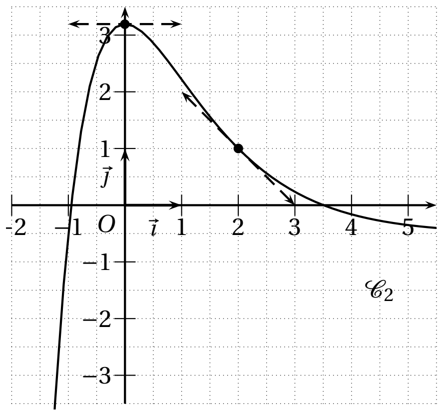
On donne les renseignements suivants :

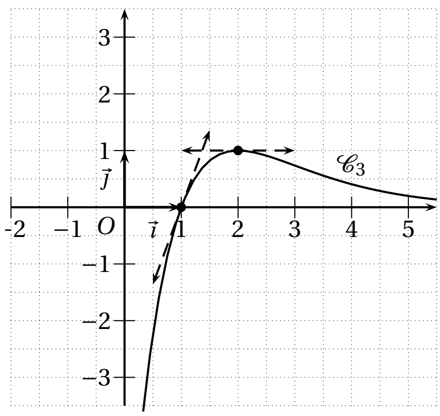
- la courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 ;
- le point $B(2\,;-1)$ appartient à $\mathscr{C}$;
- la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B passe par le point $C(4\,;0)$;



1. Déterminer graphiquement $f(2)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
2. Une des représentations graphiques ci-dessous, représente la fonction dérivée f' de f, une autre représente une fonction h telle que $h' = f$. En justifiant vos choix *à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques* :
   (a) déterminer la courbe associée à la fonction f'.
   (b) déterminer la courbe associée à la fonction h.







Exercice 6.2 (6 points).
Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

- $f(x) = (x^2 + 2x + 3)\sqrt{x}$
- $g(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$
- $h(x) = (2x + 3)^3$

Exercice 6.3 (5 points).
f est la fontion définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par : $f(x) = \frac{x^2 - 11x + 28}{x - 3}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.
On donne en annexe page ci-contre un repère dans lequel une partie de $\mathscr{C}$ est déjà tracée.
On complètera le schéma avec les éléments rencontrés au fur et à mesure de l'exercice (points, tangentes, etc.).

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ et on note f' la fonction dérivée de f.
   (a) Justifer que $f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x - 3)^2}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x et établir le tableau de variation de la fonction f (on indiquera les extremums locaux de f).
2. (a) Déterminer, s'il y en a, les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
   (b) Soit T la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de T.
3. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec les axes de coordonnées.
4. Compléter le tracé de $\mathscr{C}$.

Exercice 6.4 (5,5 points).
*Pour les élèves **ayant suivi** l'enseignement de spécialité.*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 puis A^3.
2. Développer le calcul matriciel : $(I_3 - A)(I_3 + A + A^2)$, où $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Déduisez des résultats précédents la matrice inverse de $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 6.4 (5,5 points).
*Pour les élèves **n'ayant pas suivi** l'enseignement de spécialité.*
Une entreprise fabrique x portes blindées par jour, x variant de 0 à 360. On estime que le coût total de fabrication, noté $C(x)$, est donné, en euros, par : $C(x) = 0,001x^3 - 0,1x^2 + 95x + 1500$.
La recette de l'entreprise obtenue par la vente de x portes, notée $R(x)$, en euros, est donnée par : $R(x) = 305x$.
On suppose que chaque porte est vendue.

1. Montrer que $B(x) = -0,001x^3 + 0,1x^2 + 210x - 1500$ pour x variant de 0 à 360.
2. Calculer $B'(x)$ pour x variant de 0 à 360.
3. Étudier le signe de $B'(x)$ puis dresser le tableau des variations de la fonction B.
4. Pour quel nombre de portes vendues, le bénéfice est-il maximal ? Justifier votre réponse. Quel est ce bénéfice maximal ?

FIGURE 6.1 – Annexe de l'exercice 6.3