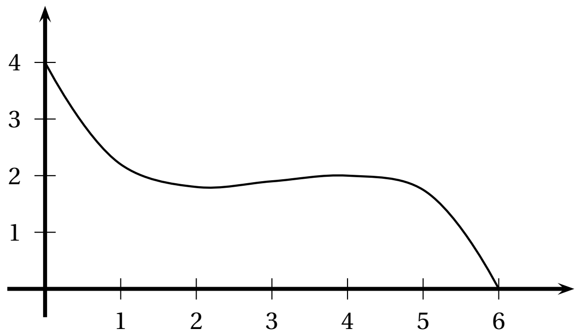
Devoir surveillé n°6

Statistiques – Logarithme népérien – Probabilités conditionnelles

Exercice 6.1 (4,5 points).
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des trois questions, trois réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.
Cochez la réponse que vous jugez convenir, sans justifier votre choix.
Barème : Une réponse exacte rapporte 1,5 *point. Une réponse inexacte ou une question sans réponse ne rapporte et n'enlève aucun point.*

1. Voici la courbe représentative d'une fonction f sur l'intervalle $[0;6[$.

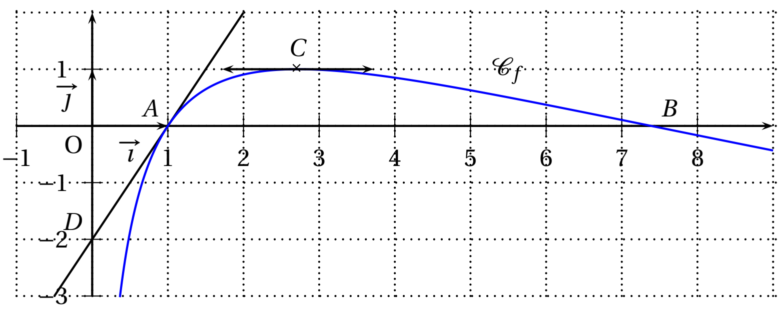


Sur l'intervalle $[0;6[$, la fonction composée $x \longmapsto \ln[f(x)]$:
❒ est strictement croissante. ❒ a les mêmes variations que f. ❒ a les variations contraires de celles de f.

2. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = 4x - 2\ln x$.
Dans un repère, une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1 est :
❒ $y = 2x+2$. ❒ $y = 4x-2$. ❒ $y = 2x+6$.

3. L'ensemble des solutions de l'équation $2\ln x = \ln(2x+3)$ est :
❒ l'ensemble vide. ❒ $\{-1;3\}$. ❒ $\{3\}$.

Exercice 6.2 (6 points).
On admettra que les fonctions considérées dans cet exercice sont dérivables sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = (2-\ln x)\ln x$.
La figure ci-dessous donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en $A(1;0)$ et en B.
La tangente en C à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées en D.



1. Déterminer l'abscisse du point B (la valeur exacte est demandée).
2. Calculer la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$.
3. On note f' la fonction dérivée de f sur $]0;+\infty[$.
   (a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{2(1-\ln x)}{x}$.
   (b) Déterminer les coordonnées du point C et l'ordonnée du point D (les valeurs exactes sont demandées).
4. (a) Soit la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x) = x[f(x)+2\ln x-4]$.
   Démontrer que g est une primitive de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   (b) Calculer $\displaystyle\int_1^{e^2} f(x)\,dx$ et donner une interprétation géométrique de cette intégrale.

Exercice 6.3 (4,5 points).

Suite à une panne technique, un distributeur de boissons ne tient aucun compte de la commande faite par le client. Cette machine distribue soit un expresso, soit du chocolat, soit du thé en suivant une programmation erronée. Chaque boisson peut être sucrée ou non.

- La probabilité d'obtenir un expresso est $\frac{1}{2}$.
- La probabilité d'obtenir un thé sucré est $\frac{2}{9}$.
- Si l'on obtient un expresso, la probabilité qu'il soit sucré est $\frac{5}{9}$.
- Si l'on obtient un chocolat, la probabilité qu'il soit sucré est $\frac{1}{3}$.

On pourra considérer les événements suivants :

- T : « On a obtenu un thé ».
- E : « On a obtenu un expresso ».
- C : « On a obtenu un chocolat ».
- S : « La boisson obtenue est sucrée ».

1. Construire un arbre probabiliste modélisant la situation.
2. Calculer la probabilité d'obtenir un expresso sucré.
3. On sait que la probabilité d'obtenir une boisson sucrée est $\frac{5}{9}$. En déduire que la probabilité d'obtenir un chocolat sucré est $\frac{1}{18}$.
4. En déduire la probabilité d'obtenir un chocolat puis celle d'obtenir un thé.

Exercice 6.4 (5 points).

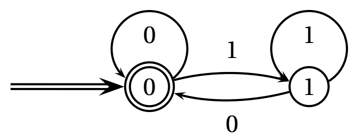
*Pour les élèves **suivant** l'enseignement de spécialité.*

Les deux parties sont indépendantes.

Première partie

Soit l'automate ci-contre.

1. Les mots « 11 », « 010 », « 110 », « 101010 » sont-ils reconnus par cet automate ?
2. Donner la liste des mots de quatre lettres reconnus par celui-ci.
3. Caractériser les mots reconnus.



Deuxième partie

Une grande ville a créé un jardin pédagogique sur le thème de l'écologie, jardin qui doit être visité par la suite par la majorité des classes de cette ville. Ce jardin comporte six zones distinctes correspondant aux thèmes :

- A. Eau
- B. Économie d'énergies
- C. Plantations et cultures locales
- D. Développement durable
- E. Biotechnologies
- F. Contes d'ici (et d'ailleurs)

Ces zones sont reliées par des passages (portes) où sont proposés des questionnaires.

Le jardin et les portes sont représentés par le graphe ci-dessous (chaque porte et donc chaque questionnaire est représenté par une arête).

1. Le graphe est-il complet ? Est-il connexe ? Justifier.
2. Peut-on parcourir le jardin en répondant à tous les questionnaires et sans repasser deux fois devant le même questionnaire :
   (a) en commençant la visite par n'importe quelle zone ?
   (b) en commençant la visite par la zone C (plantations et cultures) ? Dans ce cas, si la réponse est positive, quelle sera la dernière zone visitée.

   (Dans les deux cas, 2a et 2b, justifiez votre réponse.)
3. Pour illustrer chaque zone et présenter légendes et commentaires, les enfants ont décidé d'utiliser des supports de couleurs différentes.
   Pour limiter le nombre de couleurs, on utilise des couleurs différentes seulement si les zones sont limitrophes (avec un passage entre les deux).
   (a) Donner et justifier un encadrement du nombre chromatique de ce graphe.
   (b) Déterminer alors en utilisant un algorithme adapté le nombre chromatique de ce graphe et proposer une répartition des couleurs.