BACCALAURÉAT GÉNÉRAL
Hiver 2 009

Épreuve : MATHÉMATIQUES **Sujet pour les élèves de TES1 et TES3**

Série
SCIENCES ÉCONOMIQUES ET SOCIALES

Spécialités :

Sciences économiques et sociales (coefficient : 5)
Anglais de complément (coefficient : 5)
Mathématiques (coefficient : 7)

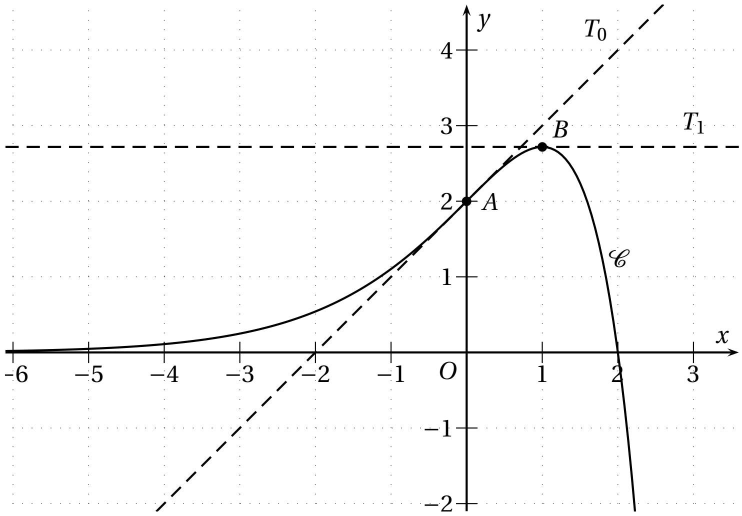
Durée de l'épreuve : 3 heures.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le sujet comporte page 4 pages.

Exercice 1 (5 points).

La courbe $\mathscr{C}$ sur le graphique ci-dessous représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
On note f' sa dérivée et F une primitive de f.
On a tracé la tangente T_0 à $\mathscr{C}$ au point $A(0\,;\,2)$ et la tangente T_1 à $\mathscr{C}$ au point $B(1\,;\,\mathrm{e})$.



Pour chaque début de phrase trois fins sont proposées, l'une d'entre elles est mathématiquement juste, les deux autres sont fausses.
Recopier sur votre copie la phrase complète sachant qu'*une phrase mathématiquement juste rapporte* 1 *point, qu'une phrase fausse enlève* 0,5 *point et que l'absence de phrase ou de fin n'enlève ni n'ajoute de point.*

1. L'équation de la tangente T_0 est :
   (a) $y = 2x + 2$. (b) $y = 2x - 2$. (c) $y = x + 2$.
2. La fonction f est :
   (a) croissante sur $\mathbb{R}$. (b) croissante sur $]-\infty\,;\,2]$. (c) positive sur $]-\infty\,;\,2]$.
3. Le nombre dérivé de f en 1 est :
   (a) $f'(1) = \mathrm{e}$. (b) $f'(1) = 0$. (c) $f'(1) = 1$.
4. La primitive F est :
   (a) croissante sur $\mathbb{R}$. (b) croissante sur $]-\infty\,;\,2]$. (c) décroissante sur $[1\,;\,2]$.
5. L'équation $f(x) = 1$ admet :
   (a) une solution unique dans $[-2\,;\,2]$. (b) une solution unique dans $]1\,;\,2[$. (c) comme solution unique $x = \mathrm{e}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (5 points).

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 3x - 2 - 2x\ln(x)$.

1. (a) Calculer la dérivée de f et montrer que l'on a : $f'(x) = 1 - 2\ln(x)$
   (b) Résoudre l'inéquation : $1 - 2\ln(x) > 0$
2. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en indiquant :
   (a) le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x :
   (b) la valeur exacte de $f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$

x	0		$\sqrt{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖				
$f(x)$	‖	-2 ↗		↘	$-\infty$

3. À l'aide de ce tableau de variations :
   (a) Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

(b) Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée à 10^{-2} près de chaque solution indiquée.

4. Indiquer, en justifiant la réponse à l'aide du tableau de variations, si chacune des affirmations suivantes est **vraie** ou **fausse** :
   (a) La courbe représentative de f admet dans le plan muni d'un repère orthonormal, une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
   (b) Toute primitive de f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;\,\sqrt{\text{e}}\right[$

Exercice 3 (5 points).

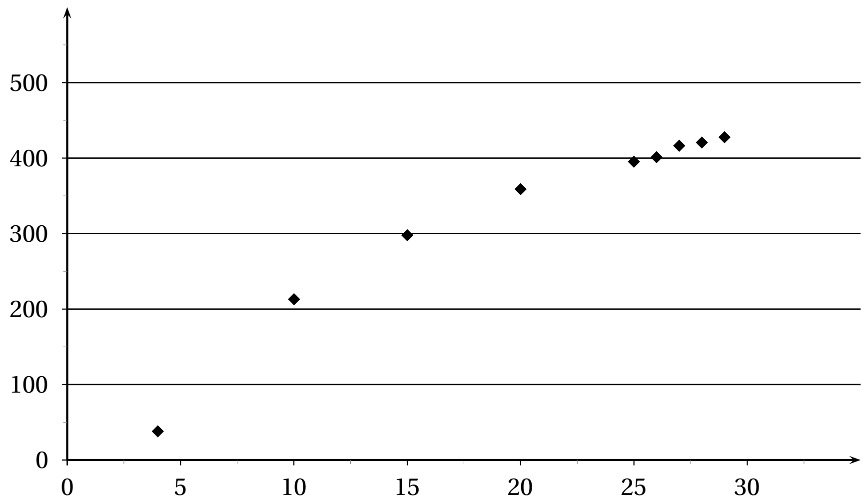
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le tableau ci-dessous donne la production d'électricité d'origine nucléaire en France, exprimée en milliards de kWh, entre 1 979 et 2 004. Les rangs des années sont calculés par rapport à l'année 1 975.

Année	1 979	1 985	1 990	1 995	2 000	2 001	2 002	2 003	2 004
Rang de l'année x_i	4	10	15	20	25	26	27	28	29
Production y_i	37,9	213,1	297,9	358,8	395,2	401,3	416,5	420,7	427,7

Source : site Internet ministère de l'industrie

Ces données sont représentées par le nuage de points ci-dessous :



A – Recherche d'un ajustement affine

1. Donner à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au dixième).
2. (a) D'après cet ajustement, quelle serait la production d'électricité nucléaire en France en 2 005 ?
   (b) En réalité, en 2 005, la production d'électricité nucléaire a été de 430 milliards de kWh. Calculer le pourcentage de l'erreur commise par rapport à la valeur réelle, arrondi à 0,1 % près, lorsqu'on utilise la valeur fournie par l'ajustement affine.

B – Un autre modèle

Compte tenu de l'allure du nuage de points, on choisit un ajustement logarithmique et on modélise la production d'électricité nucléaire par la fonction f définie pour tout x de $[4\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = 197 \ln x - 237$.

1. Calculer la production d'électricité nucléaire prévisible avec ce modèle pour l'année 2005. Quelle conclusion peut-on en tirer ?
2. (a) Résoudre dans $[4\,;\,+\infty[$ l'inéquation $f(x) \geqslant 460$.
   (b) Avec ce modèle, en quelle année peut-on prévoir que la production d'énergie nucléaire dépassera 460 milliards de kWh ?

Exercice 3 (5 points).

Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une association caritative a constaté que, chaque année, 20 % des donateurs de l'année précédente ne renouvelaient pas leur don mais que, chaque année, 300 nouveaux donateurs effectuaient un don.
On étudie l'évolution du nombre de donateurs au fil des années.
Lors de la première année de l'étude, l'association comptait 1000 donateurs.
On note u_n le nombre de donateurs lors de la n-ième année ; on a donc $u_1 = 1000$.

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_{n+1} = 0,8 \times u_n + 300$.
3. Dans un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm pour 100 (on prendra l'origine du repère en bas à gauche de la feuille), représenter les droites d'équation $y = x$ et $y = 0,8x + 300$.

   À l'aide d'une construction graphique, émettre une conjecture sur le comportement de la suite (u_n) quand n tend vers l'infini.
4. Afin de démontrer cette conjecture, on introduit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel non nul n, par $v_n = 1500 - u_n$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
   (b) Calculer la limite de (v_n) ; en déduire la limite de (u_n).
   Que peut-on en déduire pour l'évolution du nombre de donateurs de l'association ?

Exercice 4 (5 points).

Lors d'une émission télévisée, les téléspectateurs sont appelés à envoyer des messages téléphoniques par SMS, pendant une durée de 5 minutes.

Pendant ces 5 minutes, les appels arrivent de façon continue, avec un débit variable en fonction du temps. Si x est le temps exprimé en minutes, le débit, exprimé en milliers d'appels par minute, est donné par la fonction f telle que :

$$\begin{cases} f(x) = -4x^2 + 8x & \text{pour } x \in [0\,;\,1] \\ f(x) = \ln x - x + 5 & \text{pour } x \in [1\,;\,5] \end{cases}$$

La courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction f dans un repère orthonormal du plan, est donnée ci-après à titre indicatif.

On veut calculer le nombre total d'appels reçus pendant ces 5 minutes, et on admet que ce nombre d'appels est donné par $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,dx$.

1. Démontrer que f est croissante sur $[0\,;\,1]$, et décroissante sur $[1\,;\,5]$.
2. (a) Donner une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,1]$.
   (b) Calculer l'aire exprimée en unités d'aire du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.
3. (a) Soient g et G les fonctions définies sur $[1\,;\,5]$ par $g(x) = \ln x$ et $G(x) = x\ln x - x$.
   Montrer que G est une primitive de g sur $[1\,;\,5]$.
   (b) Calculer l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 5$.
4. Donner le nombre total d'appels reçus pendant ces 5 minutes.