De l'enseignement de la géométrie

rudolf bkouche
IREM de Lille
<rbkouche@wanadoo.fr>

à Nicolas Rouche
in memoriam

Introduction

Toute science a deux objectifs, celui de la construction de l'intelligibilité du monde et celui de la résolution des problèmes. Loin de s'opposer, ces deux objectifs sont complémentaires, c'est pour résoudre les problèmes que l'on rencontre que l'on est conduit à construire l'intelligibilité du monde, et c'est la construction de cette intelligibilité qui permet en retour de résoudre ces problèmes[1].
Cette complémentarité doit apparaître dans l'enseignement d'une science et négliger l'un de ces objectifs revient à mutiler cet enseignement. Si la construction de l'intelligibilité se traduit pas l'élaboration d'un discours cohérent, la réduction de l'enseignement au seul discours de la science conduit à ce que nous avons appelé l'*illusion langagière* dont l'un des exemples emblématiques reste celui de la réforme dite des *mathématiques modernes*, mais la réduction de l'enseignement à la seule résolution des problèmes conduit au développement d'un *activisme pédagogique* qui réduit l'enseignement à un ensemble d'activités disparates comme l'a montré la contre-réforme qui a succédé à la réforme des mathématiques modernes et qui reste présente comme le montrent les programmes actuels[2]. Au volontarisme de la réforme des années soixante-dix s'appuyant sur la notion de structure, on a opposé des activités à tout va, cet activisme pédagogique étant renforcé par un usage irraisonné de l'informatique, celle-ci se réduisant à un simple gadget. Cet activisme pédagogique s'est développé au détriment de toute structuration du savoir, occultant ainsi le caractère hypothético-déductif des mathématiques et s'appuyant sur une interprétation quelque peu simpliste de ce que l'on peut appeler le caractère expérimental des mathématiques[3].
La géométrie élémentaire est née de deux grandes problématiques, d'une part la problématique de l'égalité, d'autre part la problématique de la forme. Ces problématiques fondatrices ont été oubliées avec la réforme des mathématiques modernes. Si l'oubli de ces problématiques avait une certaine cohérence lors de la réforme dans la mesure où celle-ci mettait en avant l'aspect structural des mathématiques[4], la contre-réforme, au nom d'une modernité mal comprise, n'a pas osé revenir à ces problématiques, se réfugiant dans l'étude de quelques situations dites concrètes, lesquelles, selon la vulgate constructiviste, devraient permettre aux élèves de reconstruire le savoir géométrique. Comme nous l'avons déjà dit, la fascination devant l'informatique ne pouvait que renforcer cette tendance.

---

[1]Nous n'aborderons pas la question de savoir si le monde est intelligible ou non. La question est moins celle du monde que celle du rapport de l'homme au monde ; autant dire que l'intelligibilité du monde est essentiellement une affaire humaine, la possibilité de résoudre des problèmes en s'appuyant sur des constructions théoriques pouvant être considérée comme un critère de validité de ces constructions.
[2]Rudolf Bkouche, "L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique"
[3]Rudolf Bkouche, "Du caractère expérimental des mathématiques (à propos des laboratoires de mathématiques)"
[4]Nous avons dit ailleurs en quoi cette volonté de cohérence mettant en avant une progression purement logique au détriment de toute progression pédagogique constituait une erreur. Cf. Rudolf Bkouche, "La place de la géométrie dans l'enseignement des mathématiques en France, de la réforme de 1902 à la réforme des mathématiques modernes"

C'est pourquoi nous proposons de revenir à ces deux problématiques mises en place dans les *Eléments* d'Euclide en y ajoutant les trois principes mis en avant lors de la réforme de 1902, savoir, la fusion consistant à ne plus séparer géométrie plane et géométrie dans l'espace, l'introduction explicite du mouvement et le caractère expérimental de la géométrie[5].
Mais à côté de cet aspect de la géométrie élémentaire qui la relie aux sciences physiques, il faut ajouter le rôle que joue la géométrie comme clé d'entrée dans la science contemporaine *via* ce que l'on peut appeler la géométrisation, celle-ci apparaissant à la fois comme un langage universel[6] et comme un développement de métaphores conduisant à ce que Jean Dieudonné a appelé des transferts d'intuition[7].

Critique des programmes actuels

Nous avons rappelé dans l'introduction comment la contre-réforme qui a suivi la réforme des mathématiques modernes a, au nom d'un prétendu retour au concret, conduit à vider l'enseignement scientifique de tout caractère théorique. Le refus de tout caractère théorique a contribué non seulement à occulter le caractère hypothético-déductif de la géométrie mais à réduire ce que l'on peut appeler le caractère expérimental delà géométrie à quelques manipulations dont on espérait qu'elles amèneraient les élèves à redécouvrir la géométrie conformément au slogan devenu classique *« on observe, on conjecture, on démontre »*. Cela a conduit à la fois à un appauvrissement de l'enseignement et à des exigences inutiles.
Nous nous contenterons de donner deux exemples de cette inconsistance des programmes, le premier relevant d'un excès d'exigence sous prétexte de modernité, l'autre au contraire conduisant l'enseignement de la géométrie à la limite du faux. Mais qu'importe le faux si les élèves ne s'en aperçoivent pas !!!
Après la réforme des mathématiques modernes que l'on peut considérer comme une caricature de Hilbert, la contre-réforme peut se définir, en ce qui concerne la géométrie, comme une caricature du *Programme d'Erlangen* de Felix Klein. *On* sait[8], depuis le *Programme d'Erlangen*, que la géométrie est l'étude de l'action d'un groupe de transformations opérant sur un ensemble et des propriétés invariantes par cette action. Il fallait donc construire l'enseignement de la géométrie autour de la notion de transformation, donc trouver des transformations convenables pour élaborer un programme d'enseignement, de là vient la progression inventée pas les programmes Chevènement de 1986 : symétrie axiale en sixième, symétrie centrale en cinquième, ensuite les translations et les rotations[9]. Cette progression présente deux inconvénients, d'abord les transformations ainsi définies ne transforment pas les objets sur lesquels elles opèrent[10], ensuite elles sont, en ce qui concerne les translations et les rotations, le résultat d'un mouvement, ce qui exige de distinguer mouvement et transformation, distinction qui ne va pas de soi et que l'on ne saurait exiger d'un élève de collège. Ainsi, au nom de la modernité et du concret réunis, on introduit une notion difficile, et ce, pour éviter les classiques cas d'égalité des triangles renvoyés dans les poubelles de l'histoire de la géométrie. Il est vrai que les cas d'égalité, sous le nom de cas d'isométrie, ont été réintroduits en seconde, c'est-à-dire bien tard, alors qu'une progression cohérente eût été de parler de cas d'égalité des triangles au collège et d'aborder la question des relations entre mouvement et transformations au lycée devant des élèves qui ont acquis une première pratique géométrique.

[5] *ibid.*
[6] Nicolas Bourbaki, *Histoire des Mathématiques*, p. 174
[7] Jean Dieudonné, *The universal domination of geometry*
[8] Cette expression devenue classique renvoie à la question : *qui est "on" ?*
[9] Les derniers programmes ont supprimé translations et rotations, mais n'ont pas pour autant résolu la question.
[10] Dire que la longueur est un invariant est une tautologie et n'apprend rien.

Il faut signaler ici une incongruité des programmes, l'usage de l'expression "figures isométriques" plutôt que de parler de "figures égales", ce que l'on peut considérer comme un résidu de la réforme des mathématiques modernes[11]. Nous reviendrons plus loin sur cette incongruité.
Le second exemple qui constitue une lacune dans l'enseignement vient de l'absence de l'énoncé du postulat des parallèles. Comment, dans ces conditions, peut-on démontrer que la somme des angles d'un triangle vaut deux droits, comment peut-on démontrer les propriétés des angles inscrits et comment peut-on démonter que les deux définitions du parallélogramme :
1- un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles
2- un parallélogramme est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu.
sont équivalentes ?
C'est encore le postulat des parallèles qui permet de montrer la propriété suivante (composition des parallélogrammes) :

"*Si ABCD est un parallélogramme et si CDEF est un parallélogramme, alors ABFE est un parallélogramme*"

propriété qui est à la base de la notion de translation et du calcul vectoriel.
On sait aussi que c'est le postulat des parallèles qui permet de montrer le théorème de la droite des milieux et par conséquent le théorème de Thalès, tout au moins pour les rapports rationnels. En l'absence d'une théorie des nombres réels, on peut admettre, au collège et au lycée, que le théorème de Thalès, démontré pour les rapports rationnels, est encore vrai pour les rapports irrationnels, mais ce qui importe, dans l'enseignement de la géométrie élémentaire, c'est le lien avec le postulat des parallèles.
Il faudrait, pour être complet, parler de la similitude, du calcul des aires et de la géométrie analytique. Passer sous silence le postulat des parallèles revient ainsi à fausser l'enseignement de la géométrie élémentaire.

Quelques principes pour l'enseignement de la géométrie élémentaire

Après ces nécessaires critiques, nous proposons d'énoncer quelques principes d'enseignement de la géométrie qui préciseront les deux grands problématiques dont nous avons parlées.
Le premier principe s'appuie sur le caractère physique de la géométrie élémentaire[12]. On peut considérer la géométrie élémentaire comme l'étude des corps solides du point de vue de la grandeur et de la forme. Son premier objectif est donc de préciser les notions de grandeur et de forme et c'est le rôle des deux grandes problématiques rappelées ci-dessus.
Le second principe est le caractère hypothético-déductif de la géométrie, c'est-à-dire la possibilité de montrer, par le seul raisonnement, les vérités géométriques à partir de certaines d'entre elles considérées comme évidentes que l'on appelle les axiomes. Nous renvoyons à ce qu'écrit Legendre au début de ses *Eléments* de Géométrie :

"***Axiome*** *est une propriété évidente par elle-même.*
Théorème *est une vérité qui devient évidente au moyen d'un raisonnement appelé démonstration.*"[13]

Cette définition de l'axiomatique suppose d'abord l'existence d'objets géométriques, ces objets étant définis à partir des corps solides, ensuite l'énoncé de vérités premières que l'on appréhende par leur caractère d'évidence. Dans ce cadre, la démonstration a une triple fonction.

[11]Dans le cadre de la théorie des ensembles, deux objets sont égaux s'ils sont identiques.
[12]Rudolf Bkouche, "La géométrie élémentaire, une science physique ?"
[13]Adrien-Marie Legendre, *Eléments de Géométrie*, p. 4

D'abord elle permet la découverte de nouvelles vérités par le seul usage d'un discours convenablement réglé que constitue une démonstration. Ensuite le discours démonstratif permet de comprendre pourquoi une propriété est vraie, ce que l'on peut exprimer de façon imagée sous la forme suivante : *la démonstration ça sert à comprendre*. Ce dernier point fait apparaître un caractère essentiel des vérités ainsi obtenues, leur nécessité : non seulement la démonstration assure que les propriétés démontrées sont vraies, mais elle montre qu'elles ne peuvent pas ne pas être vraies. Enfin ces deux aspects, connaissance discursive et nécessité, conduisent à la question de l'universalité : la démonstration faite sur une situation particulière, la figure sur laquelle on travaille, reste vraie pour une autre figure dès que l'on peut tenir le même discours, c'est cette universalité liée au discours qui conduit à la notion d'idéalité mathématique. Dire que l'on raisonne, non sur la figure dessinée mais sur la figure idéale qu'elle représente, n'a aucun sens pour l'apprenti géomètre ; c'est le raisonnement discursif qui conduit à penser l'objet idéal et à redéfinir la figure dessinée comme représentant cet objet idéal[14]. C'est donc le raisonnement qui conduit à l'abstraction sans laquelle il n'est pas de science. Si on ne met pas l'accent sur la fonction de la démonstration, cette dernière apparaît comme un exercice de style propre aux mathématiciens et l'on comprend que les élèves s'en méfient et la refusent.
Nous n'aborderons pas ici le point de vue formaliste développé par Hilbert et ses successeurs ; les méthodes formalistes sont une réponse à ce que l'on a appelé la crise des fondements et ne prennent sens que pour qui a acquis une pratique mathématique et qui peut ainsi comprendre les raisons qui ont conduit à ces méthodes. Si les méthodes formalistes participent de la modernité mathématique, même si cette modernité ne se réduit pas aux seules méthodes formalistes, ces méthodes ne sauraient s'inscrire dans un premier enseignement des mathématiques. Nous rappelons le début du "mode d'emploi" qui accompagnait les premières éditions des *Eléments de Mathématiques* de Bourbaki :

" Le traité prend les mathématiques à leur début... Néanmoins, le traité est destiné plus particulièrement à des lecteurs possédant au moins une bonne connaissance des matières enseignées dans la première ou les deux premières années de l'Université."

phrase trop souvent oubliée par les promoteurs de la réforme des mathématiques modernes

Le rôle d'un enseignement scientifique n'est pas de raconter la modernité scientifique, c'est-à-dire "*la science qui se fait*", il consiste, en s'appuyant sur "*la science déjà faite*", de donner aux élèves les moyens de comprendre la modernité scientifique[15].

La problématique de l'égalité

"*Geometry is a physical science*" écrit Clifford dans son ouvrage, *the common sense of the exact sciences*[16].
En disant que la géométrie est une science physique, on rappelle que la géométrie a pour objet l'étude des corps et particulièrement de ceux qui ne changent pas de grandeur et de forme lorsqu'ils se meuvent, c'est-à-dire les *corps solides*.

---

[14]On peut considérer que c'est le caractère de toute science que de construire, à partir d'un ensemble de situations particulières des objets idéaux dont les situations particulières deviennent des représentants.
[15]L'opposition "*science qui se fait*" *vs* "*science déjà faite*" est un lieu commun du discours des réformateurs des années soixante du siècle dernier.
[16]William K. Clifford, *the commun sense of the exact sciences*, p. 43

L'un des premiers problèmes que pose la géométrie est alors celui de préciser la notion de "*même forme et même grandeur*" en explicitant des règles permettant d'affirmer que deux corps ont même forme et même grandeur. C'est l'objet du principe de l'égalité par superposition tel que l'énonce Euclide dans ses *Eléments*, principe que nous énoncerons sous la forme suivante :

"*Deux objets que l'on peut superposer sont égaux.*"

L'opération de superposition suppose le mouvement ; on voit ainsi le rôle du mouvement dans la mise en place de la géométrie[17]. Cependant l'énoncé même du principe de l'égalité par superposition marque les limites d'application de ce principe. En effet, si l'on peut montrer l'égalité de deux figures planes en les superposant (par exemple deux triangles ou deux quadrilatères), il est impossible de montrer l'égalité de deux cubes en bois en les superposant.
On voit ainsi apparaître la nécessité d'énoncer des critères pour que deux corps soient superposables, c'est-à-dire des conditions qui assureront que deux objets sont superposables sans qu'il soit besoin de réaliser matériellement l'opération. On peut voir dans l'explicitation de telles conditions le début de la géométrie rationnelle. Parmi ces critères, les classiques cas d'égalité des triangles. C'est en cela qu'ils ont leur place au début de l'enseignement de la géométrie élémentaire.
Les cas d'égalité ont un double rôle. D'une part, en éliminant tout recours au mouvement, ils permettent la mise en place d'un discours débarrassé de tout empirisme. D'autre part, ils montrent que si la superposition de deux triangles impliquent six égalités, égalité des côtés et égalité des angles, il suffit de trois d'entre elles convenablement choisies pour assurer les trois autres égalités et la superposition.
Les critiques des promoteurs de la réforme des mathématiques modernes à l'encontre de la géométrie élémentaire portaient sur le manque de rigueur des démonstrations des cas d'égalité des triangles, en particulier l'appel au mouvement. C'était oublier que, si l'usage de la superposition intervient effectivement dans la démonstration de la proposition 4 du livre I des *Eléments* d'Euclide (le premier cas d'égalité des triangles), c'est justement pour permettre de se passer ensuite de tout usage de la superposition. Par contre on peut reprocher à cette démonstration d'utiliser implicitement une réciproque du principe de superposition en ce qui concerne l'égalité des segments et des angles.
C'est pour éviter ces difficultés que Hilbert a énoncé les axiomes de congruence qui remplacent le recours au mouvement[18].
Hilbert définit d'abord la relation de congruence entre segments ce qui le conduit à énoncer l'axiome :

IV.1- *Si l'on désigne par A, B, deux points d'une droite a, et par A' un point de cette même droite ou bien d'une autre droite a', l'on pourra toujours, sur la droite a', d'un côté donné du point A', trouver UN POINT ET UN SEUL B' tel que le segment AB soit congruent au segment A'B', ce que l'on écrit :*

$$AB \equiv A'B'$$

Tout segment est congruent à lui-même.
Le segment AB est toujours congruent au segment BA.

[17]Sur le rôle du mouvement en géométrie nous renvoyons à l'ouvrage de Houël cité dans la bibliographie.
[18]David Hilbert, "Les principes fondamentaux de la géométrie" (traduit par A. Laugel), *Annales ENS*, 3e série, tome 17 (1900), p. 103-129

L'axiome IV.2 exprime que la relation de congruence est une relation d'équivalence.
Hilbert défini de même la relation de congruence entre les angles.

IV.6- *Dans deux triangles ABC et A'B'C', si les congruences*

$$AB \equiv A'B' \qquad AC \equiv A'C' \qquad \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

sont vérifiées, les congruences

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C' \quad \text{et} \quad \angle ACB \equiv \angle A'C'B'$$

le seront également.

On peut alors démontrer le premier cas d'égalité des triangles.
Si on veut conserver la caractère physique de la géométrie élémentaire, on peut introduire les déplacements que l'on peut considérer comme les effets du mouvement. Nous nous appuyons pour cela sur la distinction explicitée par Bricard :

"*On appelle déplacement toute opération qui fait passer un corps d'une position à une autre. Un déplacement résulte toujours, dans la pratique, d'un mouvement au cours duquel le corps occupe une série continue de positions, depuis la position initiale à la position finale… Un déplacement donné peut être réalisé par une infinité de mouvements différents entre eux, soit par leurs définitions géométriques, soit par leurs lois du temps*.[19]

Cette distinction ne va pas de soi et ce peut être l'un des objectifs du collège que d'amener les élèves à prendre conscience de cette distinction.
On peut alors énoncer les axiomes des déplacements[20].
On définit d'abord le déplacement d'une demi-droite sur une demi-droite de la façon suivante.
A tout couple de demi-droites (Ox,$O'x'$) on associe une application appelée *déplacement* de la première demi-droite sur la seconde qui envoie le point O sur le point O' et la demi-droite Ox dans la demi-droite $O'x'$. En particulier, au couple (Ox,Ox) on associe l'application identique.
On peut alors énoncer les axiomes définissant la composition et l'inverse, ainsi que des axiomes permettant de définir les déplacements d'une droite sur une autre.
Après avoir défini les déplacements de demi-droites, on définit les applications de drapeaux.
Un drapeau (Ox,Ω) est la donnée d'une demi-droite Ox et d'un demi-plan Ω bordé par la droite (Ox). A tout couple de drapeaux ((Ox,Ω), ($O'x'$,Ω')) on associe une application appelée déplacement qui induit le déplacement de Ox sur $O'x'$ et qui envoie le demi-plan Ω dans le demi-plan Ω'. En particulier au couple ((Ox,Ω), (Ox,Ω)) on associe l'application identique.
On peut alors énoncer les axiomes définissant la composition et l'inverse, ainsi que les axiomes permettant de définir les déplacements d'un plan sur un plan.
Les axiomes des déplacements étant énoncés, on définit l'égalité des segments et des angles.
Deux segments AB et $A'B'$ sont égaux si le déplacement qui envoie la demi-droite AB) sur la demi-droite $A'B'$) envoie le point B sur le point B'.
Deux angles xOy et $x'O'y'$ sont égaux si le déplacement qui envoie le drapeau (Ox,Ω) où Ω est le demi-plan bordé par la droite (Ox) et contenant la demi-droite Oy sur le drapeau ($O'x'$,Ω')

[19]Raoul Bricard, *Cinématique et mécanismes*, p. 1
[20]Cela sera précisé dans un ouvrage à paraître écrit en collaboration avec Boris Allard.

où Ω' est le demi-plan bordé par la droite ($O'x'$) et contenant la demi-droite $O'y'$ envoie la demi-droite Oy sur la demi-droite $O'y'$.
Les axiomes des déplacements impliquent les propriétés de l'égalité.
On peut alors développer la géométrie élémentaire et aboutir aux groupes d'isométries du plan et de l'espace. On peut aussi étudier les figures régulières, figues invariantes par certains sous-groupes d'isométries :polygones réguliers, polyèdres réguliers, pavages, cristaux.

une question de terminologie

Nous voulons revenir ici sur une question de terminologie, le terme "cas d'égalité" nous paraissant plus pertinent que le terme "cas d'isométrie". Le terme "isométrie" suppose défini la mesure des longueurs, or, non seulement les cas d'égalité des triangles sont indépendants de toute notion de mesure, mais, si on se place d'un point de vue métrologique, c'est la superposition qui permet de définir l'égalité des segments et des angles et par conséquent la mesure des longueurs et des angles.
Le terme "égalité" a disparu de l'enseignement de la géométrie élémentaire avec la réforme des mathématiques modernes, celle-ci s'appuyant sur le point de vue ensembliste. Du point de vue ensembliste, l'égalité n'est autre que l'identité. Cette notion ensembliste d'égalité est-elle pertinente en géométrie élémentaire ? Rappelons que le point de vue ensembliste, loin d'être élémentaire, ne prend sens qu'après une certaine pratique des mathématiques et que, enseigné trop tôt, il peut constituer un obstacle à l'enseignement des mathématiques et particulièrement à l'enseignement de la géométrie[21].
On pourrait, il est vrai, remplacer le terme "égalité" de la géométrie élémentaire par un terme plus adéquat, soit celui de "superposabilité" soit celui de "congruence". Mais il ne semble pas utile de changer une terminologie classique lorsque son usage n'implique pas de difficultés spécifiques. La polysémie du terme "égalité", comme toute polysémie, n'empêche pas de comprendre ce terme dans un contexte bien défini. On peut par contre remarquer qu'un texte qui se veut monosémique est souvent plus difficile à lire comme le montrent par exemple les *Eléments de Mathématiques* de Bourbaki.

La problématique de la forme

On peut dire que deux figures sont semblables si elles ont même forme ; on renvoie ainsi à la notion intuitive de forme et la question se pose de préciser la notion de "même forme". C'est l'objet de la théorie des figures semblables que l'on trouve au livre VI des *Eléments* d'Euclide.

"*Les figures semblables sont celles qui ont les angles égaux chacun à chacun, et dont les côtés autour des angles égaux sont proportionnels.*"[22]

Cette définition met en jeu des relations entre longueurs (la proportionnalité) et des égalité d'angles. Ici encore se pose la question de critères de similitude : dans le cas des triangles, ce sont les classiques cas de similitude. On peut alors montrer que, deux triangles ABC et A'B'C' étant donnés, les assertions suivantes sont équivalentes :

a) Les côtés AB, BC, CA sont proportionnels aux côtés $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$.
b) Les angles BAC, ACB, CBA sont respectivement égaux aux angles $B'A'C'$, $A'C'B'$, $C'B'A'$.

---

[21]Une figure n'est pas un ensemble de points, elle est constituée de points, de lignes et de surfaces. Rappelons qu'au début du XX^e siècle, on distinguait une droite et l'ensemble de ses points.
[22]*Les Œuvres d'Euclide*, o.c. Livre VI, définition 1

On voit ici apparaître une équivalence entre des relations de proportionnalité et des égalités d'angles, c'est un point fondamental de la théorie de la similitude.
Notons que la définition de la similitude donnée ci-dessus est purement relationnelle et ne fait pas appel à la notion de transformation. On peut mettre cela en parallèle avec la notion d'égalité ; si cette dernière fait appel au mouvement *via* la superposition, elle n'utilise pas la notion de transformation et les cas d'égalité font ressortir cet aspect relationnel.
Une fois définie la similitude, la question se pose de la construction effective de triangles semblables non égaux, construction assurée pas une transformation simple, l'homothétie. Celle-ci joue ainsi un rôle essentiel dans la théorie des figures semblables.
La mise en place de l'homothétie s'appuie sur le théorème des lignes proportionnelles (le théorème de Thalès[23]) et ce théorème s'appuie sur le postulat des parallèles.
On peut ensuite définir les similitudes comme transformations en remarquant que les assertions suivantes sont équivalentes :
a) la transformation f conserve l'alignement et le rapport de segments.
b) la transformation f conserve l'alignement et les angles.
On peut alors définir une similitude comme une transformation qui satisfait les propriétés a et b et étudier les groupe des similitudes.

Transformations et invariants

Avec le *Programme d'Erlangen*, Felix Klein a systématisé les relations entre géométrie, théorie des groupes et théorie des invariants.
La relation entre transformations et invariants est ancienne et on peut en trouver l'une des premières formulations dans le *Brouillon Project d'une atteinte aux événemens des rencontres du cône avec un plan* de Desargues[24]. Notons que la notion d'invariant devenue aujourd'hui une notion fondamentale n'est devenue explicite que lorsque l'on a mis en évidence des invariants non triviaux.
Dire que le mouvement conserve les longueurs est une banalité qui ne prend sa pleine signification que dans un contexte plus large ; plus intéressant est de remarquer que la transformation de similitude conserve les rapports de longueurs et les angles. Mais la notion d'invariant prend son importance dans les transformations qui transforment, c'est-à-dire qui modifient la forme.
Parmi les transformations qui transforment, la perspective a joué un rôle important comme le montrent les travaux de Desargues et de ses disciples. C'est en remarquant que la perspective peut échanger familles de droites parallèles et familles de droites concourantes que Desargues a défini un point à l'infini comme le point commun à une famille de droites parallèles et considéré un tel point comme un point ordinaire. Mais plus intéressant est le fait qu'une projection transforme six points en involution en six points en involution[25]. Aujourd'hui, on dirait plutôt qu'une projection conserve le birapport (le rapport anharmonique de Chasles)[26] ; ainsi le birapport défini comme rapport de rapports de longueurs, et par conséquent défini en termes métriques, est ce que l'on appelle un invariant projectif.
Il faut voir dans cette découverte des invariants métriques projectifs[27] un point essentiel de l'histoire de la géométrie projective. C'est la découverte d'invariants là où on ne les attendait

---

[23]La dénomination "théorème de Thalès" est récente (les années quatre-vingts du XIX^e^ siècle)
[24]Girard Desargues, "Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres du cône avec un plan" (1639) in René Taton, *L'Oeuvre mathématique de G. Desargues*, PUF, Paris 1959, rééditions : Vrin, Paris 1981, Vrin-Institut Interdisciplinaire d'Etudes Epistémologiques, Paris-Lyon 1988.
[25]Sur la notion d'involution, nous renvoyons au mémoire cité de Desargues.
[26]Sur la notion de birapport nous renvoyons à l'*Aperçu historique* de Chasles, p. 302
[27]Jean-Victor Poncelet, *Traité des Propriétés Projectives des Figures*, volume 1, p. 5-12

pas qui a permis de donner toute sa richesse à la notion. Plus tard les géomètres chercheront une définition purement projective de ces invariants métriques projectifs, mais ce n'est pas ici le lieu de développer ces travaux[28]. Disons seulement que l'étude des invariants projectifs conduit à une première approche de la géométrie projective. C'est dans ce cadre que l'on peut aborder le *Programme d'Erlangen* de Klein déjà cité et préciser le lien entre la géométrie élémentaire (métrique) et la géométrie projective, une fois montré que les isométries et les similitudes sont des transformations projectives particulières, ce qui permet un nouveau regard sur la notion d'invariant[29]. Enfin, pour être complet, il faudrait parler des coniques définies comme projection de cercles, ceux-ci apparaissant alors comme des coniques particulières.

Autre transformation qui change la forme, l'inversion. Ici encore on peut mettre en évidence des invariants simples, d'abord le cercle, ce qui demande de considérer la droite comme un cercle particulier, ensuite l'angle de deux courbes. Une fois l'inversion définie, on peut définir le groupe des transformations circulaires sur le plan augmenté d'un point ou sur la sphère, plan et sphère étant reliés par la projection stéréographique ce qui conduit à la géométrie anallagmatique que l'on peut relier à l'étude des nombres complexes.

Nous terminerons ce paragraphe par deux remarques.

Il n'est pas besoin de faire une théorie générale des groupes pour introduire la notion de groupe de transformations. On démontre alors les propriétés dont on a besoin *in situ*, quitte à mettre l'accent sur les analogies de raisonnement qui permettent de dégager la notion générale de groupe lorsque cela sera nécessaire.

Toute classification se définit dans un contexte. La géométrie projective conduit à distinguer les droites et les coniques, un cercle apparaissant comme une conique particulière. Par contre la géométrie anallagmatique conduit à placer droites et cercles dans une même famille. La raison de cette distinction est liée au groupe structural de la géométrie. Une question analogue se pose avec l'introduction des points à l'infini. En géométrie projective on ajoute un point à l'infini à la droite, une droite à l'infini au plan, alors qu'en géométrie anallagmatique on ajoute un point à l'infini au plan. On peut comprendre ici l'apport du point de vue structural.

Linéarisation de la géométrie

La géométrie élémentaire peut-être définie, sur le plan structural, comme un chapitre de l'algèbre linéaire, et de façon précise comme l'étude d'un espace affine euclidien de dimension 3 sur le corps des réels. La géométrie élémentaire fait l'objet du paragraphe 10 du chapitre IX du Livre II des *Eléments de Mathématiques* de Bourbaki et on retrouve les grands résultats de la géométrie élémentaire dans les exercices qui suivent ce paragraphe[30]. On retrouve encore cette conception dans l'ouvrage de Jean Dieudonné, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* ou dans le beau livre de Michèle Audin, *Géométrie*, à l'usage des étudiants préparant les concours d'enseignement.

La question se pose alors de la relation entre cette conception structurale et la tradition géométrique issue des *Eléments* d'Euclide. Cette question est loin d'être facile comme on peut le voir lorsque l'on demande à des étudiants préparant les concours d'enseignement de comparer ces deux sommes de la géométrie publiées aux deux bouts du XX^e siècle, les *Leçons de Géométrie Elémentaire* de Hadamard et l'ouvrage de Marcel Berger intitulé *Géométrie*. On y retrouve les mêmes termes et les mêmes théorèmes, mais les définitions des termes et les dé-

---

[28]Nous renvoyons ici aux travaux de Von Staudt et aux articles de Fano-Carrus et de Schœnflies-Tresse dans l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques*.

[29]On peut noter ici que le *Programme d'Erlangen* introduit un point de vue structural en géométrie, point de vue indépendant du point de vue formaliste.

[30]Nicolas Bourbaki, *Formes sesquilinéaires et formes quadratiques*

monstrations des théorèmes sont différentes même si on y retrouve les mêmes figures. La question est moins de définir quelle est la "bonne" géométrie à enseigner que de comprendre le rapport entre ces deux ouvrages, en quoi ils se ressemblent et en quoi ils diffèrent.
Dans la préface de l'ouvrage *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* cité ci-dessus, Dieudonné explique que l'algèbre linéaire est devenue la "*voie royale*" pour étudier lé géométrie élémentaire, mais la question est moins celle d'une voie royale qui s'est mise en place à la fin du XIX[e] siècle que celle de comprendre en quoi l'algèbre linaire constitue une voie royale, autrement dit de savoir transformer un problème de géométrie à un problème d'algèbre linéaire.
Il nous faut pour cela revenir sur les deux grands moments de cette linéarisation que sont la géométrie analytique d'abord et le calcul vectoriel ensuite[31].
La géométrie dite analytique peut être définie comme une mise en calcul de la géométrie élémentaire, c'est ainsi qu'elle apparaît dans les textes fondateurs de Descartes et de Fermat. Si pour ces derniers, ce calcul porte sur les longueurs[32], le développement des méthodes analytiques sera marqué par la numérisation des coordonnées et conduira à une opposition entre les méthodes analytiques et les méthodes dites synthétiques[33]. On peut lire cette opposition dans un article de Fano-Carrus publié dans l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques*[34] :

"Nous pouvons tout d'abord concevoir la géométrie comme une science autonome, née de considérations d'espace. Elle se sert de notions fondamentales (point, ligne droite, etc.) et s'appuie sur une série de propositions ou ***postulats*** *tirés de notre perception mais soumis ensuite à une abstraction qui a aussi pour effet de leur donner une forme plus précise. Partant de là, on arrive par déduction à des résultats abstraits, applicables au monde physique ..."*

alors que la géométrie analytique est définie comme une reformulation de notions numériques permettant d'établir *"une théorie de l'espace analytique qui s'identifie avec la géométrie, sans que l'on soit obligé de faire appel à l'examen des figures ou à des notions et opérations géométriques"* .
Rappelons que la géométrie analytique a été critiquée, par Leibniz d'abord qui prônait un calcul géométrique[35], puis par les géomètres projectifs au XIX[e] siècle. Nous pourrions citer cette phrase de Poinsot qui étudie "géométriquement" des questions de mouvement déjà étudiées analytiquement par Euler et D'Alembert et qui écrit au début de son article :

"Nous voilà donc conduits par le seul raisonnement à une idée claire que les géomètres n'ont pu tirer des formules de l'analyse. C'est un nouvel exemple qui montre l'avantage de cette méthode simple et naturelle de considérer les choses en elles-mêmes, et sans les perdre de vue dans le cours du raisonnement."

C'est cependant la numérisation de la géométrie qui a permis de mettre en évidence le lien avec les systèmes d'équations linéaires *via* deux types de problèmes, d'une part la détermination des intersections de droites et de plans, d'autre part la détermination de l'équation d'une courbe satisfaisant à des conditions données.

---

[31]Il peut être utile de rappeler le rôle du postulat des parallèles dans la mise en place de la géométrie analytique et du calcul vectoriel.
[32]L'algébrisation de la géométrie proposée par Descartes et Fermat est un calcul sur les grandeurs.
[33]On peut considérer le terme "synthétique" comme une façon de s'opposer au terme "analytique".
[34]Fano-Carrus, "Exposé parallèle du développement de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique pendant le XIX[e] siècle"
[35]G.W. Leibniz, *La caractéristique géométrique*

Le calcul vectoriel qui s'est développé au XIXe siècle apparaît, par contre,0 comme la mise en place du calcul géométrique espéré par Leibniz. Dans son ouvrage sur l'histoire du calcul vectoriel, Crowe énonce trois grandes idées qui ont conduit au calcul vectoriel, le parallélogramme des forces, le calcul géométrique de Leibniz et la représentation géométrique des nombres complexes. Si les deux dernières idées participent de la mise en place d'un calcul portant directement sur les objets géométriques (c'est ainsi que l'on peut comprendre la représentation géométrique des nombres complexes, moins comme une représentation géométrique d'objets numériques que comme un calcul portant sur les objets géométriques eux-mêmes[36]), la première renvoie à la signification physique, plus précisément mécanique, du calcul vectoriel. Les vecteurs sont alors une façon de représenter des concepts mécaniques (les forces et les vitesses), un vecteur permettant de "mesurer" les grandeurs correspondantes de la même façon que les nombres permettent de mesurer les grandeurs scalaires (les longueurs, les temps…).
On distingue ainsi les grandeurs scalaires, une telle grandeur étant déterminée, une fois choisie l'unité de mesure, par le nombre qui la mesure et les grandeurs orientées qui, pour être déterminées, exigent des informations supplémentaires. On voit ainsi se dessiner une problématique des grandeurs orientées qui s'inscrit autant dans la géométrie que dans la mécanique et qui se propose la mise en place d'un calcul sur ces grandeurs, le calcul vectoriel. Le calcul vectoriel, en tant qu'il est un calcul sur les grandeurs orientées, se situe ainsi au carrefour de la géométrie et de la mécanique et c'est un point qui doit apparaître dans l'enseignement. Il s'agit moins d'appliquer le calcul vectoriel à la mécanique et plus généralement à la physique que de montrer comment s'établissent des liens entre diverses disciplines.
On peut alors noter la différence entre le calcul vectoriel qui s'inscrit dans un calcul portant sur des objets géométriques ou mécanique spécifiques et l'algèbre linéaire, laquelle participe d'un calcul sur les signes, indépendamment de toute signification de ces signes. En ce sens le calcul vectoriel ne se réduit pas à l'algèbre linéaire même si, sur le plan formel, il peut n'apparaître que comme une partie d'icelle. On peut noter que le terme *espace vectoriel* né de la rencontre du calcul vectoriel et du calcul linéaire est moins la réduction du calcul vectoriel à l'algèbre linéaire qu'une heureuse métaphore ouvrant vers de nouvelles manières de penser les situations linéaires, d'autant plus heureuse qu'elle a permis un regard géométrique sur d'autres domaines tels par exemple l'analyse mathématique[37] ou le calcul des probabilités.
Il reste à dire comment le calcul linéaire et le calcul vectoriel se sont rencontrés ; nous nous contenterons, dans le cadre de cet article, de citer deux ouvrages, *Calcolo Geometrico* de Giuseppe Peano et *Space, Time, Matter* de Hermann Weyl, dans lequel on peut lire d'une part une définition générale des espaces vectoriels, appelés "espaces linéaires" par Peano, et d'autre part comment la géométrie se construit dans ce contexte.

Modernité de la géométrie élémentaire

Dans l'un de ses ouvrages le philosophe Leszek Kolakowski écrivait :

"Il est plus aisé de suivre dans l'histoire les sauts accomplis dans les sciences empiriques et dans les humanités que de répondre à la toute simple question: comment se fait-il que Galilée et Newton ont laissé sur le carreau d'un massacre épistémologique la physique aristotélicienne alors que les démonstrations d'Euclide, elles, gardent toute leur validité? "[38]

---

[36]C'est la recherche d'un tel calcul pour l'espace qui a conduit Hamilton à inventer les quaternions.
[37]Il nous faut rappeler ici le rôle qu'a joué l'analyse dans la genèse de l'algèbre linéaire; cf. Jean Dieudonné, *History of functionnal analysis*.
[38]Leszek Kolakowski, *Horreur métaphysique*, p. 13

Cette question est loin d'être anecdotique et ce fut l'un des arguments des promoteurs de la réforme des mathématiques modernes que de s'appuyer sur le caractère obsolète de la physique aristotélicienne pour affirmer le caractère obsolète de la géométrie d'Euclide. Pour aborder cette question nous reviendrons sur les objectifs de l'enseignement de la géométrie.
Nous avons dit ailleurs que le rôle de l'enseignement scientifique est moins d'enseigner la modernité que d'en donner les clés[39]. Cette volonté de modernité fut l'une des causes de l'échec de la réforme des mathématiques modernes. La modernité scientifique est loin d'être transparente et sa compréhension s'appuie sur la science antérieure. On est loin de l'opposition "science qui se fait *vs* science déjà faite" qui a marqué l'idéologie des promoteurs de la réforme des mathématiques modernes, au contraire, c'est en s'appuyant sur ce que l'on sait que l'on peut appréhender des savoirs nouveaux.
Mais il faut aussi rappeler que l'enseignement scientifique doit permettre à celui qui le reçoit de construire son propre rapport au monde et celui-ci ne relève pas de la seule modernité[40], ainsi la géométrie élémentaire dans la mesure où elle définit le rapport aux objets de l'espace est toujours actuelle à la fois dans son contenu et dans ses méthodes, même si au long de l'histoire contenus et méthodes se sont transformés. On pourrait ajouter que c'est *via* les deux problématiques originelles que l'on peut comprendre ces transformations.
Cela nous conduit à définir trois objectifs de l'enseignement de la géométrie élémentaire, d'abord l'étude des corps solides du point de vue de la grandeur et de la forme, étude qui constitue le socle de la connaissance géométrique, ensuite l'étude des relations de la géométrie élémentaire avec d'autres domaines de la connaissance, ainsi l'astronomie, la géodésie ou la mécanique, enfin la géométrisation, c'est-à-dire l'intervention de la géométrie comme langage universel et comme métaphore, dans divers domaines de la connaissance, soit à l'intérieur des mathématiques comme l'usage de la notion d'espace en analyse ou en calcul des probabilités, soit dans les divers domaines de la physique. Il faut alors remarquer que la géométrisation ne peut être comprise et ainsi fournir de nouvelles formes d'intuition que si on connaît la géométrie élémentaire. Sans cette connaissance, on ne peut appréhender ce que Dieudonné appelle la "*domination universelle de la géométrie*" que comme un simple jeu de langage. Lorsque Bourbaki écrit, dans le chapitre sur l'histoire de la géométrie élémentaire :

"*Dépassée en tant que science autonome et vivante, la géométrie classique s'est ainsi transfigurée en un langage universel de la mathématique contemporaine, d'une souplesse et d'une commodité incomparables*."[41]

il oublie de dire qu'il y a plus qu'un langage au sens que ce langage est créateur d'intuition et que c'est cela qui fait sa richesse. Nous pourrions citer comme exemple l'article de Riemann "Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie" que l'on peut lire comme un élargissement de l'intuition spatiale, ou encore la vision géométrique des espaces de fonctions de l'analyse fonctionnelle moderne. Mais ce n'est pas ici le lieu de développer la géométrisation, encore que certains aspects de cette géométrisation puissent être étudiés dès le collège.

Quelques remarques didactiques

L'objectif de ce texte n'est pas d'écrire un programme d'enseignement de la géométrie pour l'enseignement secondaire mais d'expliciter quelques éléments pour élaborer un tel programme. Un tel programme doit reprendre les trois objectifs définis ci-dessus.

---

[39] Rudolf Bkouche, "Quelques remarques à propos de l'enseignement de la géométrie"
[40] Lorsque nous parlons de modernité, nous prenons ce terme dans son sens chronologique, débarrassant l'usage de ce terme de ses oripeaux idéologiques.
[41] Nicolas Bourbaki, *Eléments d'histoire des mathématiques*, p. 174

Comme nous l'avons dit, le premier objectif reste toujours actuel et ne saurait être éliminé de l'enseignement.
Le second objectif prolonge le premier. Les relations de la géométrie élémentaire avec la mécanique, la géodésie ou l'astronomie ne se réduisent pas à l'application de la géométrie à ces domaines mais sont au cœur de la géométrie. Cela implique que ces relations, loin d'être renvoyées à un interdisciplinaire quelque peu magique, apparaissent dans le cours de géométrie lui-même. Rappelons que nombre de traités d'enseignement de la géométrie élémentaire contiennent des chapitres sur la topographie et la géodésie, ainsi les *Leçons de Géométrie Elémentaire* de Jacques Hadamard. Nous avons déjà dit que le calcul vectoriel relève de la géométrie et de la mécanique et cela doit apparaître à la fois dans le cours de mathématiques et dans le cours de physique. Il faut alors parler de grandeurs orientées, en particulier des forces, ce qui permet ensuite de relier l'étude des barycentres aux problèmes d'équilibre.
De même qu'il n'est pas besoin de faire un exposé général de théorie des groupes pour étudier quelques groupes de transformations géométriques, il n'est pas besoin de s'appuyer sur un cours d'algèbre linéaire pour mettre en avant les aspects linéaires de la géométrie analytique ou du calcul vectoriel.
Reste la question de la géométrisation.
Il n'est pas question dans le cadre de cet article de développer la question de la géométrisation dans sa généralité. Nous nous bornerons à rappeler quelques questions classiques que l'on peut aborder dans l'enseignement secondaire.
Nous avons déjà rappelé que l'invention de la géométrie analytique s'inscrivait à la fois dans l'algébrisation de la géométrie et dans la géométrisation de la théorie des équations. C'est, à un niveau relativement élémentaire, une première approche de l'unité des mathématiques.
Second lieu d'intervention de la géométrisation, la représentation graphique des fonctions, représentation qui permet une approche globale de la fonction. Ici il faut préciser que la géométrisation ne se réduit pas à interpréter une courbe comme la représentation d'une fonction mais à expliciter comment une fonction peut être représentée par une courbe, ce qui suppose que les élèves aient construit "à la main" des représentations graphiques de fonction[42]. Si on définit une fonction comme une règle de calcul qui associe à toute valeur de la variable dépendante la valeur de la variable dépendante, la représentation graphique permet une approche globale de la fonction étudiée, la question est alors de comprendre le lien entre la définition calculatoire de la fonction et la courbe qui la représente ; cela exige deux démarches complémentaires, lire les propriétés de la fonction sur le dessin de la courbe représentative, construire la courbe représentative à partir de la fonction.
Nous n'avons repris ici que des exemples classiques. On peut citer quelques autres exemples plus sophistiqués qui mettent en valeur la charge intuitive de la géométrisation. Nous nous contenterons de citer le calcul des probabilités.
Si on introduit la notion de variable aléatoire sur un espace de probabilité, on peut définir sur l'ensemble des variables aléatoires une structure d'espace vectoriel, la notion de valeur moyenne comme forme linéaire et les notions d'écart quadratique moyen et de covariance[43], on peut alors considérer la covariance comme produit scalaire et relier la notion d'indépendance et l'orthogonalité.

Conclusion

---

[42]Le point de vue ensembliste n'est pas nécessaire pour définir la représentation graphique d'une fonction. On peut, au contraire, considérer que c'est la représentation graphique qui permet de comprendre le point de vue ensembliste, celui-ci étant appréhendé *via* la géométrisation.
[43]Point n'est besoin d'un cours d'algèbre linéaire préalable pour définir ces notions.

Les remarques ci-dessus montre l'importance d'un regard scientifique sur les disciplines que l'on enseigne. Mais cela exige de se débarrasser de l'idéologie de la centralité de l'élève, que cette centralité s'exprime à travers ce que l'on peut appeler les idéologies savantes ou les idéologies moralisantes[44]. Nous ne reviendrons pas sur les idéologies moralisantes qui ont contribué, en mettant l'instruction au second rang, à remettre en cause l'idéal de démocratisation de l'enseignement. Par contre nous reviendrons sur les idéologies savantes qui, *via* les théories de l'apprentissage et la didactique, ont contribué à substituer aux obstacles épistémologiques auxquels se heurte tout apprentissage ce que l'on peut appeler des obstacles didactiques qui renvoient moins aux difficultés rencontrées par les élèves confrontés aux savoirs qu'ils étudient qu'aux difficultés rencontrées par ceux qui espèrent construire une théorie scientifique de l'apprentissage. On retrouve ici un problème essentiel des sciences de l'homme, celui de l'objectivation du phénomène humain. Si ce n'est pas ici le lieu de discuter de l'épistémologie des sciences de l'homme, rappelons que, en substituant à la question des obstacles des contenus de savoir enseignés, les questions posées par les théories de l'apprentissage ou par la didactique, on prend le risque de passer à côté des difficultés rencontrées par les élèves pour fabriquer des artefacts qui peuvent s'opposer à l'apprentissage. En attendant un article ultérieur sur le sujet, nous renvoyons à un article ancien sur la transposition didactique[45].

Bibliographie

Michelle AUDIN, *Géométrie*, "De la licence à l'agrégation", Belin, Paris 1999

Marcel BERGER, *Géométrie* (5 volumes), CEDIC-Nathan, Paris 1977

Rudolf BKOUCHE, "L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique" *Repères-IREM* n°9, octobre 1992, p. 5-12

Rudolf BKOUCHE, "La place de la géométrie dans l'enseignement des mathématiques en France, de la réforme de 1902 à la réforme des mathématiques modernes", in *Les Sciences au Lycée*, sous la direction de Bruno Belhoste, Hélène Gispert et Nicole Hulin, Vuibert, Paris 1996

Rudolf BKOUCHE, "Quelques remarques à propos de l'enseignement de la géométrie", *Repères-IREM* n°26, janvier 1997, p. 49-71

Rudolf BKOUCHE, "De la transposition didactique", *Didactiques* n°4, IREM de Lorraine

Rudolf BKOUCHE, La géométrie élémentaire, une science physique ?" in *Enseigner la Géométrie dans le Secondaire*, Commission Inter-IREM Géométrie (Liège 2003), IREM de Reims 2004

Rudolf BKOUCHE, "Du caractère expérimental des mathématiques (à propos des laboratoires de mathématiques)", *Repères-IREM*, n°70, janvier 2008, p. 33-76

Nicolas BOURBAKI, *Algèbre,* chapitre IX, "Formes sesquilinéaires et formes quadratiques", Hermann, Paris

Nicolas BOURBAKI, *Eléments d'Histoire des Mathématiques*, nouvelle édition augmentée, Hermann, Paris 1974

Raoul BRICARD, *Cinématique et Mécanismes*, cinquième édition, Collection Armand Colin, Armand Colin, Paris 1947

Michel CHASLES, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (Bruxelles, 1837), réédition Jacques Gabay, Paris, 1989

William K. CLIFFORD, *the common sense of the exact sciences*, edited, and with a preface, by Karl Pearson, newly edited, with an introduction, by James R. Newman, preface by Bertrand Russell, Dover Publication, New York 1955

[44] Rudolf Bkouche, "L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique"

[45] Rudolf Bkouche, "De la transposition didactique"

Michael J. CROWE, *A History of Vector Analysis* (1967), Dover Publ. New York 1985
Robert DELTHEIL & Daniel CAIRE, *Géométrie et Compléments* (...), Editions Jacques Gabay, Paris 1989
Jean DIEUDONNE, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, "Enseignement des sciences", Hermann, Paris 1964
Jean DIEUDONNE, *The universal domination of geometry*, International Congress of Mathematical Education IV, Berkeley 1980
Jean DIEUDONNE, *History of functionnal analysis*, North-Holland Publications, Amsterdam 1981
EUCLIDE, *Les Œuvres d'Euclide*, traduites littéralement par F. Peyrard 1819), nouveau tirage augmenté d'une importante introduction par Jean Itard, Blanchard, Paris 1993
G. FANO, S. CARRUS, "Exposé parallèle du développement de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique pendant le XIX^e siècle" in *Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées*, édition française rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules Molk, réédition Jacques Gabay, Paris 1991, tome III, premier volume, p. 185-259
Jacques HADAMARD, Leçons de géométrie élémentaire (2 volumes), Armand Colin, Paris 1898, plusieurs rééditions
David HILBERT, "Les principes fondamentaux de la géométrie" (traduit pas A. Laugel), *Annales ENS*, 3^e série, tome 17 (1900), p. 103-129
Jules HOUËL, *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire*, Gauthier-Villars, Paris 1867
Felix KLEIN, *Le Programme d'Erlangen* (considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes) (1872), traduction de M.H. Padé, préface de J. Dieudonné, postface du P. François Russo s.j., Collection "Discours de la Méthode", Gauthier-Villars, Paris 1974
Leszek KOLAKOWSKI, *Horreur métaphysique* (traduit de l'anglais par Michel Barat), Payot, Paris 1989
Adrien-Marie LEGENDRE, *Eléments de Géométrie*, douzième édition, Firmin Didot, Paris 1823
G.W. LEIBNIZ, *La caractéristique géométrique* (1677-1685), Texte établi, introduit et annoté par Javier Echeverria, traduit, annoté et postfacé par Marc Parmentier, Collection "Mathesis", Vrin, Paris 1995
Giuseppe PEANO, *Calcolo Geometrico* (secondo l'*Ausdehnunglehrer* di H. Grassmann), Fratelli Bocca Editori, Torino 1888
Louis POINSOT, "Une nouvelle théorie de la rotation des corps" *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome XVI, 1851, p. 9-72, 73-129, 289-336
Jean-Victor PONCELET, *Traité des Propriétés Projectives des Figures* (2 tomes), deuxième édition, Gauthier-Villars, Paris 1824/1865-1866
Bernhart RIEMANN, "Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie", traduction Jules Houël, in *Oeuvres Mathématiques*, Blanchard, Paris 1968, réédition Gabay, Paris 1989
A. SCHŒNFLIES, A. TRESSE, "Géométrie projective", in *Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées*, édition française rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules Molk, réédition Jacques Gabay, Paris 1992, tome III, deuxième volume, p. 1-143
René TATON, *L'Œuvre mathématique de G. Desargues*, PUF, Paris 1959, rééditions : Vrin, Paris 1981, Vrin-Institut Interdisciplinaire d'Etudes Epistémologiques, Paris-Lyon 1988.
Hermann WEYL, *Space, Time, Matter* (1918), translated from the German by Henry L. Brose, Dover 1952